



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2009 г.



Родин А.С.

Модель движения
пластического лайнера в
магнитном компрессоре и ее
применение

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Родин А.С. Модель движения пластического лайнера в магнитном компрессоре и ее применение // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 50. 33 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-50>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша

А. С. Родин

**Модель движения пластического лайнера в магнитном
компрессоре и ее применение**

Москва – 2009

Аннотация

В работе представлена модель больших упругопластических деформаций. Рассмотрено применение данной модели к задаче, описывающей движение лайнера в поперечном сечении магнитного компрессора. Приведены результаты расчетов и проведен анализ поведения лайнера для моделей с различными кривыми деформирования.

A.S. Rodin

The model of the plastic liner movement in the cross-section of magnetic compressor

Abstract

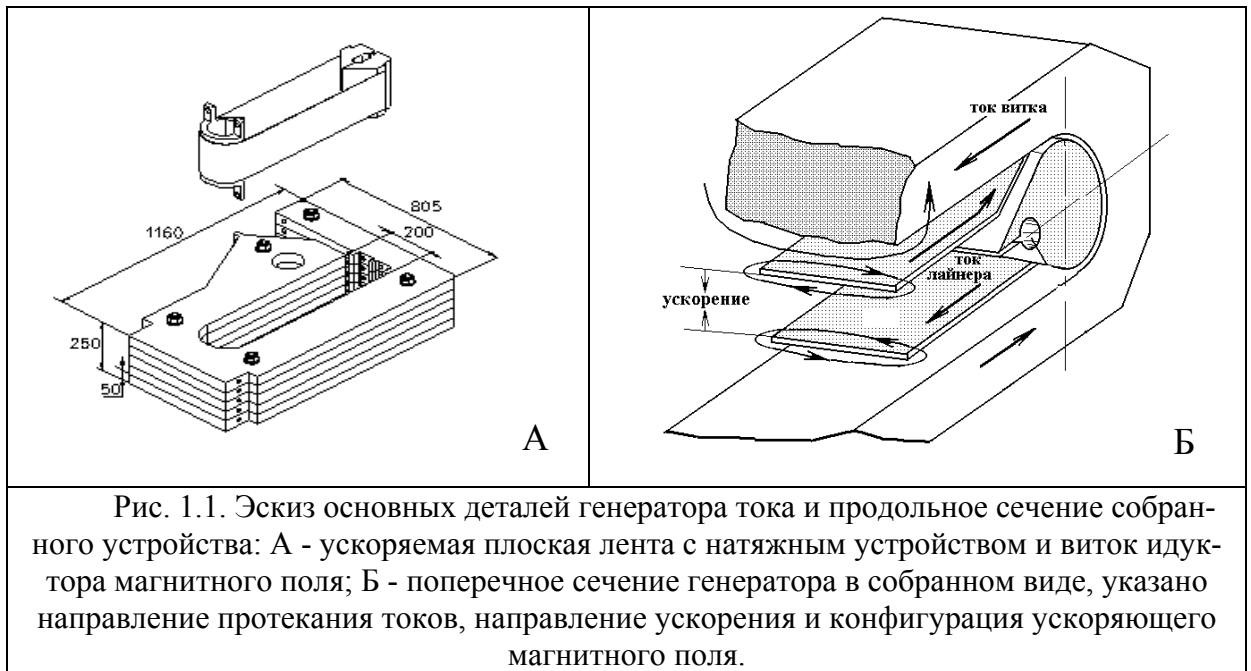
The model of the large elastoplastic strain is presented in the paper. The application of this model by the problem describing the liner movement in the cross-section of the magnetic compressor is discussed. The calculation results are demonstrated and the analyze of models with different inelastic curves is carried out.

Содержание

1. Введение и постановка задачи	3
2. Математическая модель	4
3. Численная модель	14
4. Физические параметры	23
5. Результаты расчетов	23
6. Заключение	31
Список литературы	32

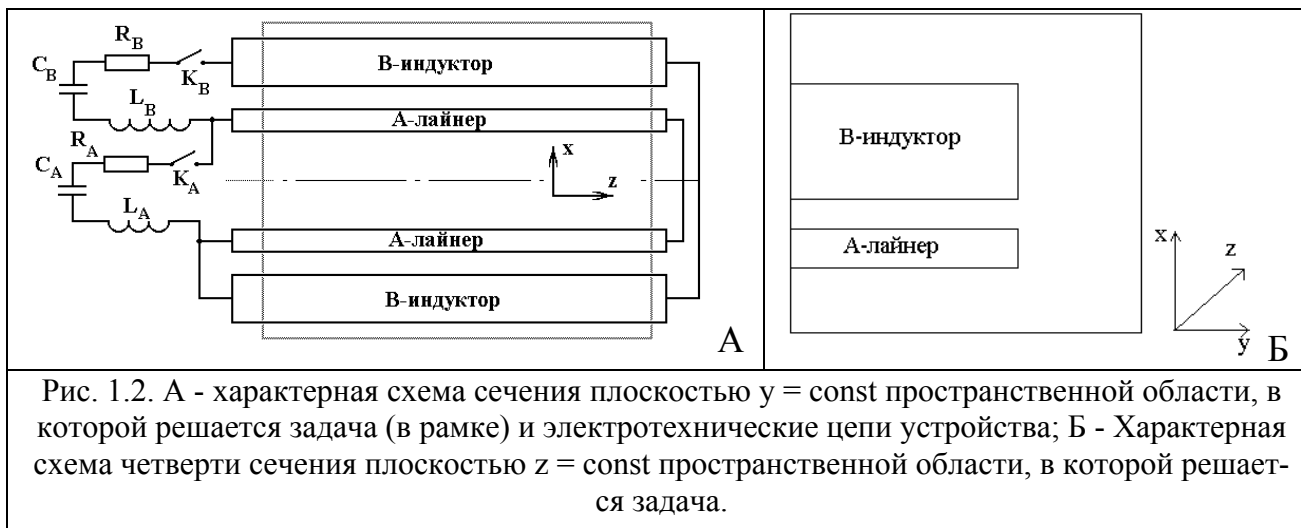
1. Введение и постановка задачи

Установка «МОЛ» («Магнитное обжатие лайнеров») предназначена для исследования работы всех ступеней модуля установки «Байкал» и генерации электрического импульса мегаджоульного уровня. Для установки «МОЛ» [1] разработан макет усилительного каскада мощности (магнитный компрессор – МК), работа которого основана на сжатии магнитного потока лайнером, ускоренным электродинамическими силами до скорости 0.8 км/с. Элементы устройства показаны на рис. 1.1А. Схема МК приведена на рис. 1.1Б.



На рис. 1.2 А приведено сечение узла ускорения плоскостью $y = \text{const}$. Показано присоединение соответствующих электрических цепей индуктора и лайнера, которые могут коммутировать между собой. Здесь и далее лайнер, индуктор и относящиеся к ним элементы и величины помечены соответствующими индексами А и В.

В начальный момент времени конденсатор C_B в цепи индуктора заряжен до некоторого начального напряжения. После замыкания цепи ключом K_B по индуктору (и лайнеру) начинает течь разрядный ток. Созданное им в зазоре ускорителя магнитное поле взаимодействует с протекающим по лайнеру током, ускоряя лайнер вдоль оси x . В некоторый момент времени (вероятно, отличный от момента начала ускорения) ключом K_A замыкается цепь контура лайнера с (возможно) заряженным конденсатором C_A . Соответствующий ток протекает по лайнеру и создает внутри полости лайнера дополнительное магнитное поле. Ускорившись, лайнер сжимает это поле, которое окончательно и выводится из системы в виде импульса тока во внешней цепи лайнера.



В данной работе рассмотрено сечение исходной области плоскостью $z = \text{const}$. На рис. 1.2 Б приведена одна четвертая часть поперечного сечения, аналогичного рис. 1.1 Б.

Задача решается в пространственно двумерном приближении. Все величины считаются зависящими только от координат x и y . В уравнениях производные по z отсутствуют. Это означает формально бесконечную протяженность ускорительной системы в данном направлении. При этом в модели учитывается «эффективная» длина системы в z – направлении, в значительной степени определяющая процесс перекачки энергии из внешней электрической цепи в кинетическую энергию лайнера.

Соответственно у скоростей ненулевыми являются только x и y компоненты. Аналогично отличные от нуля x и y компоненты имеет напряженность магнитного поля. Таким образом, эти ненулевые векторы лежат в плоскости рис. 1.2 Б. Векторы напряженности электрического поля и плотности тока имеют по одной ненулевой z компоненте и направлены перпендикулярно плоскости рис. 1.2 Б.

Индуктор предполагается неподвижным, а его форма неизменной, т.е. сила реакции крепежа соответствует действующей на индуктор силе Лоренца и компенсирует ее. Материал индуктора является проводником.

Важную роль в процессе сжатия магнитного поля играет форма, принимаемая лентой лайнера. В работах [3-7] рассмотрены подходы, в которых лайнер моделировался упругим телом или вязкой несжимаемой жидкостью. Но указанные подходы являются приближенными и не могут претендовать на полную физическую достоверность в силу того, что лента сделана из алюминия, а нагрузки, испытываемые лайнером, заметно превышают его предел текучести. Поэтому в данной работе рассмотрен третий подход, в котором лайнер моделируется упругопластическим телом с реальной кривой деформирования, полученной в результате эксперимента.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00151).

2. Математическая модель

2.1. Электродинамическая часть

Электродинамическая часть модели основана на системе уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (см. [8, 11])

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}([\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \mathbf{E}),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Здесь σ - электропроводность, \mathbf{E} и \mathbf{H} - напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{j} - плотность тока, \mathbf{v} - вектор скорости движения точек среды (лайнера).

После введения векторного потенциала \mathbf{A} задача для определения полей внутри области принимает вид (более подробно см. [5]):

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (0, 0, A),$$

$$4\pi\sigma \left[\frac{DA}{Dt} - \left(\int_{S_k} \sigma \frac{DA}{Dt} dS + I_k \right) / \int_{S_k} \sigma dS \right] = \Delta A \text{ в } S_k,$$

$$\Delta A = 0 \text{ в диэлектрике,}$$

$$A|_{t=0} = 0, [A] = 0 \text{ на } \partial S_k, A|_{\partial G} = 0,$$

где S_k - подобласти, занимаемые проводниками (лайнер и индуктор, $k=A, B$ соответственно), I_k - полные токи, протекающие по проводникам, ∂G - границы всей области, ∂S_k - границы проводников.

Уравнения внешних электрических цепей:

$$L_A I_{A,t} + R_A I_A - U_A - 2\chi_A I_z = 0,$$

$$C_A U_{A,t} = -I_A.$$

$$L_B I_{B,t} + R_B I_B - U_B - 2(\chi_B - \chi_A) I_z = 0,$$

$$C_B U_{B,t} = -I_B.$$

Здесь L, R, C , соответственно, - индуктивность, сопротивление и емкость в цепи, I и U - сила тока и напряжение на обкладках конденсатора,

$$\chi_k(t) = \left(- \int_{S_k} \sigma \frac{DA}{Dt} dS - I_k \right) / \int_{S_k} \sigma dS$$

(слагаемое χ_k играет роль плотности поверхностных магнитных токов (см. [5])).

2.2. Математическая модель упругопластического тела

Изложенный ниже в данном параграфе материал (определения, предположения, уравнения) основан на моделях, подробно описанных в [1] (поэтому далее в параграфе ссылка на указанную книгу чаще всего будет опускаться). На текущем этапе работы над моделью влияние температуры не учитывается, поэтому в уравнениях нет деформаций, связанных с тепловым расширением тела.

Выбор системы координат

Рассмотрим двумерное евклидово пространство, в котором введена прямоугольная декартова система координат с ортонормальными базисными векторами k_1, k_2 . Наряду с декартовой системой координат рассмотрим систему координат Θ_i , являющуюся системой отсчета для описания движения некоторого тела A (в данном случае лайнера). В общем случае система отсчета может быть криволинейной системой координат, но в данной работе она является декартовой системой координат (Θ_i всегда совпадает с k_i).

