



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 84 за 2008 г.



Довгилович Л.Е., [Софронов И.Л.](#)

О применении компактных
схем для решения
волнового уравнения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Довгилович Л.Е., Софронов И.Л. О применении компактных схем для решения волнового уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 84. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-84>

ISSN 2071-2898



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

Л.Е. Довгилович,
И.Л. Софронов

О ПРИМЕНЕНИИ
КОМПАКТНЫХ СХЕМ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Препринт №

Москва

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии Наук

Л.Е. Довгилович, И.Л. Софронов

**О применении компактных схем для решения
волнового уравнения**

Москва

Довгилевич Л.Е., Софронов И.Л.

О применении компактных схем для решения волнового уравнения

Аннотация

В работе проводится подробное сравнение одномерных компактных схем и центрально-разностных схем, аппроксимирующих вторую производную. В основу критерия положено количество операций, необходимое для получения заданной точности. Предложены экономные алгоритмы решения волнового уравнения с использованием компактных схем высокого порядка точности. Рассмотрен вопрос аккуратного вычисления компактными схемами второй производной вблизи границы, включая случай характеристических граничных условий. Одним из выводов является то, что, начиная с 6-го порядка точности компактные схемы с «трехточечным» оператором в левой части являются более экономичными, чем центрально-разностные.

Dovgilovich L.E., Sofronov I.L.

On application of compact schemes for solving the wave equation

Abstract

A detailed comparison of one-dimensional compact schemes versus central-difference ones approximating the second derivative is done. The comparison criterion is based on computational costs required achieving a given accuracy. Low-cost algorithms for solving the wave equation with use of the highly-accurate compact schemes are proposed. The issues of accurate calculation by compact schemes of the second derivative near to boundaries, including a case of characteristic boundary conditions are considered. One of conclusions is that beginning from the 6th order of accuracy the compact schemes with the “three-point” left-hand-side operators are more effective than their central-difference counterparts.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 07-01-00476

Электронная версия размещена по адресу:

http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/publications/cgd_publ.htm.

Содержание

1	Введение	4
2	Аппроксимация второй производной.....	5
2.1	Рассматриваемые схемы	6
2.2	Оценки точности и погрешности аппроксимации	8
2.3	Обработка границ	9
3	Разностные алгоритмы решения волнового уравнения	17
3.1	Постановка задачи	17
3.2	Построение численных алгоритмов	18
3.2.1	Пространственная дискретизация.....	18
3.2.2	Дискретизация по времени	19
3.3	Граничные условия.....	20
4	Численные результаты	21
4.1	Одномерная задача	21
4.2	Двумерная задача.....	24
5	Заключение.....	25
	Литература	26

1 Введение

Волновое уравнение необходимо решать во многих прикладных задачах. Например, при сейсморазведке методом RTM (Reverse Time Migration) проводится массовый счет трехмерных волновых уравнений на сетках порядка 1000 узлов в каждом направлении. В таких приложениях одним из важнейших факторов, подлежащих минимизации, является время расчета задачи. Поскольку оно напрямую зависит от архитектуры и мощности вычислительной системы, мы берем в качестве «независимого» показателя количество операций, которое необходимо выполнить для получения решения с заданной точностью. В данной работе основное внимание уделяется пространственной дискретизации и проводится сравнение между компактными и центрально-разностными аппроксимациями производных. Под компактными аппроксимациями мы будем понимать аппроксимации вида

$$Ag = Bu, \quad (1.1)$$

где вектор g приближает вторую производную некоторой сеточной функции u благодаря специально подобранным сеточным операторам A, B .

Компактные схемы (КС) не новы и им посвящено много исследований [1]. Тем не менее, при попытке применить КС к решению волнового уравнения мы не нашли в доступной литературе прямых ответов на возникшие вопросы. Это и побудило нас провести собственный анализ и выпустить данную работу.

Содержание работы следующее. Вначале проводится подробное сравнение одномерных КС и центрально-разностных схем (ЦРС) по количеству операций, основанное на анализе точности вычисления второй производной

$$\varepsilon = u'' - g, \quad (1.2)$$

а не на погрешности аппроксимации

$$\delta = Au'' - Bu \quad (1.3)$$

как в ряде работ [2] – [4] и др. Затем рассмотренные схемы применяются к задаче о решении волнового уравнения и приводятся результаты численных расчетов, подтверждающие обоснованность такого сравнения. Основным выводом такой, что для схем 4-го порядка ЦРС требуют чуть меньше операций, чем КС, а, начиная с 6-го порядка, наблюдается преимущество последних.

2 Аппроксимация второй производной

Пусть функция $u(x)$ имеет достаточное количество производных на отрезке $[x_{\min}; x_{\max}]$. По значениям функции $u(x_i)$ на равномерной сетке

$$x_i = x_{\min} + ih, \quad h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}, \quad i = 0..N \quad (2.1)$$

мы хотим построить вектор $g = \{g_i\}$ такой, что $g_i \approx u''(x_i)$.

В общем виде мы представим эту задачу как систему линейных уравнений:

$$Ag = Bu, \quad (2.2)$$

где A и B некоторые искомые сеточные операторы.

Тогда вектор точности $\varepsilon = u'' - g$ можно выразить следующим образом

$$\varepsilon = A^{-1}\delta, \quad (2.3)$$

где

$$\delta = Au'' - Bu \quad (2.4)$$

– вектор погрешности аппроксимации.

Схемы вида (2.2) можно классифицировать исходя из вида оператора A .

Например, если A – единичный, то мы получаем стандартные ЦРС.

Отметим что, формула (2.2) описывает не все возможные алгоритмы нахождения второй производной. Например, в статье [2], [3] рассмотрена схема шестого порядка точности – будем называть ее далее «схема CCD», которую можно записать следующим образом.

$$\tilde{A} \begin{Bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{Bmatrix} = \tilde{B} \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{для } \begin{Bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \end{Bmatrix}.$$

2.1 Рассматриваемые схемы

В основном наше внимание привлекают два класса схем: центральные разности, то есть A – единичный, и компактные схемы с трехточечным A . Также для сравнения будут проанализированы схема CCD шестого порядка и схема восьмого порядка вида (2.2), где A и B пятиточечные (далее будем ее называть «CS8-penta»).

