



Колдоба А.В., [Колдоба Е.В.](#)

Гиперболичность уравнений
изотермической
многофазной
многокомпонентной
фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колдоба А.В., Колдоба Е.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной многокомпонентной фильтрации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 77. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-77>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША

А.В.Колдоба, Е.В. Колдоба

ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ УРАВНЕНИЙ
ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МНОГОФАЗНОЙ
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ.

Колдоба А.В., Колдоба Е.В.

**Гиперболичность уравнений изотермической
многофазной многокомпонентной фильтрации.**

Аннотация

Исследованы гиперболические качества уравнений изотермической многофазной многокомпонентной фильтрации. Показано, что квазилинейная форма этих уравнений может быть представлена в симметризованном виде. Скорости распространения слабых разрывов концентраций и насыщенных суть решения задачи на собственные значения, которая расщепляется на термодинамическую и гидродинамическую подзадачи. Указаны условия, при выполнении которых задача имеет полный набор собственных чисел. Отдельно рассмотрен случай фильтрации квазиидеальных смесей.

Работа выполнена при финансовой поддержке НШ-5214.2008.2.

A.V.Koldoba, E.V.Koldoba

**The hyperbolicity of equations of an isothermal
multi-phase compositional filtration.**

Abstract

Hyperbolic properties of equations of isothermal multi-phase compositional filtration were investigated. It was shown that quasi-linear form of these equations may be presented in symmetric form. Propagation velocities of weak discontinuities of concentrations and saturations are solutions of eigenvalue problem, which is decomposed on thermodynamical and hydrodynamical subproblems. Conditions which guarantee full set of eigenvalues for this problem was formulated. The filtration of quasi-ideal mixtures was considered.

Содержание

1	Введение	3
2	Уравнения многофазной многокомпонентной фильтрации.	6
3	Термодинамика квазиидеальных смесей.	8
4	Фильтрация квазиидеальных несжимаемых смесей.	12
5	Модель Баклея–Левретта	13
6	Квазилинейная форма уравнений фильтрации.	15
7	Гиперболичность уравнений многокомпонентной	16

1 Введение

Настоящая работа посвящена исследованию математической модели изотермической многокомпонентной многофазной фильтрации. Рассматривается модель, которая широко используется для решения задач прогнозирования разработки нефте- и газосодержащих пластов [1, 8, 11, 13]. Принимается, что течение является изотермическим и достаточно медленным, чтобы успело установиться локальное фазовое равновесие. Кроме того, считается, что для скорости фильтрации каждой фазы выполнен закон Дарси, а относительные фазовые проницаемости зависят только от текущих значений объёмных насыщенных фаз. В рамках этой модели многокомпонентная многофазная изотермическая фильтрация описывается системой нелинейных уравнений в частных производных, для решений которой характерно присутствие сильных и слабых разрывов концентраций компонентов и фазовых насыщенных. В этом смысле можно говорить о "гиперболических" качествах этих уравнений.

Основной вопрос, изучаемый в настоящей работе, состоит в следующем: какую информацию о свойствах модели изотермической многокомпонентной фильтрации можно получить, опираясь на общие термодинамические соотношения, имеющее место для гетерогенных систем. Более конкретно, будут рассматриваться "гиперболические" качества системы уравнений изотермической многокомпонентной фильтрации. Надежду на результативность такой постановки вопроса дает теорема Мока [15], сформулированная для систем первого порядка, обладающих дополнительным балансным соотношением. Применительно к рассматриваемой здесь модели, выражающей законы сохранения количеств каждого из компонентов, участвующих в фильтрации, таким дополнительным соотношением является уравнение баланса свободной энергии [6, 7]. В отличие от теории Мока, уравнения сохранения для компонентов не образуют систему первого порядка. В частности по этой причине система не является гиперболической. Тем не менее она обладает некоторыми "гиперболическими" качествами, которые проявляются в конечной скорости распространения возмущений концентрации компонентов и фазовых насыщенных.

Указанная постановка вопроса и предопределила выбор дополнительных предположений конкретизирующих модель изотермической многокомпонентной фильтрации. Как известно, на "микроуровне", т.е. на пространственных масштабах, сравнимых с размером пор, основное влияние на динамику флюидов оказывают капиллярные силы. В моделях, описывающих фильтрационные течения на "макроуровне", эти локальные процессы учитываются (как

Эти величины определяются как геометрией порового пространства, так и интенсивностью поверхностного взаимодействия фаз между собой и скелетом. Степень межфазного взаимодействия обычно характеризуется коэффициентами поверхностного натяжения и краевыми углами смачивания. Очевидно, что так как эти величины зависят давления и состава фаз, то и капиллярный скачок давления и относительные фазовые проницаемости зависят от локального термодинамического состояния смеси в поровом пространстве. Кроме того, эти величины зависят от предыстории процесса, и, более того, от динамики процесса, приводящего к изменению фазовых насыщенныхностей. Ясно, что процесс вытеснения одной фазой другой и процесс выделения новой фазы (за счет, например, "сброса" давления) приводят к различным распределениям фаз по объёму порового пространства и соответственно разным относительным фазовым проницаемостям при одинаковых насыщенныхностях. В рассматриваемой здесь модели эти эффекты не учитываются. Принимается, как и в модели Баклея–Леверетта, что относительные фазовые проницаемости зависят только от текущих значений объёмных насыщенныхностей фаз, а капиллярным скачком давления можно пренебречь. Кроме того, принимается, что коэффициенты динамической вязкости суть константы, хотя, конечно, они зависят как от давления, так и от состава фаз.

Для моделирования фильтрационных течений многокомпонентных смесей разработана и применяется иерархия моделей разной степени сложности и подробности. Эти модели описывают фильтрацию многокомпонентных смесей в тех или иных предположениях о характере течения (перепаде давления, диапазоне изменения состава смеси и т.п), термодинамических свойствах фаз, влиянии капиллярных эффектов, свойствах коллектора и т.д. Ясно, что чем подробнее модель, тем сложнее она поддается теоретическому анализу и исследованию с привлечением методов численного моделирования. В настоящее время наиболее исследованными являются модели, объединенные условием сохранения полного потока фильтрующегося флюида. В рамках рассматриваемого в настоящей работе подхода такие модели описывают фильтрацию квазиидеальных смесей, т.е. выполнено правило Амаго и парциальные объемы компонентов не зависят от давления и температуры (или последняя постоянна). Предельным случаем таких моделей являются модели типа Баклея–Леверетта, описывающие фильтрацию несжимаемых несмешивающихся флюидов [2]. В этих предположениях из уравнений, выражающих законы сохранения количеств каждого компонента, вытекает условие бездивергентности поля скорости фильтрации. В одномерной геометрии указанное свойство означает, что полный (объемный) поток фильтрующихся флюидов одинаков через все сечения, хотя, вообще говоря, может зависеть от времени.

ных процессов, например, адсорбции. Адсорбированное скелетом вещество рассматривается как отдельная неподвижная фаза, что не нарушает постоянства полного потока фильтрующихся флюидов. В рамках таких моделей уравнения многокомпонентной фильтрации расщепляются на эллиптическое уравнение для давления и систему уравнений первого порядка для концентраций компонентов, в которую давление не входит. Если число компонентов невелико, удастся сформулировать условия гиперболичности последней системы. Отметим, что если число компонентов больше двух, гиперболичность системы уравнений не гарантирована.

