



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 78 за 2008 г.



**Боговалов С.В., Колдоба А.В.,
Устюгова Г.В., Чечеткин В.М.**

Численное моделирование
эволюции Крабовидной
туманности.

II. Вычислительный
алгоритм

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Численное моделирование эволюции Крабовидной туманности. II. Вычислительный алгоритм / С.В.Боговалов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 78. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-78>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.КЕЛДЫША

С.В.Боговалов, А.В.Колдоба,
Г.В.Устюгова, В.М.Чечеткин

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭВОЛЮЦИИ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ.
II. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ.

Москва 2008

С.В.Боговалов, А.В.Колдоба,
Г.В.Устюгова, В.М.Чечеткин

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭВОЛЮЦИИ КРАБОВИДНОЙ ТУМАННОСТИ.
II. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ.**

Аннотация

В работе представлен метод численного интегрирования уравнений релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД), разработанный для моделирования взаимодействия ультрарелятивистского ветра, испускаемого пульсаром Краб, с межзвездной средой. Метод основан на разностной схеме гудуновского типа для уравнений РМГД и использует подвижную криволинейную расчетную сетку. Внутренняя граница расчетной области связана с тормозящей ударной волной, внешняя — с контактной поверхностью, разделяющей заторможенную на ударной волне электрон-позитронную плазму и межзвездную среду.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-02-16608, Президиума РАН (программа №4), научной школы НШ-5214.2008.2 и INTAS-ESA (проект 120-99).

S.V.Bogovalov, A.V.Koldoba,
G.V.Ustyugova, V.M.Chechetkin

**NUMERICAL SIMULATION
EVOLUTION OF THE CRAB NEBULA.
II. NUMERICAL ALGORITHM.**

Abstract

It was developed 2D numerical method for modeling of the MHD interaction of the relativistic plasma and interstellar medium. The method is based on Godunov-type difference scheme for RMGD equations and is used moving curvilinear mesh. Inner boundary of computational region is connected with reverse shock, outer boundary — with contact discontinuity separated plerion and interstellar medium.

Оглавление

Расчетная сетка. Разностная схема. Вычисление основных переменных.	3
Вычисление потоков.	10
Расчет скорости головной ударной волны.	16
Литература.	22

2 Вычислительный алгоритм.

2.1 Расчетная сетка. Разностная схема. Вычисление основных переменных.

Как уже отмечалось, в рамках принятого в настоящей работе подхода непосредственно моделируется лишь та часть Крабовидной туманности, которая заключена между головной ударной волной и контактной поверхностью, отделяющей плерион от межзвездной среды и остатков сверхновой. Положение и форма головной ударной волны и контактной поверхности заранее неизвестны, а подлежат определению в ходе интегрирования уравнений, описывающих эволюцию системы. Так как предполагается осевая симметрия течения и симметрия относительно плоскости экватора, то течение рассматривается в первом квадранте полоидальной (r, z) -плоскости в области $ABCD$ (см. рис.1), ограниченной головной ударной волной AB (внутренняя граница) и контактной поверхностью CD (внешняя граница).

Расчетная сетка в области $ABCD$ образована лучами, выходящими из начала координат, и набором линий, внутренняя из которых аппроксимирует головную ударную волну AB , а внешняя — контактную поверхность CD . На рис.5 показана расчетная сетка во всей области моделирования и во внутренней ее части. Лучи распределены равномерно по полярному углу $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Узлы вдоль каждого луча расставляются по формуле $R_{i,j} = q^i R_{0,j}$, где j — номер луча, i — номер узла на луче. Показатель прогрессии q вычисляется из условия, что узел $(0, j)$ лежит на головной ударной волне, а узел (N, j) — на контактной поверхности: $R_{N,j} = q^N R_{0,j}$. Очевидно показатель прогрессии q разный на различных лучах: $q = q_j$. Положение как фронта головной ударной волны, так и контактной поверхности меняется со временем, поэтому меняется и расположение узлов сетки вдоль лучей. Таким образом, расчетная сетка криволинейная и подвижная.

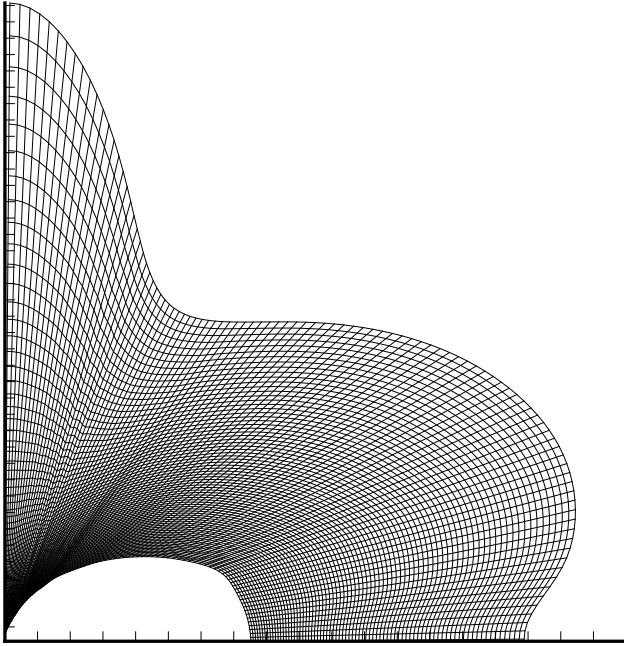


Рис. 5. расчетная область

Все переменные относятся к ячейкам расчетной сетки. На рис.6 показана ячейка расчетной сетки, занимающая на момент времени t в полоидальной (r, z) -плоскости положение $ABCD$, на момент времени $\hat{t} = t + \Delta t$ — положение $\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}$, а на промежуточный момент времени t' — положение $A'B'C'D'$. Отметим, что термин "ячейка" будет использоваться в двух смыслах. С одной стороны, ячейка — это трехмерный пространственный объект, сечение которого (на момент времени t) полоидальной (r, z) -плоскостью есть четырехугольник $ABCD$. Иначе говоря, трехмерная ячейка "замечается" четырехугольником $ABCD$ при его вращении вокруг оси симметрии z . Такая трехмерная ячейка имеет шесть двумерных граней: AB, BC, CD, DA и две торцевые. Такие ячейки используются при аппроксимации уравнений энергии-импульса и неразрывности. С другой стороны, ячейка — это двумерный объект в полоидальной (r, z) -плоскости, торцевая грань трехмерной ячейки. Такая ячейка имеет четыре одномерных ребра: AB, BC, CD, DA .