Построение схем проведем с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Пусть k обозначает порядок схемы. Для ЦРС уравнение (2.2) можно записать так:

$$g_i = \beta_0 u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j (u_{i+j} + u_{i-j}) \quad (2.6)$$

$$r = r(k) = k - 1,$$

с неопределенными коэффициентами $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r$. Соответственно для КС с трехдиагональным A уравнение (2.2) можно записать как:

$$g_i + \alpha(g_{i-1} + g_{i+1}) = \beta_0 u_i + \sum_{j=1}^r \beta_j (u_{i+j} + u_{i-j}) \quad (2.7)$$

$$r = r(k) = k - 2,$$

где α - дополнительный неопределенный коэффициент. Если мы хотим, чтобы точность ε (1.2) была порядка h^k , то необходимо и достаточно, чтобы на степенных пробных функциях $u = x^m$, $m = 0 \dots k+1$ (здесь m – степень монома) выполнялось

$$Au'' - Bu = 0. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.6) или (2.7) в (2.8), получаем систему уравнений на значения неизвестных коэффициентов. Решив полученные системы уравнений, мы получим следующие схемы:

$$k = 4$$

$$g_i = \frac{-5}{2h^2}u_i + \frac{4}{3h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{-1}{12h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) \quad \text{ЦРС} \quad (2.9)$$

$$g_i + \frac{1}{10}(g_{i+1} + g_{i-1}) = \frac{-12}{5h^2}u_i + \frac{6}{5h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) \quad \text{КС (Схема Паде)}$$

$$k = 6$$

$$g_i = \frac{-49}{18h^2}u_i + \frac{3}{2h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{-3}{20h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) + \frac{1}{90h^2}(u_{i-3} + u_{i+3}) \quad \text{ЦРС} \quad (2.10)$$

$$g_i + \frac{2}{11}(g_{i+1} + g_{i-1}) = \frac{-51}{22h^2}u_i + \frac{12}{11h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{3}{44h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) \quad \text{КС}$$

$$k = 8$$

$$g_i = \frac{-205}{72h^2}u_i + \frac{8}{5h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{-1}{5h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) + \frac{8}{315h^2}(u_{i-3} + u_{i+3}) + \frac{-1}{560h^2}(u_{i-4} + u_{i+4}) \quad \text{ЦРС} \quad (2.11)$$

$$g_i + \frac{9}{38}(g_{i+1} + g_{i-1}) = \frac{-751}{342h^2}u_i + \frac{147}{152h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{51}{380h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) + \frac{-23}{6840h^2}(u_{i-3} + u_{i+3}) \quad \text{КС}$$

Также приведем здесь вид схем CS8-penta и CCD.

$$g_i + \frac{344}{1179}(g_{i+1} + g_{i-1}) + \frac{23}{2358}(g_{i+2} + g_{i-2}) = \frac{-265}{131h^2}u_i + \frac{320}{393h^2}(u_{i-1} + u_{i+1}) + \frac{155}{786h^2}(u_{i-2} + u_{i+2}) \quad \text{CS8-penta} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} g_i^1 + \frac{7}{16}(g_{i+1}^1 + g_{i-1}^1) - \frac{h}{16}(g_{i+1}^2 - g_{i-1}^2) = \frac{15}{16h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \\ g_i^2 - \frac{1}{8}(g_{i+1}^2 + g_{i-1}^2) + \frac{9}{8h}(g_{i+1}^1 - g_{i-1}^1) = \frac{3}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{cases} \quad \text{CCD} \quad (2.13)$$

В этих формулах вектор g^1 аппроксимирует u' , а g^2 аппроксимирует u'' .

2.2 Оценки точности и погрешности аппроксимации

Проанализируем полученные схемы. Во многих статьях, в частности в [2] – [4], схемы сравниваются по погрешности аппроксимации δ . Но в задаче о нахождении второй производной нам необходимо сравнивать схемы не по δ , а по ε (для схемы вида (2.2) ε находится по формуле (2.3)), так как именно ε характеризует точность приближения. Для центральных разностей $\varepsilon = \delta$ и их величины находятся разложением в ряд Тейлора формулы (2.4). Для компактных схем оценку ε надо проводить из формулы (2.3). Проще всего это сделать на классе периодических функций, чтобы исключить краевые эффекты. Достаточно найти минимальное собственное число λ_{\min} оператора A . Тогда, очевидно, $\varepsilon = \lambda_{\min}^{-1} \delta$.

В Таб. 1 приведены оценки δ и ε для всех схем, упомянутых выше.

Тип	Порядок	δ	ε
ЦРС	4	$8R_4$	$8R_4$
КС	4	$\frac{18}{5}R_4 \approx 3.6R_4$	$3R_4$
ЦРС	6	$72R_6$	$72R_6$
КС	6	$\frac{184}{11}R_6 \approx 16.7R_6$	$\frac{184}{15}R_6 \approx 12.2R_6$
ССD	6	$2R_6$	$\frac{152}{15}R_6 \approx 10.1R_6$
ЦРС	8	$1152R_8$	$1152R_8$
КС	8	$\frac{3096}{19}R_8 \approx 163R_8$	$\frac{774}{7}R_8 \approx 110R_8$
CS8-penta	8	$\frac{12640}{131}R_8 \approx 96R_8$	$\frac{1264}{21}R_8 \approx 60R_8$

Таб. 1: Погрешность аппроксимации δ и точность ε

Здесь введены обозначения

$$R_4 = \max |u^{(6)}| \frac{h^4}{6!}, \quad R_6 = \max |u^{(8)}| \frac{h^6}{8!}, \quad R_8 = \max |u^{(10)}| \frac{h^8}{10!}.$$

Следует пояснить, как вычисляются δ и ε для схемы CCD. Обозначая

$$\begin{Bmatrix} g^1 \\ g^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u' - \varepsilon^1 \\ u'' - \varepsilon^2 \end{Bmatrix}$$

и записывая (2.13) в виде

$$\tilde{A} \begin{Bmatrix} \varepsilon^1 \\ \varepsilon^2 \end{Bmatrix} = \tilde{A} \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \end{Bmatrix} - \tilde{B} \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

получаем, что

$$\begin{Bmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \end{Bmatrix} = \tilde{A} \begin{Bmatrix} u' \\ u'' \end{Bmatrix} - \tilde{B} \begin{Bmatrix} u \\ u \end{Bmatrix},$$

а $\varepsilon = \varepsilon^2$ находим из уравнений (2.14).