Область 0G , ограниченную замкнутой границей ${}^0\Gamma$, которую занимает тело в начальный момент времени $t = 0$, назовем начальной конфигурацией, а области ${}^tG, {}^{t_0}G$, ограниченные замкнутыми поверхностями ${}^t\Gamma, {}^{t_0}\Gamma$ в некоторый отсчетный и текущий моменты времени t_0, t , - отсчетной и текущей конфигурациями соответственно (рис. 2.1).

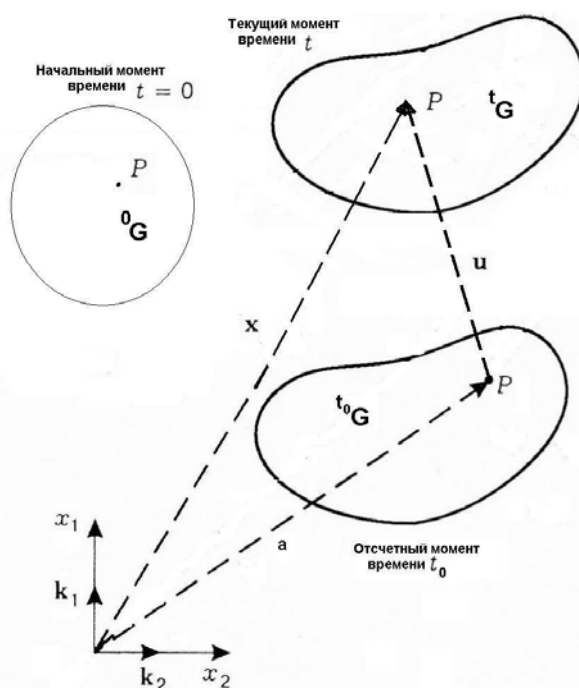


Рис. 2.1. Начальная и деформированные конфигурации тела.

Рассмотрим некоторую материальную точку P , вектор положения (радиус-вектор) которой в отсчетный момент времени представляется в виде

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{k}_i,$$

а в текущем состоянии в момент времени t вектор положения этой же материальной точки P записывается в виде:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{k}_i,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{u},$$

где \mathbf{u} - вектор перемещений (с компонентами u_i).

Кроме неподвижной системы отсчета определим также подвижную систему координат $\hat{\Theta}_i$, которая «вморожена» в движущееся тело (в отсчетный момент времени $\hat{\Theta}_i$ совпадает с Θ_i). Система координат Θ_i называется эйлеровой (x_i - эйлеровы переменные), а система координат $\hat{\Theta}_i$ - лагранжевой (a_i - лагранжевы переменные).

Существуют два теоретически эквивалентных подхода к решению задач механики сплошной среды: лагранжев (материальный) и эйлеров (пространственный). В данной работе применяется первый. Лагранжев подход используется в двух вариантах:

1. общий лагранжев или TL (total Lagrangian) подход соответствует использованию начальной конфигурации в качестве отсчетной: $t_0 = 0$;

2. текущий лагранжев или UL (updated Lagrangian) подход соответствует использованию текущей конфигурации в качестве отсчетной: $t_0 = t$.

Так как в каждый фиксированный момент времени для UL подхода предполагается $\hat{\Theta}_i = \Theta_i$, разница между UL- и эйлеровыми подходами проявляется в использовании разных определений скорости рассматриваемых величин (см. [1]). Непрерывное изменение отсчетной конфигурации для UL-подхода используется только в теоретических исследованиях. На практике отсчетная конфигурация пересчитывается только для дискретных значений времени.

В [4-7] для описания движения упругого лайнера использовался общий лагранжев подход. В данной работе применяется текущий лагранжев подход.

Используемые тензоры деформаций и напряжений

Введем тензор \mathbf{F} градиента деформаций с компонентами:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}. \quad (2.1)$$

Существует большое количество разнообразных тензоров деформаций и напряжений (см. [1]). В данной работе выбраны следующие:

- тензор \mathbf{E} деформаций Грина-Лагранжа с компонентами (в работах [4-7] использовалось обозначение γ_{ij}):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j}\right); \quad (2.2)$$

- тензор ϵ деформаций Альманси с компонентами:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right); \quad (2.3)$$

- тензор s истинных напряжений (Коши) с компонентами s_{ij} , и два тензора условных напряжений: тензор Кирхгоффа τ с компонентами τ_{ij} и второй тензор Пиолы-Кирхгоффа S с компонентами S_{ij} . Тензор истинных напряжений обычно записывается в эйлеровых координатах, а тензоры условных напряжений - в лагранжевых координатах. Они связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$s_{ij} = \frac{1}{J} \tau_{ij}, \quad (2.4)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} S_{kl} \frac{\partial x_j}{\partial a_l},$$

где $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$ - якобиан соответствующего преобразования координат.

Понятие объективности тензоров. Объективные производные тензоров.

Для тензоров деформаций и напряжений, используемых при построении определяющих соотношений, желательным является свойство объективности. Объективностью называется свойство неизменности компонент тензоров при переходе от рассматриваемой системы координат к новым системам координат при преобразованиях, соответствующих идеально жесткому движению тела, которые можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{a}, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(\mathbf{a}, t) + \mathbf{c}_0(t), \quad (2.5)$$

где \mathbf{x}^* - новые координаты тела после его жесткого движения, $\mathbf{Q}(t)$ - ортогональный тензор, а $\mathbf{c}_0(t)$ - вектор. В частности, свойство объективности позволяет гарантировать, что при жестком движении тела в нем не возникает деформаций (в том числе и пластических).

Тензоры второго ранга \mathbf{Y} и \mathbf{y} называются соответственно инвариантными и индифферентными относительно преобразования координат (2.5), если

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Эти тензоры составляют класс объективных тензоров, так как при жестких движениях окрестности материальной точки компоненты инвариантных тензоров не изменяются в материальном отсчетном базисе, а компоненты индифферентных тензоров - в материальном текущем базисе. Тензоры деформаций E_{ij} и

напряжений S_{ij} являются инвариантными тензорами, а тензоры деформаций e_{ij} и напряжений s_{ij} являются индифферентными.

В определяющих соотношениях часто используются производные по времени от тензоров деформаций и напряжений. Желательно, чтобы эти производные в свою очередь также являлись объективными тензорами.

Наряду с материальной производной по времени:

$$\dot{(\cdot)} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \Big|_{\hat{\Theta}_i = const}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}},$$

введем другие определения производных (скоростей изменения) по времени тензоров.

Скорости изменения тензоров в фиксированных материальных точках, измеряемые производными их компонент в системах координат, совершающих движения относительно системы отсчета Θ_i , называются конвективными производными. В данной работе используются следующие конвективные производные:

- производная Олдройда: она связана с материальной производной выражением (для тензора второго ранга)

$$\mathbf{h}^{ol} = \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{h} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{l}, \quad (2.6)$$

- производная Коттер-Ривлина:

$$\mathbf{h}^{CR} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{l} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{l}^T, \quad (2.7)$$

- производная Яуманна:

$$\mathbf{h}^J = \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.8)$$

Здесь $\mathbf{l} = \nabla_x \mathbf{v}$ - тензор градиента скоростей (в переменных Эйлера). Его можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей:

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}^T = \mathbf{d} - \mathbf{w},$$

где \mathbf{d} - тензор скорости деформаций (с компонентами $d_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$), а

$\mathbf{w} = -\mathbf{w}^T$ - тензор вихря (с компонентами $w_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j})$).

Производные Олдройда и Коттер-Ривлина характеризуют скорости изменения компонент тензора \mathbf{h} по отношению к системам координат, движение которых задается тензором градиента скоростей.

Производная Яуманна характеризует скорости изменения компонент тензора \mathbf{h} по отношению к системе координат, совершающей чистый поворот с угловой скоростью \mathbf{w} .

В переменных Эйлера в декартовой системе координат компоненты производных Олдройда и Яуманна имеют следующий вид:

$$h_{ij}^{ol} = \dot{h}_{ij} - h_{kj} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - h_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k},$$

$$h_{ij}^J = \dot{h}_{ij} + h_{kj} w_{ki} + h_{ik} w_{kj}.$$

В определяющих соотношениях также часто используются следующие конвективные производные:

- производная Хилла тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{s}^J + \mathbf{s} \operatorname{tr}(\mathbf{d}) = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \operatorname{tr}(\mathbf{d}); \quad (2.9)$$

- производная Трусделла тензора напряжений Коши:

$$\mathbf{s}^{Tr} = \mathbf{s}^{Ol} + \mathbf{s} \operatorname{tr}(\mathbf{d}) = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{s} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{s} \operatorname{tr}(\mathbf{d}); \quad (2.10)$$

Их механический смысл заключается в том, что для UL-подхода выполняются соотношения ($\boldsymbol{\tau}$ - тензор Кирхгоффа):

$$\mathbf{s}^H = \boldsymbol{\tau}^J, \quad \mathbf{s}^{Tr} = \boldsymbol{\tau}^{Ol}. \quad (2.11)$$

Кроме того, для UL-подхода соотношения, связывающие конвективные производные и материальную производную различных тензоров, значительно упрощаются. В частности, верны следующие выражения:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}^\Lambda = \mathbf{d}, \quad (2.12)$$

(\mathbf{e}^Λ - любая из перечисленных выше конвективных производных тензора \mathbf{e})

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\tau}^{Ol} = \mathbf{s}^{Tr}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{s}^{Tr} + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{d}). \quad (2.14)$$

В общем случае материальные и конвективные производные объективных тензоров не объективны. Можно указать 2 подкласса объективных производных:

1. Материальные производные инвариантных тензоров - инвариантные тензоры (например $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{S}}$).

2. Индифферентные производные индифферентных тензоров - индифферентные тензоры.

Все указанные выше конвективные производные являются индифферентными.

Сопряженные тензоры напряжений и деформаций

В [1] рассматриваются следующие инвариантные величины:

- мощность внутренних сил единицы массы деформируемого тела Λ :

$$\bar{w} = \frac{1}{\rho} \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}, \quad (2.15)$$

- мощность внутренних сил тела Λ :

$$\Lambda = \int_G \mathbf{s} \cdot \mathbf{d} \, dG = \int_0^G \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} \, d^0G.$$

При построении определяющих соотношений мощность внутренних сил играет фундаментальную роль: нужно следить, чтобы выбранные тензоры деформаций и напряжений являлись сопряженными по мощности.

Определение 2.1 Инвариантные тензоры напряжений $\bar{\mathbf{A}}$ и деформаций $\bar{\mathbf{B}}$ называются сопряженными по мощности, если для них выполняется равенство

$${}^0w = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} = \bar{\mathbf{A}} : \dot{\bar{\mathbf{B}}}.$$

Знак «:» означает двойную сумму по повторяющимся индексам тензоров в индексной форме записи данного выражения.

Тензоры \mathbf{S} и \mathbf{E} сопряжены по мощности.

Аналогичное определение можно привести для индифферентных тензоров.

С некоторыми оговорками (см. [1]) можно считать сопряженными по мощности пары $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{e})$ и (\mathbf{s}, \mathbf{e}) .

Определяющие соотношения для упругого и пластического материалов

Упругий материал

1) Геометрически линейное деформирование (такое деформирование определяется следующими ограничениями: малая деформация и малые повороты материальной частицы, но произвольные трансляционные перемещения).

При таких условиях можно считать, что тензор деформаций Грина-Лагранжа приближенно равен линейному тензору деформаций (Коши):

$$E_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right). \quad (2.16)$$

Пользуясь законами термодинамики, можно показать, что при изотермическом и адиабатическом деформировании определяющие соотношения упругого материала записываются в виде:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \bar{W}(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (2.17)$$

где $\bar{W}(\varepsilon_{ij})$ - удельная потенциальная энергия деформирования (упругий потенциал).

Для изотропного тела выражение (2.17) можно записать в следующем виде (закон Гука):

$$\boldsymbol{\sigma} = C^E : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.18)$$

где C^E - тензор коэффициентов упругости.

