



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 97 за 2008 г.



Марченко Н.А., Пергамент А.Х.,  
Попов С.Б., Семилетов В.А.,  
Томин П.Ю.

Иерархия явно-неявных  
разностных схем для  
решения задач многофазной  
фильтрации

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации / Н.А.Марченко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 97. 17 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-97>

*Н. А. Марченко, А. Х. Пергамент, С. Б. Попов, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин,*  
Иерархия явно- неявных разностных схем для решения задач многофазной  
фильтрации

**Аннотация.** Работа посвящена построению и исследованию явно- неявных схем для уравнений многофазной многокомпонентной фильтрации. При этом в настоящей работе предлагается рассматривать значения переменных в ячейках как явные или неявные в зависимости от выполнения некоторых условий, как правило, локальных условий устойчивости разностной схемы в данной ячейке. Существенно, что не все переменные в ячейке могут рассматриваться как явные, поскольку условия устойчивости относятся не только к ячейке, но и к переменной. В частности, эволюция порового давления описывается параболическим уравнением, и, как следствие, поровое давление всегда рассчитывается по неявной схеме. Кроме того, в данной работе подробно обсуждается проблема выбора совокупности переменных для описания процессов фильтрации при наличии фазового перехода.

*N. A. Marchenko, A. Kh. Pergament, S. B. Popov, V. A. Semiletov, P. Yu. Tomin,*  
Hierarchy of explicit-implicit difference schemes for multiphase filtration  
problems

**Abstract.** The paper is devoted to construction and investigation of explicit-implicit schemes for multiphase multicomponent filtration. The propose of this paper is to consider cell values as explicit or implicit depend on specific conditions, as a rule they are local stability conditions for the cell. It is appreciably that not all variables in cell are considered explicitly because stability conditions apply to certain variable. Particularly, pore pressure evolution is described by parabolic equation so one must use implicit scheme to compute pore pressure. In addition, the problem of proper variable choice for filtration with phase transition processes description is also considered.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда  
фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

## Иерархия явно- неявных схем для решения задач фильтрации Адаптивные неявные схемы

В основу алгоритмов, рассмотренных в данной работе, положена полностью неявная схема, которая широко используется в пакетах прикладных программ для расчета процессов фильтрации углеводородов Eclipse, MORE, VIP и др. Полученная при построении разностной схемы нелинейная алгебраическая система уравнений решается методом Ньютона. Простейшая схема такого типа описана, по-видимому, в известной работе (Appleyard, J. Cheshire, 1981). Однако, учитывая, что размерность задачи составляет иногда десятки миллионов ячеек, время расчета с использованием полностью неявной схемы может оказаться недопустимо большим. Поэтому ряд авторов, начиная с пионерской работы (Thomas Thurnau) предложили использовать явно-неявные схемы. Действительно, если учесть, что скорость фильтрации величина  $\approx 10^{-5} \text{ м/с}$ , характерный масштаб ячейки  $\approx 100 \text{ м}$ , то расчеты с шагом по времени порядка одного месяца могут производиться по явной схеме. Очевидно, что это перестает быть возможным для более подробных сеток и при наличии больших объемов закачки флюидов, что приводит к большим перепадам давлений, повышению скорости фильтрации и к невозможности расчета только по явным схемам. В данной работе по аналогии с SPE27025 представлена иерархия разностных схем, начиная с простейшей IMPES, когда по неявной схеме рассчитывается только поровое давление, а объемные концентрации (насыщенности) флюидов вычисляются с помощью явных схем, и заканчивая полностью неявной схемой, и показана область применимости каждой из них.

### 1. Постановка задачи. Основные соотношения

Рассмотрим так называемую модель «черной нефти» (Black Oil), описывающую фильтрацию трехкомпонентного флюида в виде законов сохранения масс компонент:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (m \rho_w S_w) + \text{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) &= q_w^M, \\ \frac{\partial}{\partial t} [m(C_{oL} \rho_L S_L + C_{oG} \rho_G S_G)] + \text{div}(C_{oL} \rho_L \mathbf{u}_L + C_{oG} \rho_G \mathbf{u}_G) &= q_o^M, \\ \frac{\partial}{\partial t} [m(C_{gL} \rho_L S_L + C_{gG} \rho_G S_G)] + \text{div}(C_{gL} \rho_L \mathbf{u}_L + C_{gG} \rho_G \mathbf{u}_G) &= q_g^M, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$P_L - P_W = P_{cow}(S_W), P_G - P_L = P_{cgo}(S_G),$$

$$S_W + S_L + S_G = 1.$$

Обозначения:

Компоненты:  $j = w, o, g$  — вода, и две углеводородные фракции, тяжелая и легкая, именуемые сокращенно нефть и газ;

Фазы:  $\alpha = W, L, G$  — вода, жидкая и газообразная фазы углеводородной смеси.

Нефть и газ с водой не смешиваются, поэтому  $w$  и  $W$  — синонимы.

$P_\alpha, S_\alpha$  — поровые давления и насыщенности (объемные концентрации) фазы  $\alpha$ ;  $m$  — пористость;

$\rho_{L,G}$  — плотности жидкой и газообразной углеводородной фазы как смесей двух углеводородных компонент без учёта пористости и водонасыщенности (т.е. плотность на единицу объема фазы, именно эти значения фигурируют в законе Дарси при учете гравитации);  $\rho_w$  — плотность воды;

$C_{j\alpha}$  — массовые концентрации, отвечающие массовой концентрации углеводородной компоненты  $j$  ( $j = o, g$ ) в фазе  $\alpha$ ;

$\mathbf{u}_\alpha$  — скорость фазы  $\alpha$ ;

$q_j^M$  — функции массовых источников компонента флюида  $j$ ;

$P_{cow}, P_{cgo}$  — капиллярные давления.