Из Таб. 1 видно, что если сравнивать схемы шестого порядка по δ , то погрешность аппроксимации схемы CCD оказывается в 8 раз меньше, чем у КС и в 36 раз меньше, чем у ЦРС. Основываясь на таком сравнении, авторы статьи [2] делают вывод, что схему CCD стоит использовать как наилучшую среди рассмотренных, однако численных сравнений между схемой CCD и КС шестого порядка не приводят. Когда же мы сравниваем схемы по точности ε , то сразу видим, что КС лишь незначительно проигрывает схеме CCD. Поэтому, учитывая большую трудоемкость решения системы (2.13), мы приходим к выводу о том, что КС шестого порядка является более эффективной по сравнению со схемой CCD.

2.3 Обработка границ

Прежде чем продолжить анализ эффективности обсуждаемых схем, рассмотрим вопрос, как записывать схемы вблизи границ. Для ЦРС этот вопрос решается в рамках граничных условий исходной дифференциальной задачи, и обсуждается в пункте 3.3.

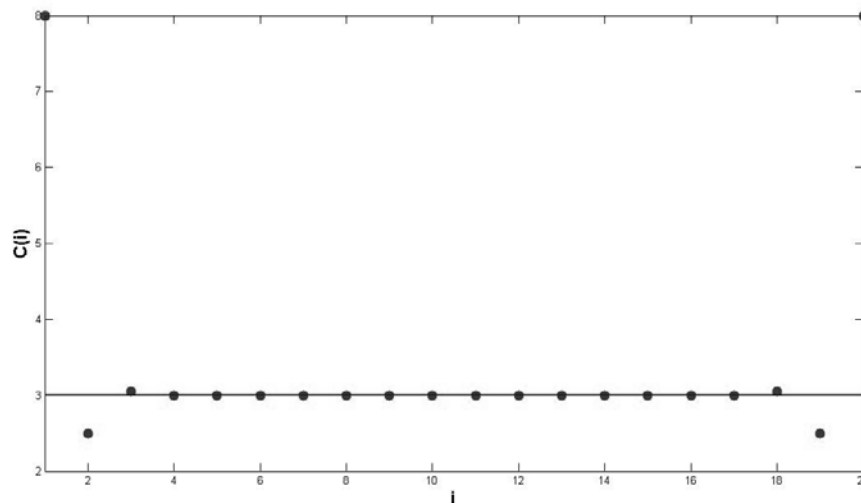


Рис. 1: Зависимость C (см. (2.16)) от номера точки, при $N=20, K=4$

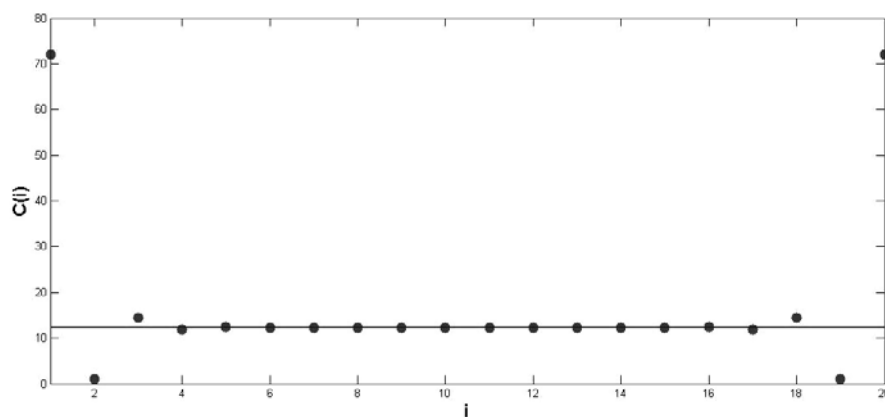


Рис. 2: Зависимость C (см. (2.16)) от номера точки, при $N=20, K=6$

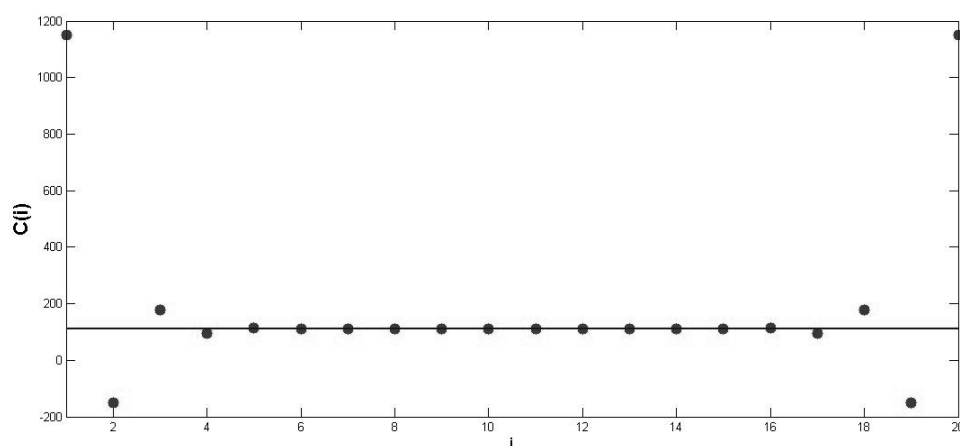


Рис. 3: Зависимость C (см. (2.16)) от номера точки, при $N=20, K=8$

Рассмотрим более подробно влияние граничных условий, заданных подобным образом. Из линейности (1.1) следует, что влияние ошибки на границе можно оценить с помощью решения следующей системы уравнений:

$$Au = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Решение данной системы прогонкой записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i &= a_{i+1}u_{i+1} + b_{i+1} \\ a_{i+1} &= \frac{-\alpha}{(1 + \alpha a_i)}, \quad i = 2..N-1 \\ b_{i+1} &= (b_i - \frac{f_i}{\alpha})a_{i+1}, \quad i = 2..N-1 \\ a_2 &= 0; \quad b_2 = 0; \quad u_N = 1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