Дифференцируя по времени левые и правые части этого соотношения, получаем запись определяющих соотношений относительно скоростей (C^E не зависит от t):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.19)$$

2) Произвольная величина деформации

Следуя [1], дадим следующие определения:

Определение 2.2 Материал тела называется гиперупругим, если существует естественная конфигурация тела и такая функция $\hat{W}(\mathbf{E})$, образуемая по отношению к естественной конфигурации, что для всех точек тела справедливо равенство

$$\hat{W}(\mathbf{E}) = \bar{w}.$$

Функция $\hat{W}(\mathbf{E})$ называется потенциальной энергией деформаций. Удельная потенциальная энергия деформирования вводится следующим образом:

$$\bar{W}(\mathbf{E}) \equiv {}^0\rho \hat{W}(\mathbf{E}).$$

Определяющие соотношения гиперупругого материала для изотропного тела:

$$\mathbf{S} = \frac{d\bar{W}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} = C^E : \mathbf{E}, \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = C^E : \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.21)$$

В [4-7] использовались соотношения именно для гиперупругого материала.

Определение 2.3. Материал тела называется гипоупругим, если компоненты производной Яуманна тензора напряжений Коши – линейные однородные функции компонент тензора скорости деформаций.

Определяющие соотношения для гипоупругого изотропного материала:

$$\mathbf{s}^J = C^E : \mathbf{d}. \quad (2.22)$$

По теореме Нолла гиперупругий материал является частным случаем гипоупругого.

На самом деле выбор конвективной производной для тензора напряжений неоднозначен. В [1] на примере тестовой задачи о простом сдвиге обсуждаются несколько различных вариантов выбора производной. Отмечено, что хорошие результаты получены для следующих определяющих соотношений:

$$\mathbf{s}^{Tr} = C^E : \mathbf{d}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{s}^H = C^E : \mathbf{d}. \quad (2.24)$$

Упругопластический материал

Существуют два принципиально разных подхода к построению определяющих соотношений упругопластического материала: деформационная теория пластичности и теория пластического течения. В данной работе рассматриваются соотношения для теории пластического течения.

1) Геометрически линейное деформирование тела

Для данного деформирования теория пластического течения основана на следующих предположениях:

- Основная гипотеза: материальную производную тензора деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ и пластической $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ составляющих:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (2.25)$$

- Материал предполагается пластически несжимаемым: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ii}^p = 0$.

- Материальная производная тензора напряжений связана с материальной производной тензора упругих деформаций законом Гука следующего вида:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C^E : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = C^E : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p). \quad (2.26)$$

Материальная производная тензора пластических деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\lambda} \boldsymbol{\sigma}', \quad (2.27)$$

где $\boldsymbol{\sigma}'$ - девиатор тензора напряжений, $\tilde{\lambda}$ имеет смысл множителя Лагранжа, f_y - функция текучести Мизеса [1].

Для материала с изотропным упрочнением в качестве функции текучести можно выбрать следующую функцию

$$f_y(\boldsymbol{\sigma}', \eta) = 3J_2(\boldsymbol{\sigma}') - \sigma_y^2(\eta), \quad (2.28)$$

где $J_2(\boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}$ - второй инвариант девиатора тензора напряжений, σ_y - предел текучести материала, η - параметр упрочнения, характеризующий величину накопленных пластических деформаций. В качестве параметра упрочнения используется эффективная пластическая деформация:

$${}^t \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P} dt. \quad (2.29)$$

Выражение (2.26) также можно представить в потенциальном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{dW_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad (2.30)$$

где $W_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - однородная потенциальная функция второй степени.

2) Произвольная величина деформации

а) Формальное обобщение (самый простой и напрашивающийся шаг) определяющих соотношений (2.26), (2.30) на случай больших деформаций получается заменой материальных производных $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ объективными производными некоторых тензоров и деформаций. В частности, в качестве таких производных можно взять $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{S}}$. Тогда определяющие соотношения записываются в виде

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^P, \quad \dot{\mathbf{S}} = C^E : (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^P). \quad (2.31)$$

В [1] рассматривается область применения соотношений (2.31). И делается вывод, что из физических соображений следует, что критерием появления пластических деформаций должно быть выполнение некоторого условия в пространстве компонент девиатора тензора истинных напряжений \mathbf{s} , а не условных напряжений \mathbf{S} . Значит, соотношения (2.31) имеют механический смысл только при малой деформации тела.

б) В результате предлагается следующая модель:

- Тензор скорости деформаций \mathbf{d} можно представить в виде суммы упругой \mathbf{d}^e и пластической \mathbf{d}^P составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^P; \quad (2.32)$$

- Компоненты производной Яуманна тензора напряжений Коши – линейные однородные функции компонент упругой составляющей тензора скоростей деформаций:

$$\mathbf{s}^J = C^E : \mathbf{d}^e = C^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^P); \quad (2.33)$$

- Пластическая составляющая тензора скоростей деформаций определяется по ассоциативному закону пластического течения:

$$\mathbf{d}^P = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \tilde{\lambda} \mathbf{s}', \quad (2.34)$$

где \mathbf{s}' - девиатор тензора напряжений с компонентами $s'_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij}$.

В дальнейшем предел текучести σ_y будем обозначать s_y .

В основе определяющего соотношения (2.33) для упругопластического материала лежит аналогичное соотношение для гипоупругого материала (2.22). Поэтому в качестве альтернативного варианта можно выбрать следующее (аналогично (2.23)):

$$\mathbf{s}^{Tr} = C^E : \mathbf{d}^e = C^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^P); \quad (2.35)$$

Кроме того, в [1] также предлагается использовать в левой части равенства (2.33) производную Яуманна тензора напряжений Кирхгоффа $\boldsymbol{\tau}^J$. Такое предложение оправдано, поскольку для малых упругих, но больших пластических деформаций (что характерно для неупругого деформирования металлов) в силу несжимаемости пластических деформаций выполняются следующие приближения:

$$J \approx 1, \quad \boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{s}.$$

Тогда в UL-формулировке определяющие соотношения принимают следующий вид:

$$\mathbf{s}^H = C^E : \mathbf{d}^e = C^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^P). \quad (2.36)$$

Уравнения движения

Уравнения движения лайнера в момент времени t имеют следующий вид (см. [1]):

$${}^t\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_a \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) + \mathbf{f}, \quad (2.37)$$

где

$$\nabla_a = \frac{\partial}{\partial a_j} \mathbf{k}_j \text{ - оператор дифференцирования по текущим (UL) лагранжевым}$$

координатам,

$$\mathbf{u} = (u_x, u_z) \text{ - вектор перемещений (записанный в UL-координатах),}$$

\mathbf{f} - вектор объемных сил, действующий на тело (в данном случае это сила Лоренца, $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$),

${}^t\rho$ - плотность (в момент времени t),

$\ddot{\mathbf{u}}$ - вектор ускорения,

\mathbf{S} - второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгоффа.

Выберем следующие граничные условия (на участке границы Γ_u заданы кинематические граничные условия, на Γ_T заданы поверхностные силы):

$$(\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_T} = \mathbf{f}^*,$$

$$\mathbf{u} |_{\Gamma_u} = \mathbf{u}^*.$$

В данной задаче на всей границе лайнера поставлены условия свободной границы ($\mathbf{f}^* = 0$), но так как рассматривается четверть области, то на линии

симметрии (левая граница лайнера на рис. 1.2 Б) выбрано условие $u_z = 0$ (для второй компоненты вектора перемещений стоит условие свободной границы).

3. Численная модель

Для решения задачи использован метод конечных элементов с элементами первого порядка. Предварительно проведена триангуляция области. В данной работе показаны результаты расчетов с сетками, построенными с помощью программы Gridder2D, которая позволяет сгущать сетку в заданных подобластях (более подробные сведения о данном программном комплексе изложены в [9]). В начальный момент времени сетка в лайнере состоит из правильных треугольников. Размеры ячеек сетки в лайнере и в диэлектрике различаются в десятки раз.

3.1 Численная модель для электродинамической части

Для дискретизации уравнения применен метод Галеркина. Особенности модели описаны в работе [5].

3.2 Численная модель для упругопластического лайнера

Рассматриваемая в этом параграфе численная модель подробно описана в [1]. В дальнейшем ссылки на [1] будут опускаться.

Для численного решения поставленной задачи используем принцип возможных перемещений.

В отсчетной конфигурации при использовании UL координат данный принцип выражается равенством:

$$\int_{G'} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dG = \int_{G'} \nabla_a \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \nabla_a \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} dG,$$

где $\delta \mathbf{u}$ - возможные перемещения. Если применить к правой части равенства формулу Остроградского-Гаусса, то можно получить следующее соотношение:

$$\int_{G'} (\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dG + \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{u} dG = \int_{G'} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dG, \quad (3.1)$$

где вариация тензора деформаций Грина-Лагранжа определяется следующим образом:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\nabla_a (\delta \mathbf{u}) + \nabla_a (\delta \mathbf{u})^T + \nabla_a (\delta \mathbf{u}) \cdot \nabla_a \mathbf{u}^T + \nabla_a \mathbf{u} \cdot \nabla_a (\delta \mathbf{u})^T].$$

Дискретные уравнения движения упругого тела

Считаем, что рассматриваемое тело (лайнер) в некоторый фиксированный момент времени t занимает область G' , а в некоторый следующий момент времени $t + \Delta t$ - область $G'^{+\Delta t}$ (шаг по времени Δt выбирается небольшим). Примем правило расположения левых индексов: верхний левый индекс для некоторой величины показывает тот момент времени, в который она рассматривается.

Уравнение (3.1) в момент времени $t + \Delta t$ (но записанное относительно системы отсчета, соответствующей моменту времени t) можно представить в следующем виде:

$$\int_{tG} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}E_{ij} d {}^tG = {}^{t+\Delta t}\hat{R}, \quad (3.2)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\hat{R} = \int_{tG} ({}^t\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i - {}^{t+\Delta t}f_i) \delta u_i d {}^tG + \int_{\Gamma_T} {}^{t+\Delta t}f_i^* \cdot \delta u_i d {}^tG. \quad (3.3)$$

Рассмотрим приращение вектора перемещения за время Δt :

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i$$

В UL-формулировке все величины рассматриваются по отношению к моменту времени t , для которого напряженно-деформированное состояние предполагается известным. В момент времени t эйлеровы и лагранжевы переменные совпадают. Поэтому

$${}^tS_{ij} = {}^t s_{ij}, \quad {}^t u_i = 0, \quad u_i = {}^{t+\Delta t}u_i.$$

Представим тензор деформаций Грина-Лагранжа в виде суммы линейной и нелинейной частей:

$${}^{t+\Delta t}E_{ij} = {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij}, \quad (3.4)$$

где ${}^t e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$,

$${}^t \eta_{ij} = \frac{1}{2}u_{k,i} u_{k,j}.$$

В этих формулах принято обозначение

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \quad (\text{производная относительно текущей лагранжевой системы координат}).$$

Компоненты ${}^t e_{ij}$ являются инкрементальным аналогом компонент тензора скоростей деформаций d_{ij} :

$${}^t e_{ij} \approx d_{ij} \Delta t.$$

Приращение компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгоффа ${}^t S_{ij}$ является инкрементальным аналогом материальной производной данного тензора:

$${}^t S_{ij} = {}^{t+\Delta t}S_{ij} - {}^t S_{ij} \approx \dot{S}_{ij} \Delta t.$$

Учитывая равенство (2.13), получаем

$${}^t S_{ij} \approx {}^t s_{ij}^{Tr} \Delta t.$$

Тогда инкрементальным аналогом определяющего соотношения (2.23) является следующая формула:

$${}^t S_{ij} = C_{ijkl}^E {}^t e_{kl}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) легко выразить значение ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ (при этом учитывается, что ${}^t S_{ij} = {}^t s_{ij}$):

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = C_{ijkl}^E e_{kl} + {}^tS_{ij} = C_{ijkl}^E e_{kl} + {}^tS_{ij}. \quad (3.6)$$

Если подставить (3.4) и (3.6) в (3.3) и ограничиться линейными слагаемыми относительно известного состояния в момент времени t , то получим следующее равенство

$$\int_{tG} C_{ijkl}^E e_{kl} \delta_t e_{kl} d^tG + \int_{tG} {}^t s_{ij} \delta_t \eta_{kl} d^tG = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_{tG} {}^t s_{ij} \delta_t e_{ij} d^tG. \quad (3.7)$$

Можно получить аналогичные формы записи принципа возможных перемещений для материалов, описываемых формулами (2.22) и (2.24).