Определяющие соотношения:

$$\mathbf{u}_\alpha = -\hat{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla P_\alpha - \mathbf{g} \cdot \rho_\alpha), \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=o,g} C_{j\alpha} = 1, \quad \alpha = L, G.$$

Здесь:

$\hat{K}$  — абсолютная проницаемость, являющаяся, вообще говоря, полным симметричным тензором;

$\mu_\alpha, k_{r\alpha}$  — вязкость и относительная проницаемость фазы  $\alpha$ ;

$\mathbf{g} = (0, 0, g_z) = g_z \cdot \mathbf{e}_z$  — гравитационный фактор;

$g_z = 9.80665 \text{ m/s}^2$  — нормальное ускорение силы тяжести.

На начальный момент времени либо заданы начальные распределения давления и водонасыщенности, либо они определяются из условия гидростатического равновесия системы:

$$\mathbf{u}_\alpha(t=0, x, y, z) = 0, \quad \alpha = W, L, G.$$

В качестве граничных условий используется предположение непроницаемости границ расчетной области  $G$  для каждой из компонент:

$$\mathbf{u}_\alpha(t, x, y, z)_{\partial G} = 0, \quad \alpha = W, L, G.$$

Система уравнений (1.1) может быть записана относительно различных наборов переменных. В частности, общеупотребительным является

использование насыщенностей  $S_\alpha$ . Однако очевидно, что в зоне вытеснения флюида водой, т.е. когда  $S_G = S_L = 0$ , система вырождается.

Обозначим  $C_L = C_{gl}$ ,  $C_G = C_{gG}$ .

Тогда зависимости  $\rho_L, \rho_G, C_L, C_G$  можно представить в виде:

$$\rho_L = \rho_{sO}(P_L) = \frac{\rho_o^{STC} + R_S(P_L)\rho_g^{STC}}{B_L(P_L)}, \quad \rho_G = \rho_{sG}(P_G) = \frac{\rho_g^{STC} + R_V(P_G)\rho_o^{STC}}{B_G(P_G)},$$

$$C_L = C_L(P_L) = \frac{R_S(P_L)\rho_g^{STC}}{\rho_o^{STC} + R_S(P_L)\rho_g^{STC}}, \quad C_G = C_G(P_G) = \frac{\rho_g^{STC}}{\rho_g^{STC} + R_V(P_G)\rho_o^{STC}}.$$

Здесь введены величины:

$R_S(P_L)$  — растворимость газа в нефтяной фазе, отношение объёма растворенного газа к объёму нефтяной фазы;

$R_V(P_G)$  — растворимость нефти в газовой фазе, отношение объёма пара нефти к объёму газовой фазы;  $B_L(P_L), B_G(P_G)$  — объёмные факторы, характеризующие изменение плотностей фаз в зависимости от давления, отношение плотностей фазы на поверхности и в резервуаре;

$\rho_\alpha^{STC}$  — плотность фазы  $\alpha$  в поверхностных условиях (STC – Stock-tank conditions).

Очевидно,  $B_W = \rho_W^{STC} / \rho_W$ .

Функции источников  $q_\alpha = q_\alpha^M / \rho_\alpha^{STC}$  имеют смысл объёмного дебита фазы  $\alpha$  (при откачивании или закачивании данной фазы), определяемого при условиях хранилища на поверхности.

Используя введённые обозначения и поделив полученные уравнения на плотности компонент при поверхностных условиях  $\rho_i^{STC}$ , можно переписать систему (1.1) в виде эквивалентной системы уравнений чёрной нефти, которая обычно употребляется во многих публикациях.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( m \frac{S_W}{B_W} \right) + \text{div} \left( \frac{\mathbf{u}_W}{B_W} \right) = q_w,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ m \left( \frac{S_L}{B_L} + R_V \frac{S_G}{B_G} \right) \right] + \text{div} \left( \frac{\mathbf{u}_L}{B_L} + R_V \frac{\mathbf{u}_G}{B_G} \right) = q_o, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ m \left( \frac{S_G}{B_G} + R_S \frac{S_L}{B_L} \right) \right] + \text{div} \left( \frac{\mathbf{u}_G}{B_G} + R_S \frac{\mathbf{u}_L}{B_L} \right) = q_g.$$

Поскольку  $R_S = R_S(P_L)$ ,  $R_V = R_V(P_G)$ ,  $B_\alpha = B_\alpha(P_\alpha)$ , поэтому  $C_\alpha = C_\alpha(P_\alpha)$ ,  $\rho_\alpha = \rho_\alpha(P_\alpha)$ ,  $\alpha = L, G$ . Модель (1)-(3) учитывает как растворимость газа в нефтяной фазе, так и возможность испарения (летучесть) нефти с помощью функций  $R_S(P_L), R_V(P_G)$ .

Заметим, что газонасыщенность  $S_G$  определена только для двухфазного состояния, поэтому в случае однофазного состояния уравнения (1)-(3) или (1')-(3') в указанной форме записи вырождаются и должны быть записаны в другом виде. В данной работе в качестве переменных выбраны

насыщенность воды  $S_w$ , поровое давление в нефтяной фазе  $P_L = P$  и массовая концентрация газового компонента  $C$ . Такой выбор переменных предопределен тем обстоятельством, что в случае отсутствия газовой фазы, т.е. когда есть только растворенный газ, невозможно описать состояние углеводородного флюида с помощью таких переменных как насыщенности.

Для единообразной формы записи двухфазных и однофазных состояний будем использовать массовую концентрацию наиболее легкой углеводородной компоненты  $C$  в смеси углеводородных компонент

$$C = \frac{\rho_L S_L C_L + \rho_g S_G C_G}{\rho_L S_L + \rho_g S_G}$$

(иными словами,  $C$  – массовая концентрация наиболее летучей компоненты в бинарной смеси). Ниже будем нумеровать тяжелую и легкую углеводородные компоненты *oil* и *gas* как 1 и 2. Температура резервуара превышает критическую для легкого компонента, но меньше, чем критическая температура для тяжелого,  $T_{c_2} < T < T_{c_1}$  (для справки, критическая температура для метана равна  $-82^\circ\text{C}$ , для пропана:  $+97^\circ\text{C}$ , а для бутана  $+152^\circ\text{C}$ ). Заметим, что достижение функцией  $C_G(P)$  значения 1 возможно лишь при условии  $T = T_{c_2}$ .