После исключения рекурсии явный вид решения следующий:

$$\begin{aligned} b_i &= 0, \quad i = 1..N-1 \\ a_2 &= 0; \\ a_{i+1} &= \frac{-\alpha}{(1 + \alpha a_i)}, \quad i = 2..N-1 \\ u_N &= 1 \\ u_i &= a_{i+1}u_{i+1} = \left(\prod_{k=i+1}^N a_k \right) u_N = \left(\prod_{k=i+1}^N a_k \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Обратимся теперь к последовательности a_i . Имеем:

$$\begin{aligned} a_{i+1} - a_i &= \frac{-\alpha}{1 + \alpha a_i} - \frac{-\alpha}{1 + \alpha a_{i-1}} = \frac{-\alpha}{(1 + \alpha a_i)(1 + \alpha a_{i-1})} (1 + \alpha a_{i-1} - 1 - \alpha a_i) = \\ &= \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha a_i)(1 + \alpha a_{i-1})} (a_i - a_{i-1}) = a_{i+1} a_i (a_i - a_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Покажем, что из условий $-1 < a_i \leq 0$ и $\frac{1}{2} > \alpha > 0$ следует, что и $-1 < a_{i+1} \leq 0$.

Действительно, $1 - \alpha < 1 + \alpha a_i \leq 1$, т.е. $\frac{1}{1 - \alpha} > \frac{1}{1 + \alpha a_i} \geq 1$. Поэтому

$$-1 < \frac{-\alpha}{1-\alpha} < \frac{-\alpha}{1+\alpha a_i} = a_{i+1} \leq -\alpha < 0. \quad (2.21)$$

Из (2.20) следует

$$a_{i+1} - a_i = a_{i+1} a_i (a_i - a_{i-1}) = a_{i+1} \left(\prod_{k=4}^i a_k^2 \right) a_3 (a_3 - a_2) = a_{i+1} \left(\prod_{k=3}^i a_k^2 \right). \quad (2.22)$$

Из (2.22) и (2.21) видно, что последовательность a_i убывает и ограничена снизу, следовательно, она сходится. Найдем ее предел:

$$\begin{aligned} a &= \frac{-\alpha}{1+\alpha a} \\ a^{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\alpha^2}}{2\alpha} \\ a &= \frac{-1 + \sqrt{1-4\alpha^2}}{2\alpha}, \text{ т.к. } a_i \in (-1, 0] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Также можно оценить скорость сходимости a_i :

$$|a_{i+1} - a_i| = |a_{i+1}| \left(\prod_{k=3}^i a_k^2 \right) \leq |a|^{2(i-3)+1} \quad (2.24)$$

Теперь вернемся к решению задачи (2.17):

$$\begin{aligned} u_N &= 1 \\ |u_i| &= \left(\prod_{k=i+1}^N |a_k| \right) < \left(\prod_{k=i+1}^N |a| \right) = |a|^{N-i-1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

То есть $|u_i|$ убывает быстрее, чем $|a|^{N-i-1}$. Приведем значения предела a_i , $i \rightarrow \infty$, для рассматриваемых схем:

$$\begin{aligned} K=4 \quad a_i &\rightarrow -5 + 2\sqrt{6} \approx -0.101 \\ K=6 \quad a_i &\rightarrow -\frac{11}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4} \approx -0.188 \\ K=8 \quad a_i &\rightarrow -\frac{19}{9} + \frac{2\sqrt{70}}{9} \approx -0.251 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Таким образом, погрешность, генерируемая неточностью вычисления второй производной функции в граничной точке убывает со скоростью геометрической прогрессии с достаточно малым знаменателем, см. (2.26).

Это и продемонстрировано на Рис.1 – Рис. 3, где существенное отличие от величины C , вычисленной в предположении отсутствия границ, наблюдается только в 2-3 точках вблизи границы.

Стоит отметить, что схема CCD тоже нуждается в граничных условиях, но если их задать похожим образом, то порядок этой схемы упадет до пятого. Как его сохранить – здесь не рассматривается.

Оценим теперь количество операций для каждой из схем, требуемое для вычисления второй производной с заданной точностью. По сравнению с ЦРС для КС учесть количество операций, требуемых для обращения оператора A . Так как оператор A трехточечный, то можно использовать метод прогонки, описанный, например в [5]. Перепишем (2.7) как

$$Ag = f$$

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & & & & & & \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & \alpha & 1 & \alpha & & \\ & & & & & & 1 \end{Bmatrix}, \quad f = Bu = \left(\beta_0 u_i + \sum_{j=1}^{k-2} \beta_j (u_{i+j} + u_{i-j}) \right) \quad (2.27)$$

Решение будем искать в виде

$$g_i = a_{i+1} g_{i+1} + b_{i+1} \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.27), получим

$$g_i = \frac{-\alpha}{(1 + \alpha a_i)} g_{i+1} + \frac{f_i - \alpha b_i}{(1 + \alpha a_i)}, \quad i = 2..N - 1$$

$$a_{i+1} = \frac{-\alpha}{(1 + \alpha a_i)}, \quad i = 2..N - 1 \quad (2.29)$$

$$b_{i+1} = (b_i - \frac{f_i}{\alpha}) a_{i+1}, \quad i = 2..N - 1$$

$$a_2 = 0; \quad b_2 = f_1; \quad g_N = f_N$$

Найдя a_i и b_i , можно по формуле (2.28) найти решение системы (2.27).

