



Давыдов А.А., Сазонов В.В.

Определение параметров  
вращательного движения КА  
«Монитор-Э» по  
телеметрическим данным о  
токе солнечных батарей

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Давыдов А.А., Сазонов В.В. Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 85. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-85>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В.Келдыша

**А.А. Давыдов, В.В. Сазонов**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО  
ДВИЖЕНИЯ КА «МОНИТОР-Э» ПО ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИМ  
ДАНЫМ О ТОКЕ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ**

Москва – 2008

### Аннотация

Космический аппарат (КА) «Монитор-Э» вследствие нештатной ситуации совершал неуправляемый полёт, при этом отсутствовала телеметрическая информация о параметрах его вращательного движения. Возникла задача определения вращательного движения КА по доступной косвенной информации – электрическому току, снимаемому с солнечных батарей (СБ). В данной работе описана интегральная статистическая методика, позволившая решить эту задачу. Значения тока, полученные на отрезке времени длиной несколько десятков минут, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений вращательного движения КА. В результате обработки оценивались начальные условия движения, уточнялись моменты инерции КА и углы, задающие положение СБ в связанной с КА системе координат. Приведены результаты обработки 12 отрезков данных, позволившие реконструировать фактическое вращательное движение КА.

**A.A. Davydov, V.V. Sazonov. Reconstruction of the spacecraft Monitor-E attitude motion by measurements of the current from solar arrays.** The spacecraft Monitor-E was out of control owing to off-optimum situation and there was not telemetry data about its attitude motion. The problem arose to reconstruct that motion by the accessible indirect information, i. e. the data of the electric current generated by solar arrays of the spacecraft. We describe the statistical technique that solved this problem. According to the technique, the measurements of the current, collected on a time interval about a few tens minutes, were processed simultaneously by means of the least squares method and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimations of the mathematical model parameters and initial conditions of an attitude motion were obtained as a result of such processing. We quote the results of processing of 12 segments of data, which allowed to reconstruct the spacecraft real attitude motion.

**1. Математическая модель вращательного движения КА.** КА считаем твёрдым телом, геоцентрическое движение центра масс которого – кеплерово эллиптическое. Элементы этого движения находятся по данным радиоконтроля орбиты. Для записи уравнений движения КА относительно центра масс введём две правые декартовы системы координат – орбитальную  $OX_1X_2X_3$  и образованную главными центральными осями инерции КА  $Ox_1x_2x_3$ . Точка  $O$  – центр масс КА, оси  $OX_3$  и  $OX_1$  направлены соответственно вдоль геоцентрического радиус-вектора точки  $O$  и по трансверсали к орбите в этой точке.

Положение системы  $Ox_1x_2x_3$  относительно системы  $OX_1X_2X_3$  зададим углами  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , которые введём следующим образом. Система  $OX_1X_2X_3$  может быть переведена в систему  $Ox_1x_2x_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\alpha$  вокруг оси  $OX_2$ , 2) на угол  $\beta$  вокруг новой оси  $OX_3$ , 3) на угол  $\gamma$  вокруг новой оси  $OX_1$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ . Матрицу перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системе  $OX_1X_2X_3$  обозначим  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $a_{ij}$  – косинус угла между осями  $OX_i$  и  $Ox_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через введённые углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha \cos \gamma, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{31} &= -\sin \alpha \cos \beta, \\ a_{32} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Система уравнений вращательного движения КА образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости и кинематическими соотношениями Пуассона для элементов первой и третьей строк матрицы  $A$ . В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты. Уравнения вращательного движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - \nu a_{32}a_{33}) + \rho\nu(\nu_2p_3 - \nu_3p_2), \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu a_{31}a_{33}) + \frac{\lambda\rho\nu}{1+\lambda\mu}(\nu_3p_1 - \nu_1p_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu a_{31}a_{32}) + \lambda\rho\nu(\nu_1p_2 - \nu_2p_1), \\ \dot{a}_{11} &= a_{12}\omega_3 - a_{13}\omega_2 - a_{31}\omega_0, \\ \dot{a}_{13} &= a_{11}\omega_2 - a_{12}\omega_1 - a_{33}\omega_0, \\ \dot{a}_{12} &= a_{13}\omega_1 - a_{11}\omega_3 - a_{32}\omega_0, \\ \dot{a}_{31} &= a_{32}\omega_3 - a_{33}\omega_2 + a_{11}\omega_0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_{32} &= a_{33}\omega_1 - a_{31}\omega_3 + a_{12}\omega_0, \\ \dot{a}_{33} &= a_{31}\omega_2 - a_{32}\omega_1 + a_{13}\omega_0, \\ \lambda &= \frac{J_1}{J_3}, \quad \mu = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2}.\end{aligned}$$

Здесь  $\omega_i$  и  $\nu_i$  – соответственно компоненты векторов абсолютной угловой скорости КА и скорости его центра масс относительно поверхности Земли в системе  $Ox_1x_2x_3$ ;  $\omega_0$  – среднее орбитальное движение КА;  $J_i$  – моменты инерции КА относительно осей  $Ox_i$ ,  $\rho$  – плотность атмосферы в точке  $O$ ;  $p_i$  – параметры аэродинамического момента. Плотность атмосферы рассчитывается согласно модели [1].

Переменные  $a_{1i}$  и  $a_{3i}$  связаны между собой условиями ортогональности матрицы  $A$ . Поэтому начальные условия для них выражаются через углы  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . При интегрировании уравнений (1) вторая строка матрицы  $A$  вычисляется как векторное произведение ее третьей и первой строк.

**2. Метод определения вращательного движения КА.** Решения уравнений (1), аппроксимирующие фактическое вращательное движение КА, выбираются из условия наилучшего сглаживания с их помощью телеметрических данных о токе, снимаемом с солнечных батарей (СБ). В процессе обработки этих данных, помимо начальных условий движения КА, уточняются и параметры  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $p_i$  ( $i=1,2,3$ ).

Ток, вырабатываемый СБ, примерно пропорционален косинусу угла падения солнечных лучей на их светочувствительную поверхность. Последняя расположена в плоскости, неподвижной относительно системы  $Ox_1x_2x_3$ . Нормаль  $\mathbf{n}$  к светочувствительной стороне СБ задается двумя углами: углом  $\beta_S$  между вектором  $\mathbf{n}$  и его проекцией на плоскость  $Ox_1x_2$  ( $|\beta_S| < 10^\circ$ ) и углом  $\alpha_S$  между осью  $Ox_1$  и проекцией  $\mathbf{n}$  на плоскость  $Ox_1x_2$  ( $0 \leq \alpha_S \leq 360^\circ$ ). Направление отсчёта  $\alpha_S$  согласовано с направлением оси  $Ox_3$ . Компоненты  $\mathbf{n}$  в системе  $Ox_1x_2x_3$  вычисляются по формулам:  $n_1 = \cos \alpha_S \cos \beta_S$ ,  $n_2 = \sin \alpha_S \cos \beta_S$ ,  $n_3 = -\sin \beta_S$ . Орт  $\mathbf{S}$  направления «Земля-Солнце» задается в орбитальной системе координат компонентами  $S_i(t)$  ( $i=1,2,3$ ), которые рассчитываются по приближенным формулам [2] и элементам кеплеровой орбиты КА. Упомянутый косинус и снимаемый с СБ ток задаются формулами

$$\eta = \arccos(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \sum_{j,k=1}^3 S_j a_{jk} n_k, \quad I = I_0 \max(\eta, 0). \quad (2)$$

Здесь  $I_0$  – ток, вырабатываемый СБ на орбите Земли при перпендикулярном падении солнечных лучей на их плоскость,  $I_0 \approx 45$  А.

На самом деле расчёт тока более сложен и требует знания труднодоступной дополнительной информации, но и упрощённые формулы (2) позволяют получить приемлемые результаты. Эти формулы можно ещё более упр-

ростить, если учесть, что в те моменты времени, когда телеметрические значения тока превышали некоторый положительный предел  $I_{\min}$ , заведомо выполнялось условие  $\eta > 0$ . Для таких моментов расчётные значения тока можно находить по формуле  $I = I_0 \eta$ . При обработке полученных данных принималось  $I_{\min} = 10 \text{ А}$ .

Телеметрическая информация о токе, снимаемом с батарей, представляет собой последовательность чисел

$$t_n, I_n \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

Здесь  $I_n$  – приближённое значение тока в момент времени  $t_n$ ,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ . Разности  $t_{n+1} - t_n$ , как правило, не превышают нескольких секунд. В обработку включаются отрезки данных, длина которых  $t_N - t_1$  составляет от 20 до 40 минут.

Обработка данных (3) выполняется методом наименьших квадратов. Пусть ошибки в значениях  $I_n$  независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением  $\sigma$ . Значение  $\sigma$  неизвестно. На решениях уравнений движения, заданных на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$ , определим функционал

$$\Phi = \sum_{n=1}^N [I_n - I_0 \eta(t_n)]^2. \quad (4)$$

Аппроксимацией фактического движения КА на этом отрезке будем считать решение, доставляющее такому функционалу минимум. Минимизация  $\Phi$  проводится по начальным значениям параметров движения КА в точке  $t_1$ :  $\gamma_0 = \gamma(t_1)$ ,  $\alpha_0 = \alpha(t_1)$ ,  $\beta_0 = \beta(t_1)$ ,  $\omega_{i0} = \omega_i(t_1)$  и параметрам  $p_i$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$ . Для простоты письма объединим все уточняемые величины в один вектор  $q = (\gamma_0, \alpha_0, \beta_0, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, p_1, p_2, p_3, \lambda, \mu, \alpha_S, \beta_S)^T \in R^{13}$  и будем рассматривать функционал (4) как функцию  $\Phi(q)$ . Тогда  $q_* = \arg \min \Phi(q)$  – искомая оценка вектора  $q$ .

Минимизация функционала (4) выполнялась в два этапа: сначала методом случайного поиска находилось грубое приближение  $q$ , которое затем уточнялось методом Левенберга-Марквардта.

**3. Реализация метода Левенберга-Марквардта.** Применение этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описано в [3, 4]. Метод является одним из вариантов метода Гаусса-Ньютона. На каждой итерации этого метода поправка  $\Delta q$ , уточняющая имеющееся приближённое значение  $q$ , определяется системой

$$[C(q) + \nu E_{13}] \Delta q = d(q), \quad (5)$$

$$C(q) = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^{13}, \quad c_{ij} = I_0^2 \sum_{n=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial q_i} \frac{\partial \eta}{\partial q_j} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(q)}{\partial q_i^2 \partial q_j^2},$$

$$d(q) = \|d_i\|_{i=1}^{13}, \quad d_i = I_0 \sum_{n=1}^N (I_n - I_0 \eta_n) \frac{\partial \eta}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial q_k} = \sum e_{jnm} n_j s_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_k} \quad (k=1, \dots, 11),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial q_k} = \sum s_j \frac{\partial n_j}{\partial q_k} \quad (k=12, 13), \quad s_n = \sum_{i=1}^3 S_i a_{in}.$$

Здесь  $C(q)$  – матрица нормальных уравнений,  $\nu$  – положительный параметр,  $E_{13}$  – единичная матрица порядка 13,  $e_{jnm}$  – символ Леви-Чивиты,  $\partial \varphi_m / \partial q_k$  – псевдопроизводные [3], служащие для представления истинных производных  $\partial \eta / \partial q_k$  при  $k \leq 11$ . Значения  $\partial \varphi_m(t_n) / \partial q_k$  ( $k=1, \dots, 11$ ) определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_k} = \sum_{j,l=1}^3 e_{mj l} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \omega_l + \frac{\partial \omega_m}{\partial q_k}$$

совместно с уравнениями (1) и уравнениями в вариациях относительно  $\partial \omega_m / \partial q_k$ . Ненулевые начальные условия  $\partial \varphi_m(t_1) / \partial q_k$  и  $\partial \omega_m(t_1) / \partial q_k$  имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_1(t_1)}{\partial \gamma_0} = \frac{\partial \omega_m(t_1)}{\partial \omega_{m0}} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_m(t_1)}{\partial \alpha_0} = a_{2m}(t_1), \quad \frac{\partial \varphi_2(t_1)}{\partial \beta_0} = \sin \gamma_0, \quad \frac{\partial \varphi_3(t_1)}{\partial \beta_0} = \cos \gamma_0.$$

Ненулевые производные  $\partial n_j / \partial q_k$  в уравнениях (5) определяются следующим формулами:

$$\frac{\partial n_1}{\partial \alpha_s} = -\sin \alpha_s \cos \beta_s, \quad \frac{\partial n_2}{\partial \alpha_s} = \cos \alpha_s \cos \beta_s,$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \beta_s} = -\cos \alpha_s \sin \beta_s, \quad \frac{\partial n_2}{\partial \beta_s} = -\sin \alpha_s \sin \beta_s, \quad \frac{\partial n_3}{\partial \beta_s} = -\cos \beta_s.$$

Точность аппроксимации данных (3) и разброс в определении компонент  $q_* = \arg \min \Phi$  будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Стандартное отклонение  $\sigma$  ошибок в значениях  $I_n$  находится по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi(q_*)}{N-13}},$$

стандартные отклонения компонент вектора  $q_*$  равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы  $\sigma^2 C^{-1}(q_*)$ . Ниже стандартные отклонения величин  $\gamma_0$ ,  $\omega_{10}$ ,  $p_1$  и т. п. будем обозначать  $\sigma_\gamma$ ,  $\sigma_{\omega 1}$ ,  $\sigma_{p1}$ .