В зависимости от значения концентрации  $C$  возможны три ситуации:

**Зона I.** В случае, когда давление в нефти больше давления точки кипения,  $\{P_L > P_{bub}(C)\} \equiv \{C < C_L(P_L)\}$ , мы имеем дело с **недонасыщенной нефтью** (undersaturated oil) с плотностью  $\rho_{USO}(P_L, C)$ . В этом случае газообразная фаза отсутствует в свободном виде (весь газ растворен в тяжелой углеводородной фракции), и мы имеем **однофазное жидкое состояние** углеводородных компонент. В данной ситуации значение  $P_G$  теряет свой смысл.

**Зона II.** В случае, когда  $\{C_L(P_L) < C < C_G(P_G)\}$ , мы имеем дело с **насыщенной нефтью и насыщенным газом** (saturated oil and gas) с плотностями  $\rho_{SO}(P_L), \rho_{SG}(P_G)$ . Этот случай соответствует **двухфазному состоянию** углеводородных компонент, когда и газообразная, и жидкая углеводородные фазы присутствуют в свободном виде в единице объема. Газонасыщенность  $S_G$ , а также капиллярное давление  $P_{COG}$  определены только в этом случае. Плотности (и вязкости) насыщенных нефти и газа являются функциями давления.

**Зона III.** В случае, когда  $\{C > C_G(P_G)\}$ , мы имеем дело с **недонасыщенным газом** с плотностью  $\rho_{USG}(P_G)$ . Это соответствует **однофазному газообразному состоянию**, когда жидкая фаза отсутствует в свободном виде (вся тяжелая углеводородная фракция находится в виде пара в смеси с газообразной легкой фракцией). В данной ситуации значение  $P_L$  теряет свой

смысл, так как соответствует давлению жидкой углеводородной фазы. Формально будем считать, что в данной зоне  $P_L = P_G$ .

Итак, в качестве переменных примем  $\{P, S, C\} = \{P_L, S_w, C\}$ .

Для упрощения будем также предполагать, что  $C_G = C_G(P)$ ,  $\rho_G = \rho_G(P)$ ,  $\rho_w = \rho_w(P)$ ,  $m = m(P)$ . Это означает, что для вычисления, например,  $\rho_w$  одного значения  $P_w$  уже недостаточно.

Введём функции  $\rho_o$  и  $\rho_g$  — плотности нефтяной и газовой компонент.

Тогда систему (1.1) можно представить в виде

$$\begin{cases} (m\rho_w S_w)_t + \operatorname{div} A_w = q_w^M, \\ (m(1-S_w)\rho_o)_t + \operatorname{div} A_o = q_o^M, \\ (m(1-S_w)\rho_g)_t + \operatorname{div} A_g = q_g^M; \end{cases} \quad (1.3),$$

где

$$A_w = \rho_w \mathbf{u}_w;$$

$$A_o = (1-C_L)\rho_L \mathbf{u}_L + (1-C_G)\rho_G \mathbf{u}_G;$$

$$A_g = C_L \rho_L \mathbf{u}_L + C_G \rho_G \mathbf{u}_G.$$

Сравнивая (1.3) и (1.1) видим, что

$$\rho_o = \frac{(1-C_L)\rho_L S_L + (1-C_G)\rho_G S_G}{S_L + S_G}, \quad \rho_g = \frac{C_L \rho_L S_L + C_G \rho_G S_G}{S_L + S_G}.$$

В силу определения плотностей  $\rho_o$  и  $\rho_g$  и концентрации  $C$  имеем представление

$$\rho_o = (1-C)\rho, \quad \rho_g = C\rho,$$

$\rho$  — полная плотность углеводородной смеси.

Складывая их, получаем

$$\rho = \rho_o + \rho_g = \frac{\rho_L S_L + \rho_G S_G}{S_L + S_G}.$$

Для концентрации газа получим

$$C = \frac{\rho_L S_L C_L + \rho_G S_G C_G}{\rho_L S_L + \rho_G S_G}.$$

Насыщенности  $S_L$  и  $S_G$  выражаются через искомые функции очевидным образом. Сопоставляя выписанные выше соотношения, получим выражения для плотности смеси углеводородов:

$$\rho = \frac{\rho_G \rho_L (C_L - C_G)}{\rho_L C_L - \rho_G C_G + C(\rho_G - \rho_L)}. \quad (1.4)$$

С учётом новых переменных система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} (m\rho_w S_w)_t + \operatorname{div} A_w = q_w^M, \\ (m(1-S_w)\rho)_t + \operatorname{div} A_o + \operatorname{div} A_g = q_o^M + q_g^M, \\ (m(1-S_w)C\rho)_t + \operatorname{div} A_g = q_g^M; \end{cases} \quad (1.5)$$

Запись системы уравнений в виде (1.5) демонстрирует в явном виде проблему выбора переменных для описания эволюции многофазной системы. При  $S_w = 1$  ( $S_L = S_G = 0$ ) система вырождается, и, в частности, не определяется величина  $C$ . Ниже мы доопределим эту величину в разностном варианте задачи. Эта ситуация будет иметь место при любом выборе переменных, т.к. в области, где отсутствуют углеводороды, не определены величины  $\rho$  и  $C$ .

Формулы для потоков  $A_j$  зависят от номера зоны

Заметим, что третье уравнение системы (1.5) имеет смысл только при  $1 - S_w < 1$ , т.е. когда определено  $C$ . В разностной схеме это надо учитывать.

## 2. Разностная схема

Построим консервативную разностную схему для (1.5).

