



**Боровин Г.К., Лапшин В.В.,  
Чашников С.П**

Управление ориентацией  
прыгающего аппарата в  
фазе полёта при нулевом  
кинетическом моменте

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Боровин Г.К., Лапшин В.В., Чашников С.П Управление ориентацией прыгающего аппарата в фазе полёта при нулевом кинетическом моменте // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 60. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-60>

ISSN 2071-2898



**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Российской академии наук**

**Г.К.Боровин, В.В.Лапшин,**  
**С.П.Чашников**

**Управление ориентацией  
прыгающего аппарата в  
фазе полёта при нулевом  
кинетическом моменте**

**Препринт №**

**Москва**

Ордена Ленина  
Институт прикладной математики  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук

Г.К.Боровин, В.В.Лапшин, С.П.Чашников

Управление ориентацией прыгающего аппарата в фазе полёта при  
нулевом кинетическом моменте

Москва, 2009

*Г.К.Боровин, В.В.Лапшин, С.П.Чашников. Управление ориентацией прыгающего аппарата в фазе полёта при нулевом кинетическом моменте.*

Исследовано плоское движение одноногого прыгающего аппарата с телескопической ногой. Построена математическая модель движения аппарата вокруг центра масс в фазе полёта. Решена задача управления движением аппарата при нулевом кинетическом моменте. Приведены результаты математического моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00286) и гранта № НШ-1311.2008.8 по поддержке ведущих научных школ РФ.

Ключевые слова: прыгающий аппарат, фаза полёта, управление движением.

*G.K.Borovin, V.V.Lapshin, S.P.Chashnikov. Motion control of a hopping robot in the flight phase with zero angular momentum.*

Planar motion of one-legged hopping robot with telescopic leg is investigated. The mathematical model of robot motion relative to the center of mass in the flight phase is constructed. The problem of the robot motion control with zero angular momentum is solved. The mathematical simulation results are presented.

Work is executed at support of the RFBR (the grant № 07-01-00286) and the program of the RF leading scientific schools support (the grant № НШ-1311.2008.8).

Key words: hopping robot, flight phase, motion control.

## ***Введение***

При увеличении скорости движения машин, передвигающихся с помощью ног, энергетически выгодно переходить от статически устойчивых режимов ходьбы к динамическим, а затем к бегу и прыжкам, аналогично тому, как это имеет место у животных [1]. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов, движение которых состоит в чередовании опорных и безопорных фаз движения [1–5].

В безопорной фазе движения центр масс аппарата перемещается по баллистической траектории и его движение не управляемо. Движением же аппарата вокруг центра масс можно управлять [1–5]. В фазе полета имеет место закон сохранения кинетического момента аппарата относительно центра масс. Следовательно, движение весомых ног в фазе полёта оказывает влияние на движение корпуса аппарата вокруг центра масс. Например, вытягивая или поджимая ноги, можно изменять их моменты инерции, и, соответственно, изменять влияние, оказываемое движением ног на угловое движение корпуса. В данной работе рассмотрена задача построения программного движения аппарата относительно центра масс, обеспечивающего переход из произвольного начального состояния в требуемое конечное при нулевом кинетическом моменте аппарата. При ненулевом кинетическом моменте аппарата эта проблема рассматривалась ранее [1–5].

### ***§1. Постановка задачи***

Конструктивная схема аппарата приведена на рис. 1. Аппарат состоит из корпуса и телескопической ноги, присоединенной к корпусу. Точка подвеса ноги совпадает с центром масс корпуса. Нога состоит из цилиндра, который вращается относительно точки подвеса ноги к корпусу, и штока, который перемещается вдоль телескопического звена ноги. Обозначим через  $m_1, m_2, m_3, J_1, J_2, J_3$  соответственно массу корпуса, цилиндра и штока ноги и их моменты инерции относительно их центров масс. Положение корпуса в абсолютной системе координат  $O\eta\zeta$  определяется координатами центра масс корпуса и углом наклона корпуса к горизонту  $\theta$ . Система координат  $Buz$  связана с корпусом аппарата, ось  $Bz$  является конструктивной вертикалью, а ось  $Bu$  – продольной осью аппарата. Положение ноги относительно корпуса

определяется углом  $\varphi$  между продолжением оси  $Bz$  и телескопическим звеном ноги и длиной ноги  $l = BS$ . Угол  $q$  определяет ориентацию телескопического звена ноги в абсолютном пространстве

$$q = \theta + \varphi. \quad (1)$$

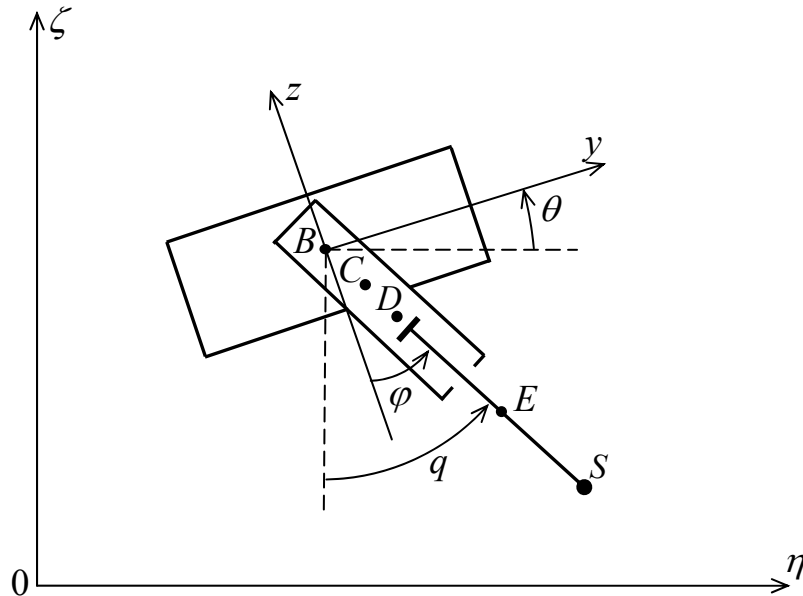


Рис. 1. Конструктивная схема аппарата.