Чтобы в результате минимизации функционала (4) значения параметров  $p_i$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  лежали в разумных с физической точки зрения пределах, в этот функционал вводились дополнительные слагаемые

$$\kappa_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \kappa_2[(\lambda - \lambda^\circ)^2 + (\mu - \mu^\circ)^2].$$

Здесь  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – положительные числа,  $\lambda^\circ$  и  $\mu^\circ$  – проектные значения параметров  $\lambda$  и  $\mu$ . В расчётах принимались  $\kappa_1 = \kappa_2 = 10$ ,  $\lambda^\circ = 2.54$ ,  $\mu^\circ = 0.73$ . Такая замена функционала учитывает априорную информацию об уточняемых параметрах и регуляризует задачу поиска минимума  $\Phi(q)$ . Ниже, при вычислении стандартных отклонений использовано новое выражение для функционала.

**4. Поиск начального приближения.** Чтобы алгоритм минимизации Левенберга-Марквардта был надёжен, необходимо иметь достаточно точное начальное приближение точки минимума. Для этого использовался метод случайного поиска с обучением [5].

Начальные значения уточняемых параметров для процедуры случайного поиска находились из анализа имеющейся телеметрической информации и конструкторской документации на КА. Анализ основывался на следующих соображениях (рис. 1). Пусть угловое положение КА в орбитальной системе координат в начальный момент времени определяется углами  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ . Начальный угол  $\chi_0$  между направлением на Солнце и нормалью к рабочей поверхности СБ приближённо находится из соотношения  $\chi_0 = \arccos[I(t_0)/I_0]$ . Из всех возможных комбинаций углов  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  имеет смысл выбирать варианты, обеспечивающие найденное значение  $\chi_0$ . Очевидно, что угол  $\chi_0$  не изменится при повороте системы  $Ox_1x_2x_3$  на произвольные углы вокруг орта  $S$  направления на Солнце (угол  $\varphi$ ) и вокруг орта  $n$  нормали к рабочей поверхности СБ (угол  $\psi$ ).

Направление  $S$  в орбитальной системе  $Ox_1x_2x_3$  будем задавать двумя углами: углом  $\mu_s$  между  $S$  и плоскостью орбиты, и углом  $\lambda_s$  между проекцией  $S$  на плоскость орбиты и осью  $Ox_3$ . Направление отсчёта  $\lambda_s$  согласовано с осью  $Ox_2$ . Углы  $\lambda_s$  и  $\mu_s$  считаем постоянными в пределах рассматриваемых участков движения КА.

Определить значение  $A(t_1)$  для КА, повернутого на произвольные углы  $\psi$  (вокруг орта  $n$ ) и затем  $\varphi$  (вокруг орта  $S$ ), можно по формулам

$$A = KQM, \quad (6)$$

$$K = \begin{vmatrix} l_1 & 0 & -l_2 \\ l_2 m_2 & m_1 & l_1 m_2 \\ l_2 m_1 & -m_2 & l_1 m_1 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} k_1 & -k_2 p_2 & k_2 p_1 \\ -f_2 k_2 & f_1 p_1 - f_2 k_1 p_2 & f_1 p_2 + f_2 k_1 p_1 \\ -f_1 k_2 & -f_2 p_1 - f_1 k_1 p_2 & -f_2 p_2 + f_1 k_1 p_1 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & -b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & b_1 \end{vmatrix},$$

$$l_1 = \cos \lambda_s, \quad m_1 = \cos \mu_s, \quad f_1 = \cos \varphi, \quad p_1 = \cos \psi, \quad k_1 = \cos \chi_0, \quad a_1 = \cos \alpha_s, \quad b_1 = \cos \beta_s, \\ l_2 = \sin \lambda_s, \quad m_2 = \sin \mu_s, \quad f_2 = \sin \varphi, \quad p_2 = \sin \psi, \quad k_2 = \sin \chi_0, \quad a_2 = \sin \alpha_s, \quad b_2 = \sin \beta_s.$$

Здесь матрица  $K$  определяется положением Солнца в орбитальной системе координат в начальный момент времени, матрица  $M$  определяется положением  $n$  в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (раздел 2),  $Q$  – матрица последователь-

ных поворотов КА: вокруг орта  $\mathbf{n}$  на угол  $\psi$  и затем вокруг орта  $\mathbf{S}$  на угол  $\varphi$ . Элементы матрицы  $\mathbf{Q}$  зависят также от начального угла  $\chi_0$  между ортами  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{n}$ .

Соотношение (6) позволяет выразить углы  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  в функции углов  $\varphi$  и  $\psi$ . Эти углы ( $\varphi$  и  $\psi$ ) использовались в процедуре случайного поиска для задания начальной ориентации КА. Кроме того, для удобства выбора начального значения и последующего контроля величины угловой скорости КА, компоненты  $\omega_{i_0}$  ( $i=1,2,3$ ) вектора  $q$  были заменены величинами  $\omega_* = \sqrt{\omega_{1_0}^2 + \omega_{2_0}^2 + \omega_{3_0}^2}$ ,  $\alpha_\omega = \arctan(\omega_{2_0}/\omega_{1_0})$ ,  $\beta_\omega = \arcsin(\omega_{3_0}/\omega_0)$ .

С учётом вышеизложенного, в процедуре случайного поиска вместо вектора  $q$  использовался новый вектор  $z$ , имеющий 12 компонент:  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\omega_*$ ,  $\alpha_\omega$ ,  $\beta_\omega$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$ .

Алгоритм случайного поиска с обучением [5] состоит в построении последовательности векторов  $z \in R^{12}$  и  $\varepsilon \in R^{12}$  по следующему правилу. На первом шаге в качестве  $z$  берётся произвольно, и принимается  $\varepsilon = 0$ . На каждом последующем шаге вычисляются векторы

$$\Delta = s(r\varepsilon + e) \quad \text{и} \quad z' = z + \Delta, \quad (7)$$

где  $s$  и  $r$  – положительные числа,  $e$  – случайный вектор, равномерно распределённый на поверхности единичной сферы в  $R^{12}$ .

Если  $\Phi(z') < \Phi(z)$ , то в качестве новых значений векторов  $z$  и  $\varepsilon$  берутся векторы  $z'$  и  $\varepsilon^\circ = \varepsilon'/\|\varepsilon'\|$ ,  $\varepsilon' = \varepsilon + u\Delta[\Phi(z) - \Phi(z')]$ . При  $\Phi(z') \geq \Phi(z)$  выбирается новое значение случайного вектора  $e$  и вычисления по формулам (7) повторяются снова. Если число неудачных проб на данном шаге превысит заданный порог  $m$ , то параметр  $s$  уменьшается в два раза. Процесс продолжается до тех пор, пока  $s \geq s_{\min}$ . Элемент обучения вносит вектор  $\varepsilon$ . Процесс характеризуется параметрами  $m$ ,  $s_0$ ,  $s_{\min}$ ,  $r$ ,  $u$ , а также начальным значением вектора  $z$  на первом шаге поиска. В расчётах, как правило, принималось  $m = 1000$ ,  $r = 0.2$ ,  $u = 1$ ,  $s_0 = 0.2$ ,  $s_{\min} = 0.01$ .

После окончания случайного поиска по найденным компонентам вектора  $z$  определяется начальное приближение вектора  $q$  для вычислений методом Левенберга-Марквардта.

**5. Результаты определения вращательного движения КА.** Определение фактического движения КА относительно центра масс по данным (3) было выполнено на 12 интервалах времени. Основные характеристики этих интервалов приведены в табл. 1. Здесь для каждого интервала указаны: дата и декретное московское время первого измерения  $t_1$ , длина интервала  $t_N - t_1$ , число  $N$  включённых в обработку измерений. Полученные результаты представлены в табл. 2, 3 и на рис. 2÷15. В таблицах приведены результаты минимизации функционала (4) на интервалах из табл. 1. Здесь указаны значения некоторых компонент вектора  $q_*$ , стандартные отклонения этих компонент и

стандартное отклонение  $\sigma$  ошибок данных (4). Параметры  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  и  $p_i$  были определены со значительной погрешностью, поэтому в таблицах не приводятся. Погрешность определения начального углового положения КА на интервалах  $1 \div 6$  характеризуется значениями  $\sigma_\gamma, \sigma_\delta, \sigma_\beta \leq 1.5\pi$ , на интервалах  $7 \div 12$  – значениями  $\sigma_\gamma, \sigma_\delta, \sigma_\beta \leq 0.5\pi$ , причем доминируют значения, близкие верхним границам. Стандартные отклонения параметров  $p_i$  лежала в пределах от 0.01 до 1.5. Большая погрешность определения угловых параметров  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  вызвана, по-видимому, неблагоприятным расположением векторов  $S$  и  $n$ , а параметров  $p_i$  – слабым влиянием аэродинамического момента на вращательное движение КА.

Анализ графиков найденных угловых скоростей КА показывает, что вращательное движение КА на интервалах  $1 \div 6$  близко к регулярной прецессии Эйлера с преимущественным вращательным движением КА вокруг оси  $Ox_2$ . На интервалах  $7 \div 12$  характер движения КА более сложный, однако преимущественное вращение спутник также совершает вокруг оси  $Ox_2$ .

Для визуализации вращательного движения КА можно использовать графики углов  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Однако в данном случае такое описание вращательного движения КА не обладает наглядностью. Если спутник совершает движение, близкое к регулярной прецессии Эйлера, то наибольший интерес представляет движение оси собственного вращения КА. С учетом этого обстоятельства вращательное движение КА будем представлять следующим образом.

Введём инерциальную систему координат  $OZ_1Z_2Z_3$ , совпадающую с орбитальной системой, фиксированной на момент прохождения КА через восходящий узел орбиты. Вращение КА представим в виде суперпозиции сравнительно медленного движения вектора  $L$  кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс и регулярной прецессии КА вокруг этого вектора. Положение вектора  $L$  в системе  $OZ_1Z_2Z_3$  будем задавать двумя углами: углом  $\zeta_L$  между  $L$  и плоскостью орбиты, и углом  $\xi_L$  между проекцией  $L$  на плоскость орбиты осью  $OZ_3$  (рис. 2). Угол  $\zeta_L$  будем считать положительным, если проекция  $L$  на ось  $OZ_2$  положительна. Направление отсчёта  $\xi_L$  согласовано с осью  $OZ_2$ .

Аналогичным образом углы  $\xi_S$  и  $\zeta_S$  задают в системе  $OZ_1Z_2Z_3$  положение вектора  $S$  (рис. 2). Угол между векторами  $L$  и  $S$  обозначим  $\gamma_S$ .

Анализ результатов определения движения КА показал, что на интервале 1  $|\dot{\xi}_L| \leq 0.012^\circ/c$  и  $|\dot{\zeta}_L| \leq 0.012^\circ/c$ , на интервалах  $2 \div 6$   $|\dot{\xi}_L| \leq 0.003^\circ/c$  и  $|\dot{\zeta}_L| \leq 0.003^\circ/c$ . Эти величины существенно меньше угловой скорости движения КА вокруг  $L$ , равной на интервалах  $1 \div 6$  примерно  $10^\circ/c$ . На интервалах  $7 \div 12$   $|\dot{\xi}_L| \leq 0.12^\circ/c$  и  $|\dot{\zeta}_L| \leq 0.12^\circ/c$ , а угловая скорость КА равна  $\approx 1^\circ/c$ .

Для наглядного представления движения КА вокруг вектора  $L$ , будем рисовать проекции годографа орта оси  $Ox_2$  – оси собственного вращения КА – на координатные плоскости системы  $Ol_1l_2l_3$ , связанной с этим вектором [6]. Система  $Ol_1l_2l_3$  определяется следующим образом (рис. 3). Ось  $Ol_2$  направлена вдоль  $L$ ; ось  $Ol_1$  лежит в плоскости  $Ol_2Z_1$ , перпендикулярна  $L$  и образует тупой угол с осью  $OZ_1$ ; ось  $Ol_3$  дополняет систему до правой. Помимо проекций годографа орта оси  $Ox_2$  движение КА будем характеризовать углом нутации  $\varphi$ , который эта ось образует с вектором  $L$ .

Учитывая характер движения КА на рассматриваемых интервалах, это движение можно характеризовать усреднёнными величинами

$$\Omega = \frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} \omega_2 dt, \quad W = \frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} \sqrt{\omega_3^2 + r^{-2} \omega_1^2} dt.$$

При отсутствии внешних механических моментов угловые скорости КА-твёрдого тела относительно главных центральных осей инерции будут определяться по соотношениям  $\omega_2 = \Omega$ ,  $\omega_1 = rW \cos(p\Omega t + \alpha)$ ,  $\omega_3 = W \sin(p\Omega t + \alpha)$ , где  $\Omega$ ,  $W$  – постоянные величины,

$$p = \sqrt{\frac{(J_1 - J_2)(J_3 - J_2)}{J_1 J_3}}, \quad r = \sqrt{\frac{J_3(J_3 - J_2)}{J_1(J_1 - J_2)}}.$$

Средние квадратические отклонения

$$\delta\Omega = \sqrt{\frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} (\omega_2 - \Omega)^2 dt}, \quad \delta W = \sqrt{\frac{1}{t_N - t_1} \int_{t_1}^{t_N} \left( \sqrt{\omega_3^2 + r^{-2} \omega_1^2} - W \right)^2 dt}$$

характеризуют близость движения КА к регулярной прецессии с параметрами  $\Omega$  и  $W$ . В рассматриваемом случае  $p = 0.484$ ,  $r = 1.512$ .