Правило Амаго означает, что при фазовом переходе объем смеси не меняется. Ясно, что это правило выполняется далеко не всегда. Фазовые переходы из жидкой фазы в газовую и наоборот обычно сопровождаются значительным изменением суммарного объема смеси. Условие несжимаемости фаз также не всегда является удачным приближением. Например, при моделировании "газированной нефти", выделяющийся газ нельзя считать несжимаемым [11].

Уравнения фильтрации без предположения об аддитивности объема при смешении (правило Амаго) рассматривались, например, в [16], без предположения о несжимаемости фаз в [10, 12].

Не рассматриваются эффекты, обусловленные действием гравитации, хотя безусловно, сила притяжения оказывает существенное влияние на процессы фильтрации естественных углеводородов. Принимается, что пористость и абсолютная проницаемость скелета суть константы, т.е. не зависят ни от пространственных координат, ни от давления.

Указанные дополнительные предположения не имеют прямого отношения к целям настоящей работы — исследованию качеств системы уравнений многокомпонентной фильтрации, обусловленных термодинамическими свойствами смесей. Относительно термодинамических свойств смеси не делается каких-либо специальных предположений. Однако, принята гипотеза, согласно которой все компоненты в том или ином количестве присутствуют во всех фазах [9]. В этом случае условия фазового равновесия выражаются равенством химпотенциалов компонентов во всех фазах. Отказ от этой гипотезы означал бы, что в некоторой фазе не растворен какой-либо компонент смеси, как это принимается в модели "газированной нефти" [1]. В этом случае химпотенциал нерастворимого в данной фазе компонента не равен химпотенциалу этого компонента в других фазах. Однако, это обстоятельство не влияет ни на справедливость правила фаз Гиббса, ни на "гиперболичность" уравнений многокомпонентной фильтрации. Указанная гипотеза принята для удобства изложения, чтобы не делать постоянных оговорок о растворимости или нерастворимости компонентов смеси в фазах. Отдельно рассматривается фильтра-

Уравнения многокомпонентной фильтрации, описывающие указанную модель, не охватываются классификацией на гиперболические, параболические, эллиптические. Тем не менее они демонстрируют свойства всех этих типов уравнений, что позволяет составить качественное представление о поведении решений. Представляет интерес выделение некоторых частных случаев, когда эти свойства выражены в явном виде. Например, уравнения фильтрации несжимаемых несмешивающихся флюидов (модель Баклея–Левретта) после некоторых преобразований расщепляются на эллиптическое уравнение для давления и гиперболические для фазовых насыщенныхностей. Модель Баклея–Левретта будет подробнее рассмотрена ниже.

2 Уравнения многофазной многокомпонентной фильтрации.

В настоящей работе под многокомпонентной смесью понимается система химически не реагирующих веществ — компонентов, независимо от того находится она в однофазном состоянии или расслоилась на несколько фаз. Под фазой понимается физически однородная смесь двух или нескольких веществ. Рассматривается модель многокомпонентной фильтрации, в рамках которой принимается, что скорости фильтрации малы, а массообмен происходит достаточно интенсивно, так что в каждом элементарном объеме успевает установиться фазовое равновесие. Это значит, что фиксируя температуру T , давление p и c_i — полные концентрации смеси, можно установить: на какое число фаз расслаивается смесь и каковы молярные концентрации c_{ia} , молярные плотности n_a и объемные насыщенности s_a фаз. Молярные плотности n_a определяются уравнением состояния для a -той фазы. Молярные концентрации c_{ia} задаются кривыми фазового равновесия.

Капиллярным скачком давления между фазами пренебрегаем и учитываем капиллярные эффекты лишь через введение относительных проницаемостей $k_a(s_a)$, зависящих от объемных насыщенностей фазами s_a . Пренебрегаем также всеми эффектами, связанными с наличием межфазной границы (адсорбция) и ее искривленностью (сдвиг давления и фазового равновесия из-за капиллярности).

Так как число молей каждого компонента сохраняется, для каждого из них может быть написано уравнение неразрывности

$$m \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (2.1)$$

Q_i — плотность молярного потока i -того компонента, рассчитанная по всем фазам. Величины n_i, Q_i характеризуют смесь в целом и выражаются через характеристики фаз следующим образом

$$n_i = \sum_a c_{ia} n_a s_a, \quad Q_i = \sum_a c_{ia} n_a W_a. \quad (2.2)$$

Здесь c_{ia} — концентрация i -того компонента в фазе a , n_a — плотность в фазе a , занимающей часть объема порового пространства s_a ; W_a — скорость фильтрации фазы a .

Движение каждой из фаз описывается ее скоростью фильтрации W_a , определяемой из обобщенного закона Дарси:

$$W_a = -K \frac{k_a}{\eta_a} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.3)$$

где K — абсолютная проницаемость коллектора, $k_a(s_a)$ — относительная проницаемость a -той фазы, η_a — вязкость a -той фазы.

Суммирование соотношений (2.3) по a дает полную скорость фильтрации

$$W = \sum_a W_a = -KB \frac{\partial p}{\partial x},$$

где $B = \sum_a \frac{k_a}{\eta_a}$ — полная подвижность; величина $\varphi_a = \frac{k_a}{\eta_a B}$ — есть доля a -той фазы в потоке: $W_a = \varphi_a W$.

Для определения фазовых концентраций c_{ia} необходимо воспользоваться условиями локального термодинамического равновесия (равенство давлений и химпотенциалов в фазах):

$$p_I = p_{II} = \dots = p, \quad \mu_{i,I}(p, c_I) = \mu_{i,II}(p, c_{II}) = \dots = \mu_i.$$

Кроме того, из определения c_{ia} и s_a следует, что

$$\sum_i c_{ia} = 1, \quad \sum_a s_a = 1.$$

Наряду с долей фазы в потоке важной характеристикой многокомпонентного течения является доля компонента в потоке

$$\chi_i(p, c) = \frac{\sum_a n_{ia} \varphi_a}{\sum_a n_a \varphi_a}$$

Здесь $n_{ia} = c_{ia} n_a$ — плотность i -того компонента в фазе a .

(верхняя панель) показана типичная фазовая диаграмма бинарной смеси. Жирные линии — границы двухфазной области (кривые кипения и конденсации), задающие равновесные концентрации летучего компонента в жидкой $c_L(p)$ и газовой $c_G(p)$ фазах как функции давления; тонкие линии — границы связности (подвижности) фаз, обусловленные остаточной насыщенностью. На нижней панели показан график функции $\chi(c)$ — доли летучего компонента в потоке при фиксированном давлении. В области однофазного течения (в диапазоне концентраций $0 \leq c \leq c_L$ или $c_G \leq c \leq 1$) $\chi(c) = c$. В двухфазной области, когда одна из фаз не является связной ($c_L \leq c \leq c_*$ или $c_{**} \leq c \leq c_G$), $\chi(c, p) = c_L(p)$ или соответственно $\chi(c, p) = c_G(p)$. В двухфазной области, где обе фазы подвижны (в интервале концентраций $c_* \leq c \leq c_{**}$), функция $\chi(c)$ имеет характерный S-образный вид. Характерными чертами функции $\chi(c)$ являются ее монотонность и невыпуклость, то есть $\chi''(s)$ не является знакопостоянной в двухфазной области.