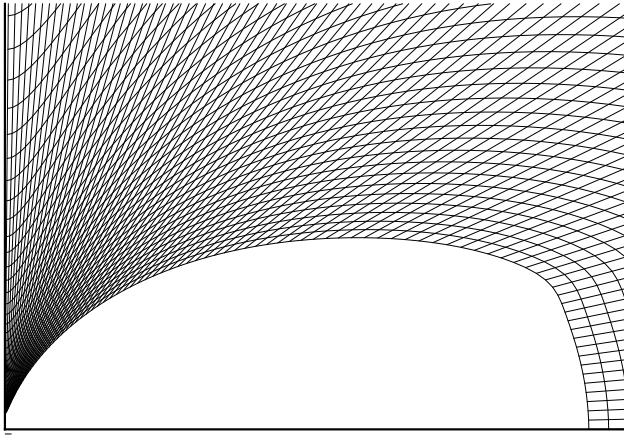


Рис. 6. внутренняя часть расчетной области

Такие ячейки используются при аппроксимации уравнения индукции. Тем не менее мы будем использовать термин "ячейка" применительно к обоим этим геометрическим объектам, так как в полоидальной плоскости они изображаются одним четырехугольником. О каком типе ячейки идет речь в том или ином случае будет ясно из контекста и употреблению для обозначения сторон терминов "грань" или "ребро".

Алгоритм вычисления переменных на верхнем временном слое состоит из двух этапов.

На первом этапе по величинам на явном временном слое t вычисляются скорости распространения элементов фронта головной ударной волны вдоль всех лучей сетки. Для этого, по описанной ниже в п.8 процедуре, вычисляются скорости элементов фронта головной ударной волны по нормали к соответствующим граням, аппроксимирующим положение этой ударной волны. По этим скоростям затем определяются скорости ударной волны вдоль лучей. Вычисляются скорости движения элементов контактной поверхности, разделяющей плерион и межзвездную среду. Определяется положение внутренней (головная ударная волна) и внешней (контактная поверхность) границ расчетной области на промежуточном временном слое

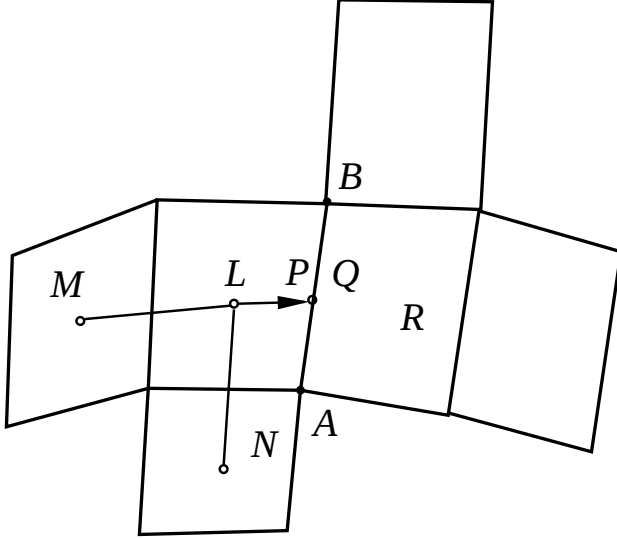


Рис. 7. шаблон для расчета потоков

$t' = t + \Delta t/2$ и положение узлов расчетной сетки на этот момент времени. Производится расчет с первым порядком аппроксимации потоков консервативных переменных через внутренние грани расчетной сетки (см.п.7) и через грани, расположенные на внутренней границе (головная ударная волна) (см.п.8). Вычисляются значения консервативных переменных на промежуточном временном слое по консервативной схеме

$$V'f' = Vf - \sum_{\sigma} \mathcal{F}^{\sigma} - \mathcal{H} ,$$

$$S'\gamma'h' = S\gamma h - \sum_{\lambda} \mathcal{G}^{\lambda} .$$

Здесь переменная f обозначает одну из консервативных переменных в ячейке $ABCD$: плотность энергии, плотность импульса, плотность числа частиц в лабораторной системе отсчета; $\mathcal{F}^{\sigma}$ — потоки соответствующей величины через грани $\sigma = \{AB, BC, CD, DA\}$ за интервал времени $\Delta t/2$; $\mathcal{H}$ — потоки

через торцевые грани (для компонент плотности импульса); V, V' — объемы ячейки $ABCD$ на нижнем и промежуточном временных слоях; $\mathcal{G}^\lambda$ — циркуляция электрического поля по ребрам $\lambda = \{AB, BC, CD, DA\}$ ячейки $ABCD$; S, S' — площади ячейки $ABCD$ на нижнем и промежуточном временных слоях. По значениям консервативных переменных вычисляются основные переменные. Алгоритм этого пересчета описан ниже.

На втором этапе производятся те же действия, но смещения узлов сетки вычисляются на основе положения головной ударной волны и положения контактной границы на верхнем временном слое, а потоки по значениям переменных на промежуточном временном слое со вторым порядком аппроксимации. Алгоритм расчета потоков будет описан в п.7.