Введём обозначения аппроксимаций потоков в ячейке  $\Omega$

$$F_w(P, S) = \langle \text{div } A_w(P, S) \rangle_{\Omega},$$

$$F_o(P, S, C) = \langle \text{div } A_o(P, S, C) \rangle_{\Omega},$$

$$F_g(P, S, C) = \langle \text{div } A_g(P, S, C) \rangle_{\Omega}.$$

$F_j$  неотрицательно определены. При этом используется метод конечных объемов.

Введём величины – подвижности фаз:

$$\eta_{\alpha} = k_{r\alpha} \lambda_{\alpha}, \quad \lambda_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha}}{\mu_{\alpha}}.$$

$\eta_{\alpha}$  будем называть динамическими (массовыми) подвижностями фазы  $\alpha$ .

Тогда на основе закона Дарси  $F_o$  и  $F_g$  можно представить в виде

$$F_o(P, S, C) = \langle -\text{div} (1 - C_L) \eta_L \hat{K} \nabla \Phi_L - \text{div} (1 - C_G) \eta_G \hat{K} \nabla \Phi_G \rangle_{\Omega} = F_o^L + F_o^G,$$

$$F_g(P, S, C) = \langle -\text{div} C_L \eta_L \hat{K} \nabla \Phi_L - \text{div} C_G \eta_G \hat{K} \nabla \Phi_G \rangle_{\Omega} = F_g^L + F_g^G,$$

где  $\nabla \Phi_{\alpha} = \nabla P_{\alpha} - g \rho_{\alpha} (P_{\alpha}) \nabla z$ .

Вместо  $F_o$  нам понадобится аппроксимация

$$F_o + F_g = \langle -\text{div} \eta_L \hat{K} \nabla \Phi_L - \text{div} \eta_G \hat{K} \nabla \Phi_G \rangle_{\Omega} = F_{o+g}^L + F_{o+g}^G.$$

Оператор дивергенции  $F_{*}^{\alpha}$  для фазы  $\alpha$  в рассматриваемом случае может быть записан в общем виде так:

$$F_{*}^{\alpha}(P, S, C) = \langle -\text{div} (C^{*} \eta_{\alpha}(P, S, C) \hat{K} \nabla \Phi_{\alpha}(P, S, C)) \rangle_{\Omega},$$

где  $C^{*}$  — одно из чисел:  $1, 1 - C, 1 - C_L, 1 - C_G, C, C_L, C_G$ .

Аппроксимация может быть записана в следующем общем виде:

$$F_{*}^{\alpha} = - \sum_{\beta} \langle C^{*} \rangle_{\beta} \langle k_{r\alpha} \rangle_{\beta} \langle \lambda_{\alpha} \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} T_{\beta\gamma} \Delta_{\gamma} \Phi_{\alpha} \quad (2.2),$$

здесь  $T_{\beta\gamma}$  – проводимости граней.



В аппроксимацию потока фазы  $\alpha$  входят разности

$$\Delta_\gamma \Phi = \Delta_\gamma P_\alpha - GDZ_\gamma (\rho_\alpha^{\gamma_0} + \rho_\alpha^{\gamma_1}),$$

где  $\Delta_\gamma P_\alpha = P_\alpha^{\gamma_1} - P_\alpha^{\gamma_0}$ ,  $GDZ_\gamma = \frac{1}{2} g(z^{\gamma_1} - z^{\gamma_0})$ ,  $\gamma_0, \gamma_1$  — номера ячеек, соответствующие индексу  $\gamma$ .

Всюду выше мы рассматривали аппроксимацию потока и дивергенции для одной ячейки. Для потока построена аппроксимация относительно ориентированной площади  $S$ , направленной в сторону, противоположную центру ячейки. Для соседней ячейки поток, аппроксимированный на общей грани, следует взять с противоположным знаком.

Учитывая вышесказанное, аппроксимацию дивергенции запишем в следующем виде, дополнительно внося минус под знак суммы:

$$F_*^\alpha = \sum_\beta \langle C^* \rangle_\beta \langle k_{r\alpha} \rangle_\beta \langle \lambda \rangle_\beta \sigma(\beta) \left( \sum_\gamma T_{\beta\gamma} (\Delta_\gamma P_\alpha - GDZ_\gamma (\rho_\alpha^{\gamma_0} + \rho_\alpha^{\gamma_1})) \right), \quad (2.3)$$

где  $\sigma(\beta)$  принимает значения 1 или -1.

Класс явно-неявных схем имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\hat{m} \hat{\rho}_w \hat{S} - m \rho_w S}{\tau} = q_w^M - F_w(S, P), \\ \frac{\hat{m} (1 - \hat{S}) \hat{\rho} - m (1 - S) \rho}{\tau} = q_o^M - F_o(S, C, P) + q_g^M - F_g(S, C, P), \\ \frac{\hat{m} (1 - \hat{S}) \hat{C} \hat{\rho} - m (1 - S) C \rho}{\tau} = q_g^M - F_g(S, C, P); \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначим

$$N_w(P, S) = \tau (q_w^M(P, S) - F_w(P, S)) + m \rho_w S,$$

$$N_o(P, S, C) = \tau (q_o^M(P, S, C) - F_o(P, S, C)) + m (1 - S) (1 - C) \rho,$$

$$N_g(P, S, C) = \tau (q_g^M(P, S, C) - F_g(P, S, C)) + m (1 - S) C \rho,$$

Тогда можно переписать систему в виде системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} H_w = \hat{m} \hat{\rho}_w \hat{S} - N_w = 0, \\ H_L = \hat{m} (1 - \hat{S}) \hat{\rho} - N_o - N_g = 0, \\ H_g = \hat{m} (1 - \hat{S}) \hat{C} \hat{\rho} - N_g = 0; \end{cases} \quad H(X) = \begin{pmatrix} H_w(X) \\ H_L(X) \\ H_g(X) \end{pmatrix} = 0, \quad X = (P, S, C). \quad (2.1)$$

В полностью неявной схеме может возникнуть проблема при  $\hat{S}=1$ . Этот случай следует отслеживать. Действительно, при  $\hat{S}=1$  второе и третье уравнения системы (2.1) вырождаются. Однако, если  $1 - S \leq \varepsilon$ , то концентрация  $\hat{C}$  в силу системы (2.1) может быть представлена в виде:

$$\hat{C} = \frac{\tau (q_g^M - F_g(S, C, P)) + m (1 - S) C \rho}{\tau (q_o^M - F_o(S, C, P) + q_g^M - F_g(S, C, P)) + \frac{m (1 - S) \rho}{\tau}} \quad (2.2),$$

т.е. значения концентрации газа в той ячейке, где газ первоначально отсутствовал, определяются исключительно потоками газа из соседних

ячеек. С учетом принципа up wind (аппроксимации против потока) значения концентрации  $\hat{C}$  в таких ячейках могут быть определены после завершения процесса решения системы нелинейных уравнений.