Центра масс цилиндра  $D$  лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии  $r_2 = BD$  от точки подвеса ноги к корпусу. Центр масс штока  $E$  лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии  $r_3 = SE$  от стопы  $S$ .

Центр масс аппарата  $C$  лежит на оси телескопического звена ноги на расстоянии  $R = BC$  от точки подвеса ноги к корпусу

$$R = \frac{m_2 r_2 + m_3 (l - r_3)}{m_1 + m_2 + m_3} . \quad (2)$$

В фазе полёта имеет место закон сохранения кинетического момента относительно центра масс аппарата. Кинетический момент аппарата складывается из кинетического момента корпуса, цилиндра и штока

$$\overline{K} = \overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \overline{K}_3 .$$

Кинетический момент корпуса относительно центра масс аппарата  $C$  равен

$$\overline{K}_1 = m_1 \overline{R} \times \overline{V}_B + J_1 \dot{\theta} \overline{i} \quad ,$$

где  $\overline{V}_B$  – скорость центра масс корпуса относительно осей Кёнига [7],  $\overline{R} = \overline{BC}$ ,  $\overline{i}$  – орт оси  $0\xi$ , которая перпендикулярна плоскости  $0\eta\zeta$  на рис. 1. Скорость  $\overline{V}_B$  складывается из двух компонент: радиальной, направленной вдоль телескопического звена ноги и равной  $\dot{R}$ , и тангенциальной, направленной перпендикулярно к телескопическому звену ноги и равной  $R\dot{q}$ . Тогда

$$|\overline{R} \times \overline{V}_B| = R^2 \dot{q} \quad , \quad K_1 = m_1 R^2 \dot{q} + J_1 \dot{\theta} \quad .$$

Аналогично вычисляются кинетические моменты цилиндра и штока:

$$K_2 = m_2 (r_2 - R)^2 \dot{q} + J_2 \dot{q} \quad , \quad K_3 = m_3 (l - r_3 - R)^2 \dot{q} + J_3 \dot{q} \quad .$$

Подставляя значение  $R$  из (2), получаем

$$K = k(l) \dot{q} + J_1 \dot{\theta} \quad , \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} k(l) &= \mu_1 (l - \lambda)^2 + \mu_2 \quad , \\ \mu_1 &= \frac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad , \quad \lambda = \frac{m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad , \\ \mu_2 &= J_2 + J_3 + \frac{m_3^2 r_3^2}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_1 m_2 r_2^2}{m_1 + m_2} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Закон сохранения кинетического момента относительно центра масс имеет вид  $k(l)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + J_1 \dot{\theta} = K = K^0 = const$ . В данной работе рассмотрен случай, когда кинетический момент относительно центра масс аппарата равен 0, то есть

$$k(l)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + J_1 \dot{\theta} = 0 \quad . \quad (5)$$

Положим, что имеются ограничения на пределы изменения угла поворота ноги относительно корпуса  $\varphi$  и длины ноги  $l$ :

$$l \in [l_{\min}, l_{\max}] \quad , \quad \varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}] \quad . \quad (6)$$

Отметим, что  $k(l) > 0$  является монотонно возрастающей функцией  $l$  в области (6), так как  $l_{\min} > r_2 > \lambda$  в силу (4).

## **§2. Построение программного движения**

Движение аппарата будем осуществлять таким образом, чтобы оно разбивалось на отрезки времени (этапы), в течение каждого из которых работает только один привод ноги. Либо изменяется длина ноги при фиксированном  $\varphi$ , тогда угол  $\theta$  остается постоянным в силу (5). Либо изменяется угол поворота ноги относительно корпуса при фиксированной длине ноги, тогда в силу (5):

$$\dot{\theta} = -\frac{k(l)\dot{\varphi}}{k(l) + J_1} \quad . \quad (7)$$

Интегрируя полученное выражение при  $l = const$  из положения  $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$ , получаем:

$$\theta - \tilde{\theta} = -\frac{k(l)(\varphi - \tilde{\varphi})}{k(l) + J_1} \quad . \quad (8)$$

Выражение (8) отражает закон сохранения кинетического момента относительно центра масс аппарата в фазе полета: поворот ноги вокруг корпуса на угол  $\Delta\varphi = \varphi - \tilde{\varphi}$  приводит к повороту корпуса в пространстве на угол  $\Delta\theta = \theta - \tilde{\theta}$ . На плоскости переменных  $\varphi$  и  $\theta$  эта зависимость  $\theta(\varphi)$  имеет вид семейства прямых, наклон которых зависит от  $l$  (рис. 2.). При максимально вытянутой ноге  $l = l_{\max}$  перенос ноги оказывает максимальное влияние на движение корпуса, поэтому прямая (8) в этом случае имеет наибольший наклон. При максимально поджатой ноге  $l = l_{\min}$  перенос ноги оказывает минимальное влияние на движение корпуса, прямая (8) имеет наименьший наклон. Остальные прямые, проходящие через точку  $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$ , реализуются при промежуточных значениях  $l \in (l_{\min}, l_{\max})$ .



Назовем затемненную область и её границы (рис. 2) **областью достижимости** из положения  $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$  при фиксированном  $l \in [l_{\min}, l_{\max}]$ . В каждый момент движения аппарата изображающей точке  $\varphi, \theta$  соответствует определенная область достижимости.