Итак, многокомпонентная изотермическая фильтрация описывается системой нелинейных уравнений в частных производных (2.1)-(2.3), дополненной уравнениями состояния и условиями фазового равновесия. Если в смесь содержится q компонент, то и уравнений в системе q .

3 Термодинамика квазиидеальных смесей.

Согласно [9], идеальным называется раствор, химические потенциалы компонентов в котором имеют вид

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln c_i,$$

где $\mu_i^0(T, p)$ — химические потенциалы чистых компонентов.

Одним из свойств идеальных растворов является аддитивность объёма при смешивании (правило Амаго): при смешивании N_1 молей первого компонента, N_2 молей второго компонента и т.д. объём идеального раствора составляет $V = \sum_i N_i v_i$, где v_i — молярные объёмы чистых компонентов (при тех же температуре и давлении). Очевидно, что аддитивность объёма при смешении обусловлена не конкретным видом химпотенциала смешения $RT \ln c_i$, а тем обстоятельством, что он не зависит от давления. Кроме того, если рассматриваются растворы, в которых концентрации некоторых компонентов малы, то не следует интерпретировать μ_i^0 как химпотенциалы чистых компонентов. В дальнейшем будут использоваться некоторые свойства растворов, обладающих свойствами аддитивности объёма при смешении. Будем называть такие

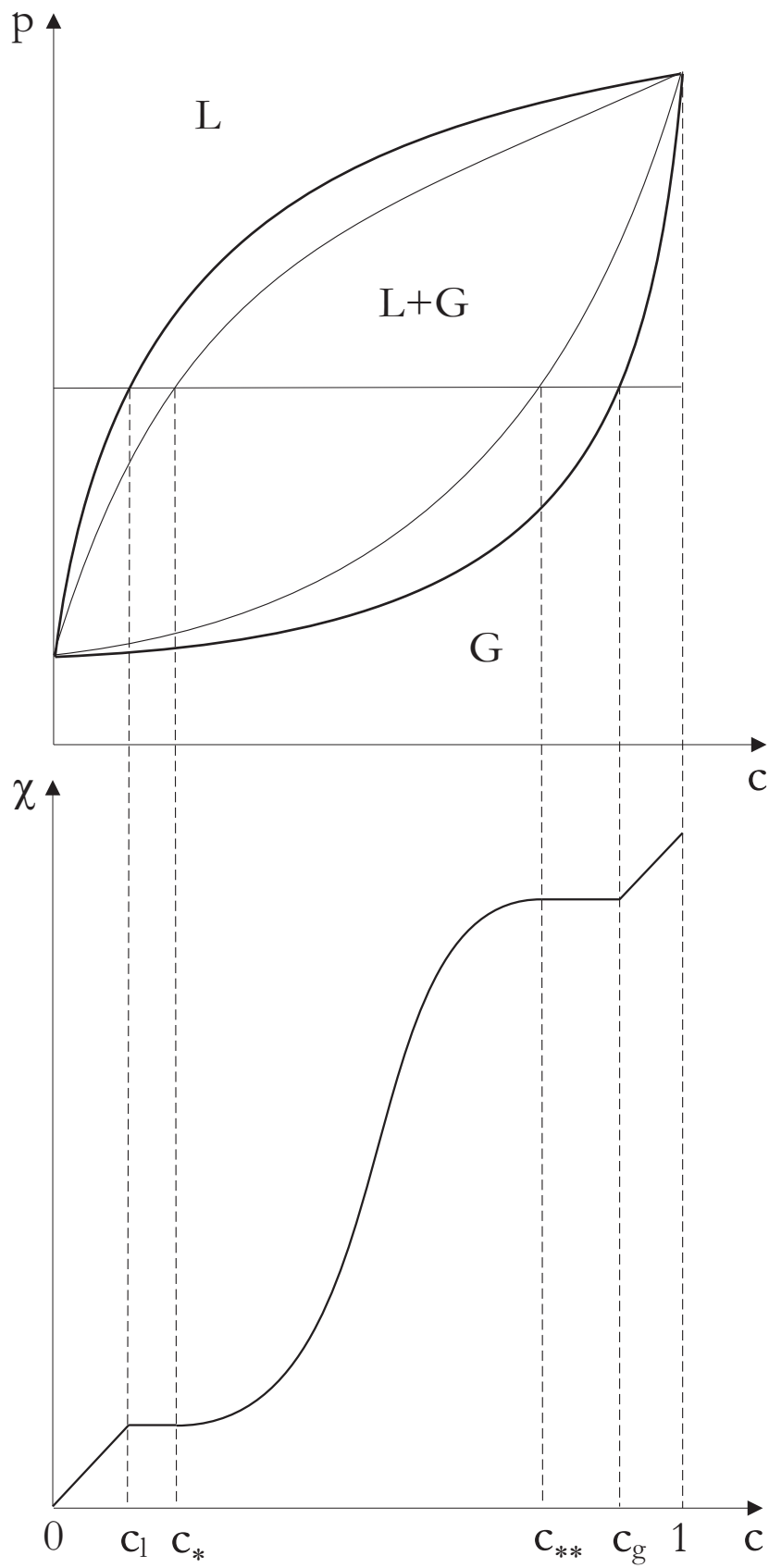


Fig. 1

$$V = \sum_i N_i v_i , \quad (3.1)$$

а потенциал Гиббса

$$G = \sum_i N_i \int v_i dp + \Phi(N) = \sum_i N_i \mu_i^0 + \Phi(N) . \quad (3.2)$$

Здесь $v_i(p)$ – парциальные молярные компоненты, $\Phi(N)$ – константа интегрирования, однородная функция первой степени своих аргументов, зависимость термодинамических функций от температуры не указываем.

Химпотенциалы компонентов в квазиидеальном растворе составляют

$$\mu_i = \frac{\partial G}{\partial N_i} = \mu_i^0 + \frac{\partial \Phi}{\partial N_i} . \quad (3.3)$$

Квазиидеальной назовем смесь, в которой парциальные молярные объемы компонентов одинаковы во всех фазах. В такой смеси потенциалы фаз имеют вид (3.2) с одними и теми же $\mu_i^0(p)$, но разными $\Phi(N)$. В этом случае, если несколько квазиидеальных растворов (фаз), нумеруемых римскими числами, находятся в фазовом равновесии, то условие равенства химпотенциалов компонентов дает уравнения

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial N_{i,I}} = \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial N_{i,II}} = \dots \quad (3.4)$$

которые не содержат давления. Так как все функции Φ_I, Φ_{II}, \dots – однородные первой степени от своих аргументов, то производные $\frac{\partial \Phi_I}{\partial N_{i,I}}, \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial N_{i,II}}, \dots$ – однородные нулевой степени и фактически зависят от концентраций компонентов в фазах.

Система (3.4) содержит $q(r-1)$ уравнений, относительно qr неизвестных концентраций компонентов в фазах. Здесь q – число компонентов, r – число фаз. Кроме того, следует учесть r условий нормировки

$$\sum_i c_{i,I} = 1, \quad \sum_i c_{i,II} = 1, \dots \quad (3.5)$$

Таким образом, общее число уравнений составляет $qr - q + r$. Решение системы уравнений (3.4), (3.5) содержит $q - r$ свободных параметров (не считая температуры), через которые вычисляются все термодинамические переменные, кроме давления.