В результате выполнения шага интегрирования по времени вычисляются плотности консервативных переменных:

- 1) энергии $\gamma^2(w + h^2) - (p + h^2/2) = A$,
- 2) импульса $\gamma^2(w + h^2)\mathbf{v} = \mathbf{B}$,
- 3) магнитного поля $\gamma h = C$,
- 4) числа частиц $\gamma n = D$.

Эти соотношения образуют систему нелинейных алгебраических уравнений, из которой необходимо определить основные переменные u^i, h^i, p, n (для 4-векторов только ненулевые компоненты) на промежуточном t' или верхнем $\hat{t}$ временном слое.

Обозначим $\gamma^2(w + h^2) = z$. Второе уравнение запишем в виде $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{B}}{z}$, откуда $\frac{1}{\gamma^2} = 1 - v^2 = 1 - \frac{B^2}{z^2}$. Здесь $v = |\mathbf{v}|, B = |\mathbf{B}|$.

Из определения z с учетом третьего уравнения получаем

$$w = \frac{\Gamma p}{\Gamma - 1} = \frac{z - C^2}{\gamma^2} = (z - C^2) \left(1 - \frac{B^2}{z^2}\right),$$

$$h^2 = \frac{C^2}{\gamma^2} = C^2 \left(1 - \frac{B^2}{z^2}\right).$$

Первое уравнение принимает теперь вид

$$z - \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}(z - C^2) \left(1 - \frac{B^2}{z^2}\right) - \frac{C^2}{2} \left(1 - \frac{B^2}{z^2}\right) = A$$

и после умножения на Γz^2 приводится к кубическому уравнению

$$z^3 + ((\Gamma/2 - 1)C^2 - \Gamma A) z^2 + (\Gamma - 1)B^2 z + (1 - \Gamma/2)B^2 C^2 = 0 \quad . \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) имеет три корня, из которых надо выбрать "правильный". По своему смыслу "правильный" корень уравнения (2.1) должен удовлетворять условиям $z > C^2$, $z > B$. Последнее из них гарантирует выполнение неравенства $v < 1$.

Для того, чтобы уравнение (2.1) имело "правильный" корень, величины A , B , C сами должны удовлетворять некоторым условиям. Как показывает вычислительная практика, для рассматриваемого класса задач критическим является выполнение неравенства $z > B$.

Рассмотрим сначала случай гидродинамического течения, когда отсутствует магнитное поле и $C = 0$. Уравнение (2.1) принимает вид

$$z^3 - \Gamma A z^2 + (\Gamma - 1)B^2 z = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Корень $z = 0$ очевидно не подходит и остается изучить корни квадратного уравнения

$$z^2 - \Gamma A z + (\Gamma - 1)B^2 = 0 \quad .$$

Это уравнение имеет корень $z = B$ при $A = B$.

Представим (2.2) в виде

$$z^2 - B^2 = \Gamma(Az - B^2)$$

Графики левой и правой частей последнего соотношения показаны на рис.7. Из геометрических соображений ясно, что это уравнение будет иметь корень $z > B$ при выполнении условия $A > B^2$.

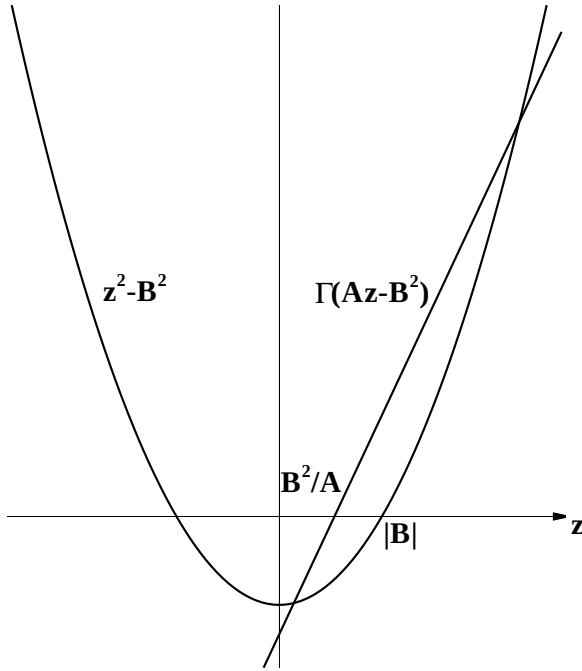


Рис. 8.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Уравнение (2.1) представим в виде

$$P_1(z) = z^3 - \Gamma A z^2 + (\Gamma - 1)B^2 z = (1 - \Gamma/2)C^2(z^2 - B^2) = P_2(z)$$

На рис.8 показаны графики правой и левой части этого соотношения при $A = B$, когда левая часть обращается в ноль при $z = B$.

Будем менять параметр A . Если A увеличивается, то есть $A > B$, то кубическая парабола $z^3 - \Gamma A z^2 + (\Gamma - 1)B^2 z$ пересекает ось абсцисс правее точки $z = B$. Координата ее пересечения с параболой $(1 - \Gamma/2)C^2(z^2 - B^2)$ зависит от соотношения между наклонами касательных к этим параболам в точке $z = B$. Если наклон кубической параболы больше, то при увеличении A будет увеличиваться и z -координата точки пересечения парабол, то есть "правильный" корень уравнения (2.1). В противном случае "правильный" корень будет увеличиваться при уменьшении A . Вычисления дают:

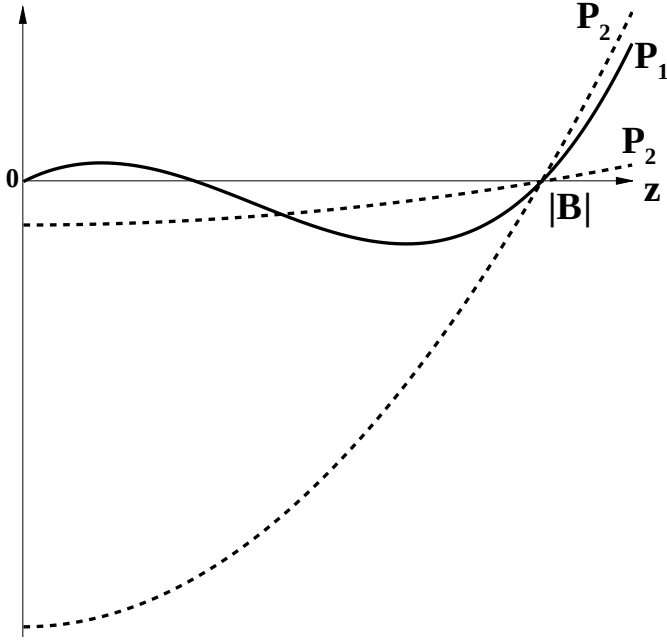


Рис. 9.

$$\left(\frac{dP_1}{dz} \right)_{z=B, A=B} = 2B^2, \quad \left(\frac{dP_2}{dz} \right)_{z=B} = (2 - \Gamma)C^2 B.$$

Таким образом, уравнение (2.1) имеет корень $z > B$ при выполнении одного из двух следующих условий:

$$(1 - \Gamma/2)C^2 < B < A, \quad \text{либо} \quad 0 < A < B < (1 - \Gamma/2)C^2.$$

2.2 Вычисление потоков.

Для построения разностной схемы годуновского типа на подвижной сетке основной интерес представляют потоки консервативных переменных (энергии-импульса, электромагнитного поля, числа частиц) через подвижные грани расчетной ячейки.

Пусть грань, в момент времени t занимавшая положение AB , в момент $\hat{t} = t + \Delta t$ занимает положение $\hat{A}\hat{B}$. Обозначим 4-вектор площади грани через S_k . Интересующая нас величина потоков через подвижную грань есть

$$S_k \mathcal{F}^k = \{S_k T^{ik}; S_k G^{ik}; S_k p^{1/\Gamma} u^k; S_k n u^k\} \quad .$$

Исходный разрыв располагался вдоль линии AB , поэтому в лабораторной системе отсчета фронты всех волн в каждый момент времени параллельны линии, проходящей через точки A и B . Для построения разностной схемы второго порядка точности мы будем считать, что распад разрыва происходит в некоторый промежуточный момент времени на некоторой линии $A'B'$. В качестве точек A' и B' естественно принять положение узлов сетки A и B в момент времени $t' = t + \Delta t/2$. Пусть в лабораторной системе отсчета $\zeta_k = \{0, \zeta\}$ единичный вектор, ортогональный линии $A'B'$, а $\xi_k = \{-1, 0\}$ единичный вектор во временном направлении. Тогда 4-вектор площади грани может быть представлен в виде $S_k = \Delta V \xi_k + \Delta t S \zeta_k$, где по смыслу ΔV есть объем, заемаемый гранью AB за интервал времени между t и $t + \Delta t$, S — площадь грани $A'B'$ в трехмерном пространстве в лабораторной системе отсчета. Аналогично, 4-векторы нормалей к фронтам всех волн, возникающих при распаде разрыва имеют вид $\nu_{k,a} = \lambda_a \xi_k + \zeta_k$.

Чтобы рассчитать амплитуды волн, возникающих при распаде разрыва, в рамках рассматриваемого подхода необходимо знание базиса, сопряженного базису, образованного "векторами" $\mathcal{R}_a$. Согласно [16, 18] "векторы" этого сопряженного базиса связаны с левыми нуль-векторами $\mathcal{L}_a$ матриц $\nu_{k,a} \mathcal{A}^k$ соотношениями

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{L}_a \xi_k \mathcal{A}^k \quad .$$

Векторы $\mathcal{P}_a$ для допустимых волн имеют вид

$$\mathcal{P}_F = \{ -\omega(w + h^2)(\xi_k u^k r_i - \omega \xi_i); \xi_k s^k h_i; \xi_k s^k; 0 \} \quad ,$$

$$\mathcal{P}_C = \{ 0_i; -t_i; \frac{h}{\Gamma p}; 0 \} \quad ,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_T &= \{ (w + h^2)\xi_k u^k e_i; \xi_k e^k h_i; \xi_k e^k; 0 \} \ , \\ \mathcal{P}_E &= \{ 0_i; 0_i; -\frac{n}{\Gamma p}; 1 \} \ .\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{P}_F, \mathcal{R}_F \rangle &= 2(\Gamma p + h^2)\xi_k s^k \ , \quad \langle \mathcal{P}_C, \mathcal{R}_C \rangle = 1 + \frac{h^2}{\Gamma p} \ , \\ \langle \mathcal{P}_T, \mathcal{R}_T \rangle &= (w + h^2)\xi_k u^k \ , \quad \langle \mathcal{P}_E, \mathcal{R}_E \rangle = 1 \ .\end{aligned}$$

Остальные "скалярные произведения" $\langle \mathcal{P}_a, \mathcal{R}_b \rangle = 0$ при $a \neq b$.

Величина исходного скачка переменных $\mathcal{U} = \{u^i; h^i; p; n\}$ между ячейками, которые мы условно пометим индексом L и R может быть представлена в виде

$$d\mathcal{U} = \mathcal{U}(R) - \mathcal{U}(L) = \sum_a \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle \mathcal{R}_a \ . \quad (2.3)$$

Здесь принимается, что "векторы" $\mathcal{P}_a$ взаимного базиса нормированы таким образом, что $\langle \mathcal{P}_a, \mathcal{R}_a \rangle = \delta_{ab}$, где δ_{ab} — символ Кронеккера. "Векторы" нормированного базиса получаются заменой $\mathcal{P}_a \rightarrow \frac{\mathcal{P}_a}{\langle \mathcal{P}_a, \mathcal{R}_a \rangle}$.