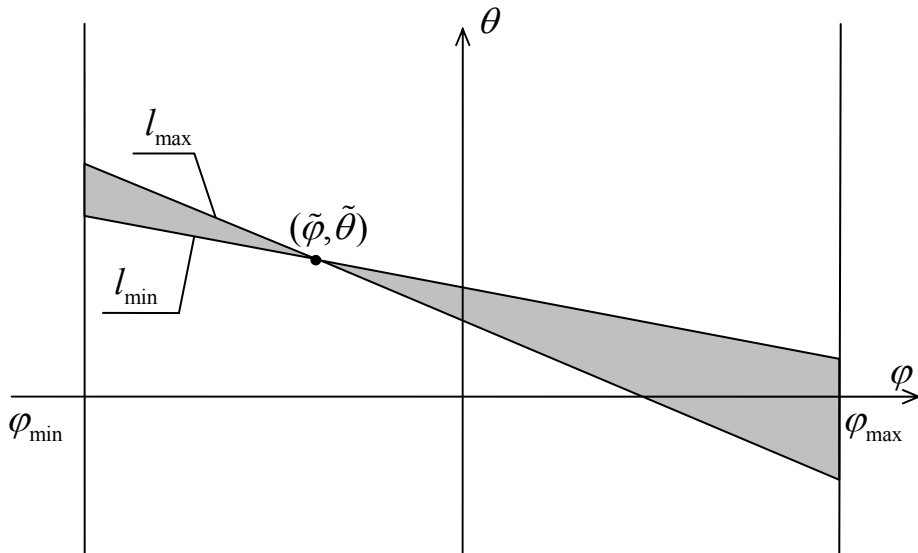


Рис. 2. Область достижимости из положения  $\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$ .

**Утверждение 1.** Если изображающая точка В на плоскости переменных  $\varphi, \theta$  находится в области достижимости точки А, то точка А лежит в области достижимости точки В.

Доказательство этого утверждения очевидно (см.рис.3)

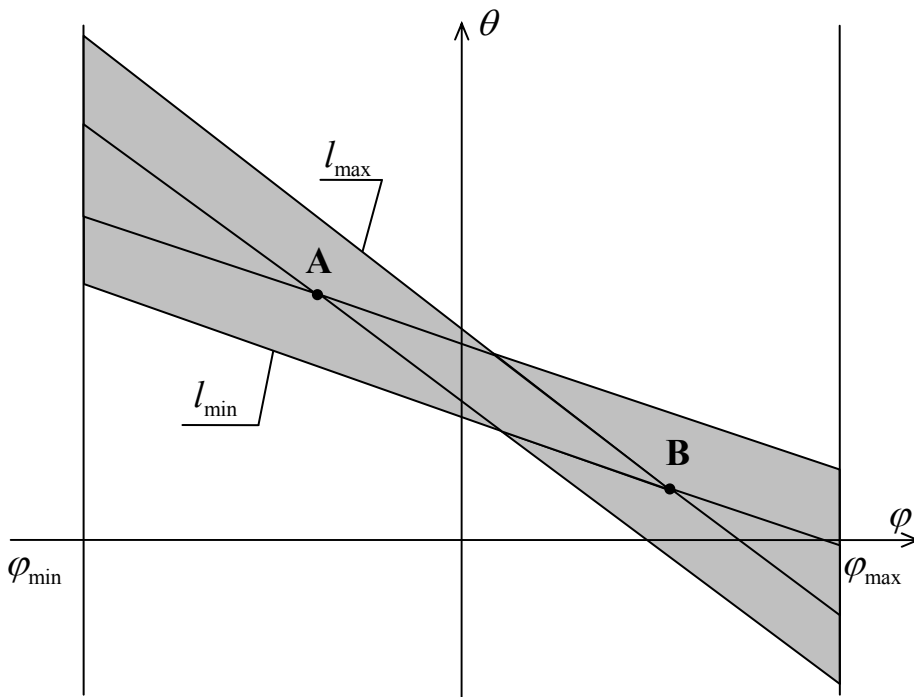


Рис. 3

Пусть задано начальное положение аппарата относительно центра масс –  $\varphi_0, \theta_0, l_0$  и требуемое конечное –  $\varphi_D, \theta_D, l_D$ . Если точка  $\varphi_D, \theta_D$  лежит в области достижимости точки  $\varphi_0, \theta_0$  на рис. 4, в силу (8):

$$\theta_D - \theta_0 = -\frac{k(l^*)(\varphi_D - \varphi_0)}{k(l^*) + J_1} \quad , \quad (9)$$

где  $l^* \in [l_{\min}, l_{\max}]$ . В этом случае алгоритм разворота осуществляется следующим образом:

- при  $\varphi = \varphi_0$  длина ноги изменяется до значения  $l^*$ ;
- при фиксированном  $l = l^*$  нога аппарата поворачивается, угол  $\varphi$  изменяется до  $\varphi_D$ , угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_D$ ;
- при  $\varphi = \varphi_D$  длина ноги изменяется до требуемого значения  $l_D$ .

В силу (4) и (9):

$$l^* = \lambda + \sqrt{-\frac{1}{\mu_1} \left( \mu_2 + \frac{J_1 \Delta \theta}{\Delta \theta + \Delta \varphi} \right)} \quad , \quad (10)$$

где  $\Delta \varphi = \varphi_D - \varphi_0$ ,  $\Delta \theta = \theta_D - \theta_0$ .

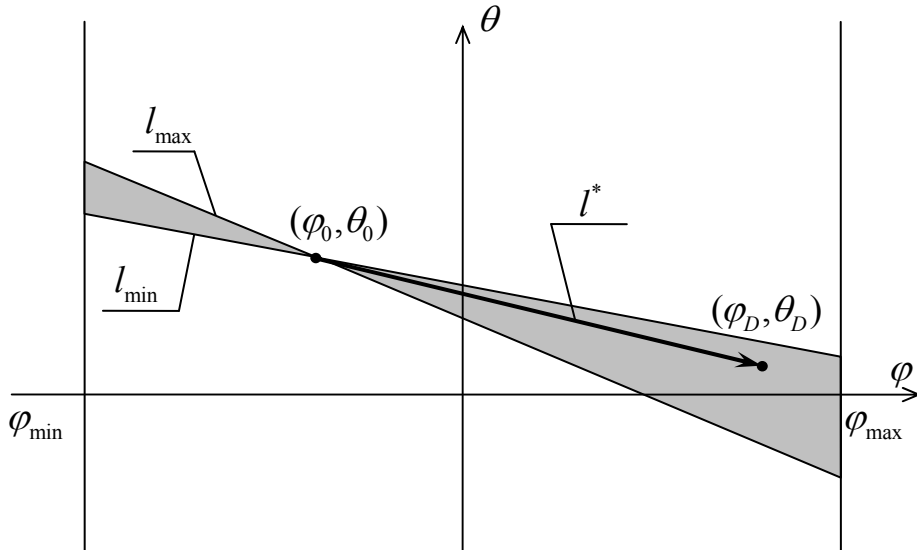


Рис. 4. Траектория движения изображающей точки в том случае, когда конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  лежит в области достижимости из начального положения  $\varphi_0, \theta_0$ .