В табл. 4 приведены некоторые параметры вращательного движения КА для рассмотренных интервалов. Вращательное движение КА характеризуется здесь параметрами  $\Omega$ ,  $\delta\Omega$ ,  $W$  и  $\delta W$ , а также максимальным значением угла  $\varphi$  на интервале – параметром  $\varphi_{\max}$ . Движение векторов  $L$  и  $S$  происходило медленно и характеризуется усреднёнными значениями  $\langle \xi_L \rangle$ ,  $\langle \zeta_L \rangle$ ,  $\langle \xi_S \rangle$ ,  $\langle \zeta_S \rangle$ ,  $\langle \gamma_S \rangle$ . Усреднение выполнялось по формулам, приведённым для параметров  $\Omega$  и  $W$ .

На рис. 4 – 15 представлена реконструкция вращательного движения КА на этих интервалах. Эти рисунки иллюстрируют решения уравнений вращательного движения КА, доставляющие минимум функционалу (4). Все рисунки скомпонованы одинаково и содержат проекции годографа орта  $Ox_2$  на плоскости системы  $Ol_1l_2l_3$ , графики углов  $\xi_L(t)$  и  $\zeta_L(t)$ , графики угловых ско-

ростей КА  $\omega_1(t)$ ,  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_3(t)$  и графики расчетного тока СБ  $I(t)$ . Маркерами рядом с графиками  $I(t)$  указаны данные измерений  $(t_n, I_n)$ . Все графики построены на соответствующих отрезках  $t_1 \leq t \leq t_N$ ; началом отсчета времени служит точка  $t_1$ . Угловые величины выражены в градусах, угловые скорости – в град./с, ток – в амперах.

Исследуемые интервалы движения КА, можно разделить на интервалы быстрого движения КА (интервалы 1÷6, рис. 4 – 9) и медленного движения (интервалы 7÷12, рис. 10 – 15). На быстрых интервалах движение КА представляет собой регулярную прецессию Эйлера с преимущественным вращением вокруг оси  $Ox_2$ . Кинетический момент КА на разных интервалах находился как вблизи орбитальной плоскости, так и далеко от последней. Скорость движения вектора кинетического момента была значительно меньше скорости движения КА. На более медленных интервалах движение КА носило более сложный характер, хотя проекции оси  $Ox_2$  на направление вектора  $L$  сохраняли свой знак. Как и следовало ожидать, в случае более медленного вращательного движения КА и более сложного изменения во времени тока, снимаемого с СБ, движение определялось лучше, чем в случае быстрого вращения КА вокруг оси  $Ox_2$ . Эта ситуация является общей, хотя возможны исключения. Примером может служить случай, когда коллинеарны или достаточно близки по направлению вектор нормали к СБ, ось вращения КА и вектор, направленный на Солнце.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ 08-01-00467.

### Литература.

- [1] Модель верхней атмосферы для баллистических расчётов. ГОСТ 22721-77. М., Изд-во стандартов, 1978.
- [2] Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.
- [3] В.А. Сарычев, В.В. Сазонов, М.Ю. Беляев, Н.И. Ефимов. Повышение точности определения вращательного движения орбитальных станций «Салют-6» и «Салют-7» по данным измерений. Космические исследования, 1991, т.29, с. 375 – 389.
- [4] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций «Салют-6» и «Салют-7» относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. Космические исследования. 1988, т. 24, N 3, с. 337 – 344.
- [5] Л.А. Растригин. Статистические методы поиска. Москва, Наука, 1968.
- [6] Белецкий В.В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва, Наука, 1965.

Таблица 1. Интервалы определения вращательного движения КА.

| Интервал | дата,<br>д. м. г. | $t_1$ ,<br>ч : мин : с | $t_N - t_1$ , с | $N$ |
|----------|-------------------|------------------------|-----------------|-----|
| 1        | 24.10.2006        | 06:35:46               | 493             | 330 |
| 2        | 26.10.2006        | 12:33:34               | 514             | 391 |
| 3        | 27.10.2006        | 07:40:12               | 406             | 319 |
| 4        | 27.10.2006        | 10:49:50               | 408             | 321 |
| 5        | 27.10.2006        | 12:24:00               | 473             | 362 |
| 6        | 22.12.2006        | 13:54:56               | 228             | 501 |
| 7        | 20.03.2007        | 16:17:43               | 1905            | 183 |
| 8        | 20.03.2007        | 17:50:01               | 2151            | 216 |
| 9        | 20.03.2007        | 20:29:51               | 1289            | 124 |
| 10       | 21.03.2007        | 09:18:21               | 2249            | 200 |
| 11       | 21.03.2007        | 19:22:08               | 1699            | 189 |
| 12       | 21.03.2007        | 22:24:02               | 991             | 96  |

Таблица 2. Результаты минимизации.

| Инт. | $\sigma$ , А | $\omega_{10}$ , с <sup>-1</sup> | $\sigma_{\omega_1}$ , с <sup>-1</sup> | $\omega_{20}$ , с <sup>-1</sup> | $\sigma_{\omega_2}$ , с <sup>-1</sup> | $\omega_{30}$ , с <sup>-1</sup> | $\sigma_{\omega_3}$ , с <sup>-1</sup> |
|------|--------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1    | 1.6763       | 0.0007                          | 0.0020                                | 0.1627                          | 0.0002                                | -0.0007                         | 0.0007                                |
| 2    | 1.1657       | 0.0014                          | 0.0010                                | 0.1619                          | 0.00004                               | 0.0006                          | 0.0006                                |
| 3    | 0.9081       | 0.0004                          | 0.0015                                | 0.1616                          | 0.00005                               | -0.0005                         | 0.0002                                |
| 4    | 1.0366       | -0.0014                         | 0.0016                                | 0.1617                          | 0.0002                                | 0.0004                          | 0.0004                                |
| 5    | 1.0489       | 0.0008                          | 0.0014                                | 0.1615                          | 0.00004                               | -0.0007                         | 0.0003                                |
| 6    | 0.5705       | -0.0011                         | 0.0006                                | 0.1855                          | 0.0001                                | 0.0005                          | 0.0003                                |
| 7    | 1.2287       | 0.0030                          | 0.0003                                | 0.0177                          | 0.0001                                | -0.0077                         | 0.0002                                |
| 8    | 1.2536       | -0.0112                         | 0.0004                                | 0.0147                          | 0.0002                                | -0.0051                         | 0.0002                                |
| 9    | 1.4877       | 0.0175                          | 0.0006                                | 0.0111                          | 0.0008                                | 0.0040                          | 0.0009                                |
| 10   | 1.6085       | 0.0190                          | 0.0004                                | 0.0082                          | 0.0006                                | 0.0028                          | 0.0006                                |
| 11   | 1.4798       | -0.0064                         | 0.0004                                | 0.0174                          | 0.0002                                | 0.0070                          | 0.0002                                |
| 12   | 1.9865       | -0.0007                         | 0.010                                 | 0.0195                          | 0.0005                                | 0.0075                          | 0.0015                                |

Таблица 3. Результаты минимизации.

| Инт. | $\lambda$ | $\sigma_\lambda$ | $\mu$  | $\sigma_\mu$ | $\alpha_S$ , рад. | $\sigma_{\alpha_S}$ , рад. | $\beta_S$ , рад. | $\sigma_{\beta_S}$ , рад. |
|------|-----------|------------------|--------|--------------|-------------------|----------------------------|------------------|---------------------------|
| 1    | 3.2973    | 0.53             | 0.7329 | 0.041        | 2.0099            | 0.036                      | -0.0620          | 0.25                      |
| 2    | 3.0459    | 0.37             | 0.7332 | 0.030        | 1.9486            | 0.063                      | -0.2037          | 0.12                      |
| 3    | 3.0524    | 0.29             | 0.6980 | 0.028        | 1.9687            | 0.0071                     | 0.0058           | 0.12                      |
| 4    | 3.0623    | 0.33             | 0.6924 | 0.032        | 1.9658            | 0.020                      | 0.0685           | 0.10                      |
| 5    | 3.0675    | 0.33             | 0.6992 | 0.031        | 1.9534            | 0.025                      | -0.1203          | 0.081                     |
| 6    | 3.0896    | 0.57             | 0.7231 | 0.048        | 1.9500            | 0.081                      | -0.1594          | 0.16                      |
| 7    | 2.8499    | 0.11             | 0.7289 | 0.0094       | 2.0762            | 0.0061                     | -0.0059          | 0.0040                    |
| 8    | 2.7101    | 0.084            | 0.7120 | 0.0082       | 2.0493            | 0.0048                     | -0.0114          | 0.0072                    |
| 9    | 3.1803    | 0.23             | 0.8201 | 0.019        | 2.3926            | 0.024                      | -0.0173          | 0.0095                    |
| 10   | 2.5848    | 0.075            | 0.7051 | 0.0073       | 1.9518            | 0.018                      | -0.0289          | 0.0075                    |
| 11   | 2.4625    | 0.063            | 0.6720 | 0.0076       | 1.5088            | 0.019                      | 0.0228           | 0.0037                    |
| 12   | 3.6879    | 0.50             | 0.7535 | 0.030        | 2.1576            | 0.50                       | -0.0059          | 0.046                     |

Таблица 4. Параметры движения КА.

| Инт. | $\langle \xi_L \rangle$ ,<br>град. | $\langle \zeta_L \rangle$ ,<br>град. | $\langle \xi_S \rangle$ ,<br>град. | $\langle \zeta_S \rangle$ ,<br>град. | $\langle \gamma_S \rangle$ ,<br>град. | $\Omega$ ,<br>°/с | $\delta\Omega$ ,<br>°/с | $W$ ,<br>°/с | $\delta W$ ,<br>°/с | $\varphi_{\max}$ ,<br>град. |
|------|------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------|-------------------------|--------------|---------------------|-----------------------------|
| 1    | -130.7                             | 51.8                                 | -170.5                             | 23.4                                 | 41.6                                  | 9.32              | 0.0008                  | 0.056        | 0.018               | 0.79                        |
| 2    | -117.4                             | 11.2                                 | -169.6                             | 23.4                                 | 51.0                                  | 9.27              | 0.0002                  | 0.063        | 0.006               | 0.64                        |
| 3    | -106.2                             | 31.2                                 | -169.3                             | 23.3                                 | 55.9                                  | 9.26              | 0.0003                  | 0.041        | 0.011               | 0.58                        |
| 4    | -103.8                             | 47.2                                 | -169.3                             | 23.3                                 | 56.7                                  | 9.26              | 0.0003                  | 0.054        | 0.015               | 0.71                        |
| 5    | -104                               | 33.7                                 | -169.3                             | 23.3                                 | 57.3                                  | 9.25              | 0.0003                  | 0.062        | 0.014               | 0.75                        |
| 6    | 177.6                              | 37.2                                 | -157.5                             | 26.9                                 | 23.5                                  | 10.63             | 0.0002                  | 0.051        | 0.007               | 0.48                        |
| 7    | -185.5                             | 84.4                                 | 176.1                              | 28.3                                 | 56.0                                  | 0.83              | 0.12                    | 0.516        | 0.033               | 50.0                        |
| 8    | -147.7                             | -18.2                                | 176.1                              | 28.3                                 | 58.2                                  | 0.86              | 0.11                    | 0.495        | 0.032               | 46.6                        |
| 9    | 148.9                              | -33.5                                | 176.1                              | 28.3                                 | 68.0                                  | 0.75              | 0.20                    | 0.655        | 0.082               | 67.1                        |
| 10   | 130.5                              | -27.7                                | 175.8                              | 28.2                                 | 70.9                                  | 0.81              | 0.17                    | 0.591        | 0.047               | 65.6                        |
| 11   | -167.8                             | -39.3                                | 175.6                              | 28.2                                 | 69.3                                  | 0.93              | 0.13                    | 0.527        | 0.056               | 52.8                        |
| 12   | -123.2                             | -9.9                                 | 175.6                              | 28.2                                 | 70.4                                  | 0.97              | 0.12                    | 0.479        | 0.079               | 50.5                        |

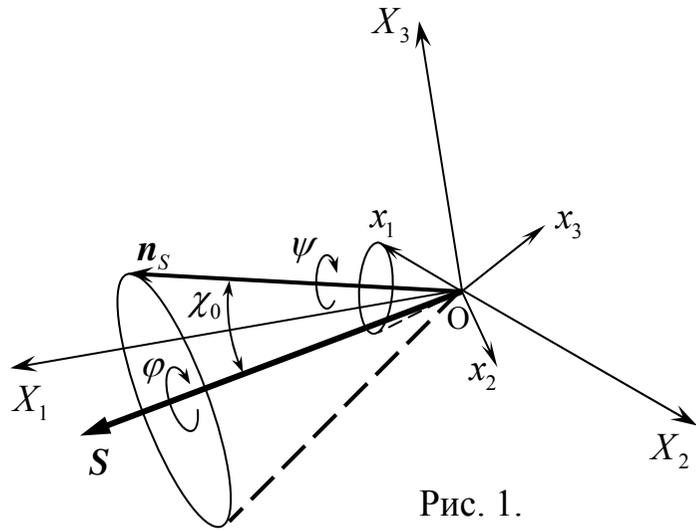


Рис. 1.