В представлении (2.3) принимают участие только векторы, соответствующие допустимым волнам, то есть состояния $\mathcal{U}(L)$ и $\mathcal{U}(R)$ таковы, что $\langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle = 0$ для всех $\mathcal{P}_a$, соответствующих недопустимым волнам.

При переходе через фронт волны типа a в направлении $L \rightarrow R$ переменные $\mathcal{U}$ испытывают скачок $[\mathcal{U}]_a = \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle \mathcal{R}_a$, а потоки консервативных переменных

$$\begin{aligned}S_k[\mathcal{F}^k]_a &= S_k \mathcal{A}^k [\mathcal{U}]_a = S_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle = \\ &= (\Delta V \xi_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a + \Delta t S \zeta_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a) \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle \ .\end{aligned} \quad (2.4)$$

С другой стороны, подставляя $\nu_{k,a} = \lambda_a \xi_k + \zeta_k$, в соотношения $\nu_{k,a} \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a = 0$, находим

$$\lambda_a \xi_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a + \zeta_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a = 0 \ . \quad (2.5)$$

Комбинируя (2.4) и (2.5), получаем

$$S_k[\mathcal{F}^k] = (\Delta V - \Delta t S \lambda_a) \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle \xi_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a \quad (2.6)$$

Поток через подвижную грань может быть аппроксимирован следующим образом

$$S_k \mathcal{F}^k = \frac{1}{2} (S_k \mathcal{F}^k(L) + S_k \mathcal{F}^k(R)) + \frac{1}{2} \sum_a |\Delta t S \lambda_a - \Delta V| \mathcal{Q}_a \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle \quad ,$$

где $\mathcal{Q}_a = \xi_k \mathcal{A}^k \mathcal{R}_a$.

Для допустимых волн:

$$\mathcal{Q}_F = \{-\omega(w + h^2)(u^i \xi_k r^k + r^i \xi_k u^k) + (\Gamma w + 2h^2)u^i \xi_k u^k + (\Gamma p + h^2)\xi^i;$$

$$h^i \xi_k s^k; p^{1/\Gamma} \xi_k s^k; n \xi_k s^k\} \quad ,$$

$$\mathcal{Q}_C = \left\{ \frac{2 - \Gamma}{\Gamma - 1} h u^i \xi_k u^k; -t^i \xi_k u^k; \frac{h p^{1/\Gamma - 1}}{\Gamma} \xi_k u^k; \frac{h n}{\Gamma p} \xi_k u^k \right\} \quad ,$$

$$\mathcal{Q}_T = \{(w + h^2)e^i \xi_k u^k; h^i \xi_k e^k; p^{1/\Gamma - 1} \xi_k e^k; n \xi_k e^k\} \quad ,$$

$$\mathcal{Q}_E = \{0^i; 0^i; 0; \xi_k u^k\} \quad ,$$

$$\langle \mathcal{P}_F, d\mathcal{U} \rangle = \xi_k s^k dq - \omega(w + h^2)(\xi_k u^k r_i - \omega \xi_i) du^i \quad ,$$

$$\langle \mathcal{P}_C, d\mathcal{U} \rangle = -p^{1/\Gamma} d(h p^{-1/\Gamma}) \quad ,$$

$$\langle \mathcal{P}_T, d\mathcal{U} \rangle = \xi_k e^k dq + (w + h^2) \xi_k u^k e_i du^i \quad ,$$

$$\langle \mathcal{P}_E, d\mathcal{U} \rangle = p^{1/\Gamma} d(n p^{-1/\Gamma}) \quad .$$

Для аппроксимации уравнений РМГД на криволинейной сетке используется следующий подход. Проводится реконструкция переменных на левой и правой сторонах грани AB , разделяющей ячейки L и R . Реконструкция переменных на левой стороне грани AB состоит в их линейной экстраполяции в центр отрезка по шаблону (см.рис.9) Аналогичным образом проводится реконструкция на правую сторону грани AB — линейная экстраполяция в точку Q . Здесь L, M, N — центры тяжести соответствующих ячеек. При линейной экстраполяции значения переменной f в точках P, L, M, N ,

обозначаемые $f(P)$, $f(L)$, $f(M)$, $f(N)$, связаны линейным соотношением. Коэффициенты этого соотношения таковы, что при подстановке в качестве $\{f(P), f(L), f(M), f(N)\}$ наборов $\{1, 1, 1, 1\}$, $\{x(P), x(L), x(M), x(N)\}$, $\{y(P), y(L), y(M), y(N)\}$ оно обратится в тождество. Здесь $(x(P), y(P))$, $(x(L), y(L))$, $(x(M), y(M))$, $(x(N), y(N))$, — координаты точек P, L, M, N .

Линейная форма, удовлетворяющая этим соотношениям имеет вид

$$\begin{vmatrix} f(P) & f(L) & f(M) & f(N) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x(P) & x(L) & x(M) & x(N) \\ y(P) & y(L) & y(M) & y(N) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая детерминант, получаем

$$f(P) = f(L) + \frac{\Delta_M}{\Delta} (f(M) - f(L)) + \frac{\Delta_N}{\Delta} (f(N) - f(L))$$

где

$$\Delta = (x(M) - x(L)) (y(N) - y(L)) - (y(M) - y(L)) (x(N) - x(L))$$

$$\Delta_M = (x(P) - x(L)) (y(N) - y(L)) - (y(P) - y(L)) (x(N) - x(L))$$

$$\Delta_N = (x(M) - x(L)) (y(P) - y(L)) - (y(M) - y(L)) (x(P) - x(L))$$

В качестве экстраполируемых выбирались величины, скачки которых входят в определение амплитуд волн: компоненты 4-вектора скорости u^i , полное давление $p + \frac{h^2}{2}$, обратная энтропия $\frac{n}{p^{1/\Gamma}}$ и $\frac{h}{p^{1/\Gamma}}$.