Аппарат можно перевести в точку  $\varphi_2, \theta_2$ , заведомо не лежащую в области достижимости из начального положения  $\varphi_0, \theta_0$ . Например, движение осуществляется следующим образом:

- при  $\varphi = \varphi_0$  длина ноги изменяется от  $l_0$  до  $l_{\max}$ ;
- нога аппарата поворачивается на угол  $\Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_0$  ( $\varphi_1 \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ ), угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_1$ ;
- при  $\varphi = \varphi_1$  длина ноги изменяется от  $l_{\max}$  до  $l_{\min}$ ;
- нога аппарата поворачивается на угол  $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  ( $\varphi_2 \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ ,  $\text{sign}(\Delta\varphi_2) = -\text{sign}(\Delta\varphi_1)$ ), угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_2$ ;
- при  $\varphi = \varphi_2$  длина ноги изменяется от  $l_{\min}$  до  $l_0$ .

Траектория движения изображающей точки на плоскости переменных  $\varphi, \theta$  показана на рис. 5 в случае  $\varphi_1 < \varphi_0$  (а) и  $\varphi_1 > \varphi_0$  (б).

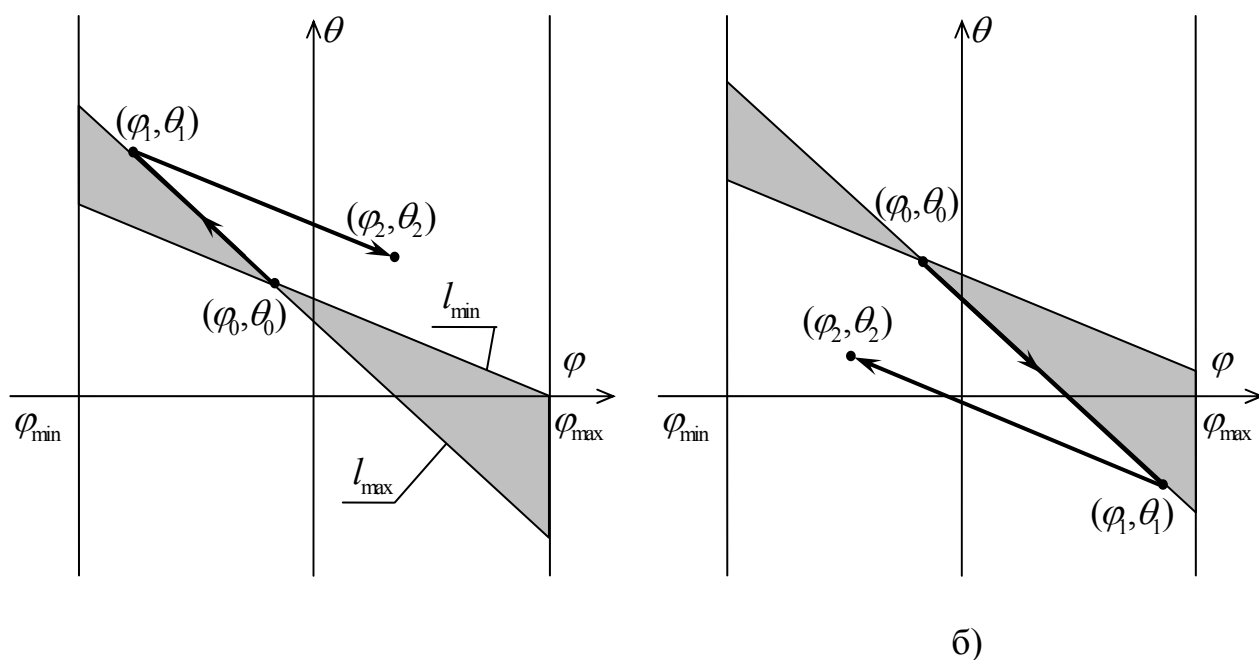


Рис. 5. Траектория движения изображающей точки при переходе в точку  $\varphi_2, \theta_2$ , не лежащую в области достижимости из начального положения  $\varphi_0, \theta_0$ .

Вместо  $l_{\min}$  и  $l_{\max}$  могут использоваться другие значения  $l \in [l_{\min}, l_{\max}]$ . Поворот корпуса может быть осуществлен на любой угол  $\Delta\theta$  при повторе описанных движений. Поэтому можно построить программное движение разворота аппарата во всех случаях, когда точка  $\varphi_D, \theta_D$  лежит вне области достижимости из начального положения.

Всегда, когда  $\varphi_D, \theta_D$  не лежит в области достижимости из начального положения, существует два способа построения программного движения. Если  $\theta_D < \theta_0$ , первому способу соответствует движение изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$  по траектории, показанной на рис. 7, а. Программное движение реализуется следующим образом:

- 1) При  $\varphi = \varphi_0$  длина ноги изменяется от  $l_0$  до  $l_{\max}$ ;
- 2) Если в процессе изменения угла  $\varphi$  от  $\varphi_0$  до  $\varphi_{\max}$  конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  попадает на границу области достижимости из некоторого  $\varphi^*, \theta^*$  (то есть  $\varphi^*, \theta^*$  попадает на границу области достижимости  $\varphi_D, \theta_D$ , см. Утверждение 1), при  $\varphi = \varphi^*$  длина ноги изменяется от  $l_{\max}$  до  $l_{\min}$ . Угол  $\varphi$  изменяется от  $\varphi^*$  до  $\varphi_D$ , в результате угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_D$ . В положении  $\varphi_D, \theta_D$  длина ноги изменяется до  $l_D$ . Конец.
- 3) В противном случае нога поворачивается относительно корпуса, угол  $\varphi$  увеличивается до  $\varphi_{\max}$ ;
- 4) При  $\varphi = \varphi_{\max}$  длина ноги изменяется от  $l_{\max}$  до  $l_{\min}$ ;
- 5) Если в процессе изменения угла  $\varphi$  от  $\varphi_{\max}$  до  $\varphi_{\min}$  конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  попадает на границу области достижимости из некоторого  $\varphi^*, \theta^*$ , то при  $\varphi = \varphi^*$  длина ноги изменяется от  $l_{\min}$  до  $l_{\max}$ . Угол  $\varphi$  изменяется от  $\varphi^*$  до  $\varphi_D$ , в результате угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_D$ . В положении  $\varphi_D, \theta_D$  длина ноги изменяется до  $l_D$ . Конец.
- 6) В противном случае нога поворачивается относительно корпуса, угол  $\varphi$  уменьшается до  $\varphi_{\min}$ ;
- 7) При  $\varphi = \varphi_{\min}$  длина ноги изменяется от  $l_{\min}$  до  $l_{\max}$ ;
- 8) Если в процессе изменения угла  $\varphi$  от  $\varphi_{\min}$  до  $\varphi_{\max}$  конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  попадает на границу области достижимости из некоторого  $\varphi^*, \theta^*$ , при  $\varphi = \varphi^*$  длина ноги изменяется от  $l_{\max}$  до  $l_{\min}$ . Угол  $\varphi$  изменяется от  $\varphi^*$  до  $\varphi_D$ , в результате угол поворота корпуса  $\theta$  становится равным  $\theta_D$ . В положении  $\varphi_D, \theta_D$  длина ноги изменяется до  $l_D$ . Конец
- 9) В противном случае переход к пункту 3.

Второму способу построения программного движения соответствует траектория движения изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$  на рис. 7, б. Тогда сначала при  $\varphi = \varphi_0$  длина ноги изменяется до  $l_{\min}$ . Нога аппарата

поворачивается на угол  $\Delta\varphi_1 = \varphi_{\min} - \varphi_0$ . Далее все аналогично первому способу. Если  $\theta_D > \theta_0$ , то по сравнению с предыдущим случаем изменяются направления поворотов ноги. Соответствующие траектории изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$  показаны на рис. 8.

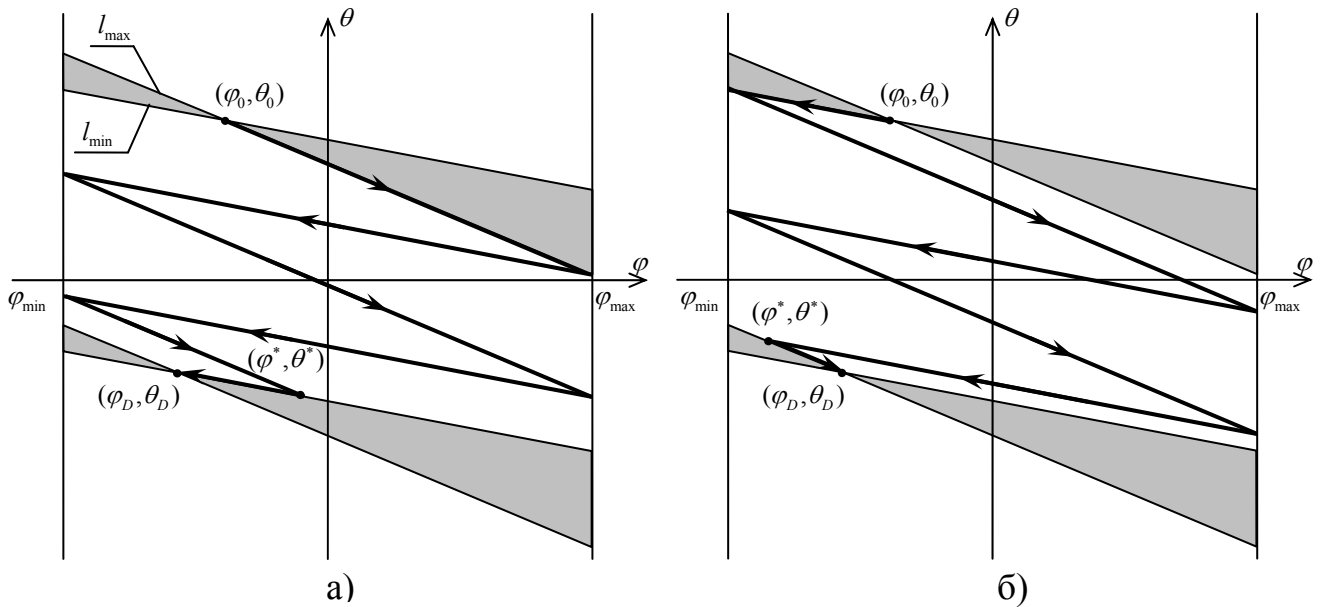


Рис. 7. Траектории движения изображающей точки для случая, когда конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  лежит вне области достижимости из начального положения ( $\varphi_0 > \varphi_D$ ), при первом (а) и втором (б) способе построения программного движения.

