



Ивашкин В.В., Голиков А.Р.

Траектории перелета между  
Землей и геостационарной  
орбитой при использовании  
гравитационного поля Луны

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ивашкин В.В., Голиков А.Р. Траектории перелета между Землей и геостационарной орбитой при использовании гравитационного поля Луны // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 95. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-95>

ISSN 2071-2898



**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Российской академии наук**

**В.В. Ивашкин, А.Р. Голиков**

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА  
МЕЖДУ ЗЕМЛЕЙ И  
ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТОЙ  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ  
ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ  
ЛУНЫ**

**Препринт № 95 за 2008 г.**

**Москва**

**Ордена Ленина**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В. Келдыша**  
**Российской Академии наук**

**В.В. Ивашкин, А.Р. Голиков**

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА МЕЖДУ ЗЕМЛЕЙ И**  
**ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТОЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ**  
**ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ**

**Москва**

## ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА МЕЖДУ ЗЕМЛЕЙ И ГЕОСТАЦИОНАРНОЙ ОРБИТОЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

**АННОТАЦИЯ.** В работе рассмотрены «обходные» импульсные траектории перелетов космического аппарата (КА) между Землей и геостационарной орбитой (ГСО): перелета с орбиты близкого спутника Земли на ГСО, а также «касательного» и «нормального» перелета с ГСО к Земле. При этих перелетах существенно используется гравитационное поле Луны: схема полета КА включает подлет КА к сфере действия Луны и близкий облет Луны, т.е. совершается лунный гравитационный маневр. Такие «обходные» траектории могут быть энергетически выгоднее обычных «прямых» траекторий перелета. Для данных «обходных» траекторий выполнен анализ чувствительности траекторий к вариациям начальных данных: координат начального радиус-вектора, компонент начального вектора скорости и начального времени, а также параметров модели поля и компонент вектора скорости КА вдоль траектории. Основной анализ выполнен в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом сжатия, Луна и Солнце). Показано, что возможно возвращение с ГСО без коррекции при движении по «обходной» траектории с «нормальным» входом в атмосферу Земли.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант 06-01-00531) и программы поддержки научных школ (Грант НШ 1123.2008.1).

**Ключевые слова:** геостационарная орбита, оптимальные космические траектории, импульсные маневры, лунный гравитационный маневр, чувствительность траектории к возмущениям.

## **“DETOUR” TRAJECTORIES FOR SPACECRAFT FLIGHT BETWEEN EARTH AND GEOSTATIONARY ORBIT USING MOON’S GRAVITY**

**ABSTRACT.** The Paper gives some results in analysis of “detour” trajectories for impulsive spaceflights between the geostationary orbit (GSO) and the Earth: flight from low-Earth orbit to the GSO as well as “tangential” and “normal” flights from the GSO to the Earth. The gravity field of the Moon is essentially used for these trajectories. The schemes of the flight include coming to the Moon’s sphere of gravity influence and close fly-by of the Moon, i.e. they use the lunar gravity assist. From the energy point of view, this “detour” scheme of the flight can be better considerably than the “direct” one. Analysis of the trajectory sensitivity to some perturbations is performed for these trajectories. The coordinates of the initial position, the components of the initial velocity and the initial time as well as some other parameters are varied. The main analysis is performed for the four-body problem (a spacecraft, the Earth with its oblateness, the Moon and the Sun). It is shown that returning the spacecraft from the GSO without a correction is possible using the “detour” trajectory with “normal” re-entry to the Earth atmosphere.

The study is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant N 06-01-00531) and by the Grant of the President of Russia for the State Support of Leading Scientific Schools NSh-1123.2008.1.

**Key words:** geostationary orbit, optimal space trajectories, impulsive maneuvers, lunar gravity assist, trajectory sensitivity to perturbations

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	5
2. МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА.....	7
3. «ОБХОДНЫЕ» ПЕРЕЛЕТЫ КА ОТ ЗЕМЛИ НА ГСО.....	9
4. «КАСАТЕЛЬНЫЙ» ПЕРЕЛЕТ КА С ГСО К ЗЕМЛЕ.....	12
5. «НОРМАЛЬНЫЙ» ПЕРЕЛЕТ КА С ГСО К ЗЕМЛЕ.....	16
6. ВЫВОДЫ.....	21
7. ЛИТЕРАТУРА.....	21

## CONTENTS

1. INTRODUCTION.....	5
2. CALCULATION METHOD FOR SPACE FLIGHT TRAJECTORIES.....	7
3. “DETOUR” SPACE FLIGHTS FROM EARTH TO GSO.....	9
4. “TANGENTIAL” SPACE FLIGHT FROM GSO TO EARTH .....	12
5. “NORMAL” SPACE FLIGHT FROM GSO TO EARTH .....	16
6. CONCLUSIONS.....	21
7. REFERENCES.....	21

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Геостационарные спутники, «висящие» практически неподвижно над соответствующими точками Земли, важны для обеспечения линий космической связи и наблюдения за Землей. В рамках центрального ньютоновского гравитационного поля такой спутник, как известно, должен двигаться по т.н. геостационарной орбите ГСО – круговой геоэкваториальной орбите радиуса  $R \approx 42164$  км, с звездно-суточным периодом обращения. С точки зрения прикладной небесной механики для обеспечения функционирования таких спутников надо решить ряд задач, в частности, задачу выведения космического аппарата с Земли на ГСО и задачу удаления КА с ГСО. Относительно выведения КА на ГСО с использованием двигателя большой тяги анализ показал [1-3], что при достаточно большой широте точки старта, свыше  $\sim 28^\circ$  (это выполняется для Российских космодромов Байконур и Плесецк), энергетически выгоднее использовать не «прямую» схему полета, а «обходную», с предварительным облетом Луны. При этом выполняется лунный гравитационный маневр с пассивным изменением наклона и перигейного расстояния и затем осуществляется подлет к ГСО, см. рис. 1 [1-3]. В силу важности этого результата данное исследование позднее было повторено европейскими учеными [4].

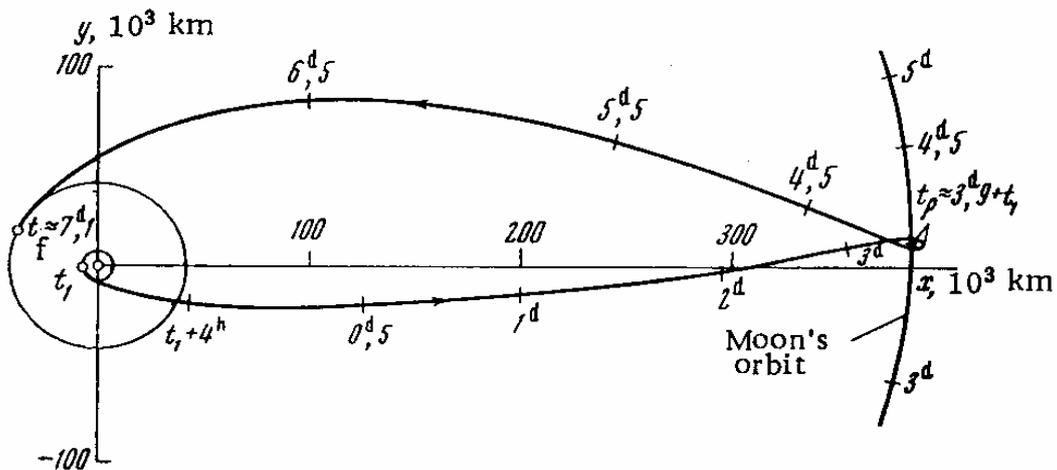


Рис. 1. Траектория выведения КА на геостационарную орбиту с гравитационным маневром у Луны [1-3].