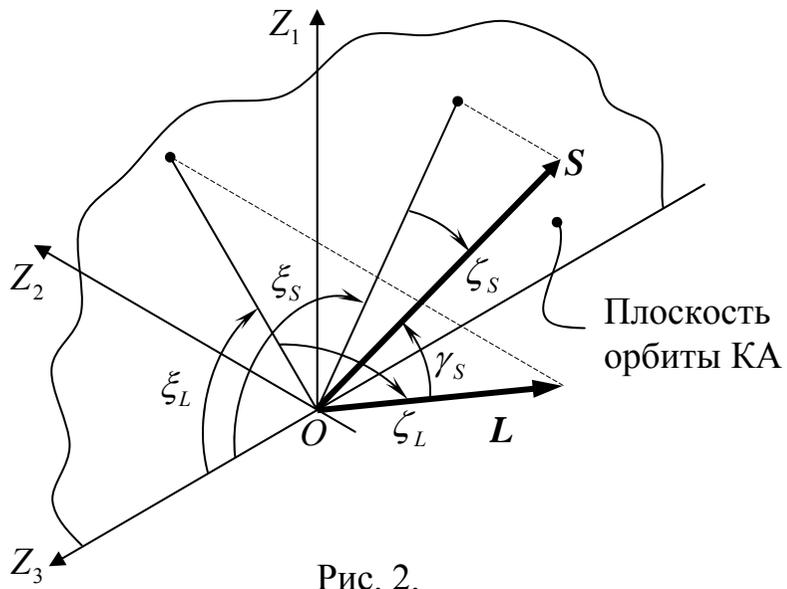


Рис. 2.

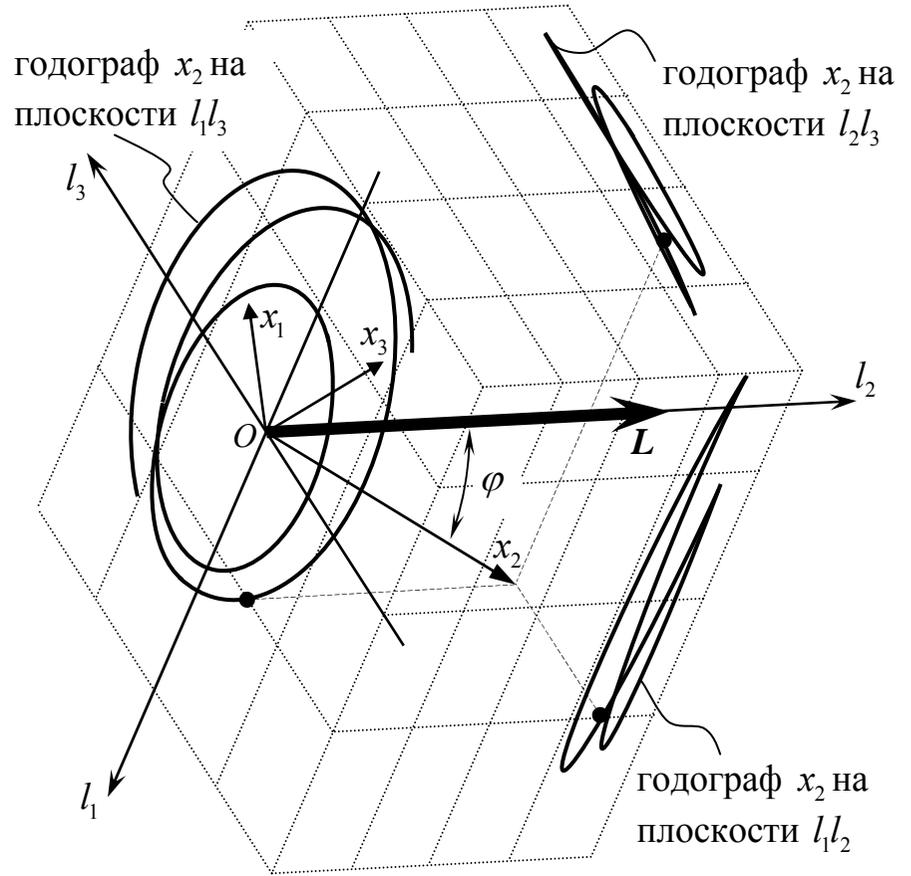


Рис. 3.

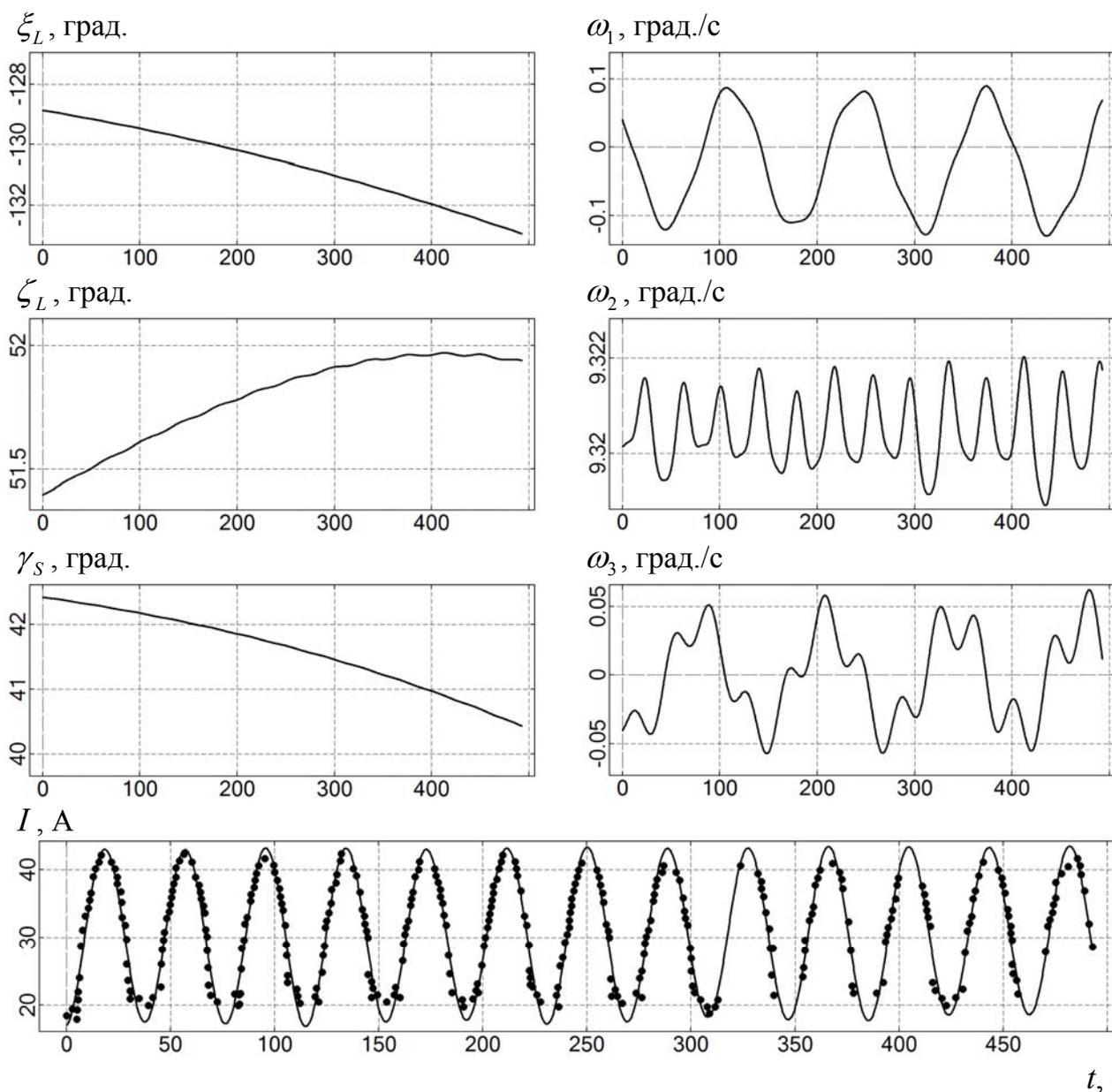
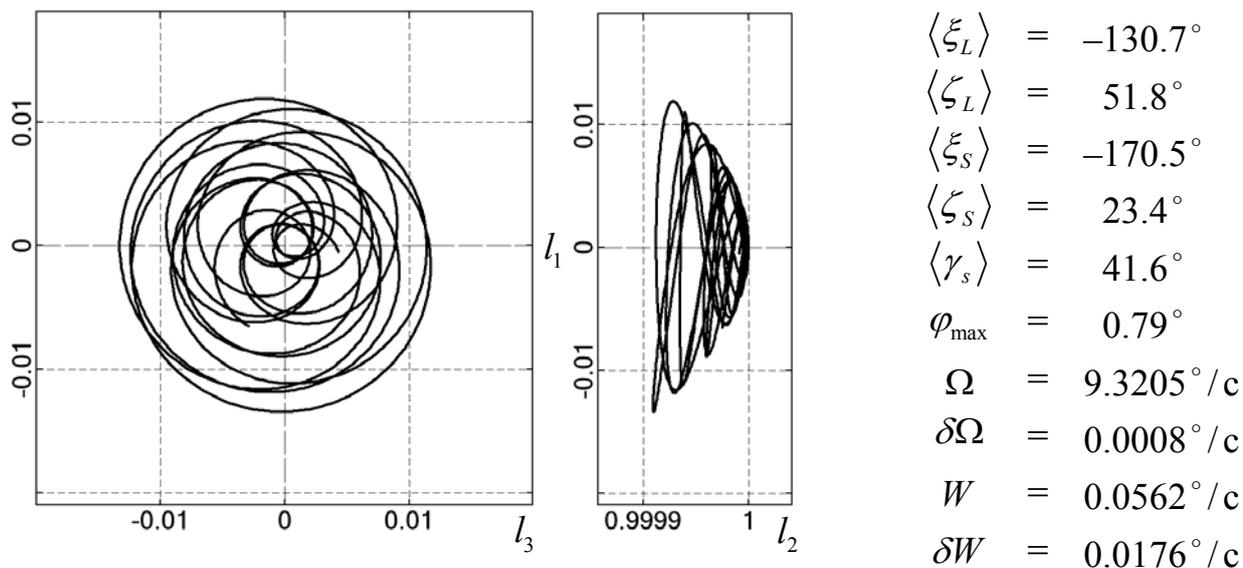


Рис. 4. Интервал 1, момент  $t = 0$  соответствует 06:35:46 ДМВ 24.10.2006.

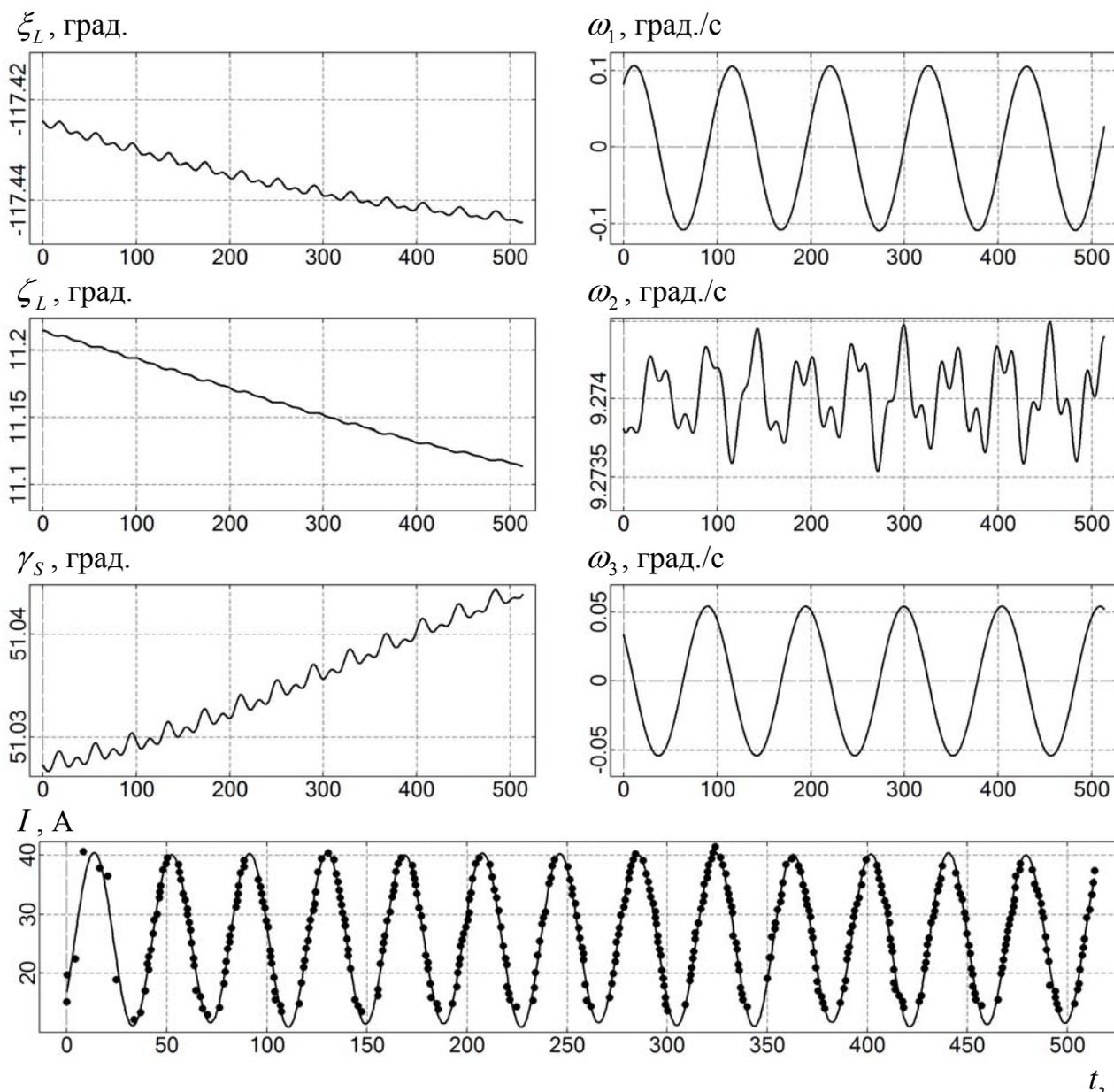
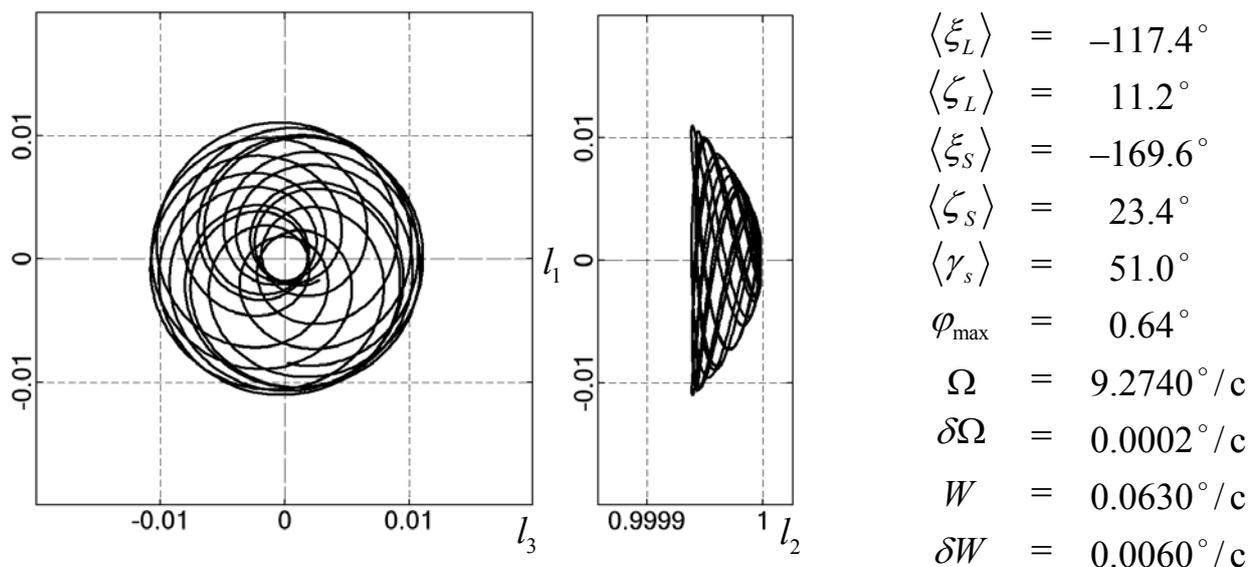