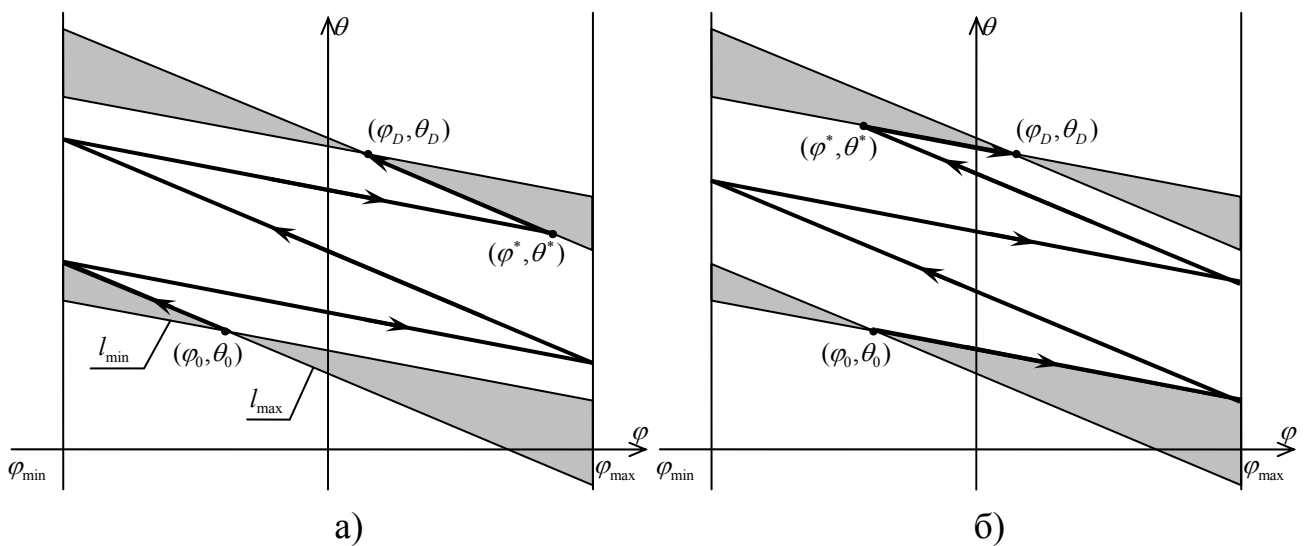


Рис. 8. Траектории движения изображающей точки для случая, когда конечное положение  $\varphi_D, \theta_D$  лежит вне области достижимости из начального положения ( $\varphi_0 < \varphi_D$ ), при первом (а) и втором (б) способе построения программного движения.

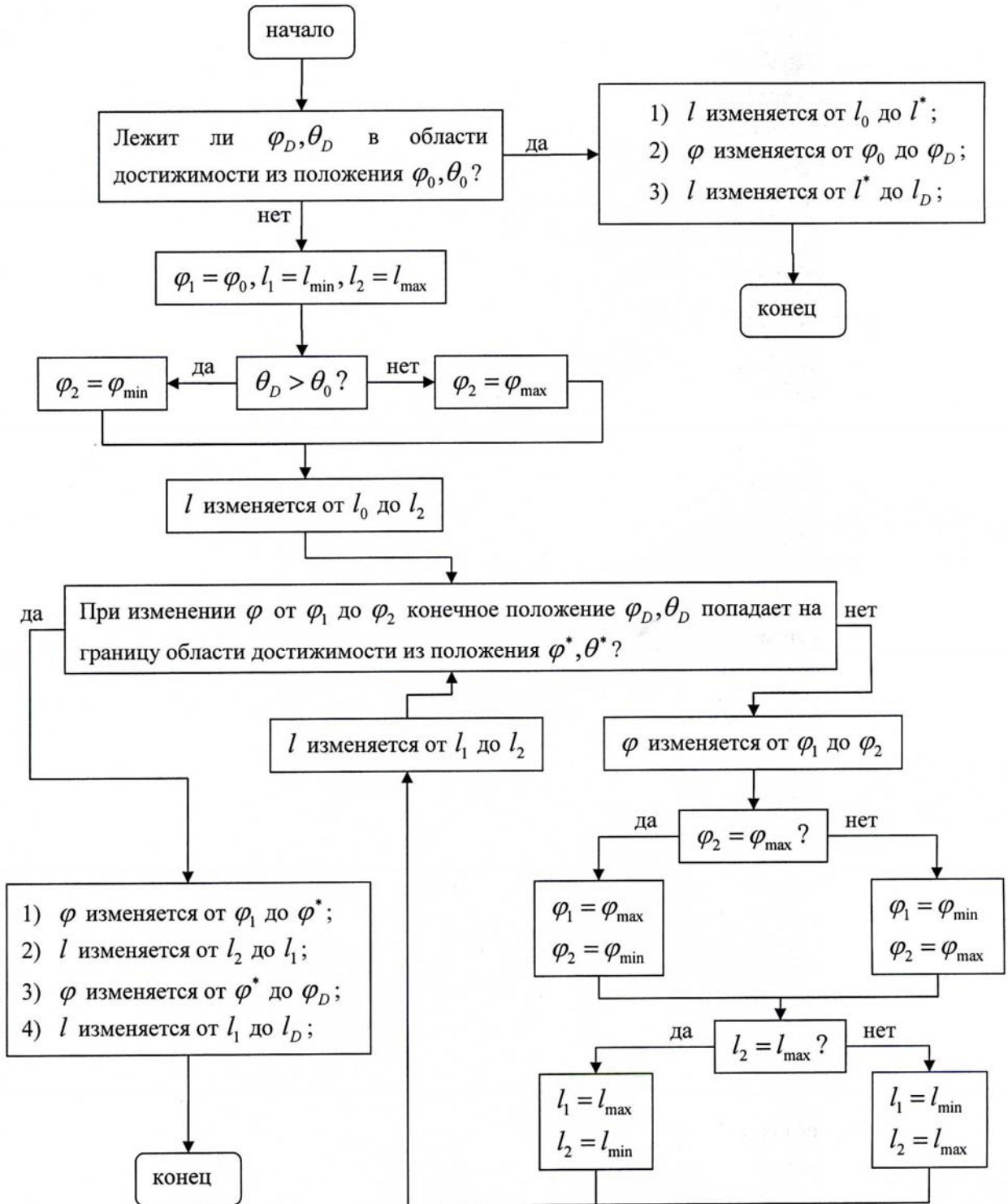


Рис. 9. Блок-схема алгоритма построения программного движения (первый способ).

Описанный алгоритм построения программного движения можно изобразить в виде блок-схемы, представленной на рис. 9. При этом реализуются траектории изображающей точки, соответствующие первому способу построения программного движения (рис. 7 и 8, а). Обозначим  $l_1, l_2$  и  $\varphi_1, \varphi_2$  – значения соответствующих координат аппарата в начале и в конце этапа движения при  $l = const$ , что позволит объединить однотипные пункты 1–3, 4–6, 7–9 описания алгоритма построения программного движения.

**Утверждение 2.** Выбор способа построения программного движения не влияет на объем движений по углу  $\varphi$ .

Доказательство (рис. 10): пусть изображающая точка движется из точки А в В. При первом способе построения программного движения путь точки – АДФВ, а при втором – АСГВ. Объем движений по углу  $\varphi$  – это путь, пройденный проекцией, изображающей точки на ось  $\varphi$ .