На рис. 2 приведена зависимость характеристической скорости выведения на ГСО от начального наклона - для двух схем полета [1-3]. Здесь кривая  $w_k^I$  соответствует двух- и трехимпульсному полету в поле притяжения Земли, а кривая  $w_k^{II}$  – «обходному» полету с маневром у Луны. Последняя схема выведения, основанная на идеях А. Штернфельда об «обходных» перелетах [5-6] и идеях Ф.А. Цандера о гравитационных маневрах [7], была реализована на практике космонавтики

для выведения спутника ASIASAT 3/HGS-1 [8-9], и это было названо «наиболее впечатляющим» событием космонавтики в 1998 г. [8]; на рис. 3 приведена траектория этого полета [8].

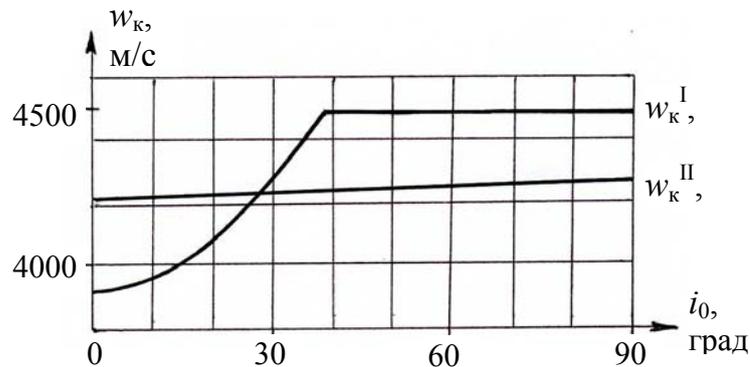


Рис. 2. Энергетика выведения на ГСО для двух схем полета [1-3].

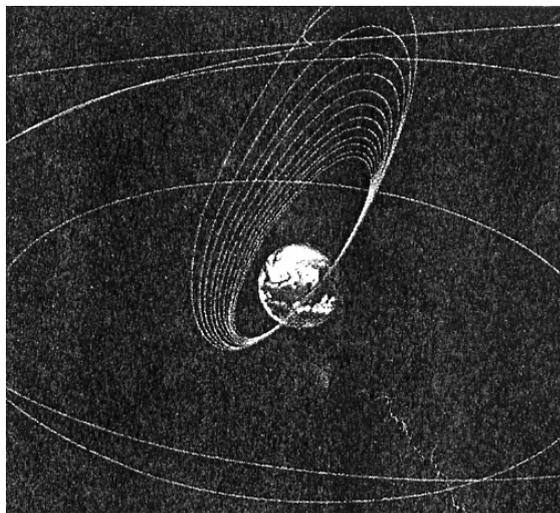


Рис. 3. Траектория выведения КА ASIA SAT 3/HGS-1 на ГСО [8].

Вторая задача – задача увода КА с ГСО, возникает, в первую очередь, ввиду того, что места на ГСО очень дефицитны. Так, уже сейчас на ГСО работает ~ 350 КА. Поэтому, чтобы не создавать «космического мусора» на ГСО, КА после окончания своего функционирования должен быть уведен с этой орбиты. Сейчас этот увод осуществляется поднятием высоты его орбиты на несколько сотен километров. Однако это представляется временной мерой, и в будущем скоро должен встать вопрос о кардинальном решении данной задачи.

Таким решением является, например, возвращение КА с ГСО к Земле. При этом будет происходить сгорание и разрушение КА в атмосфере или посадка его на поверхность Земли. Последний вариант может быть необходим, в частности, для возвращения на Землю ценного оборудования, результатов научных исследований или многоразового аппарата обслуживания объектов на ГСО [10]. Для этой задачи

возвращения с ГСО к Земле также энергетически оптимальным будет полет к Земле по «обходной» схеме, с облетом Луны [11-21].

В настоящей работе рассмотрены указанные «обходные» импульсные траектории для перелетов космического аппарата (КА) между Землей и геостационарной орбитой (ГСО): для перелета с орбиты близкого спутника Земли на ГСО, а также для «касательного» и «нормального» перелета с ГСО к Земле. При этих перелетах существенно используется гравитационное поле Луны: схема полета КА включает подлет КА к сфере действия Луны и близкий облет Луны, т.е. совершается лунный гравитационный маневр. Такие «обходные» траектории могут быть энергетически выгоднее обычных «прямых» траекторий перелета. Однако эти траектории, очевидно, более чувствительны к ошибкам выведения и ошибкам исполнения коррекции, поэтому их, вообще говоря, труднее реализовать.

В данной работе для «обходных» траекторий выполнен анализ чувствительности этих траекторий к вариациям начальных данных: координат начального радиус-вектора, компонент начального вектора скорости и начального времени. Это дает возможность оценить влияние ошибок выведения КА на отклонение конечных параметров траектории от их точных значений. Анализируется также влияние вариаций компонент вектора скорости вдоль траектории на конечные параметры. Это позволяет оценить величины необходимых корректирующих импульсов для коррекции влияния ошибок выведения и ошибок исполнения коррекции. Исследовано также влияние параметров модели поля на траекторию КА.

## ***2. МЕТОД РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА***

При определении и анализе «обходных» траекторий перелета между Землей и геостационарной орбитой использовались два метода: «точный» метод численного интегрирования и качественный метод точечной сферы действия Луны.

В «точном» методе траектория перелета рассматривается в рамках задачи четырех тел (КА, Земля с учетом ее сжатия, т.е. 2-ой зональной гармоники  $J_2$ , Луна и Солнце) и определяется численным интегрированием системы дифференциальных уравнений движения точки в невращающейся геоцентрической геоэкваatorialной системе прямоугольных координат  $OXYZ$ . При этом используется среднее равноденствие и средний геоэкватор стандартной эпохи J2000.0. На основе такого подхода разработан численный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движение КА, и построения траектории КА [22-26]:

$$d\mathbf{r} / dt = \mathbf{V}, d\mathbf{V} / dt = - (\mu_E/r^3)\mathbf{r} + \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_M + \mathbf{a}_S. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  ( $x, y, z$ ),  $\mathbf{V}$  ( $V_x, V_y, V_z$ ) – радиус-вектор и вектор скорости КА,  $r=|\mathbf{r}|$ ;  $\mu_E$  – гравитационный параметр Земли;  $\mathbf{a}_E$  ( $a_{Ex}, a_{Ey}, a_{Ez}$ ),  $\mathbf{a}_M$ ,  $\mathbf{a}_S$  – возмущающие ускорения, вызванные нецентральностью поля тяготения Земли, притяжением Луны, Солнца:

$$\begin{aligned} a_{Ex} &= a_{E0} [-1+5z^2/r^2]x/r; \\ a_{Ey} &= a_{E0} [-1+5z^2/r^2]y/r; \\ a_{Ez} &= a_{E0} [-3+5z^2/r^2]z/r; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$a_{E0} = 3\mu_E J_2 R_e^2 / (2r^4);$$

$$\mathbf{a}_M = \mu_M \{ -\mathbf{r}_M / r_M^3 + (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) / |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}|^3 \}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}_S = \mu_S \{ -\mathbf{r}_S / r_S^3 + (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) / |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^3 \}; \quad (2.4)$$

где  $R_e, J_2$  – экваториальный радиус и коэффициент 2-ой зональной гармоники геопотенциала Земли,  $\mu_M, \mu_S$  – гравитационные параметры Луны и Солнца,  $\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_S$  – геоцентрические радиус-векторы Луны и Солнца,  $r_M = |\mathbf{r}_M|, r_S = |\mathbf{r}_S|$ .

Использованы следующие значения констант:

$$\mu_E = 398.6004481 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2; \mu_M = 4.90279914 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2;$$

$$\mu_S = 132712439.935 \text{ тыс.км}^3/\text{тыс.с}^2; J_2 = 0.0010826348; R_e = 6.378136 \text{ тыс. км.}$$

Время  $t$  отсчитывается от эпохи D0 = 2000 г, 22 декабря, 0 час. Для нее юлианская дата DJ0 = 2451898.5.

Эфемеридная поправка принята равной нулю.