Как видно из формул (2.29), если нам необходимо много раз считать вторую производную на одной и той же сетке, но от разных значений функции u

$$c_{i+1} = b_{i+1} \left(a_{i-1}c_i + c_{i-1} + \frac{\alpha}{\beta}c_i - \frac{f_i}{\beta} \right)$$

$$i = 2..N - 2$$

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0, c_1 = f_0, c_2 = f_1$$
(2.34)

Также как и в случае трехдиагональной матрицы, только один коэффициент в (2.34) зависит от правой части. То есть a_i и b_i мы можем посчитать только один раз, а c_i будем пересчитывать каждый раз. Подсчеты количества операций, требуемых для нахождения второй производной, представлены в Таб. 2. Здесь N - количество точек на отрезке (считаются только точки в которых необходимо вычислить вторую производную), а M – требуемое количество вычислений второй производной в каждой пространственной точке (то есть количество различных функций u).

Тип	Порядок	Количество Умножений	Количество Сложений	Всего Операций N_{op}
ЦРС	4	3NM	4NM	7NM
КС	4	5NM+2N	4NM+N	9NM+3N
ЦРС	6	4NM	6NM	10NM
КС	6	6NM+2N	6NM+N	12NM+3N
ЦРС	8	5NM	8NM	13NM
КС	8	7NM+2N	8NM+N	15NM+3N
CS8-penta	8	10NM+7N	11NM+5N	21NM+12N

Таб. 2: Количество операций, требуемое для вычисления второй производной

Используя Таб. 1 и Таб. 2 можно посчитать отношение количества операций требуемых для заданной точности при использовании КС и ЦРС. Предположим, что $N, M \gg 1$, тогда, приравнивая точность ε для схем с одинаковым порядком, получаем:

$$\varepsilon = const, \quad C_{compact} h_{compact}^k = C_{central} h_{central}^k$$

$$C_{compact} \frac{1}{N_{compact}^k} = C_{central} \frac{1}{N_{central}^k} \quad (2.35)$$

$$\frac{N_{op}^{central}}{N_{op}^{compact}} \approx \frac{K_{central} N_{central} M}{K_{compact} N_{compact} M} = \frac{K_{central}}{K_{compact}} \left(\frac{C_{central}}{C_{compact}} \right)^{\frac{1}{k}}$$

где коэффициент K перед произведением NM берется из Таб. 2, а коэффициент C из Таб. 1.

Получаются следующие соотношения:

$$k = 4 \quad N_{op}^{central} / N_{op}^{compact} \approx 0.99$$

$$k = 6 \quad N_{op}^{central} / N_{op}^{compact} \approx 1.12$$

$$k = 8 \quad N_{op}^{central} / N_{op}^{compact} \approx 1.16 \quad (2.36)$$

Если мы сравним КС и ЦРС 8-го порядка со схемой CS8-penta, то получим

$$k = 8 \quad N_{op}^{CS8-penta} / N_{op}^{compact} \approx 1.3$$

$$k = 8 \quad N_{op}^{CS8-penta} / N_{op}^{compact} \approx 1.12 \quad (2.37)$$

Из (2.37) видно, что количество операций, требуемых для достижения той же точности, у CS8-penta выше на 12% и 30%, чем у ЦРС и КС соответственно.

Хотя константа C , см. (2.16), у нее соответственно в 19 и 1.83 раза меньше.

Полученные теоретические результаты, указывают на бесполезность усложнения оператора A (по сравнению с КС, где он – трехточечный), так как количество операций, требуемых для его обращения, является более существенным фактором по сравнению с улучшением точности.

3 Разностные алгоритмы решения волнового уравнения

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим двумерную волновую задачу в прямоугольнике, с некоторыми граничными условиями на границах:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= s \quad x, z \in \Omega, t > 0 \\
u(t, x, z) \Big|_{t=0} &= 0 \quad x, z \in \Omega \\
\frac{\partial u(t, x, z)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \quad x, z \in \Omega \\
BC(u(t, x, z)) \Big|_{x, z \in \partial\Omega} &= 0 \quad t > 0 \\
\Omega: x \in [x_{\min}; x_{\max}], z \in [z_{\min}; z_{\max}] &
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $c(x, z) > 0$ – произвольная гладкая функция, $s(t, x, z)$ – некоторый источник. Полагаем, что задача корректна, например BC – оператор условий Дирихле.

Нашей целью является построение малозатратных алгоритмов решения волнового уравнения на равномерной сетке конечно-разностными методами, т.е. таких алгоритмов, которые при заданной точности решения ε и заданном порядке аппроксимации k требуют наименьшего числа операций N_{op} при аппроксимации пространственных производных:

$$N_{op}(\varepsilon, type, k) \rightarrow \min_{type}, \tag{3.2}$$

где $type$ – тип схемы (компактная или центрально-разностная).

Анализ проводится для схем, в которых порядок аппроксимации разностной схемы k равен 4,6,8.

3.2 Построение численных алгоритмов

Приближенное решение будем искать в виде сеточной функции на равномерной прямоугольной сетке. Построение разностных схем разобьем на два этапа: пространственную и временную дискретизации.

3.2.1 Пространственная дискретизация

Полагаем, что сеточная функция $u_{i,j}$ есть функция от времени в каждом узле пространственной сетки. Запишем аппроксимацию задачи (3.1) как

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} - Lu_{i,j} = s_{i,j} \\
& u_{i,j} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \\
& BC(u_{i,j}) \Big|_{x_i, z_j \in \partial\Omega} = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где оператор L приближает оператор Лапласа:

$$Lu_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Big|_{x=x_i, z=z_j} + O(h^k). \tag{3.4}$$

Мы будем аппроксимировать L как сумму двух операторов, каждый из которых приближает вторую частную производную по одному из направлений. Таким образом, задача построения оптимального L упрощенно сводится к решению задачи об оптимальной аппроксимации второй производной.