Разделив (3.1) на V получаем $\sum_i n_i v_i = 1$, где $n_i = N_i/V$ – молярная

где $P(\mu)$ – давление как функция химпотенциалов компонентов. Поэтому последнее равенство может быть записано в виде:

$$\sum_i \frac{\partial P(\mu)}{\partial \mu_i} v_i = 1 . \quad (3.6)$$

Дифференцируя (3.6) по μ_k получаем

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k} v_i + \sum_i \frac{\partial P}{\partial \mu_i} \frac{\partial v_i}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial \mu_k} = 0 . \quad (3.7)$$

или

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k} v_i = -n_k \sum_i n_i \frac{\partial v_i}{\partial p} . \quad (3.8)$$

В дальнейшем отдельно будет рассматриваться вырожденный случай, когда все компоненты являются несжимаемыми, т.е. $\frac{\partial v_i}{\partial p} = 0$ для всех i . В этом случае

$$\sum_i \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k} v_i = 0, \quad (3.9)$$

т.е. матрица $\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k}$ вырождена. В этом вырожденном случае в качестве термодинамических степеней свободы можно принять давление и $q - r$ параметров τ_α , параметризующих решения системы (3.4), (3.5). Как уже отмечалось, решения эти не зависят от p , т.е. $c_{ia} = c_{ia}(\tau_\alpha)$. Химпотенциалы компонентов при этом зависят от p линейно.

$$\mu_i = v_i p + \nu_i(\tau_\alpha) , \quad \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \right)_\tau = v_i .$$

В невырожденном случае матрица $\frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k}$ положительно определена, что является следствием условий термодинамической устойчивости. Вырождение, показываемое формулой (3.9) снимается, если принять $\frac{\partial v_i}{\partial p} < 0$, как этого требуют условия термодинамической устойчивости. Тогда, умножая (3.8) на v_k и суммируя по k , получим

$$\sum \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_i \partial \mu_k} v_i v_k = - \sum n_i \frac{\partial v_i}{\partial p} \sum n_k v_k = - \sum n_i \frac{\partial v_i}{\partial p} > 0 . \quad (3.10)$$

4 Фильтрация квазиидеальных несжимаемых смесей.

Широко используемой моделью многокомпонентной фильтрации является приближение постоянного полного потока флюидов. В рамках этой модели рассматривается многофазное течение многокомпонентной смеси, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) все фазы являются квазиидеальными растворами, т.е. подчиняются правилу Амаго;
- 2) парциальные молярные объемы компонентов не зависят от давления и температуры (или условия фильтрации таковы, что этой зависимостью можно пренебречь).

В этом случае условия фазового равновесия не зависят от давления (и температуры). После умножения i -того уравнения системы (2.1)-(2.3) на парциальный молярный объем i -того компонента $v_i = \text{const}$, уравнения многокомпонентной фильтрации принимают вид

$$m \frac{\partial}{\partial t} \sum_a \gamma_{ia} s_a + \frac{\partial}{\partial x} \sum_a \gamma_{ia} \varphi_a W = 0, \quad (4.1)$$

где $\gamma_{ia} = n_{ia} v_i$ — объемная концентрация i -того компонента в a -той фазе. Имеет место соотношение $\sum_i \gamma_{ia} = 1$ для всех фаз a [9].

Суммирование (4.1) по i с учетом условий нормировки дает

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W = W(t), \quad (4.2)$$

Так как условия фазового равновесия не зависят от давления, то $q - 1$ уравнений (4.1) после перенормировки времени образуют замкнутую систему относительно $q - 1$ независимых концентраций $\gamma_i = \sum_a \gamma_{ia} s_a$ (или эквивалентного набора переменных). Уравнение (4.2) можно рассматривать как соотношение, позволяющее восстановить поле давлений по уже найденным распределениям концентраций γ_i и насыщенностей s_a .

5 Модель Баклея–Леверетта

Модель Баклея–Леверетта широко используется для моделирования фильтрации несмешивающихся флюидов. Она также может применяться для тестирования программ, поэтому остановимся на ней подробнее.

- 1) капиллярный скачок давления отсутствует;
- 2) обе фазы несжимаемы.

В этом случае фильтрация описывается следующими уравнениями

$$m \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad m \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial W_2}{\partial x} = 0.$$

Суммирование этих соотношений с учетом условия $s_1 + s_2 = 1$ дает $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$, где $W = W_1 + W_2$ – суммарная скорость фильтрации. Введем обозначения: $s_1 = s, s_2 = 1 - s, B(s) = \frac{k_1}{\eta_1} + \frac{k_2}{\eta_2}$ – полная подвижность;

$\varphi(s) = \frac{k_1/\eta_1}{B}$ – доля первой фазы в потоке, для двухкомпонентной фильтрации.

$$W = -KB(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad W_1 = \varphi(s)W, \quad W_2 = (1 - \varphi(s))W,$$

В этих обозначениях получаем систему уравнений, часто используемую для решения задачи Баклея–Леверетта:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W = -KB(s) \frac{\partial p}{\partial x}, \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi(s)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, двухфазная фильтрация несжимаемых флюидов без фазовых переходов в рамках модели Баклея–Леверетта описывается эллиптическим уравнением для давления и гиперболическим уравнением переноса для объемной насыщенности одной из фаз.

Модель Баклея–Леверетта для случая многофазной фильтрации, описывается уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W = -KB \frac{\partial p}{\partial x}, \quad m \frac{\partial s_a}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} = 0. \quad (5.1)$$

где s_a – объемная насыщенность a -той фазы; $B = \sum_a \frac{k_a}{\eta_a}$ – полная подвижность; $\varphi_a(s_a) = \frac{k_a/\eta_a}{B}$ – доля a -той фазы в потоке.

В силу условий условий нормировки

$$\sum_a s_a = 1, \quad \sum_a \varphi_a = 1$$

среди r уравнений системы (5.1) независимыми являются $r - 1$. Гиперболичность (или негиперболичность) этой системы уравнений при заданной полной скорости $W(t)$ обуславливается видом функций φ_a , которые в свою очередь

Известно [14], что даже в случае трехфазной фильтрации несжимаемых флюидов при некотором выборе зависимостей относительных проницаемостей k_a от объемных насыщенных s_a система (5.1) может оказаться негиперболической в некоторой области изменения независимых насыщенных. Тем не менее можно указать два важных для приложений случая, когда уравнения для фазовых насыщенных являются гиперболическими. Первый случай двухфазной фильтрации рассмотрен в предыдущем пункте.