Интегрирование системы (2.1) производится методом ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [27]. При этом расчет ведется с двойной точностью. Для определения координат Луны и Солнца используются JPL–эфемериды DE403. Определяется также движение точки в селеноцентрической геоэкваториальной системе координат MXYZ, которая получена параллельным переносом геоцентрической системы OXYZ в центр масс Луны.

Начальное приближение для «точного» решения задачи обычно определяется с помощью качественного метода, основанного на точечной сфере действия Луны [1-3, 14-16, 18, 21].

Оценки влияния гармоник гравитационного поля Земли и Луны на движение КА выполнены согласно численно-аналитической теории [28].

### 3. «ОБХОДНЫЕ» ПЕРЕЛЕТЫ КА ОТ ЗЕМЛИ НА ГСО

На рис. 4 дана типичная геоцентрическая траектория «обходного» перелета с близкой к Земле орбиты КА на геостационарную орбиту ГСО – в проекции на оси  $X$ ,  $Y$ .

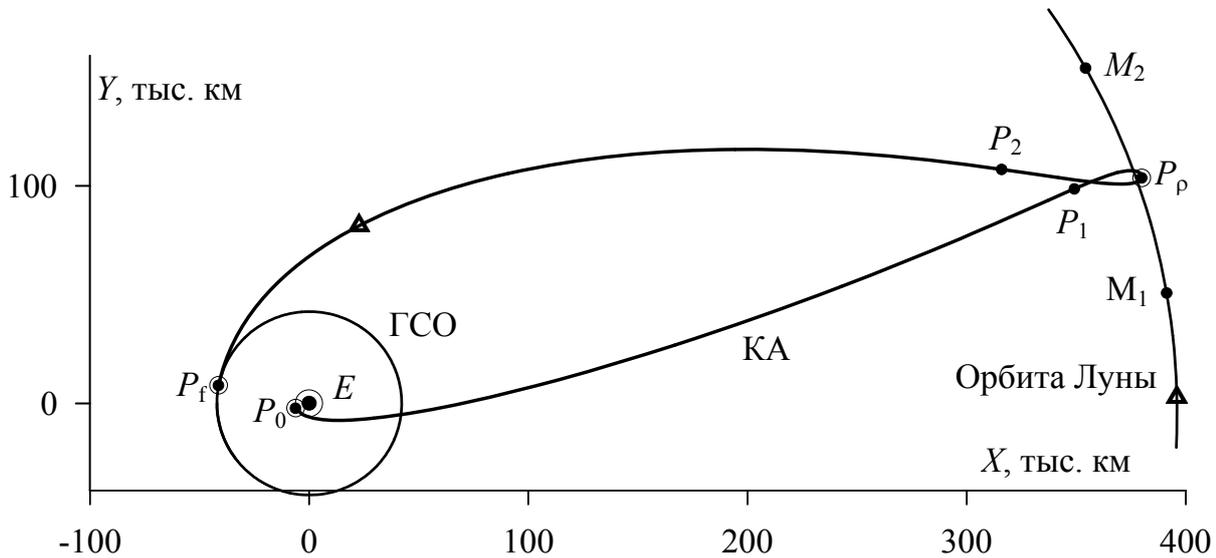


Рис. 4. Геоцентрическая траектория перелета КА от Земли к ГСО с использованием Лунного гравитационного маневра.

Здесь сплошная кривая изображает геоцентрическое движение КА, штрих-пунктир - орбиту Луны, пунктир – орбиту ГСО,  $E$  – Земля,  $M$  – Луна,  $P_0$  – точка отлета с начальной орбиты спутника Земли радиуса  $r_0 \approx 6600$  км (высотой  $H_0 \approx 230$  км), наклоном  $i_0 \sim 52^\circ$ . Момент отлета  $t_0 \approx 10.388$  сут (от начальной эпохи D0), что соответствует 1.01.2001 г. После сообщения в этой точке импульса скорости получается орбита полета к Луне; для нее апогейное расстояние  $r_{a1} \approx 443$  тыс. км. После  $\Delta t_1 \approx 3$  сут. полета, в точке  $P_1$  КА входит в сферу действия Луны,  $M_1$  – положение Луны в этот момент. В момент  $t_p \approx 14.1$  сут, через  $\Delta t_p \approx 3.7$  сут полета, КА проходит точку  $P_p$  наибольшего сближения с Луной, при этом расстояние до Луны составляет  $\rho_\pi \approx 2746$  км; Луна находится вблизи восходящего узла своей орбиты относительно земного экватора. Через  $\sim 4.4$  сут. полета, в точке  $P_2$  КА выходит из сферы действия Луны,  $M_2$  – положение Луны в этот момент. На рис. 5 приведено селеноцентрическое движение КА при облете Луны. Оскулирующая скорость на бесконечности в точке  $P_p$  составляет  $V_\infty \approx 0.93$  км/с. Точка  $E$  дает направление на Землю в момент наибольшего сближения с Луной. После облета Луны КА движется к Земле. В точке  $P_f$  через  $\Delta t_f \approx 6.8$  сут. полета, КА подлетает к геостационарной орбите. Здесь, для

оскулирующей орбиты: перигейное расстояние  $r_{\pi f} = 42164$  км, апогейное расстояние  $r_{af} = 650$  тыс. км, наклонение  $i_f = 0^\circ$ .

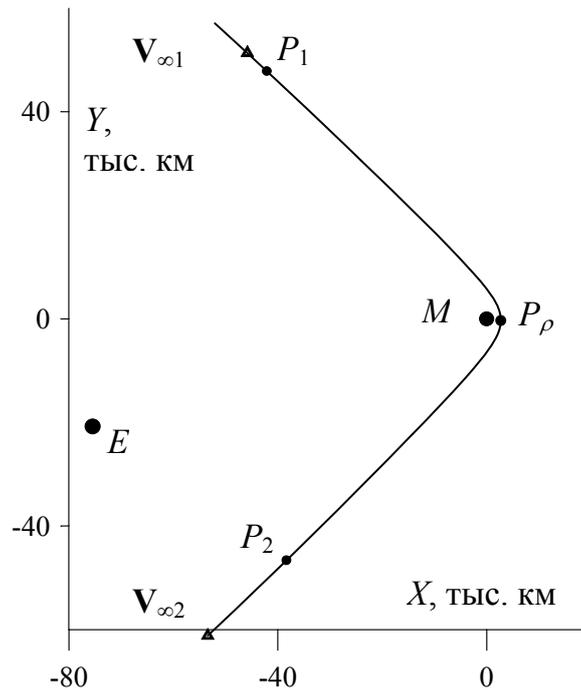


Рис. 5. Селеноцентрическая траектория перелета КА от Земли к ГСО на участке сближения с Луной

Приведем характеристики влияния вариаций начальных данных (координат радиуса-вектора, компонент вектора скорости и времени в точке  $P_0$ ) на конечные параметры траектории. В табл. 1 приведены эти данные для вариаций скорости в 1 м/с, вариаций координат в 1 км и для вариации времени в 10 с, а также для уменьшенных в 10 раз вариаций: 0.1 м/с, 0.1 км и 1 с. В качестве конечных параметров здесь приведены: перигейное расстояние  $r_{\pi f}$  (км), наклонение и долгота восходящего узла  $i_f$ ,  $\Omega_f$  (град.), а также параметры  $i_{xf} = \sin i_f \sin \Omega_f$ ,  $i_{yf} = -\sin i_f \cos \Omega_f$ . В процессе анализа отслеживался и ряд других параметров, в частности, минимальное расстояние до Луны  $\rho_{\pi}$ .

Табл. 1. Влияние вариаций начальных данных на отклонения конечных параметров траектории полета от Земли на ГСО.