Рис. 5. Интервал 2, момент  $t = 0$  соответствует 12:33:34 ДМВ 26.10.2006.

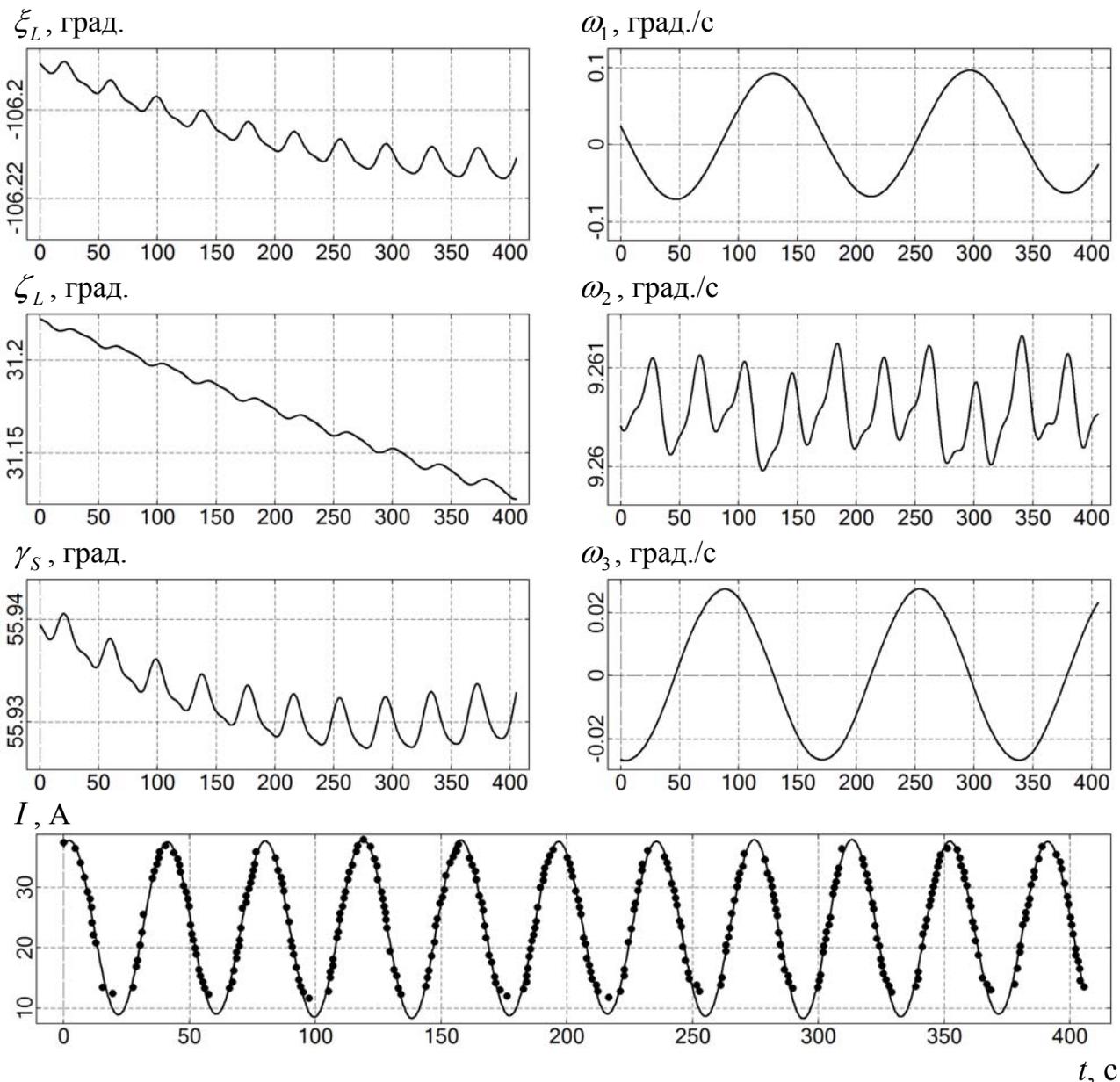
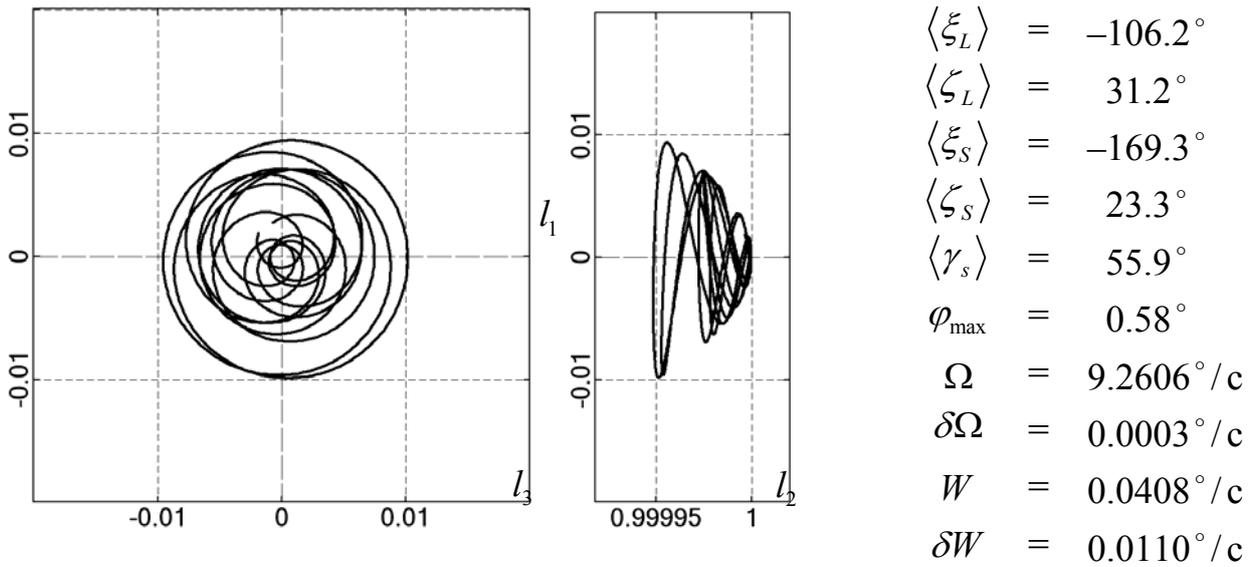


Рис. 6. Интервал 3, момент  $t = 0$  соответствует 07:40:12 ДМВ 27.10.2006.

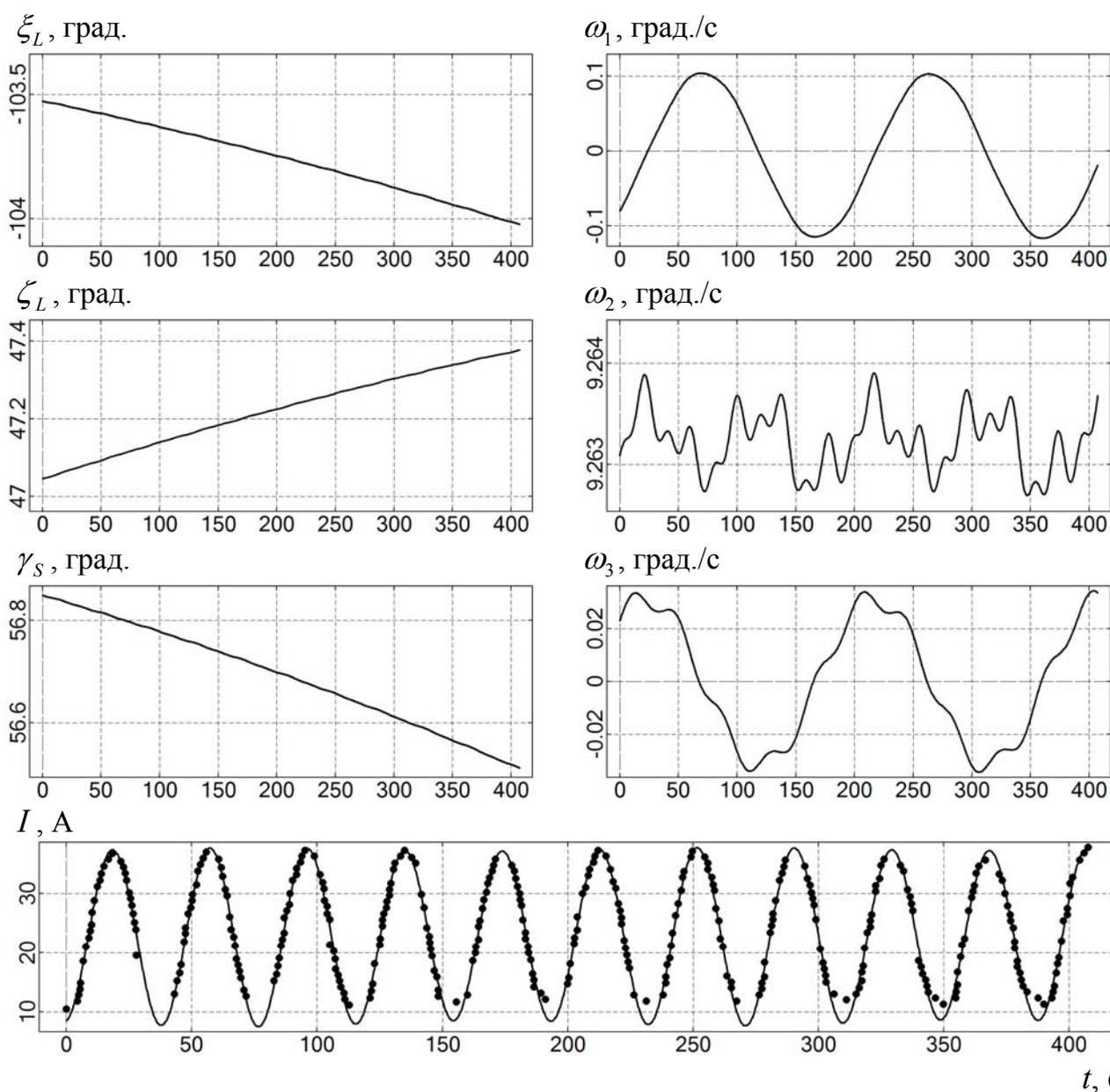
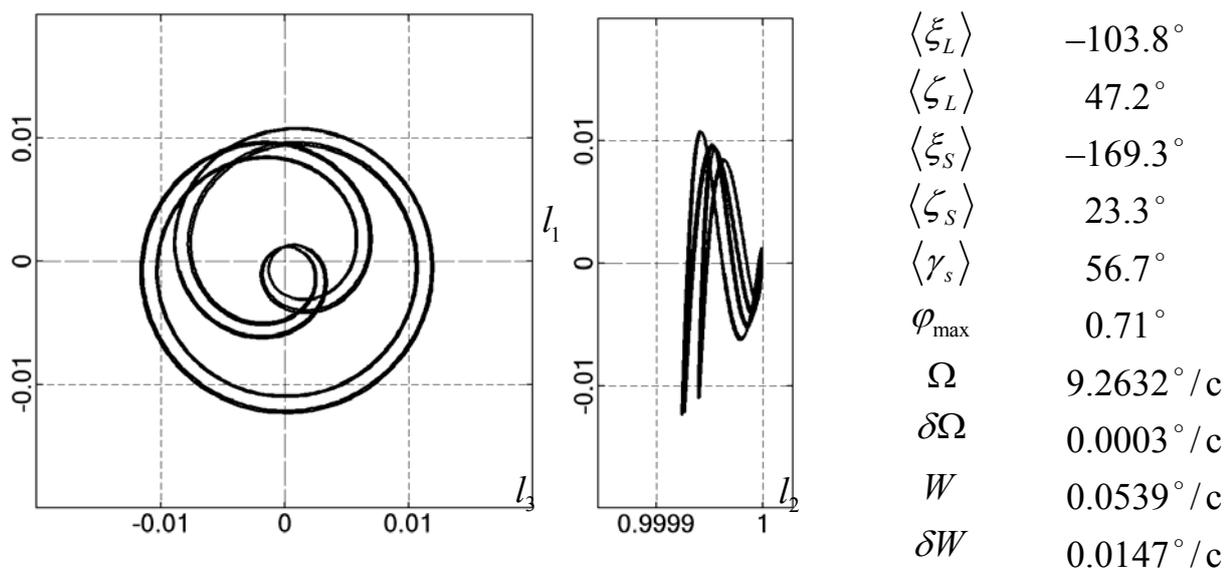