Второй случай, когда система уравнений (5.1) является гиперболической относится к модели трехфазной фильтрации с относительными проницаемостями, зависящими только от насыщенных соответствующими фазами. Введем обозначения: независимые насыщенные $s_1 = r, s_2 = s$, соответственно $s_3 = 1 - r - s$; относительные подвижности $\frac{k_1}{\eta_1} = f(r)$, $\frac{k_2}{\eta_1} = g(s)$, $\frac{k_3}{\eta_3} = h(1 - r - s)$. Полная подвижность и доли фаз в потоке составляют

$$B(r, s) = f + g + h, \quad \varphi(r, s) = \frac{f}{B}, \quad \psi(r, s) = \frac{g}{B}.$$

В этих обозначениях уравнения Баклея–Левретта для трехфазной фильтрации имеют вид:

$$m \frac{\partial r}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + W \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (5.2)$$

Квазилинейная форма системы (5.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial r}{\partial t} + W \left(a_{11} \frac{\partial r}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial s}{\partial x} \right) &= 0, \\ m \frac{\partial s}{\partial t} + W \left(a_{21} \frac{\partial r}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial s}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} = \varphi_r &= \frac{B f_r - f B_r}{B^2}, & a_{12} = \varphi_s &= -\frac{f B_s}{B^2}, \\ a_{21} = \psi_r &= -\frac{g B_r}{B^2}, & a_{22} = \psi_s &= \frac{B g_s - g B_s}{B^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что так как $h_s = h_r$, то $f_r - g_s = (f_r + h_r) - (g_s + h_s) = B_r - B_s$.

Очевидно, что если собственные числа матрицы с элементами a_{ik} действительны и различны, то система (5.3) является гиперболической. Собственные числа этой матрицы являются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

$$B^2\Delta = (1 - \varphi)^2 B_r^2 + (1 - \psi)^2 B_s^2 + 2(\varphi\psi + \varphi + \psi - 1)B_r B_s.$$

Квадратичная форма по переменным B_r , B_s в правой части последнего соотношения положительно определена в силу условий $0 \leq \varphi, \psi, \varphi + \psi \leq 1$. Таким образом, дискриминант $\Delta \geq 0$, причем равенство достигается лишь при $B_r = B_s = 0$. Если $\Delta > 0$, то характеристическое уравнение имеет действительные и различные корни, так что система уравнений (5.3) является гиперболической. Если $\Delta = 0$, то характеристическое уравнение имеет двухкратный действительный корень, при этом $B_r = B_s = 0$, соответственно $a_{12} = a_{21} = 0$, так что система уравнений (5.3) является гиперболической.

6 Квазилинейная форма уравнений фильтрации.

Рассмотрим изотермическую фильтрацию смеси, содержащей q компонентов (нумеруемых индексами i, j, k, \dots). Пусть термобарические условия фильтрации таковы, что смесь расслаивается на r фаз (нумеруемых индексами a, b, \dots). Согласно правилу фаз Гиббса такая система имеет $q - r + 2$ термодинамических степеней свободы, одна из которых исключается фиксированием температуры. Это означает, что существует $q - r + 1$ интенсивных термодинамических величин задаваемых произвольно (с тем, конечно, ограничением, что число фаз должно оставаться равным r), а все остальные термодинамические переменные определяются из условий фазового равновесия, уравнений состояний и пр. В качестве независимых термодинамических величин примем давление и ещё любые $q - r$ переменные τ_α ($\alpha = 1, \dots, q - r$).

Согласно формуле Гиббса–Дюгема дифференциал давления имеет вид

$$dp = \sum_i n_{ia} d\mu_i, \quad (6.1)$$

где $n_{ia} = \frac{\partial P_a}{\partial \mu_i}$ – плотность i -того компонента в a -той фазе, как функция химпотенциалов.

Химпотенциалы являются интенсивными термодинамическими величинами и могут быть выражены как функции переменных p, τ_α :

$$d\mu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial p} dp + \sum_\alpha \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} d\tau_\alpha. \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получаем

$$\overline{\mu_i} = \overline{\mu_i}$$

Так как дифференциалы dp , $d\tau_\alpha$ независимы, из (6.3) следует, что

$$\sum_i n_{ia} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} = 1, \quad \sum_i n_{ia} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} = 0. \quad (6.4)$$

Причем соотношения (6.4) выполняются для всех фаз.

Уравнения изотермической многокомпонентной фильтрации запишем в виде

$$m \frac{\partial}{\partial t} \sum_a n_{ia} s_a + \frac{\partial}{\partial x} \sum_a n_{ia} \varphi_a W = 0,$$

или

$$m \sum_a \left(s_a \frac{\partial n_{ia}}{\partial t} + n_{ia} \frac{\partial s_a}{\partial t} \right) + W \left(\sum_a \varphi_a \frac{\partial n_{ia}}{\partial x} + n_{ia} \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right) + \sum_a n_{ia} \varphi_a \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (6.5)$$

Здесь, как и выше, s_a – объемная насыщенность a -той фазой, φ_a – доля a -той фазы в потоке, W – полная скорость фильтрации.

Умножение (6.5) на $\frac{\partial \mu_i}{\partial p}$ и суммирование по i дает (с учетом (6.4) и условий нормировки $\sum_a s_a = 1$, $\sum_a \varphi_a = 1$):

$$m \sum_{i,a} s_a \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial n_{ia}}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i,a} \varphi_a \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial n_{ia}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (6.6)$$

Аналогично, умножение (6.5) на $\frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha}$ и суммирование по i дает:

$$m \sum_{i,a} s_a \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial n_{ia}}{\partial t} + W \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i,a} \varphi_a \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial n_{ia}}{\partial x} = 0. \quad (6.7)$$

Представим теперь dn_{ia} в форме

$$dn_{ia} = \sum_k \frac{\partial n_{ia}}{\partial \mu_k} d\mu_k = \sum_k \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} dp + \sum_{k,\alpha} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\alpha} d\tau_\alpha.$$

С учетом этого соотношения уравнения (6.6) и (6.7) принимают вид

$$m \sum_{i,k,a} \left(s_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i,k,a,\beta} s_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial t} \right) +$$

$$m \sum_{i,k,a} \left(s_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i,k,a,\beta} s_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial t} \right) +$$

$$+ W \sum_{i,k,a} \left(\varphi_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial x} \right) = 0,$$

Чтобы придать этим формулам более компактный вид введем матрицы

$$A_{ik} = \sum_a s_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k}, \quad B_{ik} = \sum_a \varphi_a \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k}, \quad 1 \leq i, k \leq q.$$

В невырожденном случае все матрицы $\frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k}$ положительно определены и так как $s_a, \varphi_a \geq 0$, то положительно определены и матрицы A_{ik}, B_{ik} . Очевидно, что эти матрицы симметричны.

Обозначим:

$$A = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p}, \quad B = \sum_{i,k} B_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial p} \frac{\partial \mu_k}{\partial p},$$

$$A_\alpha = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial p}, \quad B_\alpha = \sum_{i,k} B_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial p},$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta}, \quad B_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} B_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta},$$

Матрицы $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ симметричные и положительно определенные. В этих обозначениях уравнения (6.6) и (6.7) принимают вид

$$m \left(A \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_\beta A_\beta \frac{\partial \tau_\beta}{\partial t} \right) + W \left(B \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_\beta B_\beta \frac{\partial \tau_\beta}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (6.8)$$

$$m \left(A_\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial t} \right) + W \left(B_\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_\beta B_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Отметим здесь, что в вырожденном случае, когда все фазы являются квазиидеальными растворами и все компоненты несжимаемыми, согласно п.3 $\frac{\partial \mu_i}{\partial p} = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \right)_\tau = v_i = \text{const}$ – парциальный молярный объём i -того компонента, так что для всех фаз

В этом случае $A = 0$, $A_\alpha = 0$, $B = 0$, $B_\alpha = 0$, и уравнение (6.8) принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W = W(t),$$

а уравнение (6.9)

$$m \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} + W \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} = 0. \quad (6.10)$$

Наложим теперь условие, что вектор $v_i = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \right)_{\tau}$ и только он соответствует нулевому собственному числу матриц $\frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k}$. В этом случае матрицы $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ положительно определены. Действительно, пусть $\sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} = 0$, тогда

$$\sum_{i, k} \frac{\partial^2 P_a}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \left(\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_{\alpha}} \right) \left(\sum_{\beta} \xi_{\beta} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_{\beta}} \right) = 0.$$

и значит с точностью до множителя $\sum_{\alpha} \xi_{\alpha} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_{\alpha}} = v_i = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial p} \right)_{\tau}$. Но последнее равенство не может быть выполнено ни при каких ξ_{α} , так как p, τ_{α} независимые термодинамические степени свободы. Аналогичные соображения применимы и к матрице $B_{\alpha\beta}$.