	$\Delta r_{\pi f}$	$i_{xf}$	$i_{yf}$	$i_f$	$\Omega_f$
$\Delta t_0=10$ с	8254	0.006	-0.024	1.4	13.9
$\Delta t_0=1$ с	750	$6 \cdot 10^{-4}$	$-23 \cdot 10^{-4}$	0.14	14.0
$\Delta x_0=1$ км	72520	-0.019	0.086	5.07	-167.5

$\Delta x_0=0.1$ км	4700	-0.003	0.012	0.7	-167.2
$\Delta y_0=1$ км	20015	-0.013	0.057	3.34	-167.1
$\Delta y_0=0.1$ км	1700	-0.0015	0.0064	0.375	-167,1
$\Delta z_0=1$ км	3705	-0.003	0.011	0.66	-166.7
$\Delta z_0=0.1$ км	360	-0.003	0.0012	0.068	-166.8
$\Delta V_{x_0}=1$ м/с	-13350	0.0084	-0.037	2.18	12.7
$\Delta V_{x_0}=0.1$ м/с	-1560	0.0007	-0.0033	0.19	12.6
$\Delta V_{y_0}=1$ м/с	43930	-0.017	0.074	4.33	-167.3
$\Delta V_{y_0}=0.1$ м/с	3230	-0.002	0.0092	0.54	-167.1
$\Delta V_{z_0}=1$ м/с	73010	-0.021	0.092	5.41	-167.5
$\Delta V_{z_0}=0.1$ м/с	4730	-0.003	0.013	0.74	-167.2

Приведенные характеристики позволяют оценить разброс параметров конечной орбиты в зависимости от ошибок начальных данных. Чтобы ограничить отклонение по  $r_{\pi f}$  величиной в 10 тыс. км, предельное отклонение по начальной скорости должно составлять  $\sim 0.1$  м/с, по координатам  $\sim 0.1$  км, по времени  $\sim 5$  с. Наибольшее влияние на параметры траектории оказывают возмущения по начальному радиусу и величине начальной скорости. Для указанных величин начальных отклонений уже проявляется некоторая нелинейность. Видна стабильность в долготе восходящего узла, определяемая геометрией перелета. Для обеспечения малых конечных отклонений необходимо коррекция программы выведения при выведении с несколькими включениями двигателя и несколькими витками разгона или коррекция орбиты с помощью корректирующего двигателя.

Приведем теперь характеристики влияния на конечные параметры вариаций компонент вектора скорости в нескольких точках траектории. В таблицах 2-5 приведены отклонения конечных элементов в зависимости от вариаций компонент скорости КА, равных 1 м/с, для четырех точек траектории, соответствующих времени полета  $\Delta t_i = \{1.5 \text{ сут}, 3 \text{ сут}, 4.5 \text{ сут}, 5.8 \text{ сут}\}$ .

Табл. 2. Влияние вариаций компонент вектора скорости на отклонения конечных параметров траектории полета от Земли на ГСО ( $\Delta t_i = 1.5$  сут).

$\Delta t_i = 1.5$ сут	$\Delta r_{\pi f}$	$i_{xf}$	$i_{yf}$	$i_f$	$\Omega_f$
$\Delta V_{x_i} = 1$ м/с	-4590	$-0.9 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-3}$	0.19	-164.8
$\Delta V_{y_i} = 1$ м/с	-3585	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$-18.9 \cdot 10^{-3}$	1.11	12.5
$\Delta V_{z_i} = 1$ м/с	600	$-12.9 \cdot 10^{-3}$	$54.5 \cdot 10^{-3}$	3.21	-166.7

Табл. 3. Влияние вариаций компонент вектора скорости на отклонения конечных параметров траектории полета от Земли на ГСО ( $\Delta t_i = 3.0$  сут).

$\Delta t_i = 3.0$ сут	$\Delta r_{\pi f}$	$i_{xf}$	$i_{yf}$	$i_f$	$\Omega_f$
$\Delta V_{xi} = 1$ м/с	-1670	$-0.6 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	0.14	-165.4
$\Delta V_{yi} = 1$ м/с	-1170	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$-7.5 \cdot 10^{-3}$	0.44	12.8
$\Delta V_{zi} = 1$ м/с	210	$-4.8 \cdot 10^{-3}$	$20.4 \cdot 10^{-3}$	1.21	-166.7

Табл. 4. Влияние вариаций компонент вектора скорости на отклонения конечных параметров траектории полета от Земли на ГСО ( $\Delta t_i = 4.5$  сут).

$\Delta t_i = 4.5$ сут	$\Delta r_{\pi f}$	$i_{xf}$	$i_{yf}$	$i_f$	$\Omega_f$
$\Delta V_{xi} = 1$ м/с	- 47	$8 \cdot 10^{-6}$	$-13 \cdot 10^{-6}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	30.4
$\Delta V_{yi} = 1$ м/с	154	$8 \cdot 10^{-6}$	$-14 \cdot 10^{-6}$	$0.9 \cdot 10^{-3}$	30.4
$\Delta V_{zi} = 1$ м/с	1	$6 \cdot 10^{-4}$	$-17 \cdot 10^{-4}$	0.104	19.4

Табл. 5. Влияние вариаций компонент вектора скорости на отклонения конечных параметров траектории полета от Земли на ГСО ( $\Delta t_i = 5.8$  сут).

$\Delta t_i = 5.8$ сут	$\Delta r_{\pi f}$	$i_{xf}$	$i_{yf}$	$i_f$	$\Omega_f$
$\Delta V_{xi} = 1$ м/с	-49	$3 \cdot 10^{-7}$	$-2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	59.2
$\Delta V_{yi} = 1$ м/с	77	$4 \cdot 10^{-7}$	$-2 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	65.8
$\Delta V_{zi} = 1$ м/с	0	$6 \cdot 10^{-4}$	$-8 \cdot 10^{-4}$	0.06	37.5

Приведенные характеристики позволяют оценить величину корректирующего импульса для устранения ошибок выведения или ошибок исполнения предыдущей коррекции, а также позволяют оценить влияние ошибок исполнения коррекции на отклонение конечных параметров.

#### 4. «КАСАТЕЛЬНЫЙ» ПЕРЕЛЕТ КА С ГСО К ЗЕМЛЕ

На основе качественного и точного численного анализа проблемы построено семейство «обходных» траекторий полета с ГСО к Земле. Эти траектории можно разделить на две группы. Одну образуют траектории «нормального» входа в земную атмосферу, для них радиус условного перигея при входе в атмосферу меньше радиуса Земли. В этом случае КА будет разрушен в атмосфере Земли. Эти траектории рассмотрим в следующем разделе. Другую группу образуют траектории «касательного» входа в земную атмосферу, для них высота условного перигея при входе в атмосферу составляет  $\sim 50$  км, можно осуществить управляемый спуск и

мягкую посадку КА на поверхность Земли. Эти траектории перелета с ГСО к Земле рассмотрим в данном разделе.

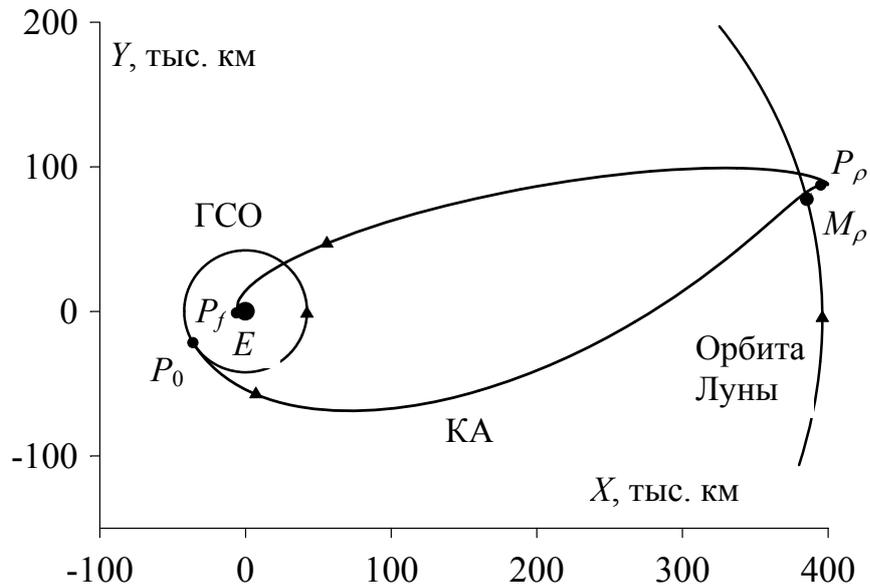


Рис. 6. Геоцентрическая траектория "обходного" типа для спуска КА с ГСО на Землю при использовании Лунного гравитационного маневра, в проекции XY.