При этом в силу нелинейности указанных уравнений, будем использовать итерационный метод Ньютона.

В зависимости от задачи можно использовать различные критерии выбора слоя по времени, - явный или неявный, - для аппроксимации проводимостей: этот вопрос требует отдельного исследования. Одним из возможных критериев выбора может служить условие малости потоков по сравнению с поступающими в ячейку объемами (или массой) флюида, имеющегося в ячейке.

### 3. Описание Ньютона

Для приближения  $n$  следующее приближение находится по формуле

$$DH(X^n) dX = -H(X^n), \quad dX = X^{n+1} - X^n, \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_w}{\partial P} & \frac{\partial H_w}{\partial S} & \frac{\partial H_w}{\partial C} \\ \frac{\partial H_L}{\partial P} & \frac{\partial H_L}{\partial S} & \frac{\partial H_L}{\partial C} \\ \frac{\partial H_g}{\partial P} & \frac{\partial H_g}{\partial S} & \frac{\partial H_g}{\partial C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dP \\ dS \\ dC \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H_w(P^n, S^n, C^n) \\ H_L(P^n, S^n, C^n) \\ H_g(P^n, S^n, C^n) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Почему бы не переставить эти уравнения?

Распишем производные, используемые на каждой итерации по Ньютону.

$$(HwP): \frac{\partial H_w}{\partial P} = S \frac{\partial m\rho_w}{\partial P} - \frac{\partial N_w(P, S, C)}{\partial P}, \quad (3.1.1)$$

$$(HwS): \frac{\partial H_w}{\partial S} = m\rho_w - \frac{\partial N_w}{\partial S}, \quad (3.1.2)$$

$$(HwC): \frac{\partial H_w}{\partial C} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$(HLP): \frac{\partial H_L}{\partial P} = (1-S) \frac{\partial m\rho}{\partial P} - \frac{\partial N_o}{\partial P} - \frac{\partial N_g}{\partial P}, \quad (3.2.1)$$

$$(HLS): \frac{\partial H_L}{\partial S} = -m\rho - \frac{\partial N_o}{\partial S} - \frac{\partial N_g}{\partial S}, \quad (3.2.2)$$

$$(HLC): \frac{\partial H_L}{\partial C} = m(1-S) \frac{\partial \rho}{\partial C} - \frac{\partial N_o}{\partial C} - \frac{\partial N_g}{\partial C}, \quad (3.2.3)$$

$$(HgP): \frac{\partial H_g}{\partial P} = (1-S)C \frac{\partial m\rho}{\partial P} - \frac{\partial N_g}{\partial P}, \quad (3.3.1)$$

$$(HgS): \frac{\partial H_g}{\partial S} = -mC\rho - \frac{\partial N_g}{\partial S}, \quad (3.3.2)$$

$$(\text{HgC}): \frac{\partial H_g}{\partial C} = m(1-S) \left( \rho + C \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) - \frac{\partial N_g}{\partial C}; \quad (3.3.3)$$

$$\text{где } \frac{\partial m \rho_w}{\partial P} = \rho_w \frac{\partial m}{\partial P} + m \frac{\partial \rho_w}{\partial P}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial m \rho}{\partial P} = m \frac{\partial \rho}{\partial P} + \rho \frac{\partial m}{\partial P}. \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial X_i} = \tau \left( \frac{\partial q_j^M}{\partial X_i} - \frac{\partial F_j}{\partial X_i} \right), \quad X_i = \{P, S, C\} \quad (3.6)$$

Для воды  $\frac{\partial N_w}{\partial C} = 0$ ;

$$\frac{\partial q_j^M}{\partial X_i} = 0, \text{ если источники явные, - иначе требуется вычислять } \frac{\partial q_j^M}{\partial X_i}.$$

Функции  $\frac{\partial F_j}{\partial X_i}$  зависят от выбора явных или неявных проводимостей.

В формулах ниже мы вносим производные по  $X_i$  внутрь аппроксимации дивергенции.

**Случай явных проводимостей (явная схема по гиперболическим членам).**

Обозначим  $F_j = \sum_{\alpha} Q_{j\alpha}$ ,  $Q_{j\alpha} = \sum_{\beta} \dots$

$$\eta_{\alpha}(S, C, P) \hat{K} = k_{r\alpha}(S, C) \lambda_{\alpha}(P) \hat{K};$$

$$\frac{\partial F_w(P, S)}{\partial P} dP = - \sum_{\beta} \langle k_{r\alpha}(S) \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} \langle \lambda_w(P) \rangle_{\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_w}{\partial P} dP,$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial P} dP = - \sum_{\beta} \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} \langle \lambda_{\alpha}(P) \rangle_{\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_{\alpha}}{\partial P} dP,$$

$$\frac{\partial F_w(S, P)}{\partial S} dS = - \sum_{\beta} \langle k_{r\alpha}(S) \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} \langle \lambda_w(P) \rangle_{\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_w}{\partial S} dS,$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial S} dS = - \sum_{\beta} \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} \langle \lambda_{\alpha}(P) \rangle_{\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_{\alpha}}{\partial S} dS,$$