Рис. 7. Интервал 4, момент  $t = 0$  соответствует 10:49:50 ДМВ 27.10.2006.

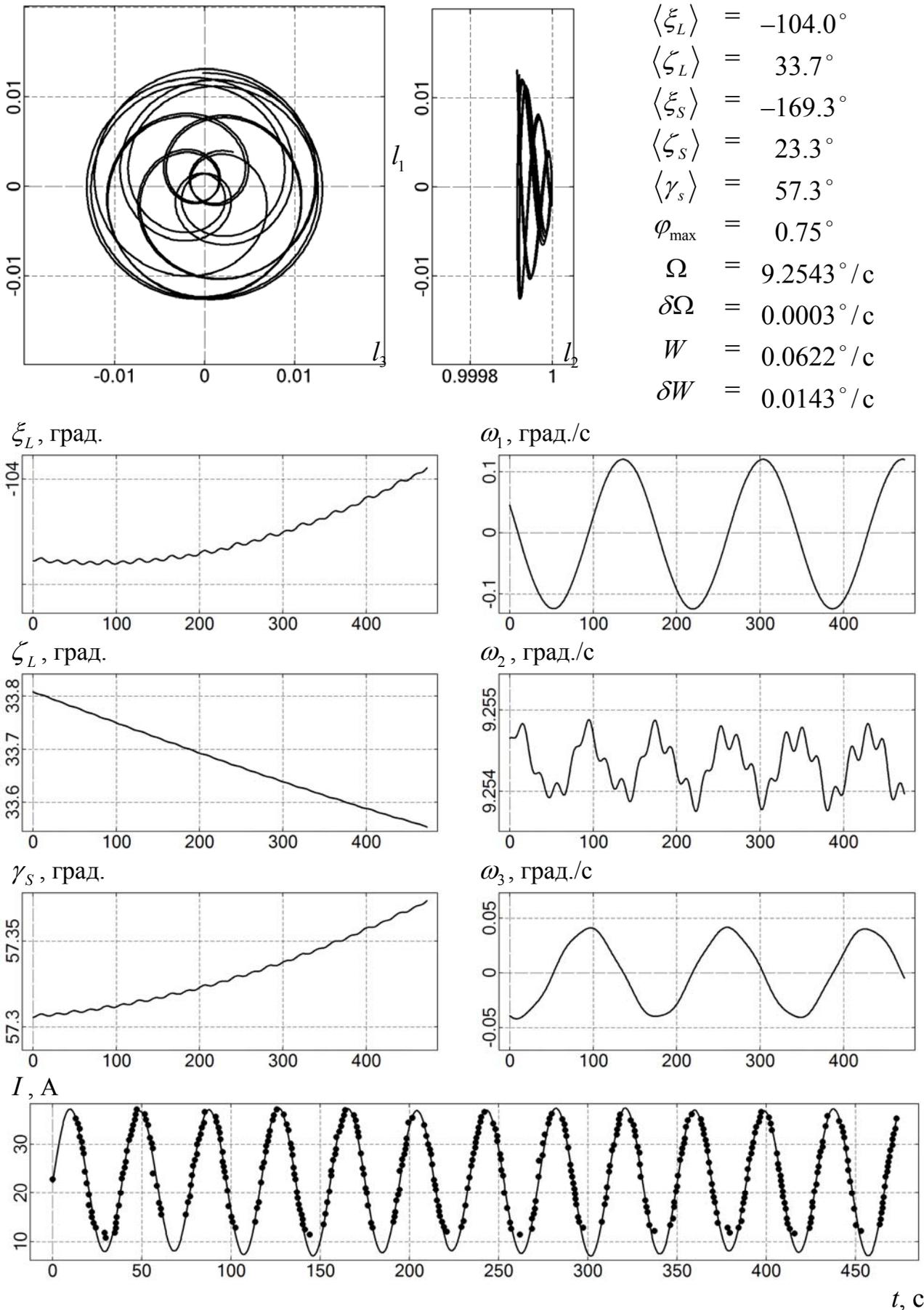


Рис. 8. Интервал 5, момент  $t = 0$  соответствует 12:24:00 ДМВ 27.10.2006.

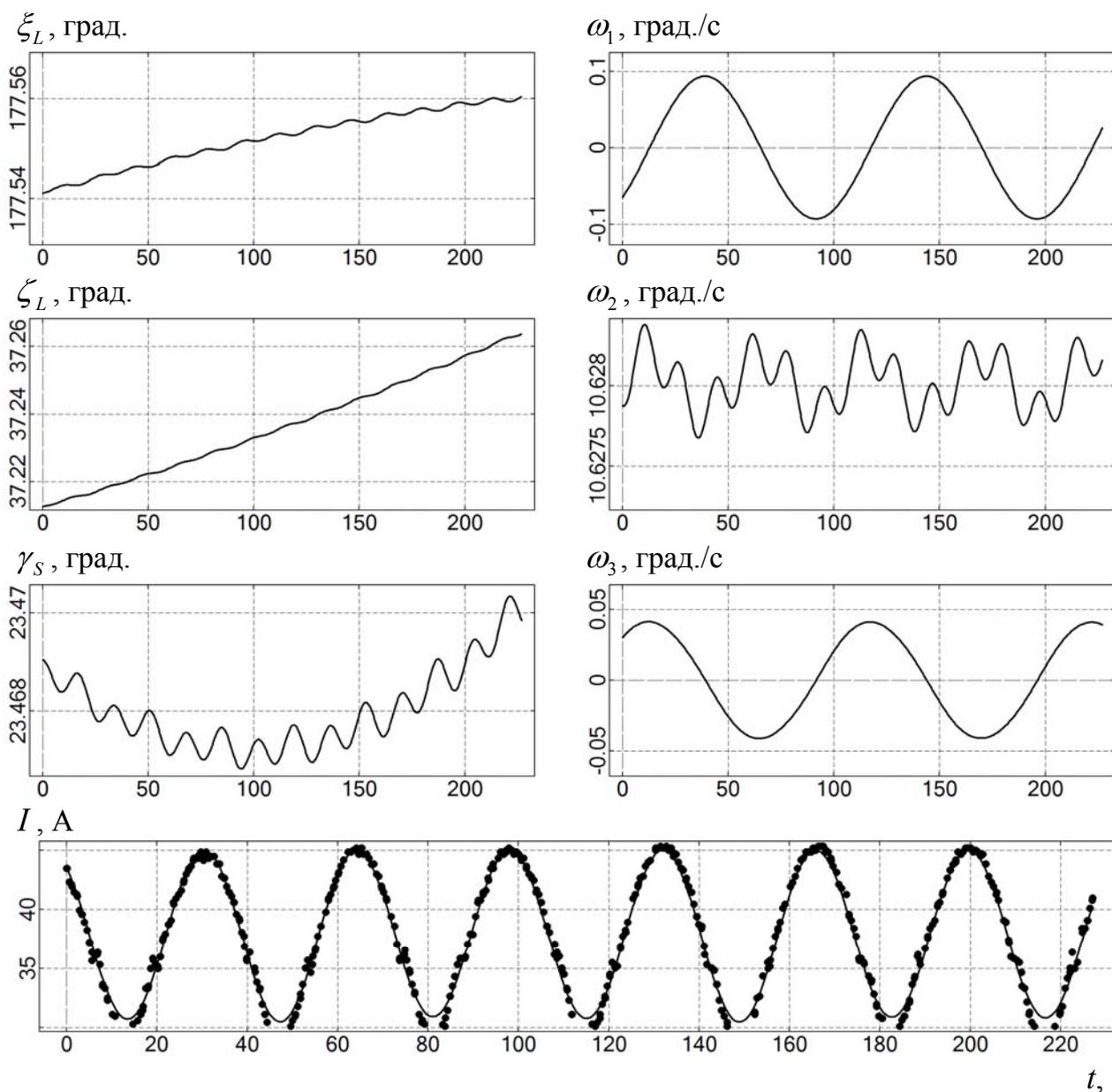
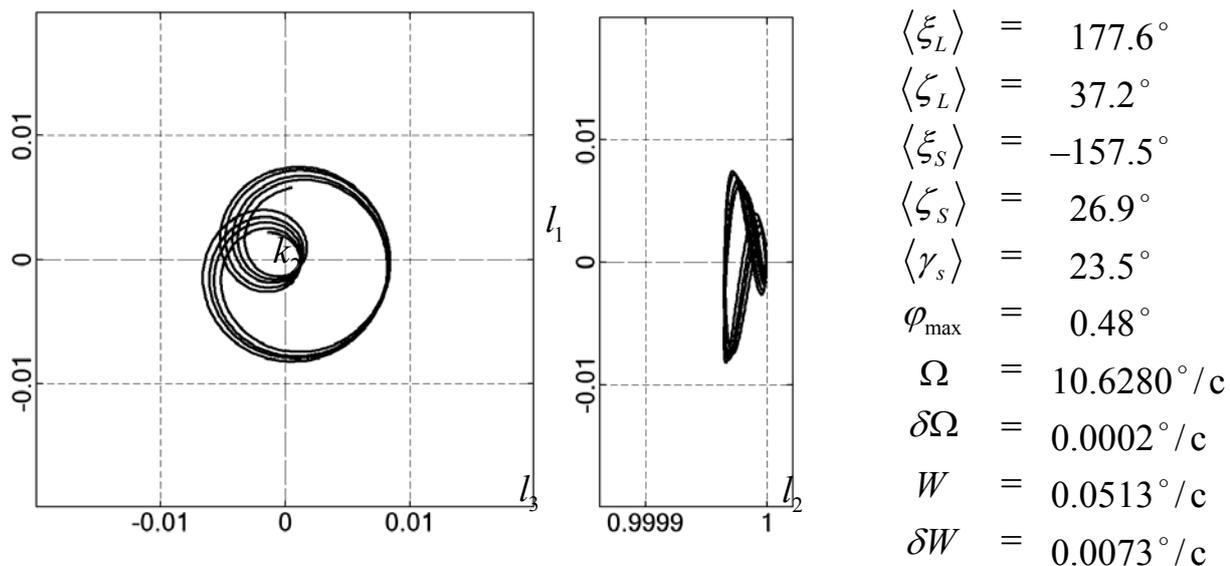


Рис. 9. Интервал б, момент  $t = 0$  соответствует 13:54:56 ДМВ 22.12.2006.