Получим теперь дополнительные к (6.8)–(6.9) уравнения в виде удобном для дальнейшего анализа. Будем предполагать, что матрица с элементами n_{ia} является матрицей полного ранга, т.е. $\text{rank}(n_{ia}) = r$. Введем матрицу $r \times r$ с элементами $N_{ab} = \sum_i n_{ia} n_{ib}$. В силу сделанного предположения $\det(N_{ab}) \neq 0$. Умножая (6.5) на n_{ib} и суммируя по i , получим после перегруппировки слагаемых

$$\begin{aligned} & \sum_a N_{ab} \left(m \frac{\partial s_a}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + \varphi_a \frac{\partial W}{\partial x} \right) = \\ & = -m \sum_{i, a} s_a n_{ib} \frac{\partial n_{ia}}{\partial t} - W \sum_a \varphi_a n_{ib} \frac{\partial n_{ia}}{\partial x}, \quad b = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (6.11)$$

Разрешая эти уравнения относительно величин, стоящих в скобках в левой части (это возможно в силу $\det(N_{ab}) \neq 0$), получаем

Здесь $z_{ia} = \sum_b N_{ab}^{-1} n_{ib}$, N_{ab}^{-1} — элементы матрицы, обратной к N_{ab} .

Из уравнений (6.12) только $r - 1$ являются независимыми.

В более подробной записи уравнения (6.12) имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s_a}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + \varphi_a \frac{\partial W}{\partial x} + m \left(C_a \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{\beta} C_{a\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right) + \\ + W \left(D_a \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{\beta} D_{a\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (6.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_a &= \sum_i z_{ia} \sum_{k,b} s_b \frac{\partial^2 P_b}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} = \sum_{i,k} A_{ik} z_{ia} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} , \\ C_{a\beta} &= \sum_i z_{ia} \sum_{k,b} s_b \frac{\partial^2 P_b}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_{\beta}} = \sum_{i,k} A_{ik} z_{ia} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_{\beta}} , \\ D_a &= \sum_i z_{ia} \sum_{k,b} \varphi_b \frac{\partial^2 P_b}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} = \sum_{i,k} B_{ik} z_{ia} \frac{\partial \mu_k}{\partial p} , \\ D_{a\beta} &= \sum_i z_{ia} \sum_{k,b} \varphi_b \frac{\partial^2 P_b}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_{\beta}} = \sum_{i,k} B_{ik} z_{ia} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_{\beta}} , \end{aligned}$$

Таким образом, система (6.13) содержит $r - 1$ уравнений относительно $r - 1$ независимых объёмных насыщенныхностей.

Для исследования свойств уравнений многокомпонентной фильтрации важными являются два обстоятельства. Во-первых, два первых слагаемых в (6.13), и только они содержат производные от насыщенныхностей s_a , причем в таком же виде, что и в уравнениях фильтрации несжимаемых несмешивающихся флюидов (модель Баклея-Левретта). Во-вторых, последние два слагаемых содержат производные только от термодинамических функций p , τ_{α} . В неявном виде эти производные содержит и третье слагаемое в силу уравнения (6.8).

Отметим, что в модели фильтрации несжимаемых квазиидеальных растворов в этих соотношениях множители при $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial t}$ обращаются в ноль.

7 Гиперболичность уравнений многокомпонентной фильтрации с постоянным потоком.

Применим теперь полученные соотношения для анализа свойств системы уравнений, описывающей фильтрацию квазиидеальных несжимаемых смесей. Если к $q-r$ уравнениям (6.8)–(6.9) для $q-r$ термодинамических степеней свободы присоединить $r-1$ уравнений для $r-1$ независимой насыщенности σ_α (в качестве которых можно взять любые $r-1$ независимое уравнение системы (6.13)), то для эволюции $(q-1)$ -мерного "вектора" переменных $\zeta = (\tau, \sigma)$ описывается системой $q-1$ уравнений, которую запишем в виде

$$A \frac{\partial \zeta}{\partial t} + B \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (7.1)$$

В этой символической записи A, B — блочно-треугольные матрицы размерности $(q-1) \times (q-1)$ вида:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_2 \end{pmatrix}$$

где A_1, B_1 — матрицы размерности $(q-r) \times (q-r)$, входящие в систему (7.1). Как было установлено выше $A_1 = A_1^* > 0$, $B_1 = B_1^* > 0$. Для определенности считаем, что $W \geq 0$.

Вопрос о гиперболичности системы уравнений (4.1) сводится к вопросу о полноте системы собственных векторов задачи на собственные значения

$$B\zeta = \lambda A\zeta. \quad (7.2)$$

Здесь буква $\zeta = (\tau, \sigma)$ обозначает "вектор" в $(q-1)$ -мерном пространстве термодинамических переменных τ_α ($\alpha = 1, \dots, q-r$) и независимых фазовых насыщенностей σ_α ($\alpha = 1, \dots, r-1$).

Так как матрицы A и B блочно-треугольные, то $\det(B - \lambda A) = \det(B_1 - \lambda A_1) \cdot \det(B_2 - \lambda A_2)$. В силу свойств матриц A_1, B_1 характеристическое уравнение $\det(B_1 - \lambda A_1) = 0$ имеет $q-r$ действительных корней, которым соответствуют $q-r$ линейно независимых собственных вектора в $(q-r)$ -мерном подпространстве термодинамических степеней свободы.

Что касается характеристического уравнения $\det(B_2 - \lambda A_2) = 0$, то, как уже отмечалось, оно имеет тот же вид, что и в модели Баклея-Леверетта фильтрации несжимаемых несмешивающихся флюидов. Как известно [14],

корни. Это означает, что система (7.1) в некоторой области изменения переменных не является гиперболической. Можно однако указать два важных для приложений случая, когда последнее уравнение имеет только действительные корни, а соответствующая задача на собственные значения полный набор собственных векторов.

Первый случай — двухфазная фильтрация. В этом случае матрицы A_2, B_2 имеет размерность 1×1 , и единственное собственное число, которое очевидно есть:

$$\lambda = \frac{W}{m} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Второй случай — трехфазная фильтрация, когда относительные проницаемости являются функциями только насыщенностей соответствующей фазы. В этом случае квадратное характеристическое уравнение имеет только действительные корни, причём, соответствующая задача на собственные значения имеет два линейно независимых собственных вектора (см. п.5).