$ADFB = AD + DF + FB$ ,  $ACGB = AC + CG + GB$ . Четырехугольники ЕСАD и ВFЕG – параллелограммы, их стороны попарно параллельны и равны, получаем  $CA = ED$ ,  $CE = AD$ ,  $FB = EG$ ,  $FE = BG$ , тогда  $AD + FB = CG$ ,  $FD = CA + BG$ .

Пути, пройденные изображающей точкой на плоскости  $\varphi, \theta$  для первого и второго способа движения равны:  $ADFB = ACGB$ . Следовательно, объем движений аппарата по углу  $\varphi$  также одинаковый.

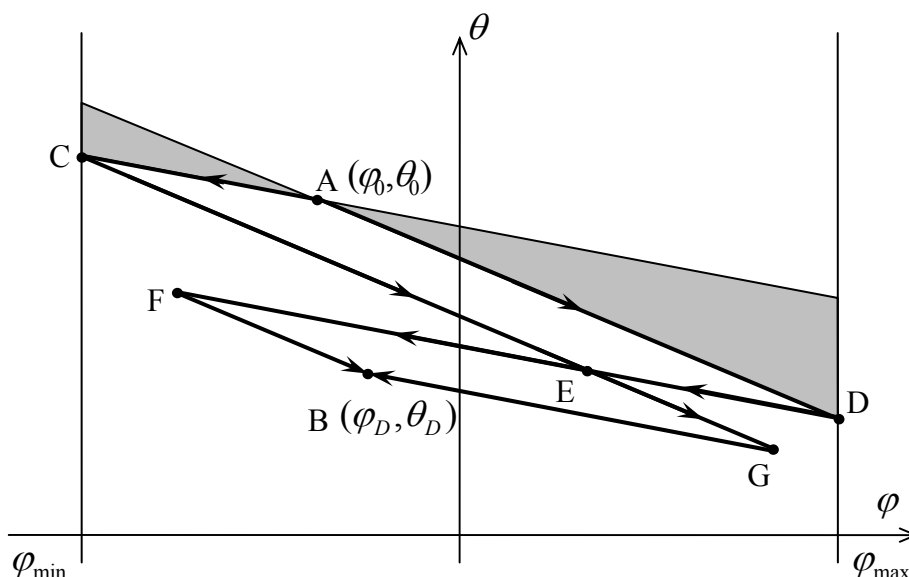


Рис. 10

Назовем **точкой переключения** точку на плоскости переменных  $\varphi, \theta$ , в которой изменяется длина ноги аппарата.

**Утверждение 3.** В зависимости от конечного положения аппарата, выбор способа построения программного движения может влиять на объем движений по координате  $l$ .

На объем движений по координате  $l$  влияет количество точек переключения на траектории изображающей точки. На рис. 11 заштрихованные области и части их границ, обведенные жирной линией, соответствуют конечным положениям аппарата, для которых число точек переключения зависит от способа построения программного движения и различается на 1 (например, точки А и В). Для всех остальных конечных положений способ движения не влияет на количество точек переключения (например, точки С и D). Это легко подтверждается построением траекторий изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$ .

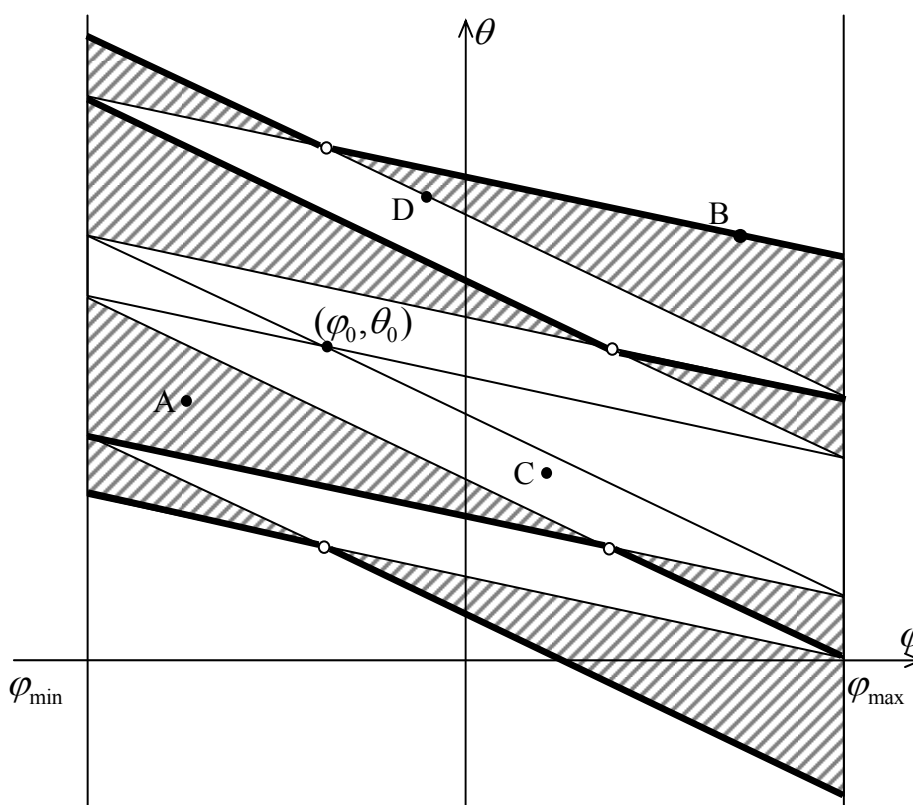


Рис. 11

**Утверждение 4.** При изменении ограничений на значения угла  $\varphi$ , объем движений по углу  $\varphi$  остается постоянным, а объем движений по координате  $l$  изменяется.

Доказательство (рис. 12): Рассмотрим два случая: когда движение точки по координате  $\varphi$  ограничено ( $\varphi \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ ), и когда ограничений нет. В первом случае траектория точки – ADCHGB, во втором – ADEFB.  $ADCHGB = AD + DC + CH + HG + GB$ ,  $ADEFB = AD + DE + EF + FB$ . Четырехуголь-



ники DCHE и EGBF – параллелограммы, их стороны попарно параллельны и равны, получаем  $CH=DE$ ,  $CD=HE$ ,  $GB=EF$ ,  $GE=BF$ , тогда  $AF=AD+CH+GB$ ,  $BF=CD+GH$ .