Потоки энергии-импульса вычисляются по формулам

$$\mathcal{F}^i = \frac{1}{2} S_k (T^{ik}(L) + T^{ik}(R)) + \frac{1}{2} \sum_a |\eta| C_a \mathcal{R}_a^i \quad (2.7)$$

Здесь индекс i нумерует компоненту импульса; $T^{ik}(L)$, $T^{ik}(R)$ — компоненты тензора энергии-импульса в ячейках L и R соответственно; $\eta = (S_k - \Delta t S n u_k) \xi^k = \Delta t S \lambda_a - \Delta V$; C_a — амплитуда волны a -типа.

Для вычисления амплитуд волн C_a используется следующий алгоритм. Вычисляются амплитуды волн по состояниям $L - R$, $L - P$, $Q - R$:

$$A_a = \langle \mathcal{P}_a, d\mathcal{U} \rangle$$

$$A'_a = \langle \mathcal{P}_a, d'\mathcal{U} \rangle$$

$$A''_a = \langle \mathcal{P}_a, d''\mathcal{U} \rangle$$

где $d\mathcal{U} = \mathcal{U}(R) - \mathcal{U}(L)$, $d'\mathcal{U} = \mathcal{U}(P) - \mathcal{U}(L)$, $d''\mathcal{U} = \mathcal{U}(R) - \mathcal{U}(Q)$.

Амплитуды C_a вычисляются по формулам

$$C_a = A_a - \text{limiter}(A_a, B_a)$$

где

$$B_a = \begin{cases} A'_a & \text{при } \eta \geq 0 \\ A''_a & \text{при } \eta \leq 0 \end{cases}.$$

При проведении расчетов использовался ограничитель потоков `minmod`

$$\text{limiter}(A, B) = \text{minmod}(A, \varepsilon B)$$

где $\varepsilon \geq 0$ — параметр, регулирующий устойчивость схемы. В расчетах полагалось $\varepsilon = 1.5$

Для вычисления электрического поля на грани AB использовалась формула, аналогичная (2.7)

$$\mathcal{G}^i = \frac{1}{2} L_k (G(L)^{ik} + G(R)^{ik}) + \frac{1}{2} \sum_a |\tau| C_a \mathcal{R}_a^i \quad (2.8)$$

Здесь индекс i нумерует компоненту магнитного поля; индексы L , R указывают, что величины вычисляются в соответствующих ячейках;

$$\tau = (L_k - \Delta t L \nu_k) \xi^k = \Delta t L \lambda_a - \Delta S.$$

Различие (2.7) и (2.8) состоит только в замене 4-вектора площади грани S^k на 4-вектор длины ребра L^k : $L^0 = \Delta S$ — площадь, заметаемая ребром AB за время Δt , $\mathbf{L} = L\zeta$, L — длина ребра AB .

2.3 Расчет скорости головной ударной волны.

Как уже отмечалось, прямое численное моделирование течения плазмы проводится только в плерионе (область $ABCD$ на рис.1), границы которого заранее неизвестны. Процессы в ультрарелятивистском ветре (область OAB) и в межзвездной среде не моделируются, а их влияние на течение плазмы в плерионе учитывается эффективным образом, определяя границы расчетной области. Для расчета положения головной ударной волны AB используется приближенное решение задачи о распаде разрыва между ультрарелятивистским ветром от центрального источника и плазмой на внутренней границе плериона.

Итак, рассматривается задача Римана о распаде разрыва между состоянием, описывающим ультрарелятивистский ветер (индекс "0"), и состоянием за ударной волной (индекс "1"). Скорость плазмы в обоих состояниях имеет две компоненты, магнитное поле — одну компоненту, перпендикулярную вектору скорости. В результате распада разрыва образуются распространяющаяся налево (относительно вещества) ударная волна, распространяющаяся направо центрированная волна разрежения или ударная волна и тангенциальный разрыв (см.рис.10). Задача о распаде разрыва решается в акустическом приближении, которое состоит в следующем:

1) считается, что распространяющаяся налево ударная волна является почти стоячей и вариации МГД-величин за ударной волной (в области "2") могут быть с достаточной точностью описаны линеаризованными условиями Гюгонио (относительно основной конфигурации, когда ударная волна является стоячей);

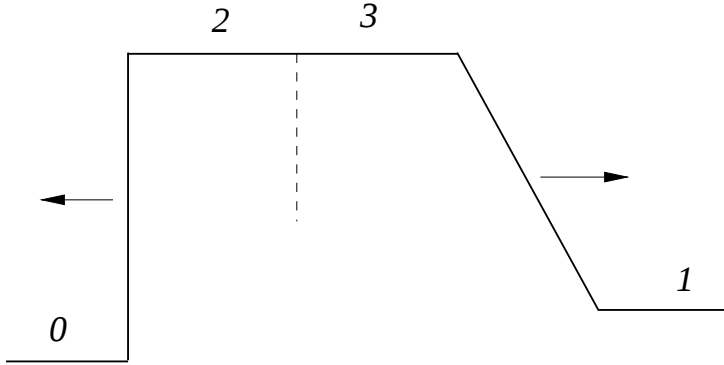


Рис. 10. схема распада разрыва

2) вариации МГД-величин за распространяющейся направо волной разрежения или ударной волной (в области "3") могут быть с достаточной точностью описаны линеаризованными (относительно состояния "1") уравнениями РМГД.