Возвращаясь к исходной задаче на собственные значения (7.2) можно утверждать, что если характеристические уравнения $\det(B_1 - \lambda A_1) = 0$ и $\det(B_2 - \lambda A_2) = 0$ не имеют общих корней, то (7.2) имеет полный набор собственных векторов. Действительно, пусть τ_λ — правый собственный вектор задачи $\det(B_1 - \lambda A_1) = 0$. Тогда λ — собственные числа задачи (7.2), и соответствующий правый собственный вектор имеет вид $\zeta_\lambda = (\tau_\lambda, \sigma_\lambda)$, а компоненты σ_λ определяются из уравнения

$$(B_2 - \lambda A_2)\sigma_\lambda = -(B_3 - \lambda A_3)\tau_\lambda.$$

Детерминант матрицы в левой части отличен от нуля в силу сделанного предположения.

Пусть теперь σ_λ — правый собственный вектор задачи $B_2\sigma_\lambda = \lambda A_2\sigma_\lambda$. Тогда λ — собственное число задачи (7.2), а соответствующий правый собственный вектор имеет вид $\zeta_\lambda = (0, \sigma_\lambda)$. Аналогичным образом строятся и левые собственные вектора задачи (7.2).

Случай, когда характеристические уравнения $\det(B_1 - \lambda A_1) = 0$ и $\det(B_2 - \lambda A_2) = 0$ имеют общие корни, требует, вообще говоря, отдельного исследования. Тем не менее, уже в модели двухфазной трехкомпонентной фильтрации с постоянным полным потоком в случае совпадения корней характеристических уравнений система уравнений для концентраций не является гиперболической [16]. Заметим, однако, что в обеих указанных выше моделях (двух- и трехфазной фильтрации), когда второе характеристическое имеет действительные корни, эти корни определяются лишь относительными фазовыми насыщенностями s_a и не зависят от термодинамических переменных τ_α . Корни же первого характеристического уравнения являются функциями как s_a , так

В случае двухфазной фильтрации относительно задачи на собственные значения $B_2\zeta = \lambda A_2\zeta$ можно сделать дополнительные утверждения [13, 4]. Матрицы $A_2 = (A_{\alpha\beta})$ и $B_2 = (B_{\alpha\beta})$ могут быть представлены в виде

$$A_{\alpha\beta} = sX_{\alpha\beta} + (1 - s)Y_{\alpha\beta} , \quad B_{\alpha\beta} = \varphi X_{\alpha\beta} + (1 - \varphi)Y_{\alpha\beta} ,$$

где s — насыщенность первой фазой; φ — доля первой фазы в потоке;

$$X_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 P_I}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta} , \quad Y_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 P_{II}}{\partial \mu_i \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_i}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \mu_k}{\partial \tau_\beta} .$$

Пусть σ и ζ собственное число и соответствующий правый собственный вектор задачи $Y\zeta = \sigma X\zeta$. Тогда, как легко убедиться прямой подстановкой, ζ будет правым собственным вектором задачи $B_2\zeta = \lambda A_2\zeta$ соответствующим собственному числу $\lambda = \frac{\sigma(1 - \varphi) + \varphi}{\sigma(1 - s) + s}$. Видно, что собственное число σ и вектор ζ определяются только термодинамическими свойствами фаз и не зависят от насыщенностей. В этом смысле говорят, что задача расщепляется на физико-химическую и гидродинамическую части [4].

8 Распространение слабых разрывов.

Исследуем поведение слабых разрывов концентраций для нелинейных уравнений переноса в общем случае (не предполагая какой-либо зависимости плотности смеси от состава и давления). Отметим, что решения уравнений многокомпонентной фильтрации могут содержать слабые разрывы двух типов, точнее, обусловленные двумя различными причинами. Слабые разрывы первого типа аналогичны слабым разрывам решений гиперболических систем уравнений и обусловлены, например, их присутствием в начальных данных. Второй тип слабых разрывов связан с негладкостью функций χ_i — долей компонентов смеси в потоке.

Пусть концентрации компонентов смеси претерпевают слабый разрыв на некоторой линии $x = x(t)$, т.е. вдоль этой линии величины c_i и соответственно n_i, s_a непрерывны, а их производные терпят разрыв. Из соотношений Гюгонио

$$m\dot{x}[n_i] - [Q_i] = 0 ,$$

записанных для дивергентной формы уравнений многокомпонентной фильтрации на линии $x(t)$ вытекает, что на этой линии давление не имеет слабого разрыва

Следовательно непрерывны и скорости фильтрации фаз.

Установим, с какими скоростями распространяются слабые разрывы концентраций. Для ответа на этот вопрос удобнее изучать распространение слабых разрывов термодинамических степеней свободы τ_α и фазовых насыщенных s_a . Воспользуемся квазилинейной формой уравнений многокомпонентной фильтрации, полученной в разделе 3.4

$$\begin{aligned}
 m \left(A \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{\beta} A_{\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right) + W \left(B \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{\beta} B_{\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial x} &= 0, \\
 m \left(A_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right) + W \left(B_{\alpha} \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right) &= 0. \\
 m \frac{\partial s_a}{\partial t} + W \frac{\partial \varphi_a}{\partial x} + \varphi_a \frac{\partial W}{\partial x} + \\
 + m \left(C_a \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{\beta} C_{a\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right) + W \left(D_a \frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{\beta} D_{a\beta} \frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Выписывая эти уравнения справа и слева от траектории слабого разрыва $x(t)$ и вычитая, получим с учетом непрерывности производных от давления

$$m \sum_{\beta} A_{\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right] + W \sum_{\beta} B_{\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0, \quad (8.1)$$

$$m \sum_{\beta} A_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right] + W \sum_{\beta} B_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right] = 0. \quad (8.2)$$

$$m \left[\frac{\partial s_a}{\partial t} \right] + W \left[\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right] + \varphi_a \left[\frac{\partial W}{\partial x} \right] + m \sum_{\beta} C_{a\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right] + W \sum_{\beta} D_{a\beta} \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right] = 0. \quad (8.3)$$

Исключая из (8.3) $\left[\frac{\partial W}{\partial x} \right]$ с помощью (8.1), получаем

$$\begin{aligned}
 m \left[\frac{\partial s_a}{\partial t} \right] + m \sum_{\beta} (C_{\beta} - A_{\beta}) \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial t} \right] + W \left[\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right] + \\
 + W \sum_{\beta} (D_{\beta} - B_{\beta}) \left[\frac{\partial \tau_{\beta}}{\partial x} \right] = 0.
 \end{aligned} \quad (8.4)$$

В символической форме уравнения (8.2) и (8.4) имеют вид

В этой записи $\zeta = (\tau, \sigma)$ — $(q - 1)$ -мерный "вектор" термодинамических переменных и независимых фазовых насыщенных; A, B — блочно-треугольные матрицы размерности $(q - 1) \times (q - 1)$.

С другой стороны, дифференцируя непрерывные функции $\zeta(t, x)$ вдоль $x = x(t)$, находим:

$$0 = \left[\frac{d\zeta}{dt} \right] = \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] + \dot{x} \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right].$$

Подставляя отсюда $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right]$ в (8.5) получаем, что скорости распространения слабых разрывов переменных $\zeta = (\tau, \sigma)$, а с ними и концентраций, суть собственные числа задачи на собственные значения

$$-\dot{x}A \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + B \left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] = 0, \quad (8.6)$$

при этом скачки производных $\left[\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right]$ на линии $x(t)$ являются правыми собственными векторами этой задачи. Здесь A, B — блочно-треугольные матрицы размерности $(q - 1) \times (q - 1)$, аналогичные рассмотренным в предыдущем разделе.