Инкрементальный аналог формулы (2.24) имеет следующий вид:

$${}^t s_{ij}^H = C_{ijkl}^E e_{kl} \quad (3.8)$$

$${}^t s_{ij}^H = {}^{t+\Delta t} \bar{s}_{ij} - {}^t s_{ij} = {}^t s_{ij}^{Tr} + 2 {}^t s_{ik} e_{kj} = {}^t S_{ij} + 2 {}^t s_{ik} e_{kj} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) можно выразить значение ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = C_{ijkl}^E e_{kl} + {}^t s_{ij} - 2 {}^t s_{ik} e_{kj}. \quad (3.10)$$

Линеаризованная запись принципа возможных перемещений принимает следующий вид:

$$\int_{tG} C_{ijkl}^E e_{kl} (\delta_t e_{kl}) d^tG + \int_{tG} {}^t s_{ij} \delta_t (\eta_{kl} - e_{ik} e_{kj}) d^tG = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_{tG} {}^t s_{ij} (\delta_t e_{ij}) d^tG. \quad (3.11)$$

Векторная форма записи

Для того, чтобы переписать выражения (3.2-3.11) в векторной форме, введем следующие векторы и матрицы (аналоги соответствующих тензоров):

$${}^t \mathbf{e} = [{}^t e_{11}, {}^t e_{22}, 2 {}^t e_{12}]^T,$$

$${}^t \bar{\mathbf{e}} = [{}^t e_{11}, {}^t e_{12}, {}^t e_{21}, {}^t e_{22}]^T$$

$${}^t \mathbf{u}_g = [u_{1,1}, u_{1,2}, u_{2,1}, u_{2,2}]^T,$$

$${}^t \mathbf{s} = [{}^t s_{11}, {}^t s_{22}, {}^t s_{12}]^T,$$

$${}^t \bar{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\mathbf{s}} & 0 \\ 0 & {}^t \tilde{\mathbf{s}} \end{bmatrix}, \quad {}^t \tilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} {}^t s_{11} & {}^t s_{12} \\ {}^t s_{21} & {}^t s_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} - \text{матрица коэффициентов упругости.}$$

С их помощью выражения (3.7), (3.11) можно переписать в следующем виде:

$$\int_{tG} \delta_t \mathbf{e}^T \mathbf{C}_t \mathbf{e} d^tG + \int_{tG} \delta_t \mathbf{u}_g^T {}^t \bar{\mathbf{s}}_t \mathbf{u}_g d^tG = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_{tG} \delta_t \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{s} d^tG, \quad (3.12)$$

$$\int_{tG} \delta_t \mathbf{e}^T \mathbf{C}_t \mathbf{e} d^tG + \int_{tG} [\delta_t \mathbf{u}_g^T {}^t \bar{\mathbf{s}}_t \mathbf{u}_g - 2 \delta_t \bar{\mathbf{e}}^T {}^t \bar{\mathbf{s}}_t \bar{\mathbf{e}}] d^tG = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_{tG} \delta_t \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{s} d^tG. \quad (3.13)$$

Виртуальная работа внешних сил ${}^{t+\Delta t} \hat{R}$ записывается в виде суммы

$${}^{t+\Delta t} \hat{R} = {}^{t+\Delta t} \hat{R}_V + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_M + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_T + {}^{t+\Delta t} \hat{R}_C, \quad (3.14)$$

где

$${}^{t+\Delta t}\hat{R}_V = \int_{{}^tG} {}^{t+\Delta t}f_i \delta u_i d^tG = \int_{{}^tG} \delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} d^tG$$

- виртуальная работа объемных сил (силы Лоренца),

$${}^{t+\Delta t}\hat{R}_M = - \int_{{}^tG} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta {}^{t+\Delta t}u_i d^tG = - \int_{{}^0G} {}^0\rho {}^{t+\Delta t}\ddot{u}_i \delta {}^{t+\Delta t}u_i d^0G$$

- виртуальная работа инерционных сил,

$${}^{t+\Delta t}\hat{R}_T = \int_{{}^t\Gamma_T} {}^{t+\Delta t}f_i^* \delta {}^{t+\Delta t}u_i d^t\Gamma$$

- виртуальная работа поверхностных нагрузок,

$${}^{t+\Delta t}\hat{R}_C = \sum_{k=1}^K {}^{t+\Delta t}R_i^k \delta {}^{t+\Delta t}U_i^k$$

- виртуальная работа сосредоточенных сил.

Дискретизация по пространству

Проведем в рассматриваемой области триангуляцию. Введем вектор приращений узловых приращений в треугольнике:

$$\mathbf{U}^e = [U_x^1, U_z^1, U_x^2, U_z^2, U_x^3, U_z^3]^T.$$

Рассмотренные ранее векторы связаны с вектором узловых приращений следующими формулами:

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\mathbf{U}^e,$$

$$\delta \mathbf{U} = \mathbf{N}\delta \mathbf{U}^e,$$

$$\mathbf{N} = [N_1 I_2, N_2 I_2, N_3 I_2], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где N_i - базисные функции (в данной задаче – линейные);

$${}^t\mathbf{e} = {}^t\mathbf{B}_L \mathbf{U}^e,$$

$${}^t\mathbf{U}_g = {}^t\mathbf{B}_{NL} \mathbf{U}^e,$$

$${}^t\bar{\mathbf{e}} = {}^t\mathbf{B}'_{NL} \mathbf{U}^e,$$

где ${}^t\mathbf{B}_L$, ${}^t\mathbf{B}_{NL}$, ${}^t\mathbf{B}'_{NL}$ - блочные матрицы, их структура описана в [1].

Введем следующие симметричные матрицы и векторы:

$${}^t\mathbf{K}_L^e = \int_{{}^tG^e} {}^t\mathbf{B}_L^T \mathbf{C}^t \mathbf{B}_L d^tG - \text{линейная касательная матрица жесткости элемента,}$$

$${}^t\mathbf{K}_{NL}^e = \int_{{}^tG^e} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\bar{\mathbf{s}}^t \mathbf{B}_{NL} d^tG,$$

$${}^t\mathbf{K}'_{NL}{}^e = \int_{{}^tG^e} {}^t\mathbf{B}'_{NL}{}^T {}^t\bar{\mathbf{s}}^t \mathbf{B}'_{NL} d^tG - \text{нелинейные касательные матрицы жесткости}$$

элемента,

$$\mathbf{M}^e = \int_{{}^0G^e} {}^0\rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d^0G - \text{матрица масс элемента,}$$

${}^t\mathbf{F}^e = \int_{{}^tG^e} {}^t\mathbf{B}_L^T {}^t\mathbf{s} {}^t\mathbf{B}_L d{}^tG$ - вектор внутренних сил элемента,

${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^e = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_V^e + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_T^e + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_C^e$ - вектор внешних сил элемента.

Аналогично локальным векторам и матрицам введем глобальные векторы и матрицы:

$\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_{NEQ}]^T$ - глобальный вектор узловых перемещений, где U_i - одна из компонент вектора перемещений;

${}^t\mathbf{K}$, \mathbf{M} , ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$, ${}^t\mathbf{F}$ - касательная матрица жесткости, матрица масс, векторы внешних и внутренних сил.

Для материала, задаваемого определяющим соотношением (2.23), касательная матрица масс равна сумме двух составляющих:

$${}^t\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL};$$

для материала с определяющим соотношением (2.24) касательная матрица равна сумме уже трех слагаемых:

$${}^t\mathbf{K} = {}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} + {}^t\mathbf{K}'_{NL}.$$

Используя рассмотренные векторы и матрицы, можно переписать выражения (3.12), (3.13) в виде матричного уравнения:

$$\delta\mathbf{U}^T (\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{U}) = \delta\mathbf{U}^T ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}).$$

Из произвольности вектора $\delta\mathbf{U}$ следуют линеаризованные дискретные уравнения движения:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}. \quad (3.15)$$

Схема Ньюмарка решения динамических задач

Для дискретизации задачи (3.15) по времени используем метод Ньюмарка. Он принадлежит к семейству одношаговых методов интегрирования уравнений движения. Введем следующие константы:

$$q_0 = \frac{1}{\alpha\tau^2}, \quad q_1 = \frac{\delta}{\alpha\tau}, \quad q_2 = \frac{1}{\alpha\tau}, \quad q_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1, \quad q_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad q_5 = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right),$$

$$q_6 = q_0, \quad q_7 = -q_2, \quad q_8 = -q_3, \quad q_9 = \tau(1 - \delta), \quad q_{10} = \tau\delta.$$

Здесь τ - шаг по времени, параметры α и δ выбираются из условия устойчивости и точности интегрирования. Если $\alpha = 0.25$ и $\delta = 0.5$, то метод Ньюмарка имеет второй порядок точности по времени, но при этом отсутствует схемная диссипация. При других значениях параметров метод Ньюмарка имеет первый порядок точности и появляется схемная диссипация при интегрировании уравнений движения. Диссипативные схемы оказываются полезными при решении динамических контактных задач.

По схеме Ньюмарка ускорения и скорости в момент времени $t + \Delta t$ выражаются через соответствующие величины в момент времени t по формулам (см. [1]):

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = q_6 \mathbf{U} + q_7 {}^t\dot{\mathbf{U}} + q_8 {}^t\ddot{\mathbf{U}},$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + q_9 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + q_{10} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}.$$

После дискретизации по времени выражения (3.15) получаем следующее уравнение:

$${}^t\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}, \quad (3.16)$$

где

${}^t\hat{\mathbf{K}} = {}^t\mathbf{K} + q_0\mathbf{M}$ - эффективная касательная матрица жесткости,

${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(q_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + q_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}$ - эффективный вектор внешних сил.

Итерационный метод решения нелинейных задач

Исходная задача является нелинейной. Поэтому для уточнения численного решения используем стандартный метод Ньютона-Рафсона. На каждой итерации решается система линейных алгебраических уравнений

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(i-1)}, \quad (3.17)$$

где правый индекс в скобках обозначает номер итерации,

$$\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$$

- вектор разности перемещений на итерациях. В качестве нулевой итерации (начальные условия для итерационного процесса) используется известное решение, полученное для момента времени t :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}, \quad {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{K}}^{(0)} = {}^t\hat{\mathbf{K}}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}.$$

Скорости и ускорения на итерациях определяются по формулам:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} = q_0\mathbf{U}^{(i-1)} - q_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} - q_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}},$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}}^{(i-1)} = q_1\mathbf{U}^{(i-1)} - q_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} - q_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}.$$

Здесь

$$\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^t\mathbf{U}$$

- вектор приращений перемещений на i -й итерации. Вектор ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}$ на итерациях определяется следующим образом:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i-1)} - \mathbf{M}({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}).$$

Вычисление значений тензора напряжений Коши

В процессе вычисления матриц в уравнении (3.17) используются значения тензора напряжений Коши ${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}^{(i)}$. Для их вычисления записываются инкрементальные аналоги выражений (2.9), (2.10), в которых задана связь материальной производной тензора Коши с производными Трусделла и Хилла:

$${}_t s_{ij}^{H(i)} = {}^{t+\Delta t}\bar{s}_{ij}^{(i)} - {}^t s_{ij} = ({}^{t+\Delta t}s_{ij}^{(i)} - {}^t s_{ij}) + {}^{t+\Delta t}s_{kj}^{(i-1)} {}_t w_{ki}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}s_{ik}^{(i-1)} {}_t w_{kj}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}s_{ij}^{(i-1)} {}_t \bar{e}^{(i)}, \quad (3.18)$$

$${}_t s_{ij}^{Tr(i)} = {}^{t+\Delta t}\bar{s}_{ij}^{(i)} - {}^t s_{ij} = ({}^{t+\Delta t}s_{ij}^{(i)} - {}^t s_{ij}) - {}^{t+\Delta t}s_{kj}^{(i-1)} {}_t l_{ki}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}s_{ik}^{(i-1)} {}_t l_{kj}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}s_{ij}^{(i-1)} {}_t \bar{e}^{(i)}, \quad (3.19)$$

где ${}_t l_{ij}^{(i)} = {}_t u_{i,j}^{(i)}$ - инкрементальный аналог градиента скорости,

${}_t w_{ij}^{(i)} = \frac{1}{2}({}_t u_{i,j}^{(i)} - {}_t u_{j,i}^{(i)})$ - инкрементальный аналог тензора вихря,

${}_t \bar{e}^{(i)} = {}_t e_{11}^{(i)} + {}_t e_{11}^{(i)}$ - инкрементальный аналог свертки d_{kk} .