$$\frac{\partial F_w(S, P)}{\partial C} dC = 0, \quad \frac{\partial Q_{\alpha}}{\partial C} dS = - \sum_{\beta} \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_{\beta} \sum_{\gamma} \langle \lambda_{\alpha}(P) \rangle_{\gamma} T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_{\alpha}}{\partial C} dS,$$

$$\text{где } \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_{\alpha}}{\partial P} dP = \Delta_{\gamma} \left( dP - g \frac{\partial \rho_{\alpha}(P)}{\partial P} \nabla z dP \right),$$

$$\frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_L}{\partial S} dS = 0, \quad \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_W}{\partial S} dS = \Delta_{\gamma} \left( \frac{\partial P_{\text{cov}}(S)}{\partial S} dS \right), \quad \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_G}{\partial S} dS = \Delta_{\gamma} \left( \frac{\partial P_{\text{cgo}}(S, C)}{\partial S} dS \right),$$

$$\frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_L}{\partial C} dC = 0, \quad \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_W}{\partial C} dC = 0, \quad \frac{\partial \Delta_{\gamma} \Phi_G}{\partial C} dC = \Delta_{\gamma} \left( \frac{\partial P_{\text{cgo}}(S, C)}{\partial C} dC \right).$$

**Случай неявных проводимостей (неявная схема по гиперболическим членам).**

$$\eta_\alpha(\hat{S}, \hat{C}, P)\hat{K} = k_{r\alpha}(\hat{S}, \hat{C})\lambda_\alpha(P)\hat{K}$$

Имеет смысл также брать и величину  $\lambda_g(\hat{P})$  тоже неявно (в силу значительной сжимаемости газа).

$$\frac{\partial F_w(S, P)}{\partial P} dP = -\sum_\beta \langle k_{rw}(S) \rangle_\beta \sum_\gamma \langle \lambda_w(P) \rangle_\gamma T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_w}{\partial P} dP,$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial P} dP = -\sum_\beta \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\beta \sum_\gamma T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_\alpha}{\partial P} dP - \sum_\beta \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta \frac{\partial \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\beta}{\partial P} \sum_\gamma dP T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_\alpha,$$

$$\frac{\partial F_w(S, P)}{\partial S} dS = -\sum_\beta \frac{\partial \langle k_{rw}(S) \rangle_\beta}{\partial S} dS \langle \lambda_w(P) \rangle_\beta \sum_\gamma T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_w - \sum_\beta \langle k_{rw}(S) \rangle_\beta \langle \lambda_w(P) \rangle_\beta \sum_\gamma T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_w}{\partial S} dS,$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial S} dS = -\sum_\beta \frac{\partial \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta}{\partial S} dS \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\beta \sum_\gamma T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_\alpha - \sum_\beta \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\beta \sum_\gamma T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_\alpha}{\partial S} dS,$$

$$\frac{\partial F_w(S, P)}{\partial C} dC = 0,$$

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial C} dC = -\sum_\beta \frac{\partial \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta}{\partial C} dC \sum_\gamma \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\gamma T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_\alpha - \sum_\beta \langle k_{r\alpha}(S, C) \rangle_\beta \sum_\gamma \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\gamma T_{\beta\gamma} \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_\alpha}{\partial C} dC,$$

где  $\frac{\partial \langle \lambda_w(P) \rangle_\gamma}{\partial P} \approx 0$ ,  $\frac{\partial \langle \lambda_L(P) \rangle_\gamma}{\partial P} \approx 0$ ,

$\frac{\partial \langle \lambda_g(P) \rangle_\gamma}{\partial P}$  требуется учитывать;

$$\frac{\partial \langle \lambda_g(P) \rangle_\gamma}{\partial P} dP = \frac{\frac{\partial \lambda_\alpha(P_{\Omega+\gamma})}{\partial P} dP_{\Omega+\gamma} + \frac{\partial \lambda_\alpha(P_\Omega)}{\partial P} dP_\Omega}{2},$$

$$\frac{\partial \langle k_{r\alpha}(X_i) \rangle_\beta}{\partial X_i} dX_i = \begin{cases} \frac{\partial k_{r\alpha}(X_{\Omega+\beta})}{\partial X_i} dX_{i, \Omega+\beta}, & \sum_\gamma \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\gamma T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_\alpha < 0, \\ \frac{\partial k_{r\alpha}(X_\Omega)}{\partial X_i} dX_{i, \Omega}, & \sum_\gamma \langle \lambda_\alpha(P) \rangle_\gamma T_{\beta\gamma} \Delta_\gamma \Phi_\alpha > 0; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_\alpha}{\partial P} dP = \Delta_\gamma \left( dP - g \frac{\partial \rho_\alpha(P)}{\partial P} \nabla z dP \right),$$

$$\frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_L}{\partial S} dS = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_W}{\partial S} dS = \Delta_\gamma \left( \frac{\partial P_{cov}(S)}{\partial S} dS \right), \quad \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_G}{\partial S} dS = \Delta_\gamma \left( \frac{\partial P_{cgo}(S, C)}{\partial S} dS \right),$$

$$\frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_L}{\partial C} dC = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_W}{\partial C} dC = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\gamma \Phi_G}{\partial C} dC = \Delta_\gamma \left( \frac{\partial P_{cgo}(S, C)}{\partial C} dC \right).$$

**Замечания:**

$\langle \lambda_\alpha(P, C) \rangle_\beta = 0.5(\lambda_\alpha(P_{\Omega+\beta}, \langle C \rangle_\beta) + \lambda_\alpha(P_\Omega, \langle C \rangle_\beta))$ , где

## AIM – Adaptive Implicit Method

(итерационный алгоритм решения полностью неявной схемы)

Система уравнений имеет вид:

$$C \cdot \delta X - (T_{total} + Q) \delta X = R, \text{ где } X - \text{полный вектор решения, } R - \text{невязка}$$

На каждом шаге по времени и каждой итерации определяются явные (explicit) переменные, для которых зануляются соответствующие компоненты матрицы  $T$ .