3.2.2 Дискретизация по времени

Для повышения порядка аппроксимации при интегрировании уравнения (3.3) по времени мы используем экстраполяцию Ричардсона [6]. В рамках этого подхода (3.3) вначале аппроксимируется схемой второго порядка, [7]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} - Lu_{i,j}^n = s_{i,j}^n \\
& u_{i,j}^0 = 0 \\
& u_{i,j}^1 = 0 \\
& BC(u_{i,j}^n) \Big|_{x_i, z_j \in \partial\Omega} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Схема (3.5) даст нам решение $\tilde{u}_{i,j}^\tau$ в момент времени T , отличающееся от точного $u_{i,j}(T)$ на погрешности второго и четвертого порядков:

$$\tilde{u}_{i,j}^\tau = u_{i,j}(T) + O_2(\tau^2) + O_4(\tau^4) + \dots \tag{3.6}$$

Посчитав аналогично решение $\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2}$ с половинным шагом, построим новую функцию

$$u_{i,j}^{\tau^4} = \frac{4\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2} - \tilde{u}_{i,j}^{\tau}}{3} = u_{i,j}(T) - \frac{O_4(\tau^4)}{4} + \dots \quad (3.7)$$

Таким образом, мы получили решение четвертого порядка точности. Действуя таким же образом можно получить решение более высокого порядка. Далее без доказательства приведены формулы четвертого, шестого, восьмого и десятого порядков:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{\tau^4} &= \frac{4\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2} - \tilde{u}_{i,j}^{\tau}}{3}, \\ u_{i,j}^{\tau^6} &= \frac{32\tilde{u}_{i,j}^{\tau/4}}{21} - \frac{4\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2}}{7} + \frac{\tilde{u}_{i,j}^{\tau}}{21}, \\ u_{i,j}^{\tau^8} &= \frac{512\tilde{u}_{i,j}^{\tau/8}}{315} - \frac{32\tilde{u}_{i,j}^{\tau/4}}{45} + \frac{4\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2}}{45} - \frac{\tilde{u}_{i,j}^{\tau}}{315}, \\ u_{i,j}^{\tau^{10}} &= \frac{16384\tilde{u}_{i,j}^{\tau/16}}{9765} - \frac{512\tilde{u}_{i,j}^{\tau/8}}{651} + \frac{32\tilde{u}_{i,j}^{\tau/4}}{279} - \frac{4\tilde{u}_{i,j}^{\tau/2}}{651} + \frac{\tilde{u}_{i,j}^{\tau}}{9765}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Граничные условия

Во всех рассматриваемых схемах возникает проблема аппроксимации граничных условий. Ее решение усложняется тем фактом, что шаблон оператора L в большинстве случаев содержит больше чем три точки. В частных случаях условий Дирихле или Неймана эту задачу можно решить расширением сетки на необходимое число точек за границу прямоугольника и продолжением искомой функции антисимметричным или симметричным образом, соответственно. Не вызывают проблем и условия периодичности.

Заметим, что реализованные таким образом граничные условия при использовании компактных схем дадут нам решение, в котором не будет ухудшения точности в приграничных точках наподобие показанного на Рис.1 – Рис. 3.

В случае характеристических условий

$$BC(u(t, x, z))\Big|_{x,z \in \partial\Omega} = \frac{\partial u(t, x, z)}{\partial t} + c \frac{\partial u(t, x, z)}{\partial \bar{n}} \Big|_{x,z \in \partial\Omega} = 0 \quad t > 0 \quad (3.9)$$

мы также расширяем сетку за границу на $k - 2$ точки и вычисляем значения функции в них и на границе путем сноса с предыдущих слоев по времени.

4 Численные результаты

4.1 Одномерная задача

Для начала проверим, что именно точность ε , см. Таб. 1, определяет ошибку решения волнового уравнения. Для этого рассмотрим одномерную волновую задачу на отрезке $x \in [0, 10]$ следующего вида.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 & x \in [0, 10], t > 0 \\ u(t, x)|_{t=0} &= e^{\frac{(x-5)^2}{(0.1)^2}} & x \in [0, 10] \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 & x \in [0, 10] \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= 0 & x = 0, t > 0 \\ \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= 0 & x = 10, t > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решением этой задачи будет

$$u(t, x) = \frac{1}{2} e^{\frac{(x+t-5)^2}{(0.1)^2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{(x-t-5)^2}{(0.1)^2}}. \quad (4.2)$$

Для численного решения задачи (4.1) была написана программа на языке фортран, реализующая разностные схемы на основе ЦРС и КС 4, 6 и 8 порядков пространственной аппроксимации и 2,4,6,8,10 порядков аппроксимации по времени. Аналитическое решение (4.2) позволило проверить ее на сходимость со всеми реализованными порядками, как по пространству, так и по времени. После этого были сделаны расчеты, в которых постоянными параметрами были: порядок по времени $O_{time} = 10$, шаг пространственной сетки $h = 0.01$, порядок аппроксимации граничных

условий $O_{BC} = 10$. Таким образом, менялись число Куранта $\sigma = \frac{\tau}{h}$, порядок и тип (ЦРС или КС) пространственной аппроксимации.

Расчеты были проведены для следующих наборов параметров:

<i>number</i>	<i>type</i>	<i>k</i>	σ
1	КС	4	0.5
2	ЦР	4	0.5
3	КС	6	0.5
4	ЦР	6	0.5
5	КС	8	0.25
6	ЦР	8	0.25

(4.3)

где *number* – номер набора, *type* – тип пространственной аппроксимации, *k* – порядок пространственной аппроксимации, σ – число Куранта. Порядок аппроксимации по времени мы взяли максимальным, так как нас интересует пространственная часть ошибки. По тем же причинам в схемах восьмого порядка число Куранта берется в два раза меньше. Далее мы брали решения одинакового порядка пространственной аппроксимации, но разного типа: $u_{i,j}^n(КС, k)$, $u_{i,j}^n(ЦРС, k)$, вычитали точное решение и получали вектора ошибки $\varepsilon_{i,j}^n(КС, k) = |u_{i,j}^n(КС, k) - [u]_{i,j}^n|$, $\varepsilon_{i,j}^n(ЦРС, k) = |u_{i,j}^n(ЦРС, k) - [u]_{i,j}^n|$. Ниже приведены графики зависимости отношения максимумов векторов ошибок

$$A^n(k) = \frac{\max_{i,j}(\varepsilon_{i,j}^n(ЦРС, k))}{\max_{i,j}(\varepsilon_{i,j}^n(КС, k))} \quad (4.4)$$

от времени ($t = n\tau = n\sigma h$). Линией отмечена полученная зависимость, штрихпунктирной линией отмечено отношение $\delta_{ЦРС} / \delta_{КС}$, а штрихованной отмечено отношение $\varepsilon_{ЦРС} / \varepsilon_{КС}$, взятые из Таб. 1.