Из (3.18), (3.19), а также соответствующих инкрементальных аналогов определяющих соотношений находятся значения тензора напряжений Коши ${}^{t+\Delta t}\mathbf{s}^{(i)}$.

Численная модель для упругопластического тела

Рассмотрим упругопластическое тело, задаваемое соотношением (2.35). Инкрементальным аналогом (2.35) является следующая формула:

$${}^t S_{ij} = C_{ijkl}^E ({}^t e_{kl} - {}^t e_{kl}^P),$$

где ${}^t e_{kl}^P$ - приращение пластических деформаций, инкрементальный аналог пластической составляющей тензора скоростей деформаций, который равен

$${}^t e_{ij}^P \approx d_{ij}^P \Delta t.$$

Примем, что выполняется инкрементальный аналог выражения (2.37), т.е. компоненты тензора приращений пластической деформации и девиатор тензора напряжений связаны между собой равенством:

$${}^t e_{ij}^P = \Delta \tilde{\lambda} s'_{ij}. \quad (3.20)$$

Тогда принцип возможных перемещений примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_G C_{ijkl}^E {}^t e_{kl} \delta {}^t e_{kl} d^t G + \int_G ({}^t s_{ij} - C_{ijkl}^E {}^t e_{ij}^P) \delta {}^t \eta_{kl} d^t G = \\ & = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_G {}^t s_{ij} \delta {}^t e_{ij} d^t G + \int_G C_{ijkl}^E {}^t e_{kl}^P \delta {}^t e_{ij} d^t G, \end{aligned} \quad (3.21)$$

или в матричном виде

$$\int_G \delta {}^t \mathbf{e}^T \mathbf{C}_t \mathbf{e} d^t G + \int_G \delta {}^t \mathbf{U}_g^T ({}^t \bar{\mathbf{s}}_t - \mathbf{C}_t \mathbf{e}^P) \mathbf{U}_g d^t G = {}^{t+\Delta t} \hat{R} - \int_G \delta {}^t \mathbf{e}^T {}^t \mathbf{s} d^t G - \int_G \delta {}^t \mathbf{e}^T \mathbf{C}_t \mathbf{e}^P d^t G,$$

где ${}^t \mathbf{e}^P = [{}^t e_{11}^P, {}^t e_{22}^P, 2 {}^t e_{12}^P]^T$.

Линеаризованные дискретные уравнения движения можно представить в прежней форме:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (3.22)$$

но нелинейная касательная матрица жесткости и вектор внутренних сил элемента будут иметь следующий вид:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{NL}^{e(i-1)} = \int_G {}^t \mathbf{B}_{NL}^T ({}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{s}}^{(i-1)} - \mathbf{C}_t \mathbf{e}^{P(i-1)}) {}^t \mathbf{B}_{NL} d^t G, \quad (3.23)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{e(i-1)} = \int_G {}^t \mathbf{B}_L^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{s}^{(i-1)} - \mathbf{C}_t \mathbf{e}^{P(i-1)}) {}^t \mathbf{B}_L d^t G. \quad (3.24)$$

Таким образом, нелинейность, связанная с пластическими деформациями, также разрешается с помощью итерационного процесса. На первой итерации

$${}^t \mathbf{e}^{P(0)} = 0,$$

т.е. всегда решается упругая задача. Для вычисления приращений пластической деформации на следующих итерациях использован метод дополнительных деформаций (в [1] данный алгоритм называется алгоритмом вычисления функции эффективного напряжения). Его основные положения заключаются в следующем:

1. На новой i -ой итерации решается уравнение (с учетом (3.23), (3.24)):

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)}.$$

2. По найденным перемещениям по формуле (3.18) вычисляется предиктор для тензора напряжений Коши ${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_0^{(i)}$.

3. Во всех треугольниках проверяется условие

$$f_y({}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_0^{(i)}, \eta) = \sqrt{3J_2({}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_0^{(i)})} - s_y(\eta) < 0.$$

Если условие выполняется, это значит, что материал находится в упругой зоне (либо в нем еще не возникли пластические деформации, либо идет процесс разгрузки) и в данном треугольнике ${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{s}_0^{(i)}$.

4. Если неравенство нарушается, то это значит, что в данном элементе происходит нагрузка, сопровождающаяся изменением пластических деформаций, и необходимо провести коррекцию значений тензора напряжений.

Разобьем тензор напряжений на девиаторную и шаровую части:

$$s_{ij} = s'_{ij} + s_m \delta_{ij}. \quad (3.25)$$

Шаровая часть не зависит от пластических деформаций, т.е.

$${}^{t+\Delta t} s_m^{(i)} = {}^{t+\Delta t} s_{0m}^{(i)}.$$

Для девиаторной части определяющие соотношения записываются в следующем виде (для удобства записи будем пока опускать индекс момента времени):

$${}_t s_{ij}^{\prime Tr} = 2\mu({}_t e'_{ij} - {}_t e_{ij}^{\prime P}). \quad (3.26)$$

Учитывая равенство (3.19), инкрементальный аналог производной Трусделла можно представить в следующей форме:

$${}_t s_{ij}^{\prime Tr} = s_{ij}^{\prime(i)} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)}). \quad (3.27)$$

Используя (3.26), (3.27), можно получить, что

$${}^{t+\Delta t} s_{ij}^{\prime(i)} = \frac{2\mu {}_t e'_{ij} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)})}{1 + 2\mu \Delta \tilde{\lambda}}. \quad (3.28)$$

Тогда, проецируя девиатор напряжения на поверхность текучести Мизеса, получаем:

$$\frac{1}{3} s_y^2(\eta^{(i)}) = \frac{1}{2} s_{ij}^{\prime(i)} s_{ij}^{\prime(i)} = \frac{1}{(1 + 2\mu \Delta \tilde{\lambda})^2} \left(2\mu {}_t e'_{ij} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)}) \right) \left(2\mu {}_t e'_{ij} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)}) \right). \quad (3.29)$$

Если заменить в левой части (3.29) $\eta^{(i)}$ на $\eta^{(i-1)}$, то из данного равенства явным образом получаем:

$$\Delta \tilde{\lambda} = \frac{1}{2\mu s_y(\eta^{(i-1)})} \sqrt{\left(2\mu {}_t e'_{ij} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)}) \right) \left(2\mu {}_t e'_{ij} + f_{ij}(s_{ij}^{\prime(i-1)}) \right)} - 1. \quad (3.30)$$

Подставляя (3.30) в (3.28), находим значение девиатора тензора напряжений и, суммируя с шаровой частью по формуле (3.25), определяем компоненты тензора напряжений Коши ${}^{t+\Delta t} \mathbf{s}^{(i)}$.

Подставляя (3.30) в (3.20), находим компоненты приращения пластической деформации, а с их помощью вычисляем $\eta^{(i)}$ (в качестве параметра упрочнения используем эффективную пластическую деформацию):

$$\begin{aligned} \eta^{(i)} &= {}^{t+\Delta t}\bar{\epsilon}^{P(i)} = \int_0^{t+\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{d}^P : \mathbf{d}^P dt = \\ &= {}^t\bar{\epsilon}^P + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{d}^P : \mathbf{d}^P dt \approx {}^t\bar{\epsilon}^P + \sqrt{\frac{2}{3}} {}^t e_{ij}^{P(i)} {}^t e_{ij}^{P(i)}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

4. Физические параметры

Приведем в безразмерном виде физические параметры задачи, которые являются общими для всех описанных далее вариантов расчетов.

Начальная температура $T = 1.45$. Начальная скорость лайнера равна нулю. Размеры конструкции в соответствии с рис. 1.2 Б (для одной четвертой части): высота индуктора равна 1.5, его полуширина – 1.0. Высота лайнера равна 0.02, его полуширина – 1.1. Расстояние между лайнером и индуктором по высоте в начальный момент времени равно 0.02. Начальная высота нижней кромки лайнера равна 0.96.

При расчете электромагнитных полей считается, что на расстоянии 0.5 от краев лайнера или индуктора (в начальный момент времени) находится идеально проводящий экран (в характере его электропроводности возможны варианты).

Параметры материала индуктора взяты равными соответствующим величинам стали: плотность $\rho = 1.95$, теплоемкость $c_v = 9.21$, теплопроводность $\kappa = 1.998 \cdot 10^{-5}$, электропроводность $\sigma = 52.9$ при 0^0 C .

Параметры материала лайнера взяты равными соответствующим величинам алюминия: плотность $\rho = 0.63525$, теплоемкость $c_v = 18.037$, теплопроводность $\kappa = 1.035 \cdot 10^{-4}$, электропроводность $\sigma = 40.66$ при 0^0 C , модуль Юнга $E = 1762.58$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.301$, предел текучести $s_y = 0.9$.

Для обоих материалов электропроводность взята в виде функции температуры вида $\sigma = \sigma_s / (1 + \alpha_\sigma T)$ с соответствующими параметрами из [13].

Параметры электрической цепи индуктора составили: индуктивность $L_B = 20.0$, емкость $C_B = 3.1 \cdot 10^{-5}$, сопротивление $R_B = 1.2 \cdot 10^2$.

Начальное напряжение на обкладках конденсатора взято равным 2000.0, начальный ток – нулевой.

Параметры электрической цепи лайнера составили: индуктивность $L_A = 2.5$, емкость $C_A = 1000$, сопротивление $R_A = 10^{-5}$.

Начальное напряжение и начальный ток равны нулю.

5. Результаты расчетов

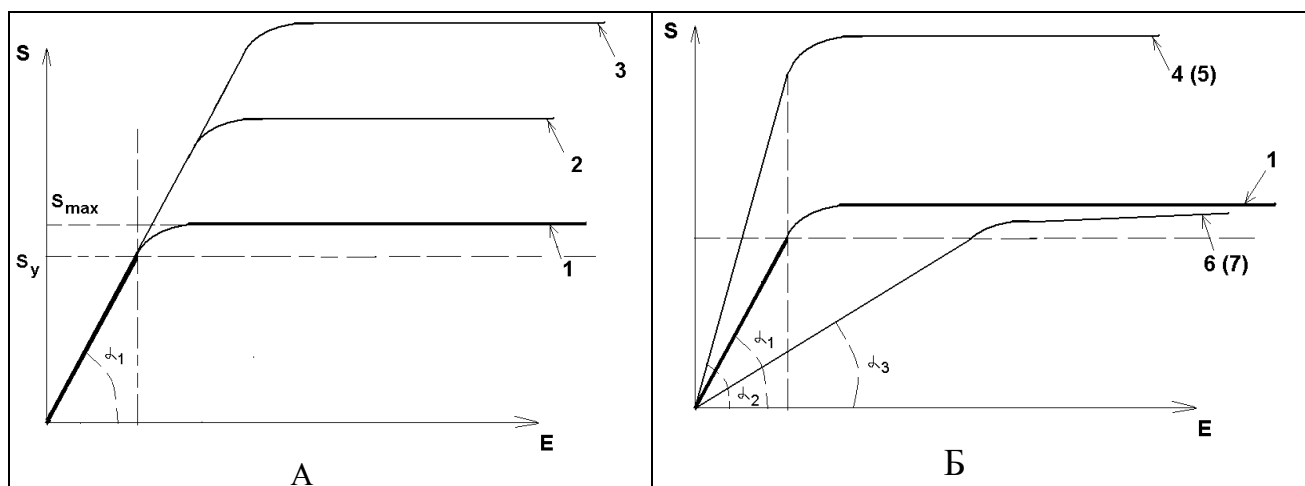
Для решения поставленной задачи создан программный комплекс, состоящий из нескольких программ.