Амплитуды волн, распространяющихся по состояниям "0" и "1", и соответственно вариации МГД-величин за ними выбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям сопряжения на тангенциальном разрыве.

Получим эти условия. Соотношения Гюгонио на тангенциальном разрыве имеют вид (1.9) с $\omega = \nu_k u^k = 0$ слева и справа от разрыва. Отсюда следует непрерывность на тангенциальном разрыве нормальной компоненты скорости v_x и полного давления $q = p + \frac{h^2}{2} = p + \frac{H^2}{8\pi\gamma^2}$.

На рис.11 изображена (v_x, q) - диаграмма распада разрыва в РМГД. Кривая α есть ударная адиабата, построенная из точки A , — геометрическое место точек, изображающих на плоскости (v_x, q) возможные состояния за распространяющейся налево ударной волной. Точка E соответствует конфигурации когда ударная волна является стоячей. В этом случае за ударной волной $v_x(E) = \tau \cos \psi$, $q(E) = Q(1 - \tau) \cos^2 \psi$, Q — плотность потока энергии.

Кривая β — "ударная адиабата", построенная из точки B , изображающая

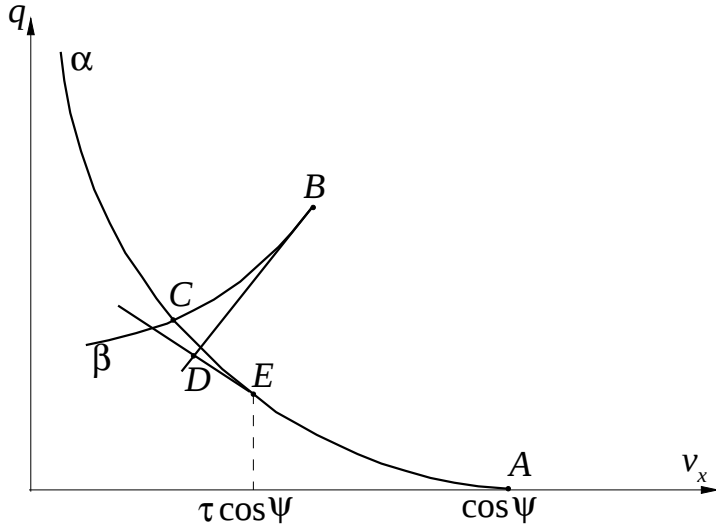


Рис. 11. релятивистская ударная адиабата

возможные состояния за распространяющейся налево волной разрежения (ударной волной). Точка C пересечения кривых α и β изображает состояние между волнами при точном решении задачи Римана. В предлагаемом подходе состояние между волнами изображается точкой D пересечения касательных к ударным адиабатам α и β в точках E и B соответственно. Из рис.11 ясно, что приближенное решение будет тем точнее, чем ближе точка B к ударной адиабате α . Отметим, что для построения вычислительного алгоритма необходимо определить только скорость ударной волны, распространяющейся налево.

Рассмотрим теперь соотношения на волнах $0 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$. Дифференцирование соотношений Гюгонио на ударной волне $0 \rightarrow 1$ в точке E дает

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_x}{dV} \right)_\alpha &= (\tau - 1)(\tau \cos^2 \psi - 1) , \\ \left(\frac{dq}{dv_x} \right)_\alpha &= -2Q \cos \psi , \\ \left(\frac{dq}{dV} \right)_\alpha &= -2Q(\tau - 1)(\tau \cos^2 \psi - 1) \cos \psi . \end{aligned} \tag{2.9}$$

На волне разрежения (ударной волне), распространяющейся направо изменения МГД-величин пропорциональны компонентам правого нуль - вектора

соответствующего типа волны. Для магнитозвуковой волны, распространяющейся направо согласно п.5

$$[\gamma] : [\gamma v_x] : [h] : [p] = \omega r_t : -\omega r_x : h : \Gamma p \quad , \quad (2.10)$$

где $\omega = \nu_i u^i$, а 4-вектор нормали ν_i нормирован таким образом, что 4-вектор $r_i = \nu_i + \omega u_i$ имеет единичную длину.

Чтобы избавиться от этого ограничения, заметим, что при этом $\nu^2 = 1 - \omega^2$ и дисперсионное уравнение (1.17) для быстрых магнитозвуковых волн дает $\omega^2 = \frac{a^2 + c^2}{1 + a^2}$, $a^2 = \frac{h^2}{w}$ (при условии $r^2 = 1$). С учетом этого соотношения конструкция ωr_t может быть преобразована к виду

$$\omega r_t = \frac{a^2 + c^2}{1 + a^2} \frac{r_t}{\omega} \quad ,$$

который уже не зависит от нормировки 4-вектора ν_i , так как числитель и знаменатель правой части есть линейные формы относительно компонент ν_i . Из (2.10) тогда следует, что

$$[q] = [p] + h[h] = \frac{\omega(\Gamma p + h^2)}{r_t} \frac{1 + a^2}{a^2 + c^2} [\gamma] = \frac{\omega(w + h^2)}{r_t} [\gamma] \quad ,$$

$$[v_x] = \frac{[\gamma v_x] - v_x [\gamma]}{\gamma} = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{r_x}{r_t} + v_x \right) [\gamma] \quad .$$