На Рис. 6 приведено движение КА для одной типичной «обходной» траектории возвращения с ГСО к Земле данной группы траекторий с «касательным» входом в атмосферу, с конечной высотой условного перигея  $H_{\text{пф}} \approx 50$  км [11-21]. Здесь сплошная кривая изображает геоцентрическое движение КА, штрих-пунктир - орбиту Луны, пунктир – орбиту ГСО,  $E$  – Земля. В момент  $t_0$  (29 декабря 2000 г.) КА, после увеличения его скорости на  $\sim 1098$  м/с, отлетает с ГСО к Луне по орбите с начальным апогейным расстоянием  $r_{\alpha} = 490\,000$  км. Все дальнейшее движение точки – пассивное (без учета возможной коррекции). Через  $\sim 3,8$  суток полета, 2 января 2001 г, в точке  $P_p$  КА пролетает на минимальном расстоянии от Луны  $\rho_{\pi} \approx 13$  тыс. км. При этом Луна находится вблизи восходящего узла ее орбиты относительно экватора Земли.

На рис. 7 представлено движение КА относительно Луны на участке ее облета. Здесь дана также схема изменения скорости КА в результате облета Луны и выполнения гравитационного маневра, когда под влиянием ее гравитации происходит поворот вектора селеноцентрической скорости «на бесконечности» на некоторый угол  $\delta$  (от  $V_{\infty}^-$  к  $V_{\infty}^+$ ). Новая селеноцентрическая скорость  $V_{\infty}^+$  направлена практически противоположно скорости Луны  $V_M$ , поэтому происходит торможение геоцентрической скорости КА (от  $V_1$  к  $V_2$ ) и уменьшение перигейного расстояния его

орбиты с  $R \approx 42164$  км до конечного значения при подлете к Земле  $r_{\pi f} = R_E + H_{\pi f} \approx 6421$  км, здесь  $R_E$  ( $=6371$  км) – средний радиус Земли,  $H_{\pi f}$  ( $\approx 50$  км) – высота условного перигея, необходимая для управляемого спуска в атмосфере Земли КА со второй космической скоростью.

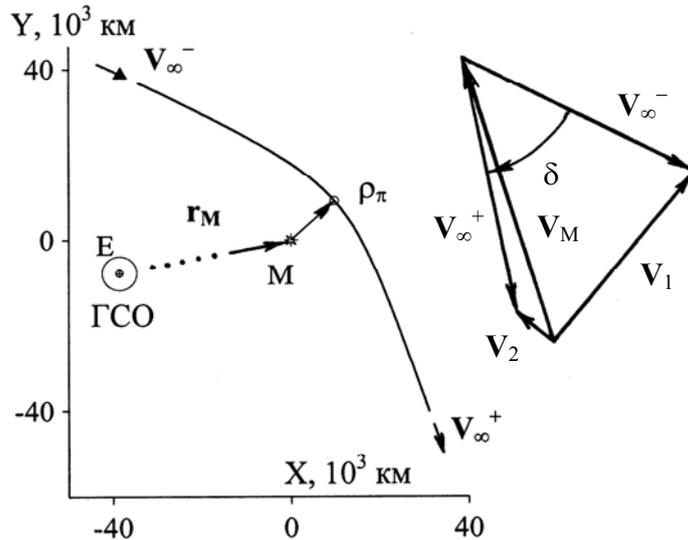


Рис. 7. Селеноцентрическое движение КА вблизи Луны и схема изменения скорости КА при облете Луны.

Точка  $E$  показывает направление на Землю при сближении с Луной. После облета Луны КА летит к Земле, достигая ее в момент  $t_f$  (8 января 2001 г.), через  $\sim 9,4$  суток полета, имея высоту условного перигея  $H_{\pi} \approx 50$  км.

При анализе влияния возмущений на эту траекторию были проведены расчёты при двух различных постановках:

- для оценки влияния на решение поставленной задачи различных сил, неучтённых выбранной силовой моделью;
- для оценки допустимых начальных погрешностей.

Внесением последовательно отклонений в начальный момент времени  $\delta t$ , начальные координаты вектора положения  $\delta x, \delta y, \delta z$  и компоненты вектора скорости  $\delta V_x, \delta V_y, \delta V_z$  КА, были проанализированы области допустимых отклонений, где значения элементов конечной оскулирующей орбиты (высота  $H_{\pi}$  и время  $t_{\pi}$  прохождения условного перигея, большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , наклонение  $i$ ) линейно изменяются соответственно изменениям начальных отклонений. В процессе анализа были найдены максимальные рамки допустимых отклонений, сохраняющих эту линейную зависимость. Результаты анализа приведены в таблице 6.

Табл. 6. Влияние вариаций начальных данных на отклонения конечных параметров «касательной» траектории полета от ГСО к Земле.

	$\delta t_{\pi}$ (сек)	$\delta H_{\pi}$ (м)	$\delta a$ (м)	$\delta e$	$\delta i$ (град)
$\delta t = 2$ сек	16,718	609,85	2766	$3,2 \times 10^{-6}$	$2,97 \times 10^{-3}$
$\delta x = 100$ м	14,254	764,75	2172	$3,7 \times 10^{-6}$	$2,59 \times 10^{-2}$
$\delta y = 100$ м	5,866	834,35	3476	$4,3 \times 10^{-6}$	$1,77 \times 10^{-2}$
$\delta z = 750$ м	13,995	797,30	302	$3,7 \times 10^{-6}$	$5,59 \times 10^{-2}$
$\delta V_x = 1$ см/сек	31,606	469,36	1695	$1,9 \times 10^{-6}$	$2,73 \times 10^{-2}$
$\delta V_y = 1$ см/сек	7,104	1974,80	6843	$9,9 \times 10^{-6}$	$5,18 \times 10^{-2}$
$\delta V_z = 100$ см/с	42,776	160,12	3454	$2,7 \times 10^{-7}$	$2,46 \times 10^{-1}$

«Коридор» входа в атмосферу Земли для обеспечения управляемого спуска КА и мягкой посадки на поверхность достаточно мал ( $\sim 10$  км), поэтому представляется маловероятной реализация такой траектории без коррекции.

Другой анализ связан с влиянием на "обходную" траекторию возмущающих сил, неучтённых в выбранной силовой модели. В ходе анализа рассматривалось изменение параметров траектории КА в ее условном перигее при подключении:

- модели гравитационного поля Земли JGM3 ( $16 \times 16$ ) с учётом всех зональных, тессеральных и секториальных гармоник до 16-го порядка и степени (без второй зональной гармоники, уже учтённой в силовой модели);
- модели гравитационного поля Луны ( $8 \times 8$ ) с учётом всех зональных, тессеральных и секториальных гармоник до 8-го порядка и степени;
- гравитационного влияния других планет Солнечной системы, а также отдельно каждой планеты (Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона). Результаты проведённого анализа приведены в таблице 7.

Табл. 7. Влияние параметров модели на отклонения конечных параметров «касательной» траектории полета от ГСО к Земле.