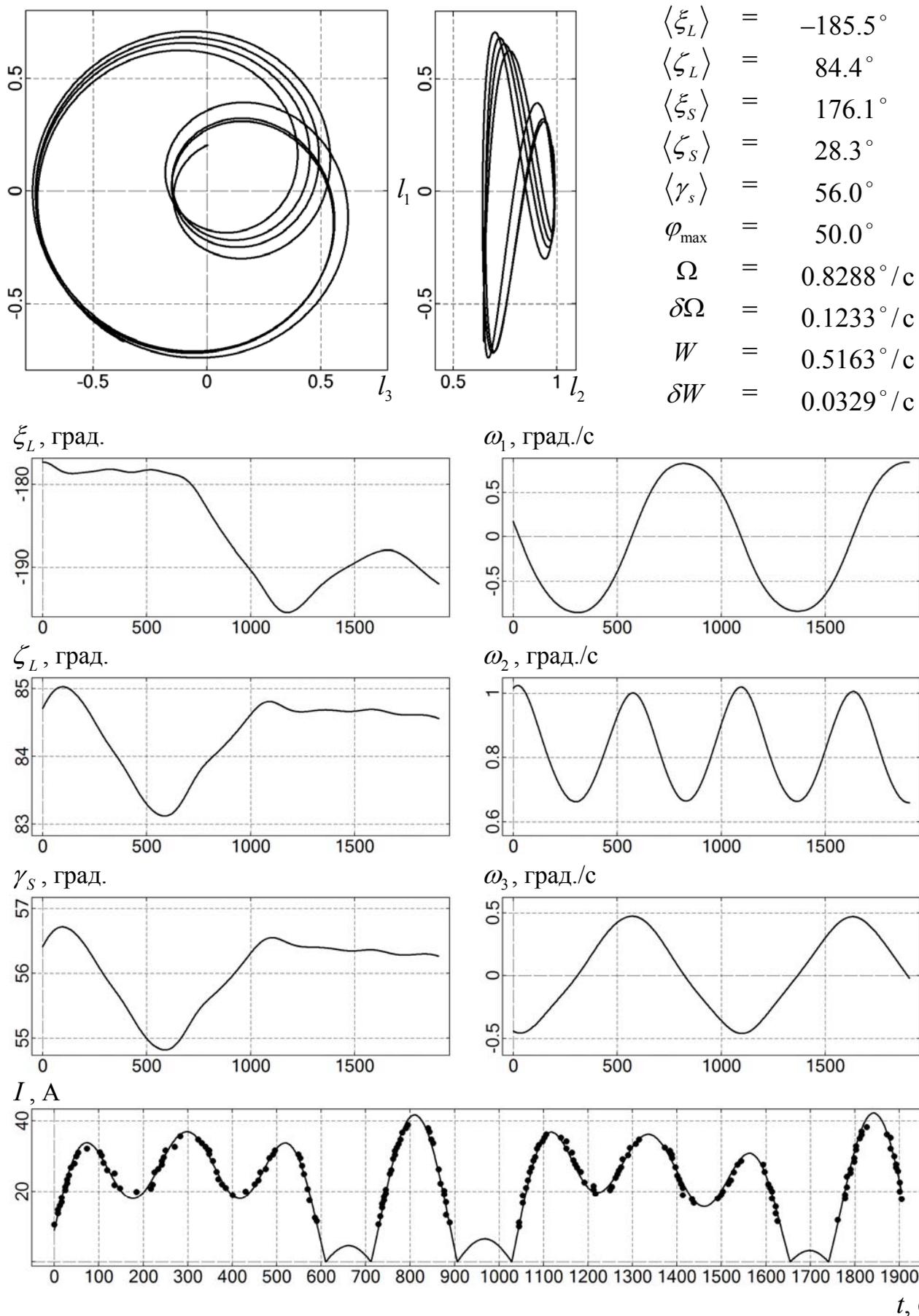


Рис. 10. Интервал 7, момент  $t = 0$  соответствует 16:17:43 ДМВ 20.03.2007.

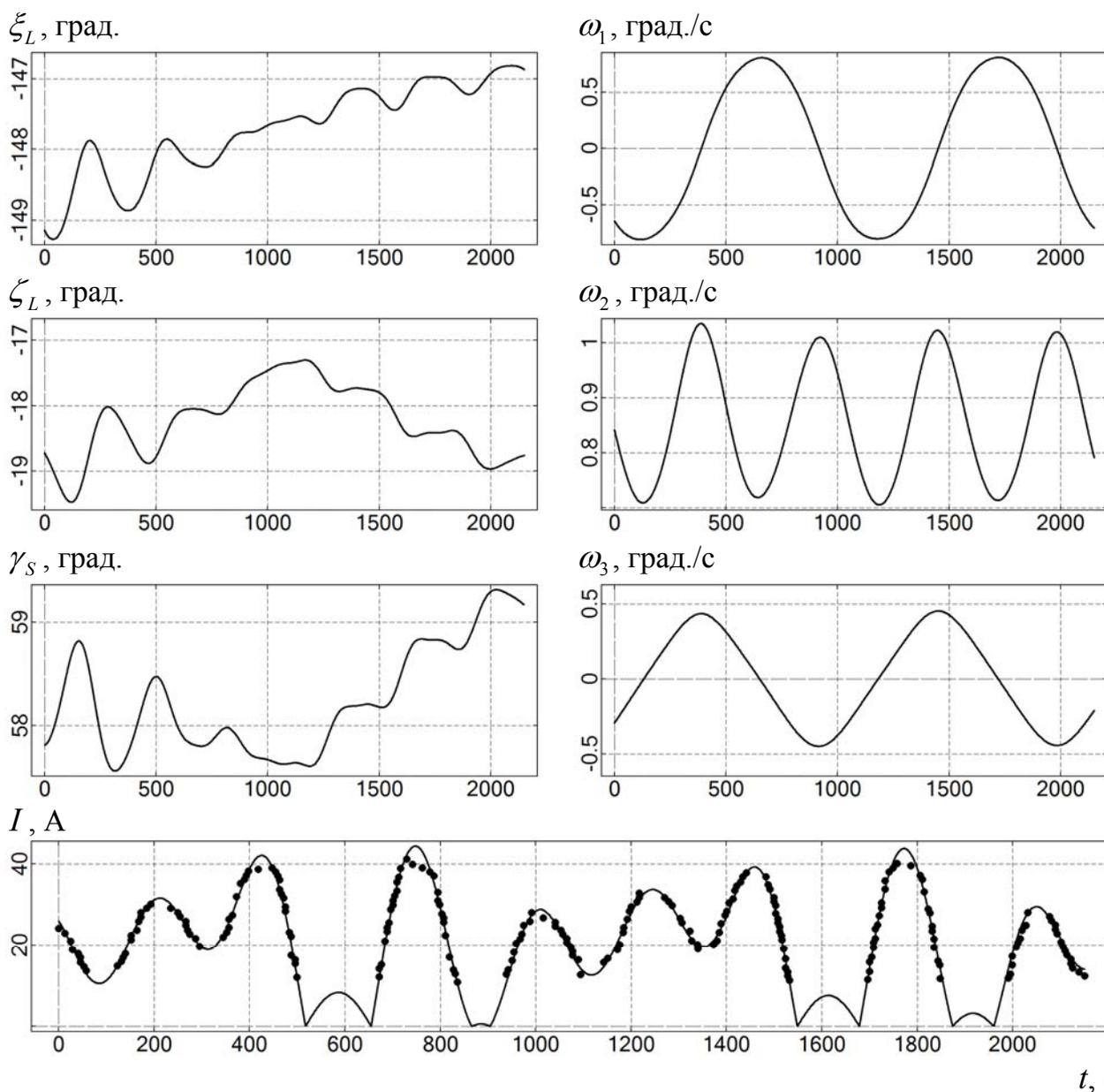
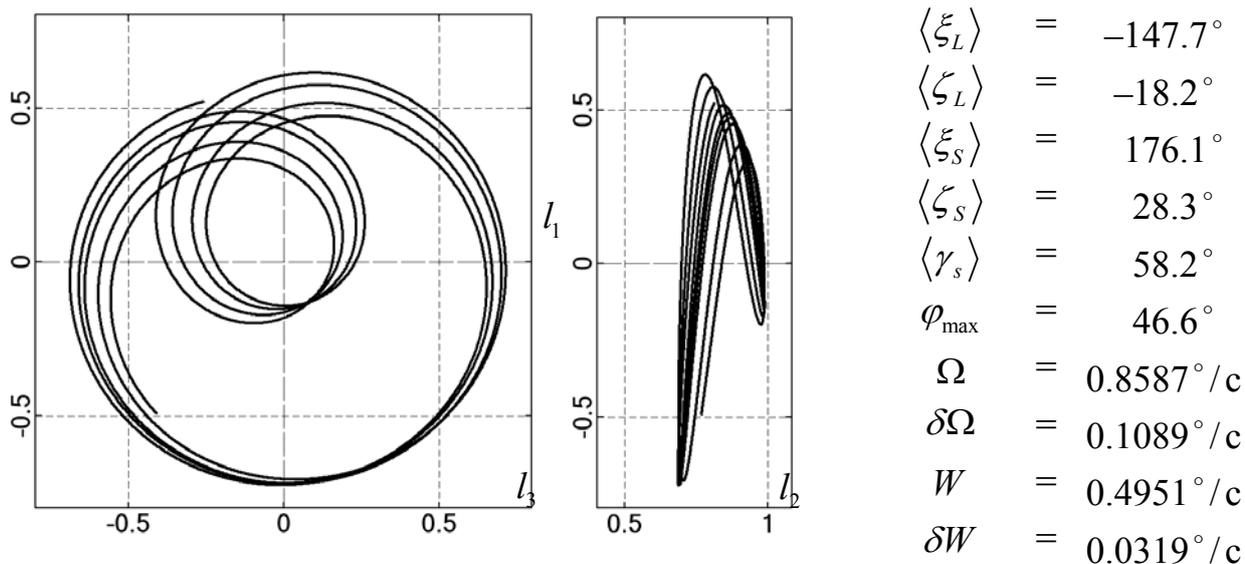


Рис. 11. Интервал 8, момент  $t = 0$  соответствует 17:50:01 ДМВ 20.03.2007.

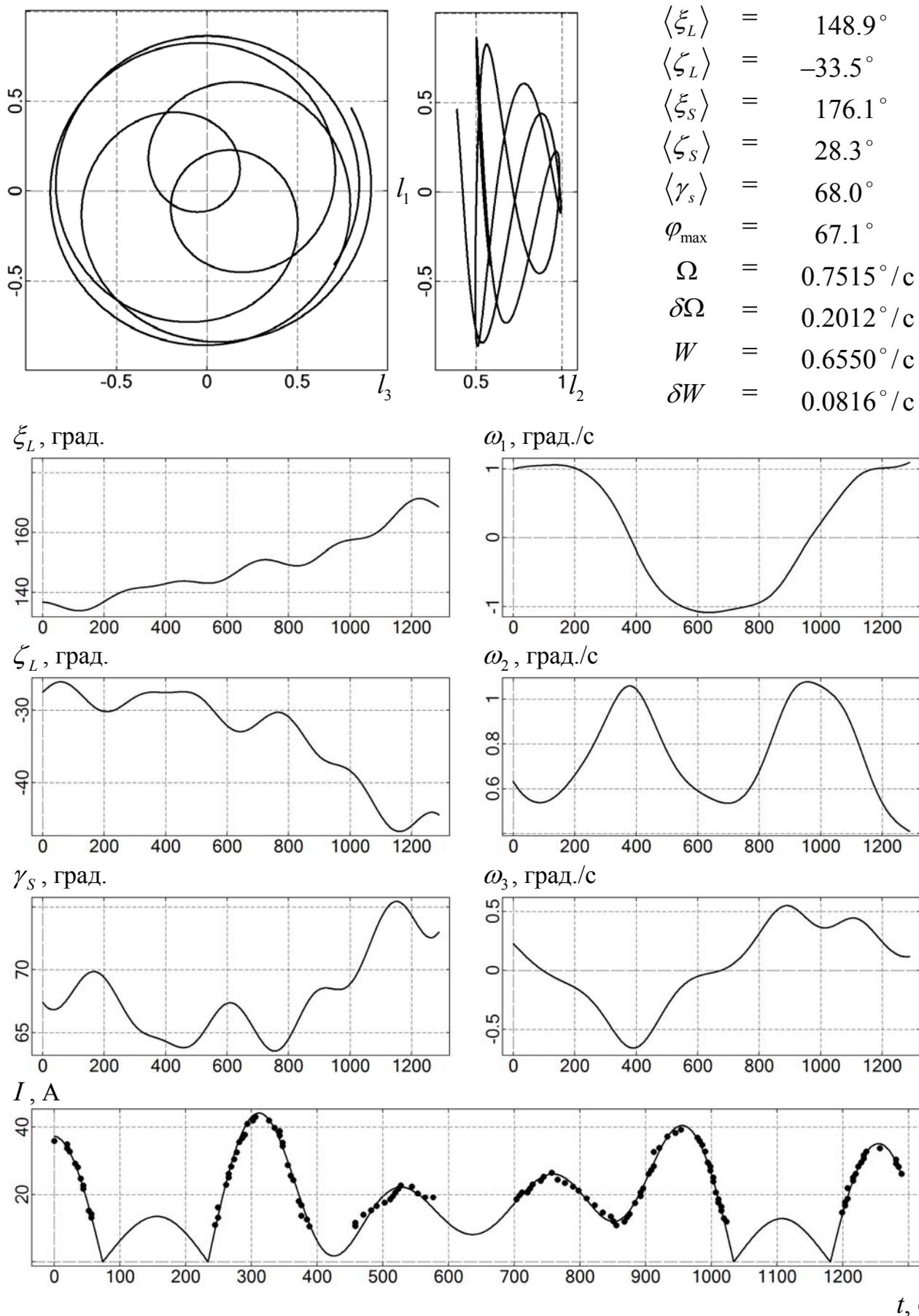


Рис. 12. Интервал 9, момент  $t = 0$  соответствует 20:29:51 ДМВ 20.03.2007.