(Рис.1) – обозначения явных ( $e$ ) и неявных ( $x$ ) переменных.

(Рис.2) – матрица проницаемости – значения  $T$  для “ $e$ ” компонент равны 0

(Рис.3) – добавлены матрицы  $C$  и  $Q$ . По диагонали для каждой ячейки расположены матрицы  $C - \tau Q$ .

(Рис.4) – локально осуществляется преобразование каждых 3-х строк с тем, чтобы получить диагональные матрицы.

(Рис.5) – после перестановки матрица  $C$  имеет представленный вид

$$\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & R_1 \\ 0 & A_{22} & R_2 \end{array}, \text{ где матрица } A_{11} - \text{диагональная.}$$

Сначала рассчитывается система  $(A_{22}|R_2)$  для определения неявных (implicit) переменных, затем, на каждой итерации определяются “ $e$ ” переменные. После этого, если приращения какой-либо из неявных переменных малы, она переводится в число “ $e$ ”-переменных.

\*\*P.S. Следует иметь в виду два обстоятельства:

1. Переменные в ячейках со скважинами всегда implicit, так что к диагональному виду целесообразно приводить матрицу  $C$ .
2. Важным является пересчет “ $e$ ”- переменных на каждом шаге, в противном случае необходим заключительный пересчет  $S$ ,  $C$  (концентрация) иначе не будет баланса

Исходная система

$$\frac{\partial}{\partial t} m \rho_W S_W - \operatorname{div} \left( \frac{k}{\mu_W} k_{r,W} \rho_W (p) (\nabla p - \nabla p_C - \gamma_W \Delta D) \right) = Q_W$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m \rho_L S_L - \operatorname{div} \left( \frac{k}{\mu_L} k_{r,L} \rho_L (p) (\nabla p - \gamma_L \Delta D) \right) = Q_L$$

Разностная схема

Введем оператор transmissibility  $T^0$  - зависящий от геометрии и абсолютной проницаемости

$$\hat{m} \hat{\rho}_W \hat{S}_W - m \rho_W S_W - \tau \cdot \nabla (T_W \rho_W (\nabla p - \nabla p_C - \gamma_W \Delta D))^{n+1} - \tau Q_W^{n+1} = 0$$

$$\hat{m} \hat{\rho}_L \hat{S}_L - m \rho_L S_L - \tau \cdot \nabla (T_L \rho_L (\nabla p - \gamma_L \Delta D))^{n+1} - \tau Q_L^{n+1} = 0$$

$$\text{где } T_i = T^0 \frac{k_i}{\mu_i}, \quad i = W, L$$

Тогда схема метода Ньютона выглядит следующим образом ( $k$  – номер итерации,  $i$  - номер точки в линейном представлении)

$$\left( \hat{m} \hat{\rho}_W \hat{S}_W \right)_i - (m \rho_W S_W)_i - \tau \cdot \sum_{i'} (T_W \rho_W)_{i'} (p_{i'} - p_{C,i'} - \gamma_{W,i'} \Delta D) - \tau \hat{Q}_W = 0$$

$$\left( \hat{m} \hat{\rho}_L \hat{S}_L \right)_i - (m \rho_L S_L)_i - \tau \cdot \sum_{i'} (T_L \rho_L)_{i'} (p_{i'} - \gamma_{L,i'} \Delta D) - \tau \hat{Q}_L = 0$$

Здесь  $T_i$ ,  $i = W, L$  - матрица коэффициентов оператора проводимости

Члены порядка  $\tau$  имеют вид:

$$\tau \cdot \sum_{i'} (T_W \rho_W)_{i'} (p_{i'} - p_{C,i'} - \gamma_{W,i'} \Delta D) + \tau \hat{Q}_W$$

Тогда вариация по  $P$ ,  $S_W$  может быть представлена в виде: ( $\delta S_W = -\delta S_L$ )

$$(m \rho_W)_p^{n+1,k} S^{n+1,k} \delta p_i - (m \rho_W)^{n+1,k} \delta S_i - \tau \cdot \sum_{i'} (T_W \rho_W)_{i'}^{n+1,k} \left( \delta p_{i'} - (p_C)_S^{n+1,k} \delta S_{i'} - \gamma_{W,p} \delta p_{i'} \Delta D \right) -$$

$$- \tau \sum_{i',l} \frac{\partial}{\partial p_l} (T_W \rho_W)_{i',l}^{n+1,k} (p_{i'} \delta p_l - p_{C,i'} \delta p_l - \gamma_{W,i'} \delta p_l \Delta D) - \tau \sum_{i',l} \frac{\partial}{\partial S_l} (T_W \rho_W)_{i',l} (p_{i'} - p_{C,i'} - \gamma_{W,i'} \Delta D) \delta S_l -$$

$$- \tau (Q_{W,p}^{n+1,k} \delta p_i + Q_W^{n+1,k} \delta S_i) = R^{n+1,k}$$

Аналогично для нефти

$$(m \rho_L)_p^{n+1,k} (1 - S_W)^{n+1,k} \delta p_i - (m \rho_L)^{n+1,k} \delta S_{W,i} - \tau \cdot \sum_{i'} (T_L \rho_L)_{i'}^{n+1,k} \left( \delta p_{i'} - \delta p_{i'} \gamma_{L,i'} \Delta D \right) -$$

$$-\tau \sum_{i,l} \frac{\partial}{\partial p_l} (T_L \rho_L)_{i,i'}^{n+1,k} (p_i \delta p_l - \gamma_{L,i'} \delta p_l \Delta D) - \tau \sum_{i,l} \frac{\partial}{\partial S_l} (T_L \rho_L)_{i,i'} (p_i - \gamma_{L,i'} \Delta D) \delta S_l -$$

$$-\tau (Q'_{L,p_i})^{n+1,k} \delta p_i - \tau (Q'_{L,S_i})^{n+1,k} \delta S_i = R^{n+1,k}$$