	$\delta t_{\pi}$ (сек)	$\delta H_{\pi}$ (м)	$\delta a$ (м)	$\delta e$	$\delta i$ (град)
Остальные коэф-ты гравитац. поля Земли	1,957	92,53	1804	$2,4 \times 10^{-4}$	$1,01 \times 10^{-2}$
Гравит. поле Луны	0,00842	0,085	240	$3,2 \times 10^{-8}$	$2,51 \times 10^{-5}$

Планеты Солнечной системы	0,0548	6,29	32	$3,3 \times 10^{-8}$	$0,97 \times 10^{-6}$
Юпитер	0,0469	10,87	43	$5,5 \times 10^{-8}$	$0,92 \times 10^{-5}$
Венера	0,0042	5,02	13	$2,5 \times 10^{-8}$	$8,1 \times 10^{-6}$
Сатурн	0,0035	0,423	2	$2,2 \times 10^{-9}$	$1,22 \times 10^{-7}$
Марс	0,0008	0,038	0,26	$2,0 \times 10^{-10}$	$1,61 \times 10^{-7}$
Меркурий	0,00055	0,013	0,13	$7,8 \times 10^{-11}$	$1,66 \times 10^{-7}$
Уран	0,000014	0,0046	0,02	$2,3 \times 10^{-11}$	$3,8 \times 10^{-9}$
Нептун	0,000013	0,0013	0,006	$6,5 \times 10^{-12}$	$1,6 \times 10^{-9}$
Плутон	0,0000001	0,00007	0	$3 \times 10^{-13}$	$1,7 \times 10^{-10}$
Луна $\times 10^{-5}$	2,515	50,96	457	$2,9 \times 10^{-7}$	$4,88 \times 10^{-4}$
Солнце $\times 10^{-3}$	9,697	54,05	1883	$4,9 \times 10^{-7}$	$3,07 \times 10^{-3}$
$J_2 \times 10^{-3}$	0,0766	6,47	7983	$1,03 \times 10^{-6}$	$1,95 \times 10^{-4}$

На последних трёх строках таблицы представлены возмущения при внесении относительных погрешностей в значения, соответственно, Луны ( $10^{-5}$ ), Солнца ( $10^{-3}$ ) и второй зональной гармоники Земли ( $10^{-3}$ ). Это даёт возможность оценить влияние составных частей (и их погрешностей) выбранной силовой модели задачи, а также сравнить с остальными возмущающими факторами. Как мы видим, если для более точного рассмотрения задачи необходимо учитывать более сложную силовую модель, то в первую очередь, требуется учёт гравитационного поля Земли (вместе с его тессеральными гармониками), сил притяжения Юпитера и Венеры. Но отметим при этом, что упомянутые возмущающие факторы на порядок меньше величин, представленных в первой таблице, а значит, они вписываются в линеаризованную постановку задачи "обходных" траекторий КА к Земле.

### 5. «НОРМАЛЬНЫЙ» ПЕРЕЛЕТ КА С ГСО К ЗЕМЛЕ

Здесь рассмотрим траектории возврата с ГСО к Земле для варианта «крутого» входа КА в атмосферу Земли, когда перигейное расстояние оскулирующей орбиты при входе в атмосферу меньше радиуса Земли. В этом случае КА при движении в атмосфере будет разрушаться. Для анализа возьмем типичную траекторию «нормального» к атмосфере входа, приведенную на рис. 8 [18-19].

Здесь сплошная линия изображает геоцентрическое движение КА, штрихпунктир - орбиту Луны, штриховая линия – орбиту ГСО,  $E$  – Земля,  $M$  - Луна. Для этой траектории отлет с ГСО происходит 30 декабря 2000 г., 11 ч 16 мин 48 сек по орбите с апогейным расстоянием  $r_\alpha=600\,000$  км, при этом скорость КА увеличивается на 1128 м/с. Через  $\sim 3,3$  суток полета, в точке  $P_\rho$  на траектории (2 января 2001 г.) КА пролетает на минимальном расстоянии от Луны  $\rho_\pi \sim 6500$  км.

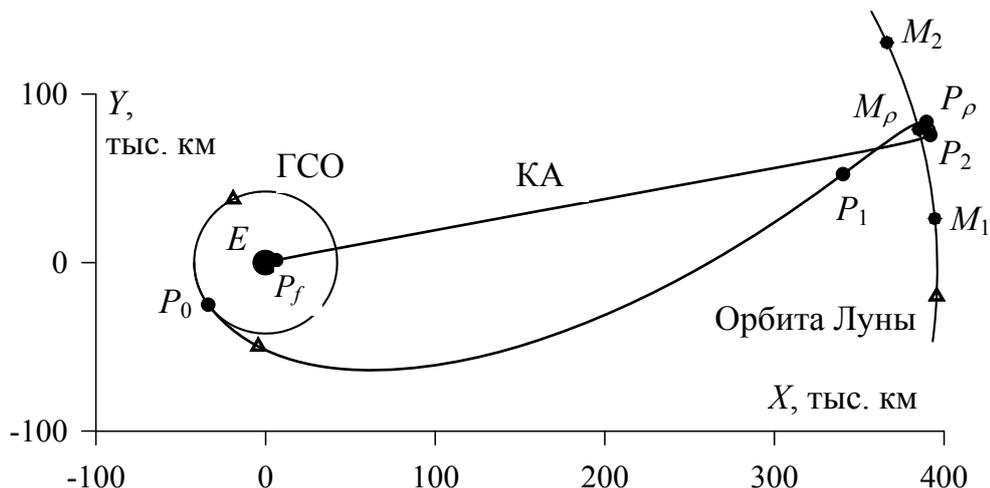


Рис. 8. Геоцентрическая траектория "обходного" типа для спуска КА с ГСО на Землю при «нормальном» входе в атмосферу Земли ( $r_{\text{вх}} \approx 0$ ), в проекции XY.

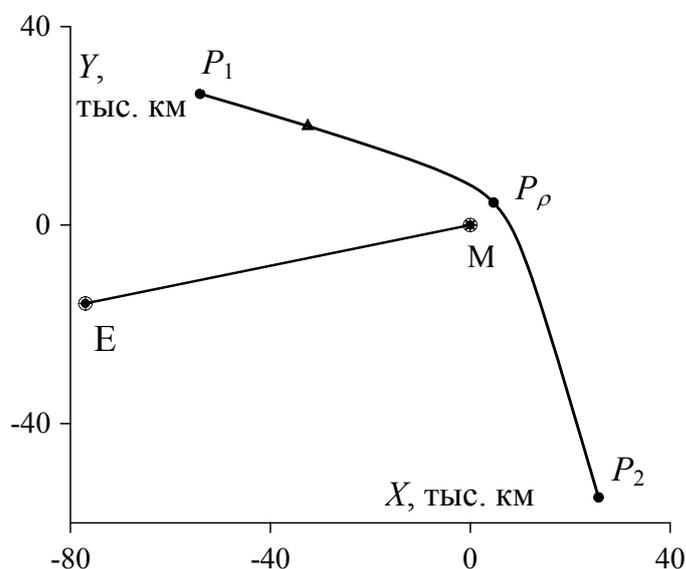


Рис. 9. Селеноцентрическая «нормальная» траектория перелета КА от ГСО к Земле на участке облета Луны.

На дуге  $P_1 P_\rho P_2$  осуществляется облет Луны, выполняется гравитационный маневр (в точке  $P_1$  происходит подлет к сфере действия Луны, в точке  $P_2$  – отлет от

нее, здесь расстояние до Луны  $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 66\,000$  км). После этого маневра орбита КА становится близкой к центральной:  $r_{\pi f} \approx 6$  км. Через 8,5 сут. полета, 7 января 2001 г., 23 ч 21 мин 5 сек, КА достигает у Земли высоты  $H = 80$  км, это конечная точка траектории  $P_f$ .

На рис. 9 для данной траектории представлено движение КА относительно Луны на участке ее облета. Здесь видно осуществление гравитационного маневра, когда под влиянием ее гравитации происходит поворот вектора селеноцентрической скорости. Точка  $E$  показывает направление на Землю при сближении с Луной.