Отсюда

$$\frac{[q]}{[v_x]} = -\frac{\gamma \omega (w + h^2)}{r_x + v_x r_t} \quad .$$

Так как $\nu_i = (-\lambda, 1, 0, 0)$, то

$$\omega = \gamma(v_x - \lambda) \quad , \quad \nu^2 = 1 - \lambda^2 \quad ,$$

$$r_i = (-\lambda - \omega \gamma, 1 + \omega \gamma v_x, \omega \gamma v_y, 0) \quad ,$$

$$r_x + v_x r_t = 1 - \lambda v_x \quad .$$

Скорость волны λ удовлетворяет уравнению (1.17)

$$(1 - c^2)\omega^2 = (a^2 + c^2)\nu^2 \quad ,$$

которое после подстановки ω и ν^2 принимает вид

$$(1 - c^2)\gamma^2(v_x - \lambda)^2 = (a^2 + c^2)(1 - \lambda^2) \quad .$$

Так же как и в [17, 18] удобно положить

$$\lambda = \frac{v_x + \mu}{1 + \mu v_x} \quad .$$

При этом

$$\lambda - v_x = \frac{\mu(1 - v_x^2)}{1 + \mu v_x} \quad , \quad 1 - \lambda^2 = \frac{(1 - \mu^2)(1 - v_x^2)}{(1 + \mu v_x)^2} \quad ,$$

$$1 - \lambda v_x = \frac{1 - v_x^2}{1 + \mu v_x} \quad .$$

Относительно μ последнее уравнение преобразуется к виду

$$k(1 - c^2)\mu^2 = (a^2 + c^2)(1 - \mu^2) \quad ,$$

где $k = \gamma^2(1 - v_x^2) \geq 1$.

Так как волна движется направо, нужный корень есть

$$\mu = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{a^2 + c^2 + k(1 - c^2)}} < 1 \quad . \quad (2.11)$$

Далее имеем:

$$\omega = -\frac{\gamma\mu(1 - v_x^2)}{1 + \mu v_x} \quad , \quad r_x + v_x r_t = \frac{1 - v_x^2}{1 + \mu v_x} \quad ,$$

и соответственно

$$\frac{[q]}{[v_x]} = \gamma^2(w + h^2)\mu \quad .$$

Таким образом вдоль кривой β :

$$\left(\frac{dq}{dv_x}\right)_\beta = \gamma^2(w + h^2)\mu \quad , \quad (2.12)$$

где все величины вычисляются в точке B (см.рис.11).

Приближенное состояние между волнами определяется из системы

$$q = q(E) + \left(\frac{dq}{dv_x}\right)_\alpha (v_x - v_x(E)) \quad ,$$

$$q = q(B) + \left(\frac{dq}{dv_x} \right)_\beta (v_x - v_x(B)) \quad ,$$

где $\left(\frac{dq}{dv_x} \right)_\alpha$, $\left(\frac{dq}{dv_x} \right)_\beta$ даются формулами (2.9), (2.11), (2.12);
 $v_x(E) = \tau \cos \psi$.

В этом приближении скорость распространяющейся налево волны вычисляется как

$$V = \frac{(q(B) - q(E)) - (dq/dv_x)_\beta (v_x(B) - v_x(E))}{(dq/dV)_\alpha - (dq/dv_x)_\beta (dv_x/dV)_\alpha} \quad .$$

Список литературы

- [1] Rees M.J., Gunn J.E. The origin of the magnetic field and relativistic particles in the Crab Nebula. MNRAS, 1974, 167, 1-12.
- [2] Kennel C.F., Coroniti F.V. Confinement of the Crab Nebula pulsar's wind by its supernova remnant. ApJ, 1984, 283, 694-709.
- [3] Anile A.M. Relativistic Fluids and Magnetofluids. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [4] Lichnerowicz A. Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics. Benjamin, New York, 1967.
- [5] Brio M., Wu C.C. An Upwind Differencing Scheme for the Equations of Ideal Magnetohydrodynamics. J.Comput.Phys., 1988, v.75, p.400-422.
- [6] Komissarov S.S. A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics. MNRAS, 1999, 303, 343-366.
- [7] van Putten M.H.P.M. A Numerical Implementation of MHD in Divergence Form. JCPH, 1993, 105, 339-353.
- [8] van Putten M.H.P.M. Uniqueness in MHD in Divergence Form: right nullvectors and well-posedness. astro-ph/9804139.
- [9] Bogovalov S.V. Acceleration of relativistic plasma in the magnetosphere of an axisymmetric rotator. 1997, 327, 662-670.
- [10] Bogovalov S.V. Astron. & Astrophys., 2001, 371, 1155.
- [11] Bogovalov S.V., Khangoulia D.V. Astron. Lettets, 2002, 28, 373.
- [12] Bogovalov S.V., Khangoulia D.V. MNRAS, 2002, 336, L53.
- [13] Khangoulia D.V., Bogovalov S.V. Astron. Lettets, 2003, 29, 495.

- [14] Roe P.L. Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1986, 18, 337-365.
- [15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: "Наука", 1988.
- [16] Колдоба А.В., Устюгова Г.В. Приближенное решение задачи Римана уравнений релятивистской магнитной гидродинамики, препринт ИПМ РАН, N67, 1999г.
- [17] Колдоба А.В., Устюгова Г.В. Разностная схема годуновского типа для уравнений релятивистской магнитной гидродинамики. *ЖВМиМФ*, 2002, т.42, N10, с.1584-1599.
- [18] Koldoba A.V., Kuznetsov O.A., Ustyugova G.V. An approximate Riemann solver for relativistic magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 2002, 333, p.932-942.
- [19] Del Zanna L., Bucciatini N. An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows. I. Hydrodynamics. *arxiv:astro-ph/0205290 v1*, 179 May 2002.
- [20] Del Zanna L., Bucciatini N., Londrillo P. An efficient shock-capturing central-type scheme for multidimensional relativistic flows. II. Magnetohydrodynamics. *arxiv:astro-ph/0210618 v1*, 29 Oct 2002.
- [21] Bucciatini N., Blondin J.M., Del Zanna L., Amato E. Spherically symmetric relativistic MHD simulations of pulsar wind nebulae in supernova remnant. *arxiv:astro-ph/0303491 v1*, 21 Mar 2003.