Если задача (8.6) имеет полный набор собственных векторов, то имеется $q - 1$ тип слабых разрывов решений уравнений многокомпонентной фильтрации, которые распространяются со скоростями равными соответствующим собственным числам. В этом смысле мы говорим, что уравнения многокомпонентной фильтрации обладают "гиперболическими" свойствами. В разделе 6 были указаны условия, при выполнении которых задача (8.6) имеет полный набор собственных векторов.

Предыдущие рассуждения позволяют в принципе дать ответ на вопрос о количестве типов слабых разрывов, которые могут иметь решения уравнений многокомпонентной фильтрации. Ответ дается в том смысле, что вопрос сводится к более простой задаче относительно только гидродинамических переменных, куда термодинамические степени свободы входят как параметры. С теоретической точки зрения такой ответ можно признать удовлетворительным, но для практических целей построения вычислительных алгоритмов он не дает достаточной информации о "гиперболических" свойствах системы уравнений многокомпонентной фильтрации. В исходные уравнения (2.1) термодинамические степени свободы τ_α не входят, более того, они могут быть выбраны произвольным способом. При численном моделировании естественными переменными являются давление и концентрации компонентов.

занной выше, рассмотрим только ограниченный случай двухкомпонентной фильтрации. В этом случае функция χ имеет разрыв производных на кривых фазового равновесия (кипения и конденсации) в (c, p) -плоскости. Таким образом, по одну сторону от слабого разрыва смесь находится в однофазном состоянии, а по другую — в двухфазном. Будем предполагать, что по ту сторону от слабого разрыва, где смесь находится в однофазном состоянии, концентрация второго компонента $c = c_0 = \text{const}$. В этом случае вдоль траектории слабого разрыва $x(t)$ в (x, t) -плоскости $p = p_0 = \text{const}$. Давление p_0 есть давление фазового перехода при концентрации c_0 и определяется из уравнения $c_L(p_0) = c_0$, если однофазное состояние является жидким, или $c_G(p_0) = c_0$, если — газовым. Для исследования распространения таких слабых разрывов описанный выше подход не применим, так как производные $\left(\frac{\partial n}{\partial c}\right)_p$ и др. претерпевают разрыв при пересечении траектории $x(t)$. Поэтому для вычисления скорости разрыва следует вернуться к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + (c - \chi) \left(\frac{\partial \ln n}{\partial c}\right)_p \frac{\partial c}{\partial t} + (c - \chi) \left(\frac{\partial \ln n}{\partial p}\right)_c \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + W_* \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_c \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial c}\right)_p \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (8.7)$$

Так как вдоль траектории слабого разрыва $c, p = \text{const}$, то

$$0 = \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial c}{\partial x} , \quad 0 = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial p}{\partial x}$$

и (8.7) принимает вид

$$\begin{aligned} -\dot{x} \frac{\partial c}{\partial x} - \dot{x}(c - \chi) \left(\frac{\partial \ln n}{\partial c}\right)_p \frac{\partial c}{\partial x} - \dot{x}(c - \chi) \left(\frac{\partial \ln n}{\partial p}\right)_c \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + W_* \left(\left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_c \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial c}\right)_p \frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 , \end{aligned} \quad (8.8)$$

Со стороны однофазного течения $\chi = c$ и это уравнение выполнено тождественно. Рассмотрим (8.8) со стороны двухфазного течения. Здесь

$\left(\frac{\partial \chi}{\partial c}\right)_p = 0$, $\chi = c$, $W_* = W/m$ и уравнение (8.8) принимает вид

$$\dot{x} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{W}{m} \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_c \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta W^2}{Km} \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_c , \quad (8.9)$$

где η — вязкость соответствующей фазы.

Тогда, дифференцируя соотношение $\chi = c_L$ вдоль кривой испарения в (c, p) -плоскости, получаем

$$\frac{dc_L}{dp} = \frac{d\chi}{dp} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_c + \left(\frac{\partial \chi}{\partial c} \right)_p \frac{dc_L}{dp} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_c .$$

Таким образом

$$\dot{x} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\eta_L W^2}{Km} \frac{dc_L}{dp} .$$

Аналогично, если по одну сторону от слабого разрыва смесь находится в однофазном газовом состоянии, то

$$\dot{x} \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\eta_G W^2}{Km} \frac{dc_G}{dp} .$$

Так как $\frac{dc_L}{dp}, \frac{dc_G}{dp} \geq 0$, то слабые разрывы, обусловленные негладкостью функции χ , распространяются в сторону увеличения концентрации более летучего компонента.

Список литературы

- [1] *Азиз Х., Сеттари Э.* Математическое моделирование пластовых систем. — М.: Недра, 1982, 408с.
- [2] *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. — М.: Недра, 1984.
- [3] *Бедриковецкий П.Г., Чумак М.Л.* Точные решения задач двухфазной многокомпонентной фильтрации. — ДАН СССР, 1992, т.322, №4 с. 668-673.
- [4] *Восков Д.В., Ентов В.М.* К задаче о вытеснении нефти смесями газов. — Изв. РАН. Сер. МЖГ, 2001, N 2, с. 112-121.
- [5] *Ентов В.М., Заовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. — М.: Недра, 1988, 231 с.
- [6] *Колдоба А.В., Колдоба Е.В.* Разрывные решения многокомпонентной фильтрации.— Препринт N85 ИПМ РАН, 1999, 20с.
- [7] *Koldoba A. V., Koldoba E. V.* The Discontinuous Solutions of the Transport Equations for Compositional Flow in Porous Media. — Transport in Porous Media, vol.52, no.2, August 2003, p. 267-277.
- [8] *Николаевский В.Н., Бондарев Э.А., Муркин М.И., Степанова Г.С., Терзи В.П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. — М.: Недра, 1968.
- [9] *Пригожин И., Дефэй Р.* Химическая термодинамика. — Новосибирск: Наука, 1966, 509 с.
- [10] *Радвогин Ю.Б.* Характеристические свойства уравнений двухкомпонентной фильтрации.— Препринт N37 ИПМ РАН, 2001.
- [11] *Розенберг М.Д., Кундин С.А.* Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа.— М.: Недра, 1978.
- [12] *Рыков Ю.Г.* О задаче Римана для системы уравнений двухкомпонентной двухфазной фильтрации в пористых средах в случае сжимаемости обеих фаз.— Препринт N59 ИПМ РАН, 2007, 16с.
- [13] *Bedrikovetsky, P.G.* Mathematical Theory of Oil & Gas Recovery (with applications to ex-USSR oil & gas condensate fields). — Kluwer Academic Publishers. London-Boston-Dordrecht. 1993.

- [14] *Schaefer D.G., Shearer M.* The classification of 2x2 system of non-strictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery. — Communications on Pure and Applied Mathematics, V.XL, p.141-178, (1987).
- [15] *Harten A.* On the symmetric form of Systems of Conservation Laws with Entropy. — J. Comp. Phys., No.49, p.151-164, (1983).
- [16] *Orr F.M.Jr* Theory of Gas Injection Processes. — Stanford University, California, 2005, 283 p.