При анализе чувствительности данной траектории, аналогично предыдущему, вносились отклонения последовательно в значения начального момента времени  $\delta t$ , начальных координат вектора положения  $\delta x, \delta y, \delta z$  и компонент вектора скорости  $\delta V_x, \delta V_y, \delta V_z$  КА. В процессе исследования были найдены максимальные рамки допустимых отклонений, сохраняющих почти линейную зависимость значений таких конечных параметров, как время  $t_H$  прохождения высоты  $H=40$  км и соответствующие оскулирующие элементы (большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , наклонение  $i$ ). Как можно было видеть и в предыдущем варианте траектории, эти орбиты с очень высоким эксцентриситетом (близкие к параболе) имеют неустойчивые значения  $a$  и  $e$ , что приводит к большим изменениям этих элементов  $\delta a$  и  $\delta e$ . Причём эти отклонения взаимозависимы. Поэтому логично рассматривать и другие параметры орбиты. Например, в первом варианте мы приводили также значения отклонений  $\delta H_{\pi}$  высоты перигея орбиты над поверхностью Земли. В варианте "нормальной" траектории с эксцентриситетом, очень близким к единице, будем наблюдать фокальный параметр орбиты (он примерно равен удвоенному перигейному расстоянию  $r_{\pi}$ :  $p \approx 11,9$  км). Результаты расчётов с теми же значениями начальных отклонений, что и в первом варианте "обходной" траектории, приведены в табл. 8.

Табл. 8. Влияние вариаций начальных данных на отклонения конечных параметров «нормальной» траектории полета от ГСО к Земле.

	$\delta t_H$ (сек)	$\delta p$ (м)	$\delta a$ (м)	$\delta e$	$\delta i$ (град)	$\delta p_{\pi}$ (м)
$\delta t = 2,5$ сек	59,469	1,55	51561	$3,17 \times 10^{-9}$	0,374	1760
$\delta x = 100$ м	2,205	323,34	1168	$7,64 \times 10^{-7}$	0,962	67
$\delta y = 100$ м	37,778	321,65	69680	$7,70 \times 10^{-7}$	0,846	983
$\delta z = 800$ м	3,256	1132,60	6527	$2,68 \times 10^{-6}$	4,350	1144

$\delta V_x = 4 \text{ мм/сек}$	10,670	152,66	8975	$3,60 \times 10^{-7}$	0,517	276
$\delta V_y = 4 \text{ мм/сек}$	22,937	295,54	41093	$7,04 \times 10^{-7}$	0,817	595
$\delta V_z = 8 \text{ см/сек}$	0,155	437,52	2297	$1,03 \times 10^{-6}$	1,964	494

Как можно видеть, многие значения соизмеримы с аналогичными для предыдущего варианта. Но здесь орбита более "утончённая": сказывается её близость к параболе. На последней стадии возвращения на Землю значения оскулирующих элементов большой полуоси  $a$  и эксцентриситета  $e$  быстро меняются и могут привести к изменению формы орбиты. Серьёзные погрешности для "нормальной" траектории вызываются в наклонении  $\delta i$ , что обуславливается видом траектории ("пике"). Это же объясняет и более чувствительную зависимость от начальных отклонений в широтной координате  $\delta z$ .

Если взять начальные отклонения больше в 10 раз, чем в предыдущей таблице, получим значения, явно показывающие уже возникшую нелинейную зависимость от начальных кинематических отклонений. Они приведены в табл. 9.

*Табл. 9. Влияние увеличенных вариаций начальных данных на отклонения конечных параметров «нормальной» траектории полета от ГСО к Земле.*

	$\delta t_H$ (сек)	$\delta p$ (м)	$\delta a$ (м)	$\delta e$	$\delta i$ (град)	$\delta \rho_\pi$ (м)
$\delta t = 25 \text{ сек}$	594,42	76,2	12700	$1,78 \times 10^{-7}$	3,73	17678
$\delta x = 1 \text{ км}$	22,87	3737,3	56750	$8,84 \times 10^{-6}$	8,54	800
$\delta y = 1 \text{ км}$	378,39	3642,5	6636	$8,61 \times 10^{-6}$	7,51	9976
$\delta z = 8 \text{ км}$	48,60	20164,5	181926	$4,77 \times 10^{-5}$	28,87	11175
$\delta V_x = 4 \text{ см/сек}$	106,94	1394,6	45397	$3,29 \times 10^{-6}$	5,47	2788
$\delta V_y = 4 \text{ см/сек}$	229,95	3337,4	72567	$7,90 \times 10^{-6}$	7,32	6072
$\delta V_z = 80 \text{ см/сек}$	1,145	2763,1	14847	$6,53 \times 10^{-6}$	22,60	4981

*Табл. 10. Предельные отклонения начальных кинематических параметров для обеспечения входа в атмосферу Земли при движении по «нормальной» траектории.*

$\Delta r_{\text{п}}, \text{ км}$	$\Delta t_0, \text{ с}$	$\Delta x_0, \text{ км}$	$\Delta y_0, \text{ км}$	$\Delta z_0, \text{ км}$	$\Delta V_{x0}, \text{ м/с}$	$\Delta V_{y0}, \text{ м/с}$	$\Delta V_{z0}, \text{ м/с}$
6370	6500	150	130	280	10	6	65

Для практики космонавтики важно выявить возможность реализации данной траектории без коррекции, так как, в отличие от «касательной» траектории, здесь существует намного больший запас по конечному перигейному расстоянию, допустимо отклонение  $\Delta r_{\text{пг}} < R_E \approx 6370$  км. В табл. 10 приведены соответствующие предельные частные отклонения в начальных кинематических параметрах. Если положить, что ошибки выведения составляют ориентировочно  $\Delta t_0 \approx 10$  с,  $|\Delta \mathbf{r}_0| \approx 1$  км,  $|\Delta \mathbf{V}_0| \approx 1$  м/с, то видим возможность реализации возвращения КА с ГСО в атмосферу Земли без коррекции при полете по данной «нормальной» траектории.

Другой этап анализа связан с влиянием на "обходную» траекторию возмущающих сил, неучтённых в выбранной силовой модели. В ходе анализа рассматривалось изменение указанных элементов орбиты в момент  $t_H$  прохождения КА высоты  $H=40$  км при подключении параметров модели, указанных выше, для «касательной» траектории. Результаты проведённого анализа приведены в таблице 11.

*Табл. 11. Влияние параметров модели на отклонения конечных параметров «нормальной» траектории полета от ГСО к Земле.*

	$\delta t_H$ (сек)	$\delta p$ (м)	$\delta a$ (м)	$\delta e$	$\delta i$ (град)	$\delta \rho_\pi$ (м)
Другие коэф-ты гравитац. поля Земли	2,231	29,61	23644	$7,3 \times 10^{-8}$	$9,64 \times 10^{-2}$	57,0
Гравитационное поле Луны	0,0342	0,412	559	$9,0 \times 10^{-10}$	$1,28 \times 10^{-3}$	0,73
Планеты Солн. системы	0,0746	0,263	27	$6,2 \times 10^{-10}$	$4,84 \times 10^{-4}$	1,75
Юпитер	0,0807	0,525	33	$1,2 \times 10^{-9}$	$6,02 \times 10^{-4}$	2,22
Венера	0,0114	0,280	9	$6,6 \times 10^{-10}$	$1,59 \times 10^{-4}$	0,60
Сатурн	0,0051	0,017	2	$4,0 \times 10^{-11}$	$4,00 \times 10^{-5}$	0,13
Марс	0,00102	0,00023	0,39	$5,0 \times 10^{-13}$	$9,26 \times 10^{-6}$	0,023
Меркурий	0,00070	0,00076	0,27	$1,8 \times 10^{-12}$	$7,80 \times 10^{-6}$	0,016
Уран	0,000033	0,00023	0,015	$5,5 \times 10^{-13}$	$3,06 \times 10^{-7}$	0,001
Нептун	0,000020	0,00004	0,008	$9,9 \times 10^{-14}$	$1,85 \times 10^{-7}$	0,0005
Плутон	$9 \times 10^{-8}$	0,000004	0	$1,1 \times 10^{-14}$	$1,77 \times 10^{-9}$	$2 \times 10^{-6}$

Луна $\times 10^{-5}$	3,169	0,976	141	$2,3 \times 10^{-9}$	$1,82 \times 10^{-2}$	24,8
Солнце $\times 10^{-3}$	12,131	21,66	13311	$4,9 \times 10^{-8}$	$1,26 \times 10^{-1}$	276
$J_2 \times 10^{-3}$	0,407	3,012	7630	$6,1 \times 10^{-9}$	$7,99 \times 10^{-3}$	10,5

Как и для предыдущей траектории КА, можно отметить вывод, что если для точного рассмотрения задачи необходимо учитывать более сложную силовую модель, то в первую очередь требуется учёт гравитационного поля Земли (вместе с его тессеральными гармониками), а также сил притяжения Юпитера и Венеры.