Ниже в безразмерном виде представлены результаты расчетов нескольких различных вариантов задачи. Приведена графическая информация о решении, позволяющая судить о его качественных и количественных характеристиках.

В целях исследования роли материала, из которого сделан лайнер, проведена серия расчетов для различных модификаций кривой деформирования.

На рис. 5.1 схематично изображены выбранные кривые деформирования. Кривая 1 соответствует экспериментальной кривой. Данная кривая имеет два характерных значения: предел текучести $s_y = 0.9$ (при больших напряжениях в теле образуются пластические деформации) и максимально допустимое для данного материала значение нагрузки $s_{max} = 1.875$. Для максимального напряжения кривая имеет вид полочки: при практически неизменной нагрузке происходит активный рост пластических деформаций, пока деформации не достигают критического значения, после чего происходит разрушение материала.

Кривые 2 и 3 получаются из кривой 1 путем увеличения предела текучести материала в 10 и 20 раз, при неизменном значении модуля Юнга. Таким образом получается «линейка» моделей, описывающих переход от пластического к упругому телу. Кривые 4-7 получаются при растягивании кривой 1 либо только относительно оси напряжений (кривые 4, 5), либо только относительно оси деформаций (кривые 6, 7), при этом используются новые значения модуля Юнга равные соответствующим тангенсам углов наклона линейной части кривых деформирования: $\text{tg}\alpha_2 = 5\text{tg}\alpha_1$ (кривая 4), $\text{tg}\alpha_2 = 10\text{tg}\alpha_1$ (кривая 5), $\text{tg}\alpha_3 = 0.2\text{tg}\alpha_1$ (кривая 6), $\text{tg}\alpha_3 = 5\text{tg}\alpha_1$ (кривая 7).



Во всех расчетах выбран момент замыкания цепи лайнера $t_0=10$ (цепь за время расчета не замыкается).

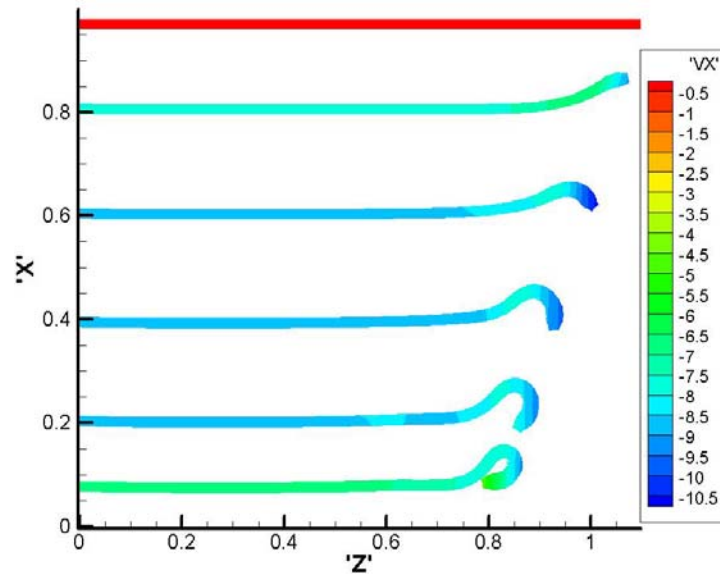


Рис.5.2. Положение пластического лайнера в моменты времени $t=0.0$, $t=0.0520$, $t=0.0760$, $t=0.0995$, $t=0.1235$, $t=0.1355$ (кривая 1)

На рис. 5.2 показано поведение пластического лайнера с экспериментальной кривой деформирования, материал лайнера удовлетворяет определяющему соотношению (2.33).

На рис. 5.3 показано поведение пластического лайнера с экспериментальной кривой деформирования, материал лайнера удовлетворяет определяющему соотношению (2.36).

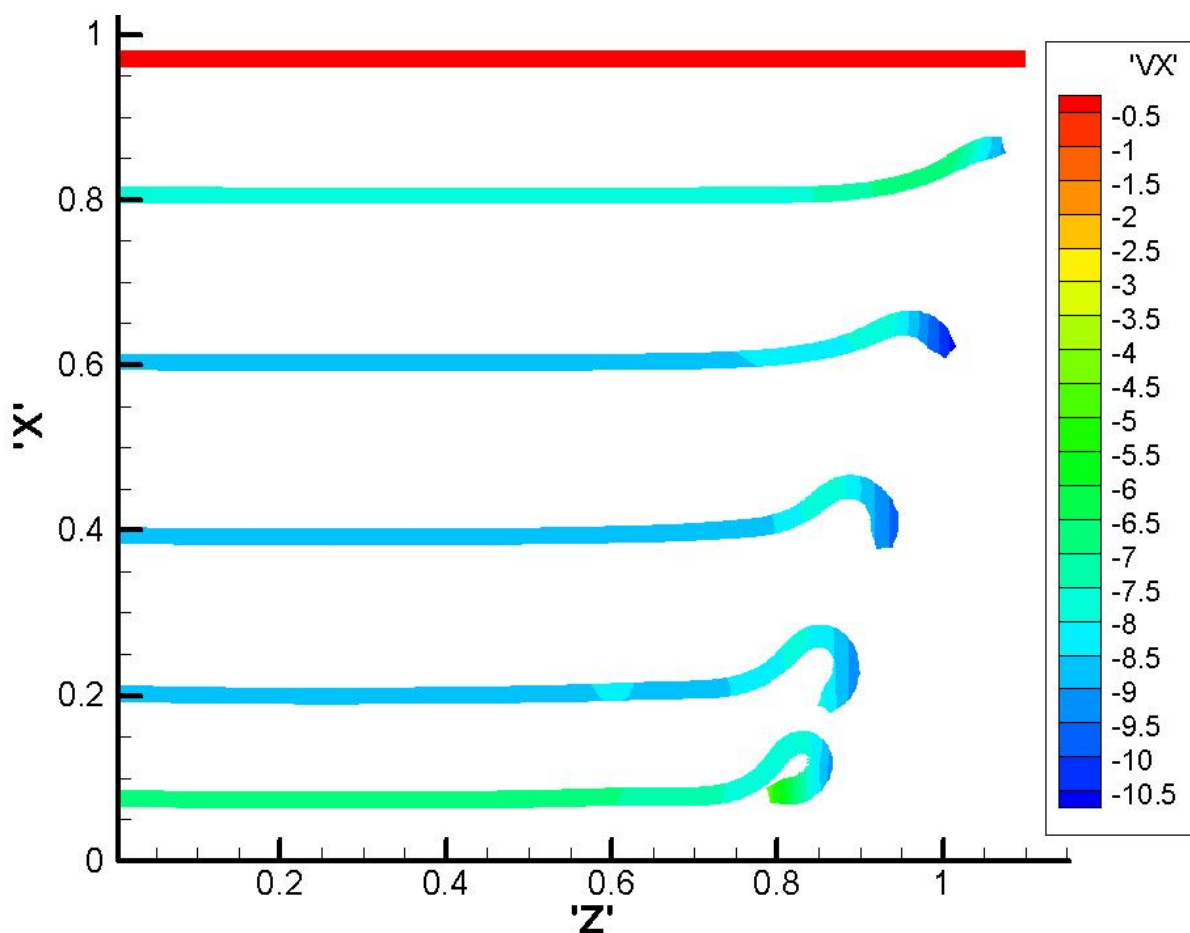


Рис.5.3. Положение пластического лайнера в моменты времени $t=0.0$, $t=0.0520$, $t=0.0760$, $t=0.0995$, $t=0.1235$, $t=0.1355$ (кривая 1)

Сравнение рисунков 5.2 и 5.3 показывает, что при данном процессе ускорения лайнера модели пластичности, задаваемые определяющими соотношениями (2.33) и (2.36), дают практически идентичные формы тела. Все последующие расчеты проведены для модели с уравнением (2.36). В начале движения правый край лайнера отстает от центральной части пластины. Это связано с тем, что ширина индуктора меньше ширины лайнера и поэтому давление магнитного поля на края пластины меньше, чем на центр. В дальнейшем концы лайнера начинают заворачиваться внутрь зазора. Данные расчеты были остановлены в момент, когда конец пластины образовал замкнутое кольцо.

На рис. 5.4 и 5.5 показано поведение пластического лайнера с кривыми деформирования, соответствующими кривым 2 и 3 на рис. 5.1.

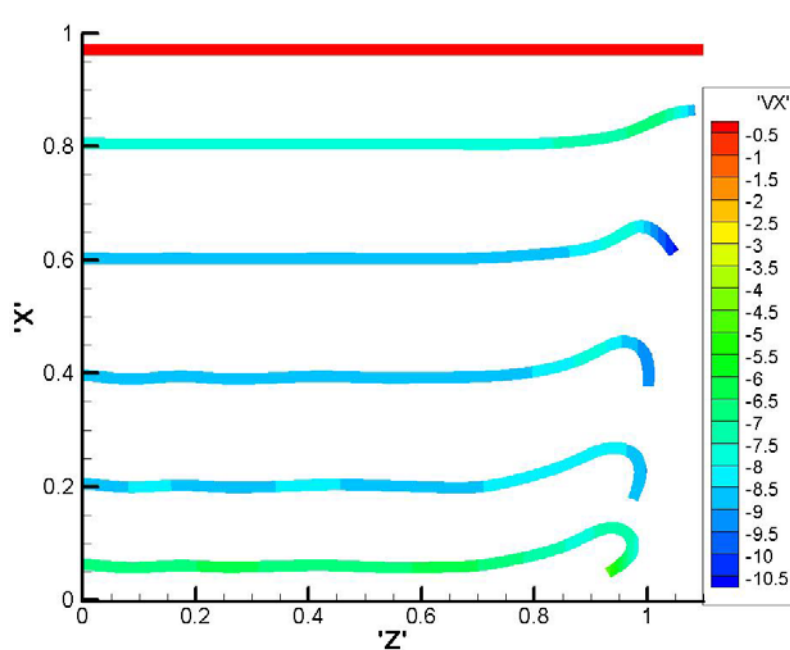


Рис.5.4. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0$, $t=0.0524$, $t=0.0790$, $t=0.0980$, $t=0.1240$, $t=0.1380$ (кривая 2)

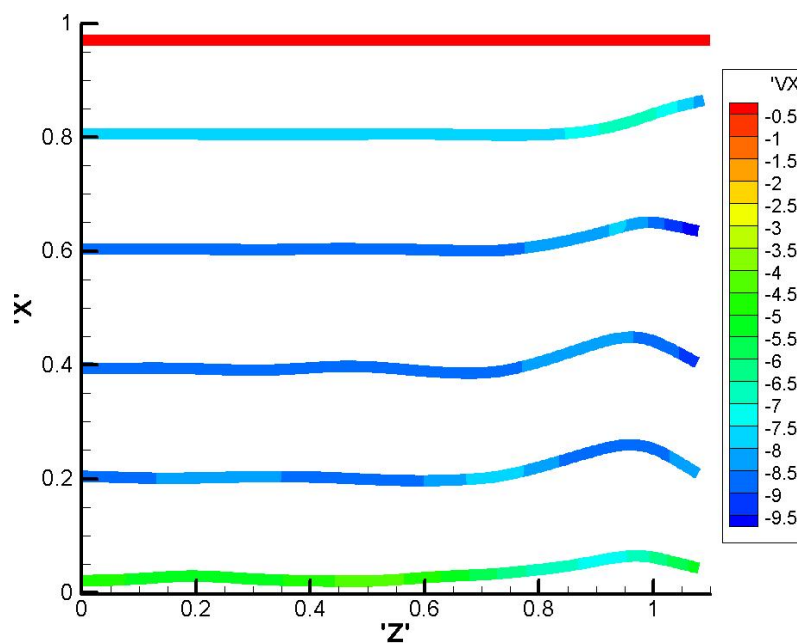


Рис.5.5. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0$, $t=0.0524$, $t=0.0790$, $t=0.0980$, $t=0.1240$, $t=0.1455$ (кривая 3)

Увеличивая предел текучести материала, мы приближаем исходный материал к упругому телу. На рис. 5.4 деформации конца лайнера меньше чем на рис. 5.3, а на рис. 5.5 указанная тенденция становится еще более явной: конец лайнера не имеет ярко выраженной крючкообразной формы, а в направлении центральной части пластины бегут упругие волны. На рис. 5.5 видно, что когда пластина приближается к нижней границе расчетной области (сближается со встречной пластиной) происходит выпрямление формы лайнера, связанное с действием сжимаемого им магнитного поля.