Таким образом, матрица  $C$  имеет вид (см. предыдущее задание)

$$\begin{pmatrix} (m\rho_W)_p^{n+1,k} S^{n+1,k} & (m\rho_W)^{n+1,k} \\ (m\rho_L)_p^{n+1,k} (1-S)^{n+1,k} & -(m\rho_L)^{n+1,k} \end{pmatrix}$$

Окончательно уравнение имеет вид:

$$C^{n+1,k} \delta X - \tau (T^{n+1,k} + Q) \delta X = R^{n+1,k}$$

### Рассмотрим метод AIM

В качестве критерия выбора шага используем условие

$$\frac{\tau(Q+F)}{m\rho S} < A, \text{ где } A \text{ может быть больше } 1.$$

В тех ячейках, где  $\frac{\tau(Q+F)}{m\rho S} < 1$  величины можно считать явными. Тогда зависимостью от  $p, S$  в этих ячейках величин  $T^i, \rho_i$  ( $i=W, L$ ) пренебрегаем.

Метод AIM: опускаем зависимость от этих величин в выражениях для  $T$ . Тогда можно построить матрицу  $C\delta X - \tau Q$ , которая легко может быть диагонализирована. А затем посредством перестановки представить матрицу системы в виде:

$$\begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & A_{12} \\ & & x & \\ & 0 & & A_{22} \end{pmatrix}$$

На каждой итерации «е» (explicit) переменные пересчитываются по явной схеме. Потом заново определяются явные переменные и делается следующий шаг (в данном случае те, для которых  $|\delta S^k - \delta S^{k+1}| < \varepsilon$  и  $|\delta p^k - \delta p^{k+1}| < \varepsilon$ ).

При этом пересчитываются потоки на границе явно-неявных ячеек и коэффициенты матриц.

Остается открытым вопрос о необходимости дивергентного замыкания.

\*\*P.S. Так как ячейки, где  $Q \neq 0$  обычно неявные, то целесообразно преобразовывать матрицу  $C$ .



## Дополнение

Особенность AIM метода – это сохранение в матрице задаче для явных переменных только диагональных членов от аппроксимации производной по времени, т.е. элементов преобразованной матрицы  $C$ .

Метод IAN (inexact adaptive newton) переносит в левую часть (в матрицу задачи) диагональные элементы матриц  $\tau(T+Q)$ . При этом можно утверждать, что если полная матрица  $J_{FI}$ , а матрицы для методов AIM и IAN – это  $J_{AIM}$  и  $J_{IAN}$ , то справедливо

$\|J_{FI} - J_{IAN}\| < \|J_{FI} - J_{AIM}\|$  что позволяет надеяться, что скорость сходимости метода IAN больше, чем метода AIM.

## Проблема начального приближения

Кажется естественным использовать в качестве начального приближения какой-нибудь более простой метод, чем FI. Попытка воспользоваться в качестве начального приближения IMPES результатами установила, что эти результаты содержат слишком большую ошибку и, как следствие, ньютоновские итерации с такими начальными условиями сходятся плохо.

Важным принципом построения приближенных решений является условие одновременного определения давления и насыщенностей.

Предлагается опробовать два подхода

1. Simultaneous Solution (SS) Method
2. Linearized Semi-Implicit, LSI Method

Воспользуемся формой записи разностных схем, предложенной в работе (Fernando Rodriguez and at al, SPE27051) и представим FI схему в виде

$$(m\rho S)^{n+1} - (m\rho S)^n - \tau \left\{ T(p, S) \left( \nabla p^{n+1} - p_c^{n+1} - \gamma(p, S)^{n+1} \Delta z \right) \right\} - \tau Q(p, S)^{n+1} = R_{FI}^{n+1}$$

для любого компонента.  $T$  - тензор трансмиссбилити

Иначе эта схема представляет невязку как функцию ряда переменных.

$$R_{FI}^{n+1} \rightarrow \left\{ T(p, S)^{n+1} \left( \nabla p^{n+1} - p_c^{n+1} - \gamma(p, S)^{n+1} \Delta z \right), Q(p, S)^{n+1}, (m\rho S)^{n+1} \right\}$$

Интегрируются переменные, относящиеся к  $(n+1)$ -му неявному слою.

Тогда система уравнений SS выглядит следующим образом

$$R_{SS}^{n+1} \rightarrow \left\{ T(p, S)^n \left( \nabla p^{n+1} - p_c^{n+1} - \gamma(p, S)^n \Delta z \right), Q(p, S)^n, (m\rho S)^{n+1} \right\}$$

Таким образом, неявность по насыщенности есть только в капиллярных силах. Имеет смысл попробовать первое приближение как начальное условие для итераций на  $(n+1)$ -м слое. Более перспективным в этом смысле является метод LSI

$$R_{LSI}^{n+1} \rightarrow \left\{ T(p^n, S^{n+1}) \left( \nabla p^{n+1} - p_c^{n+1} - \gamma(p, S)^n \Delta z \right), Q(p^n, S^{n+1}), (m\rho S)^{n+1} \right\}$$

В этом методе можно ограничиться одной линейной итерацией. Поэтому он называется линеаризованным. Весьма перспективным является использование первого приближения в качестве начальных условий для ньютоновских итераций.

### Литература

1. Thomas G.W., Thurnau D.H., Reservoir simulation using an Adaptive Implicit Method, Soc.Pet.Eng.J., 23(1983),759-768
2. Forsyth P.A., Sammon P.H., Practical consideration for Adaptive Implicit Method in Reservoir simulation, J.Comp.Phys., 62(1986), 265-281
3. Russel T.F., Stability analysis and switching criteria for Adaptive Implicit Method based on the CFL condition, SPE 18416 (1989)
4. Young L.C., Russel T.F., Reservoir simulation of an Adaptive Implicit Method, SPE 25245 (1993)
5. Thomas J. Byer, Michael G. Edwards, and Khalid Aziz  
A Preconditioned Adaptive Implicit Method for Reservoirs with Surface Facilities, SPE 51895 (1999)