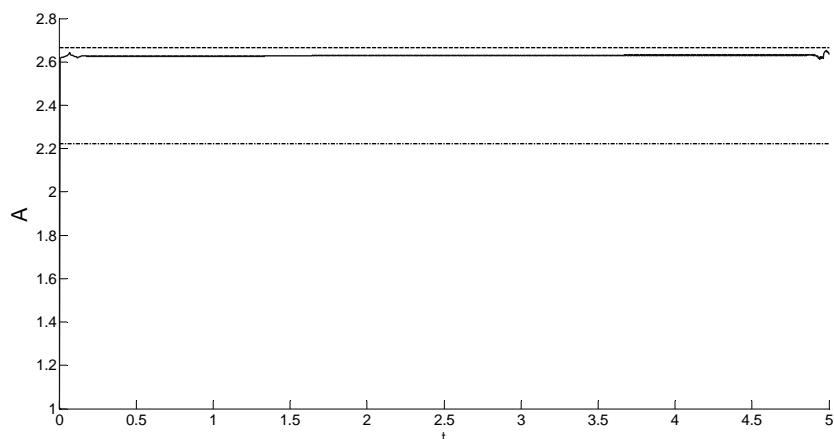


Рис. 4: Зависимость отношения ошибок A (см. (4.4)) от времени, порядок $k = 4$

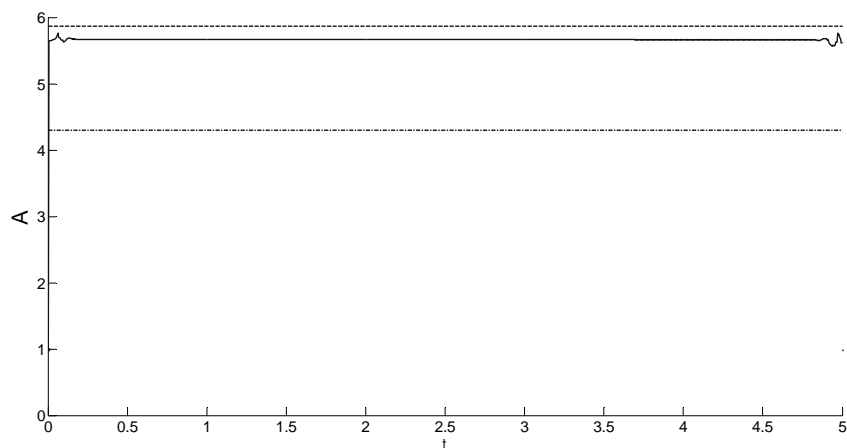


Рис. 5: Зависимость отношения ошибок A (см. (4.4)) от времени, порядок $k = 6$

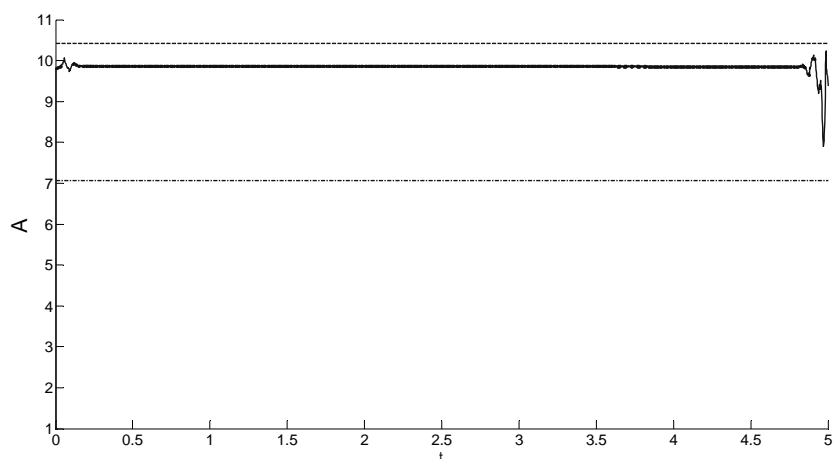


Рис. 6: Зависимость отношения ошибок A (см. (4.4)) от времени, порядок $k = 8$

Из приведенных результатов видно, что пространственная часть ошибки при решении волнового уравнения определяется именно вектором точности ε .

4.2 Двумерная задача

В двумерной постановке мы аппроксимируем частные производные, входящие в оператор L , с порядками $k = 4, 6, 8$, используя выписанные ранее КС и ЦРС. Интегрирование по времени с порядками $2, 4, 6, 8, 10$ реализовано экстраполяцией Ричардсона. Проверка скорости сходимости с нужным порядком рассматривалась для задачи в квадрате $[0;1] \times [0;1]$ с периодическими условиями. Начальные данные задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} u(0, x, z) &= \sin(2\pi\nu x) \sin(2\pi\nu z), \quad \nu \in N \\ \frac{\partial u(t, x, z)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Источник был нулевой $s \equiv 0$, скорость $c(x, z) \equiv 1$. Решением такой задачи будет

$$u(t, x, z) = \sin(2\pi\nu x) \sin(2\pi\nu z) \cos(2\pi\nu t \sqrt{2}). \quad (4.6)$$