На рис. 5.6 - 5.8 показано поведение пластического лайнера с кривыми деформирования, соответствующими кривым 4-7 на рис. 5.1.

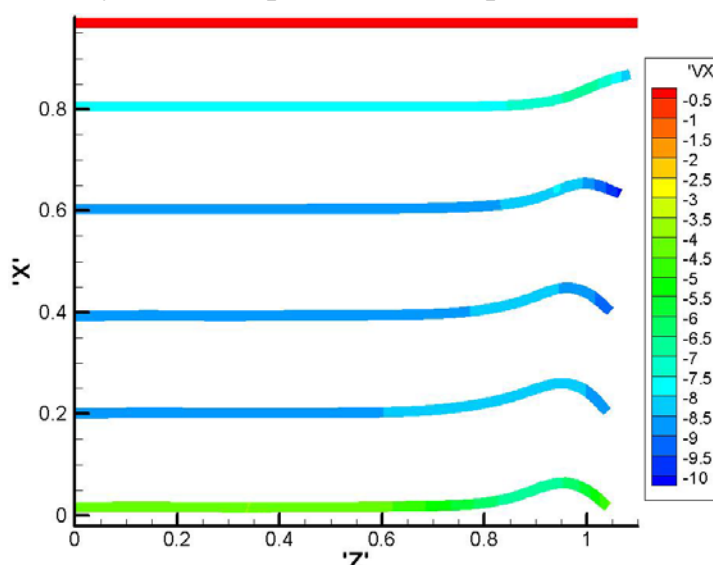


Рис.5.6. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0$, $t=0.0524$, $t=0.0790$, $t=0.0980$, $t=0.1240$, $t=0.1455$ (кривая 4)

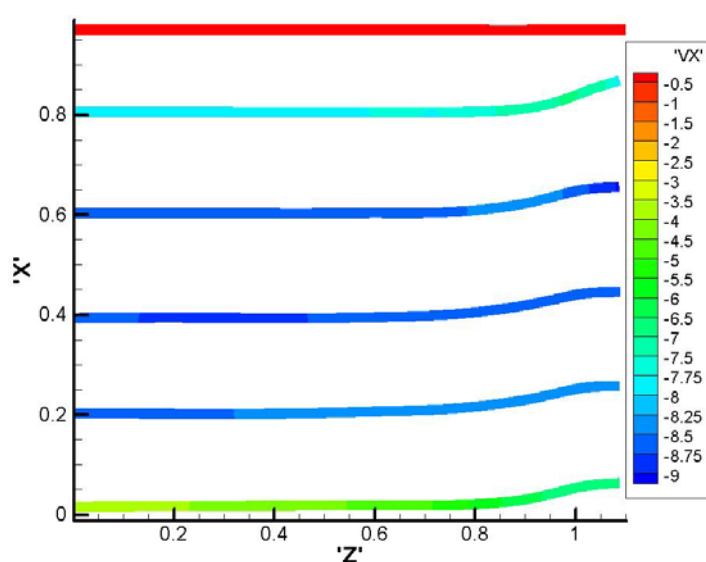


Рис.5.7. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0$, $t=0.0524$, $t=0.0790$, $t=0.0980$, $t=0.1240$, $t=0.1455$ (кривая 5)

Кривые 4 и 5 задают более жесткий материал по сравнению с исходным. Лайнер на рис. 5.6 имеет модуль Юнга и предел текучести в 5 раз больше, а лайнер на рис. 5.7 - в 10 раз больше, чем лайнер на рис. 5.2. Если сравнить рис. 5.4 и рис. 5.7, то видно, как отличается процесс деформирования конца ленты. Для данных расчетов пределы текучести совпадают, но при одинаковых нагрузках деформации во втором материале в 10 раз меньше.

Материал лайнера на рис. 5.8 является более мягким по сравнению с исходным материалом: при прежних нагрузках в нем образуются большие деформации. Поэтому происходит расплющивание конца лайнера. Наоборот, более жесткий материал лайнера на рис. 5.9 деформируется меньше исходного мате-

риала. В расчетах, иллюстрированных рисунками 5.6 и 5.9, используются кривые с одинаковым модулем Юнга, но разными пределами текучести (для кривой 5.6 s_y в 5 раз больше). Большие деформации лайнера соответствуют кривой с меньшим пределом текучести.

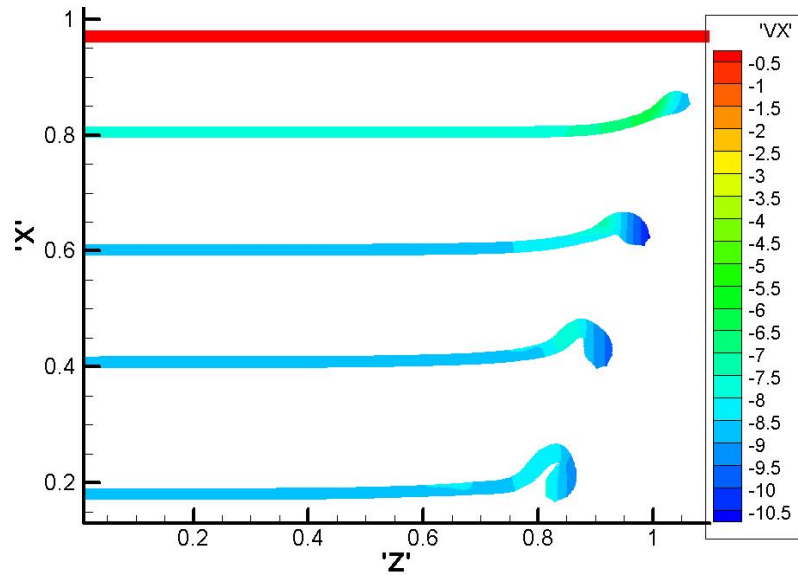


Рис.5.8. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0, t=0.0524, t=0.0790, t=0.0980, t=0.1240$ (кривая 6)

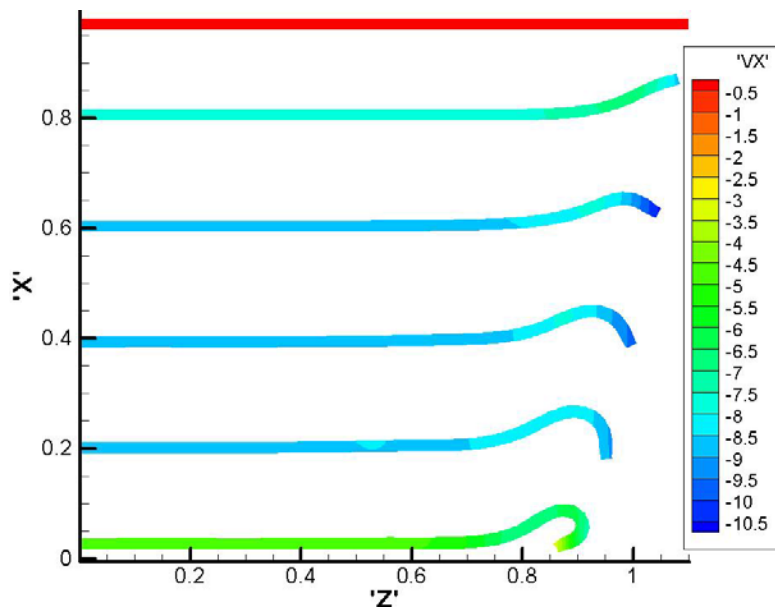


Рис.5.9. Положение пластического лайнера в моменты времени (сверху вниз) $t=0.0, t=0.0524, t=0.0790, t=0.0980, t=0.1240, t=0.1455$ (кривая 7)

На рис. 5.10 представлены графики сосредоточенной информации, характеризующие процесс в целом: зависимости от времени скорости и координаты центра масс лайнера. На каждом рисунке показаны несколько графиков, относящихся к расчетам с различными кривыми деформирования (другие характеристики моделей одинаковы). Из приведенных рисунков видно, что интегральные

характеристики процесса движения лайнера совпадают с достаточно большой точностью для разных моделей.

Графики скорости центра масс показывают, что по мере приближения лайнера к нижней границе расчетной области (зазор между пластинами становится малым) происходит его торможение сжимаемым магнитным полем. Но при незамкнутой цепи лайнера полного торможения пластины не происходит. Расчеты прекращались, когда расстояние между лайнером и нижней границей области становилось меньше заданной величины.

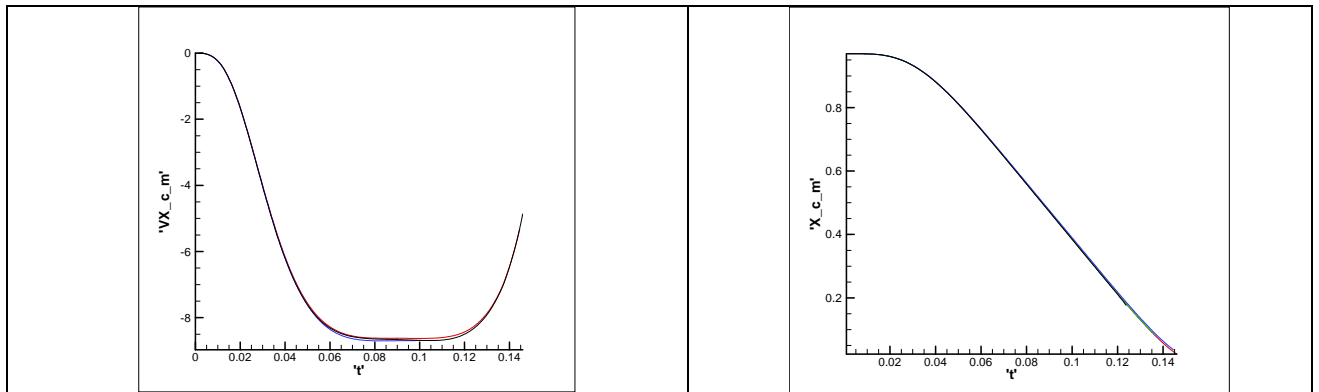
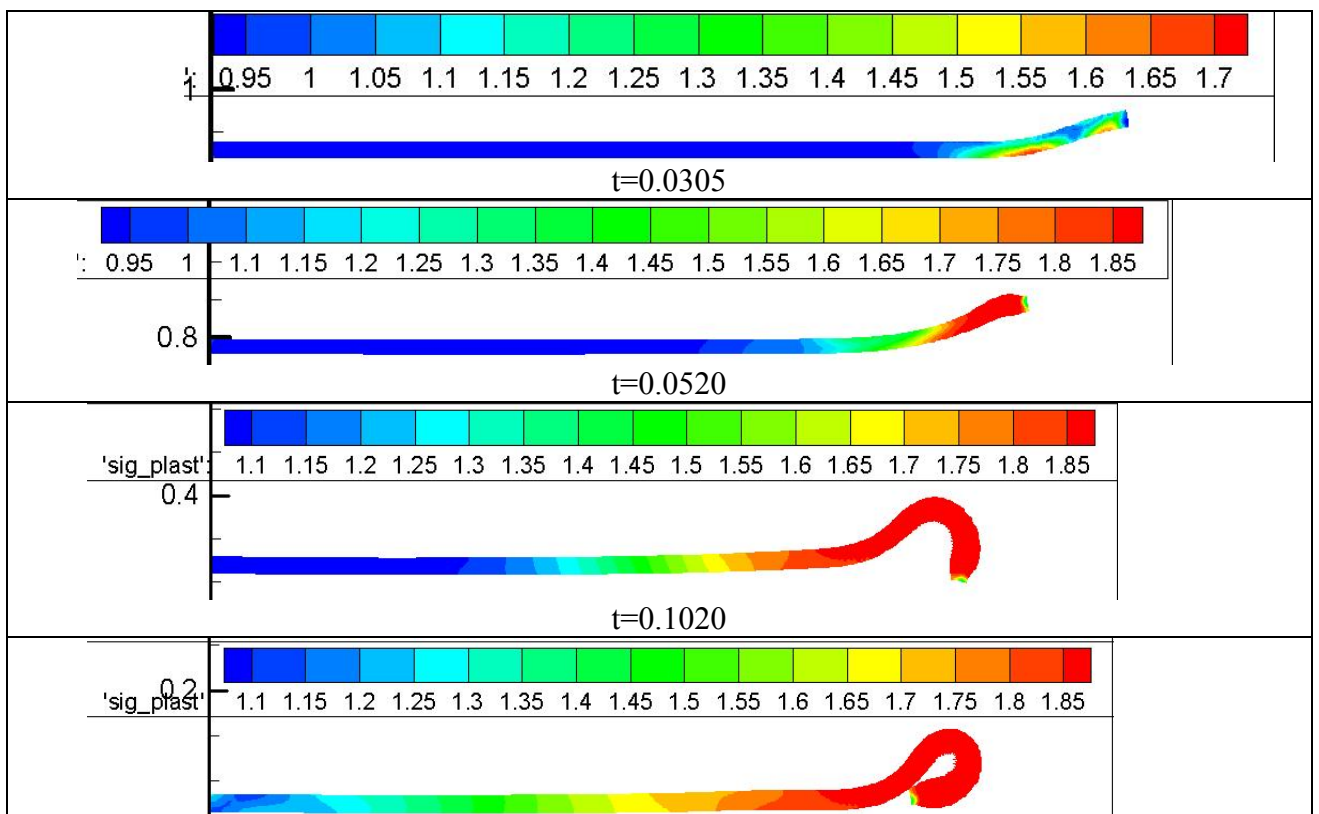