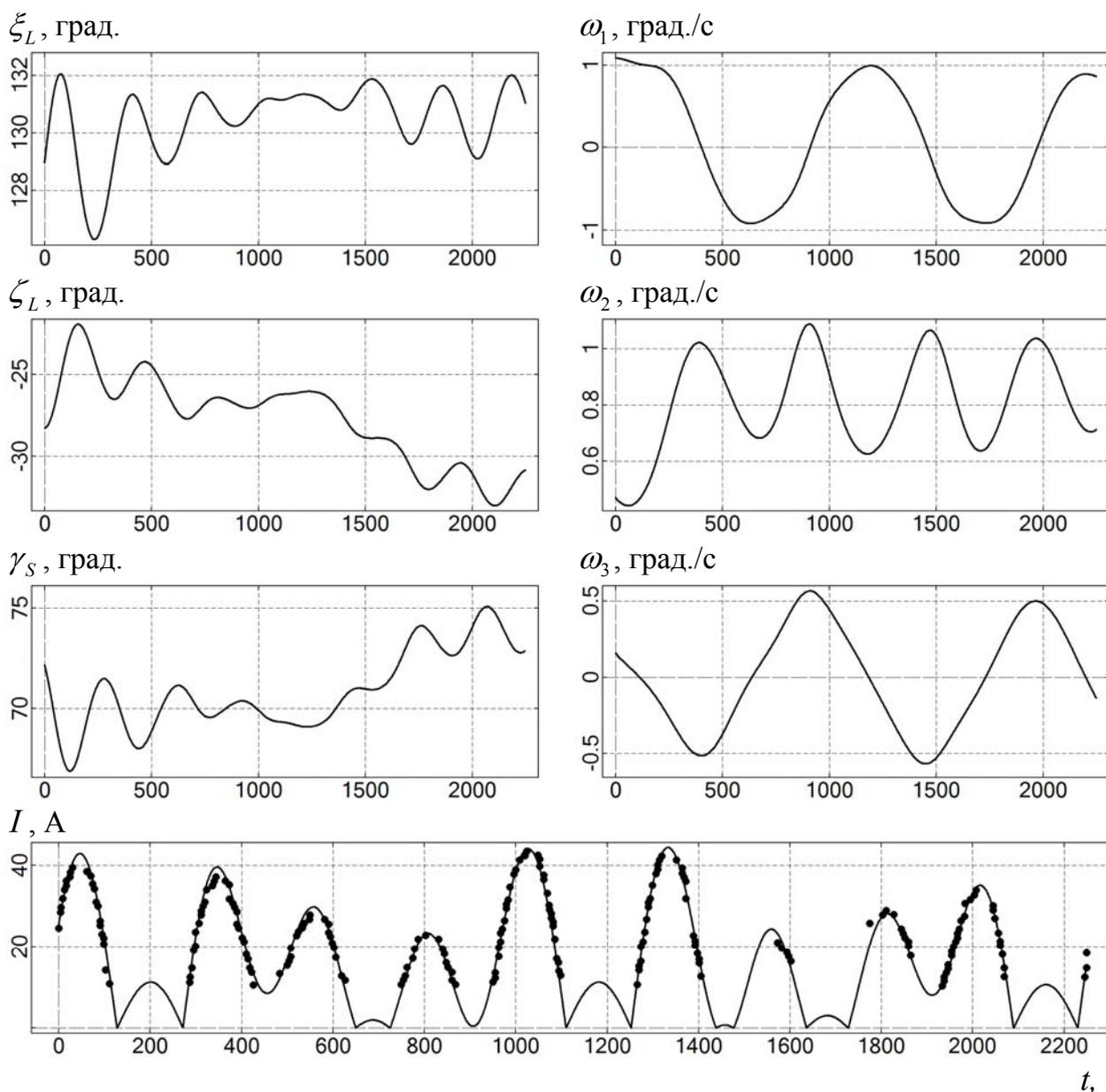
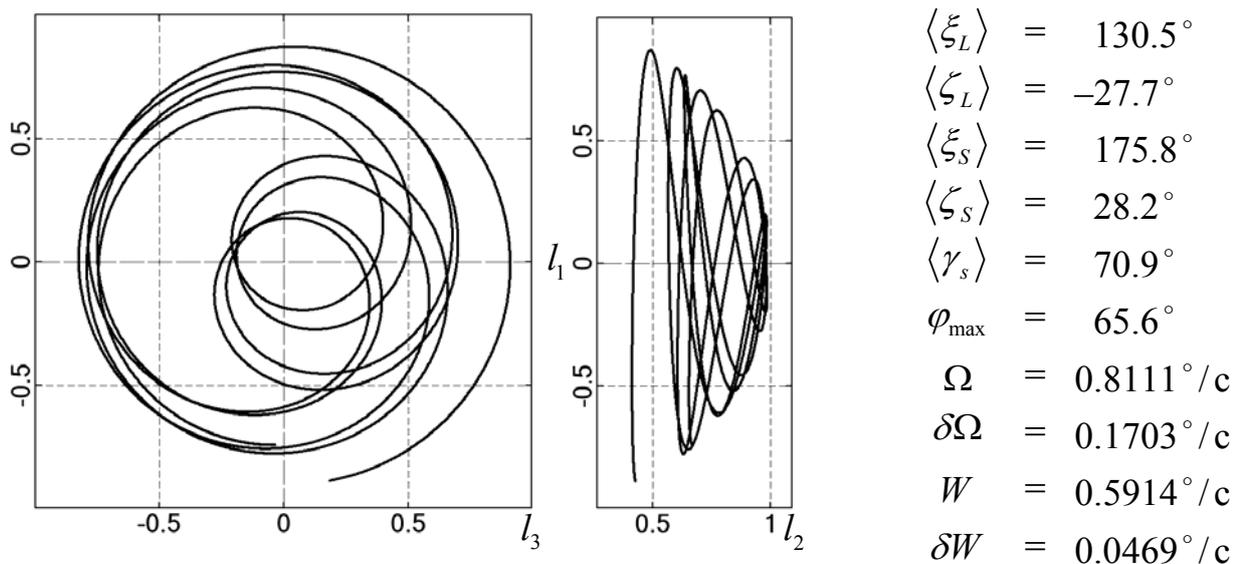


Рис. 13. Интервал 10, момент  $t = 0$  соответствует 09:18:21 ДМВ 1.03.2007.

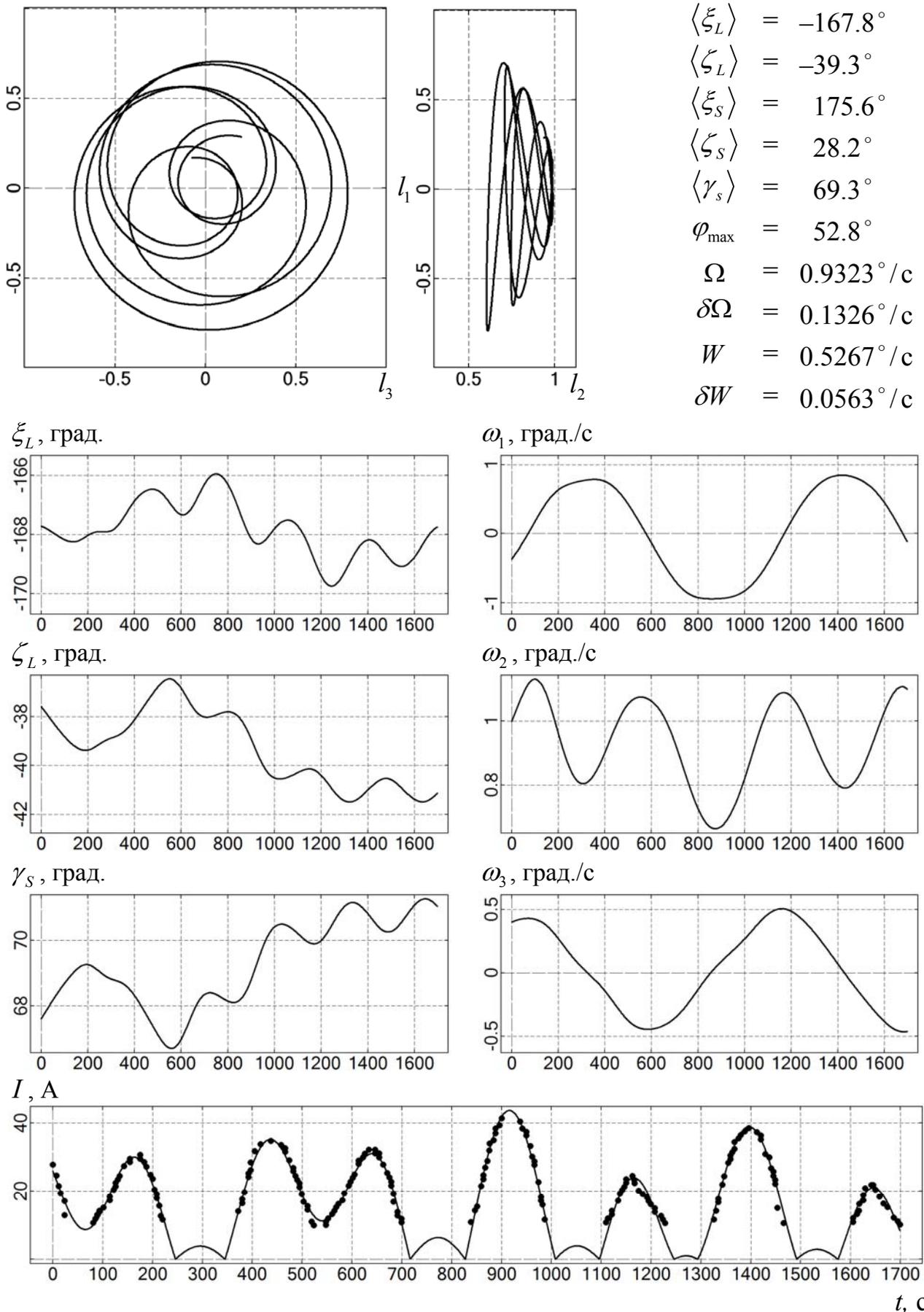


Рис. 14. Интервал 11, момент  $t = 0$  соответствует 19:22:08 ДМВ 21.03.2007.

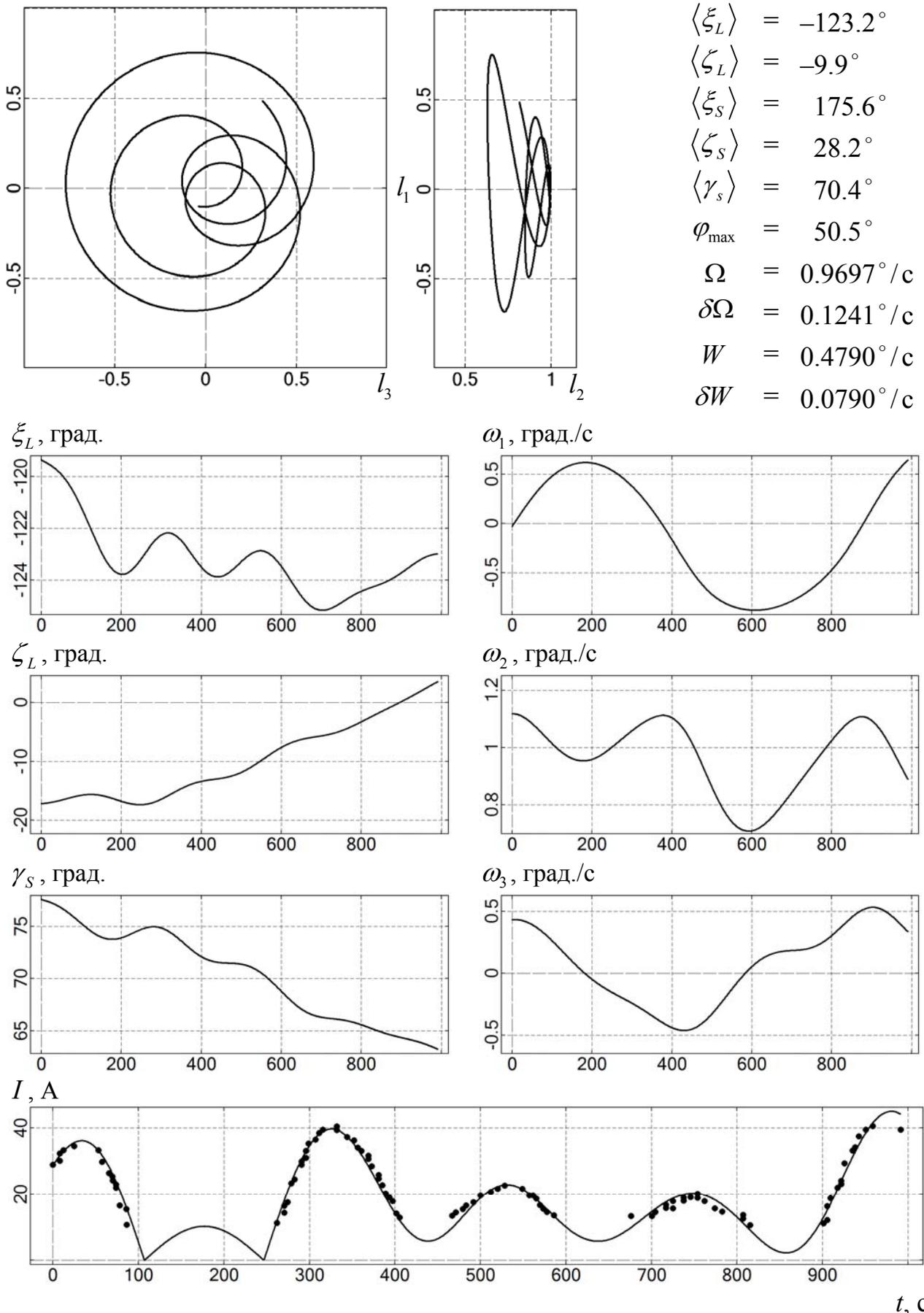


Рис. 15. Интервал 12, момент  $t = 0$  соответствует 22:24:02 ДМВ 21.03.2007.