Пусть у нас есть решение $u_{i,j}^n = [u]_{i,j}^n + O_1(h_x^k + h_z^k + \tau^k)$. Зафиксировав число Куранта и положив $h_x = h_z = h$, получим

$$\begin{aligned} u_{i,j}^n &= [u]_{i,j}^n + O_2(h^k) \\ \varepsilon &= \max_{i,j,n} (|u_{i,j}^n - [u]_{i,j}^n|) = Ch^k, \\ \ln(\varepsilon) &= \ln(C) + k \ln(h) = \ln(C) + k \ln(h) \end{aligned} \quad (4.7)$$

то есть, логарифм максимальной ошибки линейно зависит от шага сетки с углом наклона равным порядку. Формула (4.7) дает нам возможность проверить порядок сходимости схемы. На Рис. 7 приведены графики зависимости $\log_{10}(\varepsilon)$ от $-\log_{10}(h)$ при разных k для КС и ЦРС (частота $\nu = 2$). Хорошо видно следование прямых линий ожидаемому порядку k и отчетливо заметна лучшая точность КС по сравнению с ЦРС; например, при $k = 8$ выигрыш достигает 10.

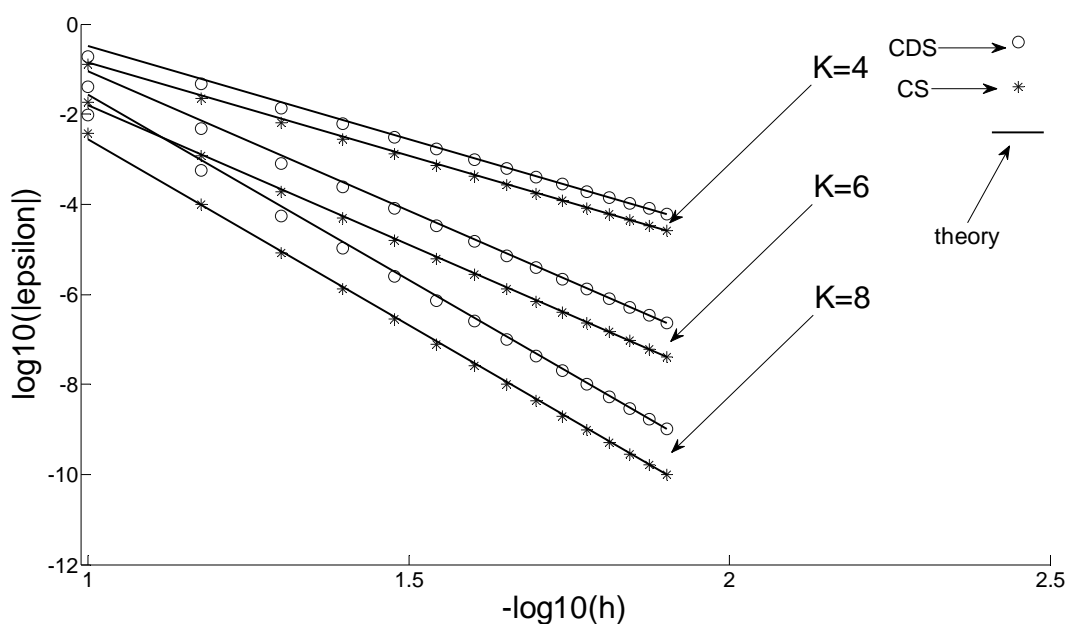


Рис. 7: Зависимость $\log_{10}(\varepsilon)$ от $-\log_{10}(h)$ для КС и ЦР схем, $\nu = 2$

5 Заключение

В рамках данного исследования мы рассмотрели задачу разностной аппроксимации второй производной функции с высоким порядком точности. Для этого были построены схемы 4, 6 и 8-го порядков аппроксимации, основными из которых являются КС (2.7) и ЦРС (2.6). Показано, что схемы следует сравнивать не по погрешности аппроксимации δ , а по точности ε , см. Таб. 1. На примере схемы CCD, показана несостоятельность выводов о ее преимуществах. Приведено количество операций, требуемых при многократном вычислении второй производной, см. Таб. 2. В частности, из формул (2.36) видно, что для достижения заданной точности при четвертом порядке аппроксимации ЦРС и КС требуют примерно одинаковое количество операций, а при шестом и восьмом одномерные ЦРС требуют уже на 12 и 16 процентов больше операций, соответственно.

Из оценок (2.37) следует, что в рамках критерия (3.2) использовать в КС более сложный оператор A , чем трехточечный, не имеет смысла.

На основе построенных разностных аппроксимаций реализованы алгоритмы решения волнового уравнения в прямоугольнике с некоторым набором граничных условий (3.1). В случае КС предложен метод задания граничных условий на вторую производную, который увеличивает ошибку лишь в двух – трех точках вблизи границы.

Для интегрирования по времени с высоким порядком выбрана экстраполяция Ричардсона; в пункте 3.2.2 приведены основные формулы. В параграфе 4 приведены численные результаты, подтверждающие теоретические выкладки. В частности показано, что пространственная часть ошибки при решении волнового уравнения зависит именно от точности ε из (2.3).

Литература

- [1] А.И.Толстых, Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики; Отв. ред. О. М. Белоцерковский; ВЦ АН СССР, М., Наука (1990)
- [2] P.C. Chu and C. Fan, A three-point combined compact difference scheme *JCP*, **140**, 370–399 (1998)
- [3] P.C. Chu and C. Fan, A three-point sixth-order nonuniform combined compact difference scheme, *JCP*, **148**, 663–674 (1999)
- [4] J. Zhang and J.J. Zhao, Truncation error and oscillation property of the combined compact difference scheme, *Applied Mathematics and Computation*, **161**, No. 1, 241-251 (2005).
- [5] А.А. Самарский, Е.С. Николаев, Методы решения сеточных уравнений, М. Мир (1983)
- [6] А. А. Самарский, А. В. Гулин, Численные методы. М.: Наука (1989)
- [7] В.С. Рябенкий, Введение в вычислительную математику. М., Наука (1994)