Рис 5.10. Сила тока в цепи индуктора, интегральная сила Лоренца, скорость центра масс и координата центра масс для 3-х вариантов расчета

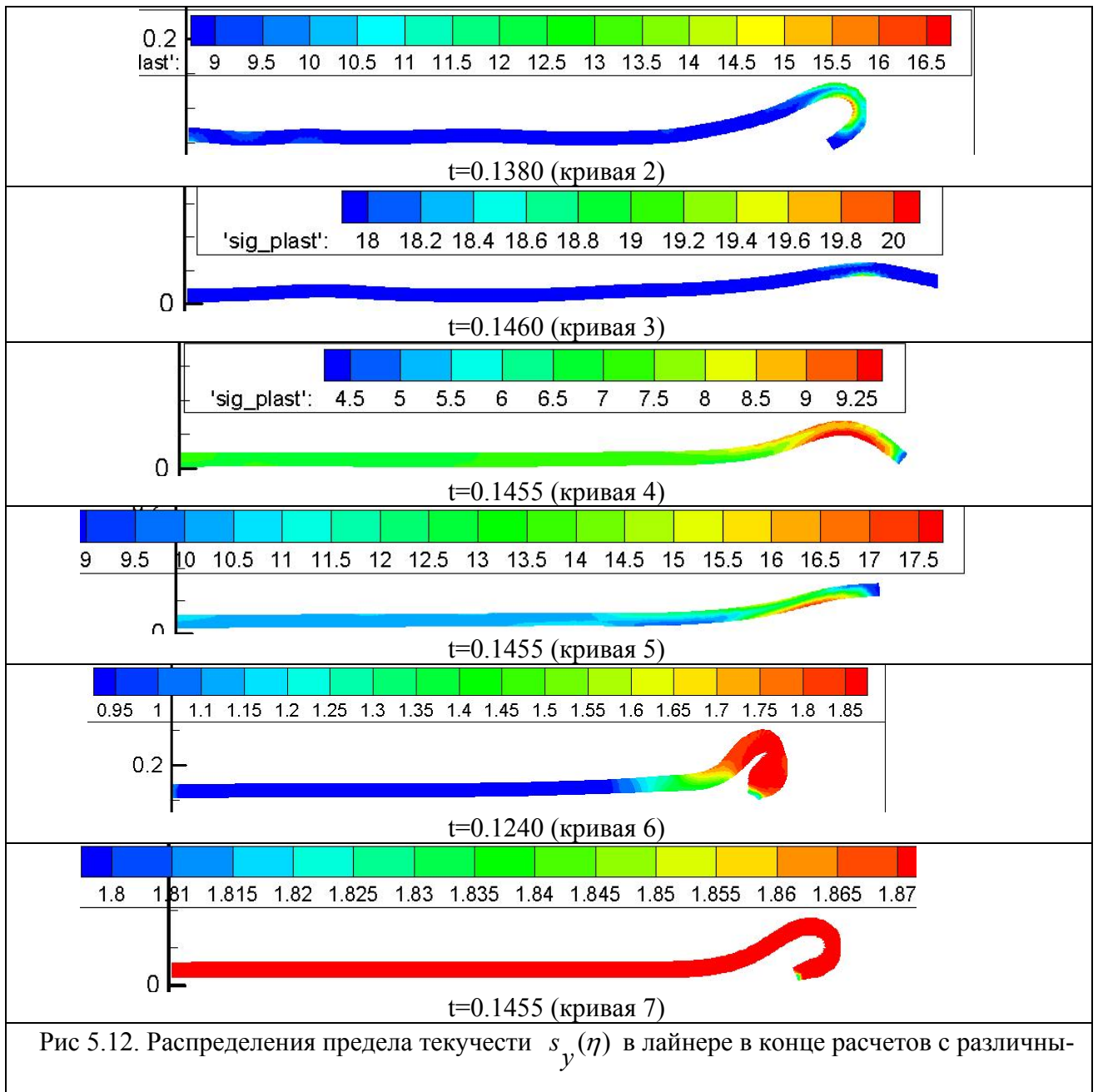
На рис. 5.11 приведены распределения предела текучести $s_y(\eta)$ в лайнере (расчет с экспериментальной кривой деформирования 1) в различные моменты времени.



t=0.1360

Рис. 5.11. Распределения предела текучести $s_y(\eta)$ в лайнере (кривая 1) в различные моменты времени.

Как видно из приведенных рисунков, напряжения, превышающие исходный предел текучести $s_y(0) = 0.9$, сначала возникают на концах лайнера и вызывают образование пластических деформаций. В дальнейшем напряжения достигают максимально возможного для данного материала значения $s_{\max} = 1.875$, а область пластичности распространяется в центральную часть пластины. На момент прекращения расчета (t=0.1360) во всей области лайнера возникли пластические деформации, но значительные деформации по-прежнему сосредоточены на концах пластины.



На рис. 5.12 приведены распределения предела текучести $s_y(\eta)$ в лайнере в конце расчетов с различными кривыми деформирования. Приведенные распределения показывают максимальные напряжения, которые действовали на разные части лайнера за все время движения.

Для кривой 2 $s_y=9$, $s_{\max}=18.75$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета область пластических деформаций сосредоточена в конце лайнера, наибольшие напряжения возникают на внутренней стороне крючка и они не достигают значения s_{\max} .

Для кривой 3 $s_y=18$, $s_{\max}=37.5$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета пластические деформации возникают в сравнительно небольшой области, соответствующей изгибу конца лайнера. Максимальные напряжения незначительно превышают значение s_y .

Для кривой 4 $s_y=4.5$, $s_{\max}=9.375$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета область пластических деформаций занимает всю область лайнера, а на изгибающемся конце напряжения достигают значения s_{\max} .

Для кривой 5 $s_y=9$, $s_{\max}=18.75$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета наибольшие напряжения возникают на внутренней (обращенной внутрь зазора) стороне конца лайнера.

Для кривой 6 $s_y=0.9$, $s_{\max}=1.875$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета область пластических деформаций сосредоточена в конце лайнера. По сравнению с кривой 1, кривая 6 имеет в 5 раз меньший модуль Юнга, т.е. скорость распространения возмущений в моделируемом материале приблизительно в 2 раза меньше, чем в исходном. Поэтому в отличие от рис. 5.11, в рассматриваемом расчете в центральной части пластины напряжения не превышают значения s_y : пластическое течение не успевает туда дойти.

Для кривой 7 $s_y=0.9$, $s_{\max}=1.875$. Как видно из соответствующего рисунка, для данного расчета практически во всей области лайнера наибольшие напряжения достигают значения s_{\max} . Это объясняется выбором более жесткого материала (модуль Юнга в 5 раз больше) при неизменном пределе текучести: для возникновения деформаций (а скорость распространения возмущений в данном материале примерно в 2 раза выше, чем в исходном) требовалось большее напряжение.

6. Заключение

Данная работа является продолжением цикла работ [3-7] по изучению процесса электродинамического ускорения пластинчатого металлического лайнера в устройстве обострения мощности. В качестве следующего шага в развитии соответствующей математической модели рассмотрен подход, в котором лайнер является упругопластическим телом (ранее лайнер описывался моделями упругого тела и вязкой несжимаемой жидкости). В работе представлены математическая и численная модели движения тела, учитывающие возникновение больших упругопластических деформаций (модели основаны на материалах [1]). Главной задачей данной работы являлось изучение и сравнение поведения лайнера при использовании различных модификаций кривой деформирования, полученной в эксперименте. Приведенные результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- интегральные характеристики движения тела (скорость и координата центра масс лайнера) совпадают с небольшой погрешностью для разных расчетов;
- форма лайнера в процессе движения существенно зависит от используемой кривой деформирования. Концы лайнера приобретают характерную крючкообразную форму. В расчете с экспериментальной кривой концы пластины образуют замкнутые кольца. В расчетах, соответствующих более упругому телу (большой предел текучести при неизменном модуле Юнга), концы лайнера деформируются в меньшей степени, а в центральной части пластины появляются упругие волны. В расчетах, соответствующих более жесткому материалу (модуль Юнга больше исходного), деформации пластины меньше, а для более мягкого материала (модуль Юнга меньше исходного) – больше, чем в лайнере с экспериментальной кривой деформирования.

Список литературы

1. С.Н. Коробейников. Нелинейное деформирование твердых тел. - Новосибирск: Издательство СО РАН. 2000. 262 с.
2. Э.А. Азизов, С. Г. Алиханов, Е.П. Велихов, М.П. Галанин, В.А. Глухих, Е.В. Грабовский, А. Н. Грибов, Г.И. Долгачев, А.М. Житлухин, Ю.Г. Калинин, А.С. Кингсеп, А.И. Кормилицын, В.П. Ковалев, М.К. Крылов, В.Г. Кучинский, В.А. Левашов, А.П. Лотоцкий, С.Л. Недосеев, О.П. Печерский, В.Д. Письменный, Ю.П. Попов, Г.П. Рыкованов, В.П. Смирнов, Ю.А. Халимуллин, В.И. Четвертков. Проект «Байкал». - Отработка схемы генерации электрического импульса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2001. № 3. С.с. 3 - 17.
3. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий. Моделирование разгона и торможения лайнера в устройствах обострения мощности // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. №2. С. 256 - 264.
4. М.П. Галанин, Е. В. Грабовский, А. П. Лотоцкий, Т. Г. Суфиев. Математическое моделирование электромагнитного ускорения проводящей пластины в компрессоре потока // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. № 138. 29 с.
5. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, В.Ф. Левашов. Расчет электродинамического ускорения плоских пластин в лабораторном магнитокумулятивном генераторе // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2001. № 3. 30 с.
6. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин. Математическое моделирование электромагнитного ускорения лайнера в различных двумерных приближениях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. № 4. 32 с.

7. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин. Математическое моделирование электромагнитного ускорения лайнера с учетом его контакта с твердой поверхностью. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 59. 32 с.
8. М.П. Галанин, Ю.П. Попов. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование. М.: Наука, Физматлит. 1995. 320 с.
9. И.А. Щеглов. Программа для триангуляции сложных двумерных областей Gridder2D // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 60. 32 с.
10. Д. Бленд. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 184 с.
11. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М.: Наука. 1989. 504 с.
12. Физические величины. Справочник. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлахова. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.