## **6. ВЫВОДЫ**

Суммируя результаты анализа задачи, можем сделать вывод, что использование гравитационного поля Луны позволяет осуществить «обходные» слабоэнергетические траектории перелетов между Землей и геостационарной орбитой. Это дает возможность реализовать данные перелеты заметно более экономично, при меньшем расходе топлива, хотя и приводит к большему времени полета и требует более точной системы управления, чем для обычных, «прямых» перелетов КА. В работе сделан анализ чувствительности данных «обходных» траекторий к возмущениям начальных данных, а также к вариации параметров модели силового поля и вариации скорости КА при полете. Показано, что возможно возвращение КА с геостационарной орбиты в атмосферу Земли без коррекции при движении по специальной «обходной» траектории с нормальным (в номинале) входом в атмосферу.

Данное исследование выполнено при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Грант 06-01-00531) и Гранта НШ 1123.2008.1 программы поддержки научных школ.

## **7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли. // Препринт, Институт прикладной математики Академии наук СССР, Москва, 1970. 32 с.
2. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли. // Космические исследования. 1971, т. IX, вып. 2, с. 163-172.

3. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975, 392 с.
4. Graziani F., Gastronuovo M.M. and Teofilatto P. Geostationary orbits from mid-latitude launch sites via lunar gravity assist. // American Astronautical Society Publications, Advances in Astronautical Sciences. V. 84. 1993. AAS 93-289. P. 561-572.
5. Sternfeld A. Sur les trajectoires permettant d'approcher d'un corps attractifs central à partir d'une orbite Keplérienne donnée. // *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), 1934, vol. 198. P. 711-713.
6. Штернфельд А.А. Введение в космонавтику. а) 1937, М.- Л.: ОНТИ, 318 с. б) Изд. 2-е, М: Наука, 1975, 240 с.
7. Цандер Ф.А. Перелеты на другие планеты (Теория межпланетных путешествий). // В книге: Пионеры ракетной техники: Кибальчич. Циолковский. Цандер. Кондратюк. Избранные труды, М.: Наука, 1964. С. 277-359.
8. Riebe T., and Schweitzer M. Space operations and support. // AEROSPACE AMERICA, Dec. 1998, p. 83.
9. Ivashkin V.V. Lunar space projects. // American Astronautical Society Publications, Science and Technology Series, Vol. 108, 2004. Proceedings of the International Lunar Conference 2003, November 16-22, 2003, Hawaii Island, USA. Eds: Steve M. Durst, et al. AAS 03-763. P. 481-499.
10. Ивашкин В.В., Райкунов Г.Г. Оптимальное обслуживание системы ИСЗ. // Известия Академии Наук. Техническая кибернетика. 1993. N 1. С. 111–120.
11. Ивашкин В.В. Ари Штернфельд и космонавтика. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005 г., N 20, 32 с.
12. Ивашкин В.В. Научное наследие А.А. Штернфельда. // В книге: Штернфельд А.А. Меня считали неизлечимым фантастом. М.: Политехнический музей, 2005. С. 8-27.
13. Ивашкин В.В. Лунные траектории нового типа и роль гравитационных возмущений в их формировании. // Международный симпозиум «Астрономия 2005 – современное состояние и перспективы», 1–6 июня 2005 года, Россия, Москва. а) Труды ГАИШ МГУ, т. 78, М., 2005, с.10.  
б) <http://www.keldysh.ru/paper/2005/source/article/IAS-05/pdf> .
14. Ивашкин В.В. Траектории возвращения с геостационарной орбиты к Земле при использовании гравитационного поля Луны. // Препринт N 22, ИПМ им. Келдыша РАН, 2006, 20 стр. [http://www.keldysh.ru/papers/2006/source/rep2006\\_22.pdf](http://www.keldysh.ru/papers/2006/source/rep2006_22.pdf) .

15. Ивашкин В.В. О траекториях возвращения космического аппарата с геостационарной орбиты к Земле с использованием гравитационного маневра у Луны. // Доклады Академии наук, 2006, 2006, том 409, N 6, с. 770-773.
16. Ivashkin V.V. SPACE FLIGHT FROM GEOSTATIONARY ORBIT TO THE EARTH USING LUNAR GRAVITY ASSIST // 57<sup>th</sup> International Astronautical Congress, Valencia, Spain, 2-6 Oct. 2006. Proceedings, Papers. Paper IAC-06-C1.8.4, 9 p.
17. Ивашкин В.В. Лунные слабоэнергетические «обходные» траектории космического аппарата. // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики. Материалы V Всероссийской Научной конференции, Томск, 3-5 октября 2006 г. Изд-во Томского Государственного ун-та, 2006 г. С. 440-441.
18. Ivashkin V. V. Re-entry of Geostationary Satellite to the Earth Using Lunar Gravity Assist. // 7th International Symposium Reducing the Costs of Spacecraft Ground Systems & Operations (RCSGSO), 11-15 June 2007, Moscow, Russia. Proceedings, European Space Agency, SP-648, 2007 (ISBN 92-9291-212-5, ISSN 1609-042X), CD: a) papers: 2B1\_Ivashkin.pdf, b) SP648.pdf, pp. 204-211.
19. Ивашкин В.В. Слабоустойчивые малоэнергетические лунные траектории космического аппарата. // Труды IX Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященной 105-летию Н.Г.Четаева, Иркутск-оз. Байкал, 12-16 июня 2007 г. 2007, Институт Динамики Систем и Теории Управления Сибирского Отделения РАН, Иркутск, т. 5. С. 20-32.
20. Ivashkin V.V., Akhmetshin R.Z., Golikov A.R., Skorokhodov A. P., Tuchin D.A. Lunar Space Trajectories and Methods for their Analysis. // Leonard Euler Congress, Analytical Methods of Celestial Mechanics, July 8-12, 2007, St. Petesburg. Program & Abstracts, SPb, Russia, Euler International Mathematical Institute, 2007. Pp. 38-41.
21. Ивашкин В.В. К задаче возвращения к Земле космического аппарата с использованием гравитационного поля Луны. // Междунар. Российско-Американский журнал «Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент» (ISSN 1727-6853), Казань-Daytona Beach, т. 12, N 1(23), 2007. С. 51-59.
22. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. // М.: Наука, 1965. 540 с.
23. Основы теории полета космических аппаратов. Под редакцией Нариманова Г.С., Тихонравова М.К. // М.: Машиностроение, 1972. 610 с.

24. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Введение в механику космического полета. // М.: Наука, 1990. 448 с.
25. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной. // Доклады Академии наук, 2002, том 387, N 2, с. 196-199.
26. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения. // Доклады Академии Наук, 2004, том 398, N 3, с. 340-342.
27. Степаньянц В.А., Львов Д.В. Эффективный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений движения. // Математическое моделирование. 2000, т. 12, вып. 6, с. 9-14.
28. Голиков А.Р. Влияние нецентральности гравитационного поля в численно-аналитической теории движения искусственного спутника. // Препринт, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. 1991, № 49. 28 с.