Пути, пройденные изображающей точкой на плоскости  $\varphi, \theta$  для первого и второго способа движения равны:  $ADCHGB = ADEFB$ . Следовательно, объем движений аппарата по углу  $\varphi$  также одинаковый.

На объем движений по координате  $l$  влияет количество точек переключения на траектории изображающей точки. На рис. 12 видно, что в первом случае на траектории лежит шесть точек переключения, во втором – три. Если  $\varphi_D, \theta_D$  не лежит в области достижимости из начального положения, то чем меньше диапазон значений угла  $\varphi$ , тем больше точек переключения будет проходить изображающая точка. В случае, когда движение по углу  $\varphi$  не ограничено, имеем минимальное число точек переключения – 3.

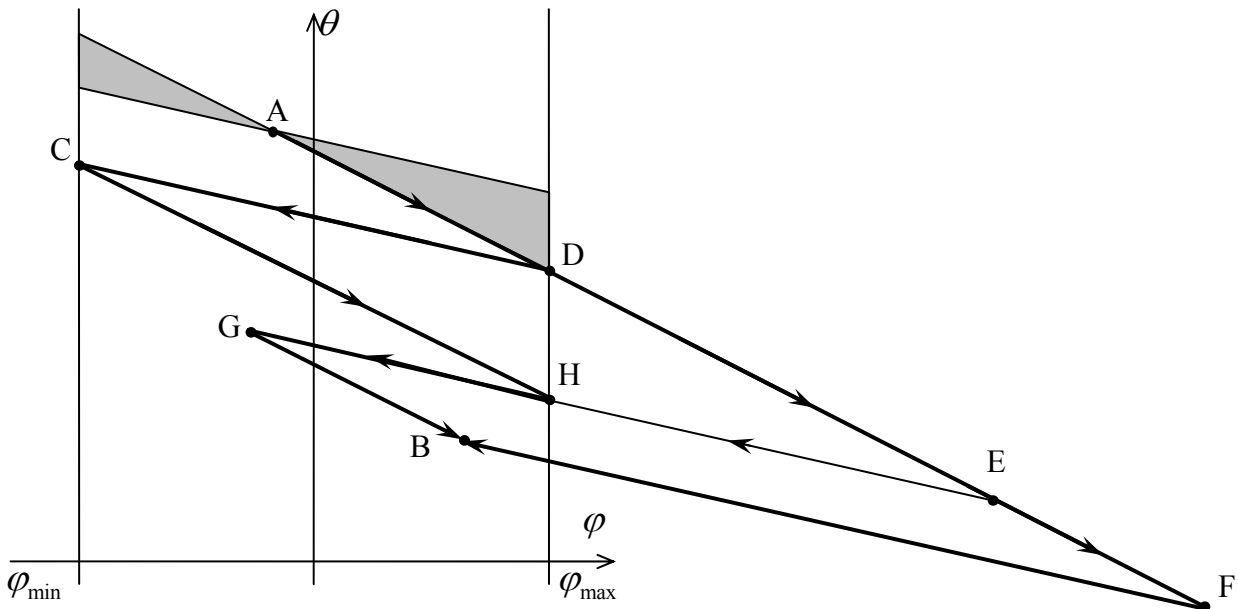


Рис. 12

**Следствие:** для минимизации объема движений аппарата по координате  $l$  при построении программного движения необходимо:

- Использовать весь допустимый диапазон значений по углу  $\varphi$  (см. Утверждение 4);
- Выбирать способ построения программного движения в зависимости от требуемого конечного положения  $\varphi_D, \theta_D$  (см. Утверждение 3). Этот пункт не реализуется в блок-схеме, показанной на рис. 9.

### §3. Результаты математического моделирования

В этом разделе приведены результаты математического моделирования движения аппарата.

Масса корпуса, цилиндра и штока ноги, их моменты инерции относительно их центров масс, равны  $m_1 = 8 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 2 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 1 \text{ кг}$ ,  $J_1 = 0.5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2 = 0.07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_3 = 0.04 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Расстояния, определяющие положения центров масс цилиндра и штока  $r_2 = 0.3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0.2 \text{ м}$ . Длины ноги  $l$  изменяется в пределах от  $l_{\min} = 0.6 \text{ м}$  до  $l_{\max} = 1 \text{ м}$ . Угол поворота ноги относительно корпуса  $\varphi$  изменяется в пределах от  $\varphi_{\min} = -30^\circ$  до  $\varphi_{\max} = 30^\circ$ .

В качестве примера рассмотрен разворот аппарата из начального положения  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\theta_0 = 0^\circ$ ,  $l_0 = 1 \text{ м}$  в конечное –  $\varphi_D = 0^\circ$ ,  $\theta_D = -10^\circ$ ,  $l_D = 1 \text{ м}$ . Программное движение строится первым способом (см. рис 7-8).

На рис. 13 показаны полученные графики  $\varphi(t)$ ,  $l(t)$ ,  $\theta(t)$ . Функции угла поворота ноги аппарата  $\varphi(t)$  и длины ноги аппарата  $l(t)$  получены как решение задачи быстродействия [8] при условиях  $|\ddot{\varphi}_{\max}| = 20 \text{ град}/\text{с}^2$ ,  $|\ddot{l}_{\max}| = 0.5 \text{ м}/\text{с}^2$ , то есть ускорения являются кусочно-постоянными функциями времени. На рис. 14 показана траектория движения изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$ . В процессе разворота аппарата два раза изменяется длина ноги (точки переключения В и С). Движение происходит при максимально вытянутой ноге ( $l_{\max} = 1 \text{ м}$ ) – отрезки АВ и СД, и максимально поджатой ( $l_{\min} = 0.6 \text{ м}$ ) – отрезок ВС.

Выполненная анимация позволяет демонстрировать движения аппарата на экране компьютера.

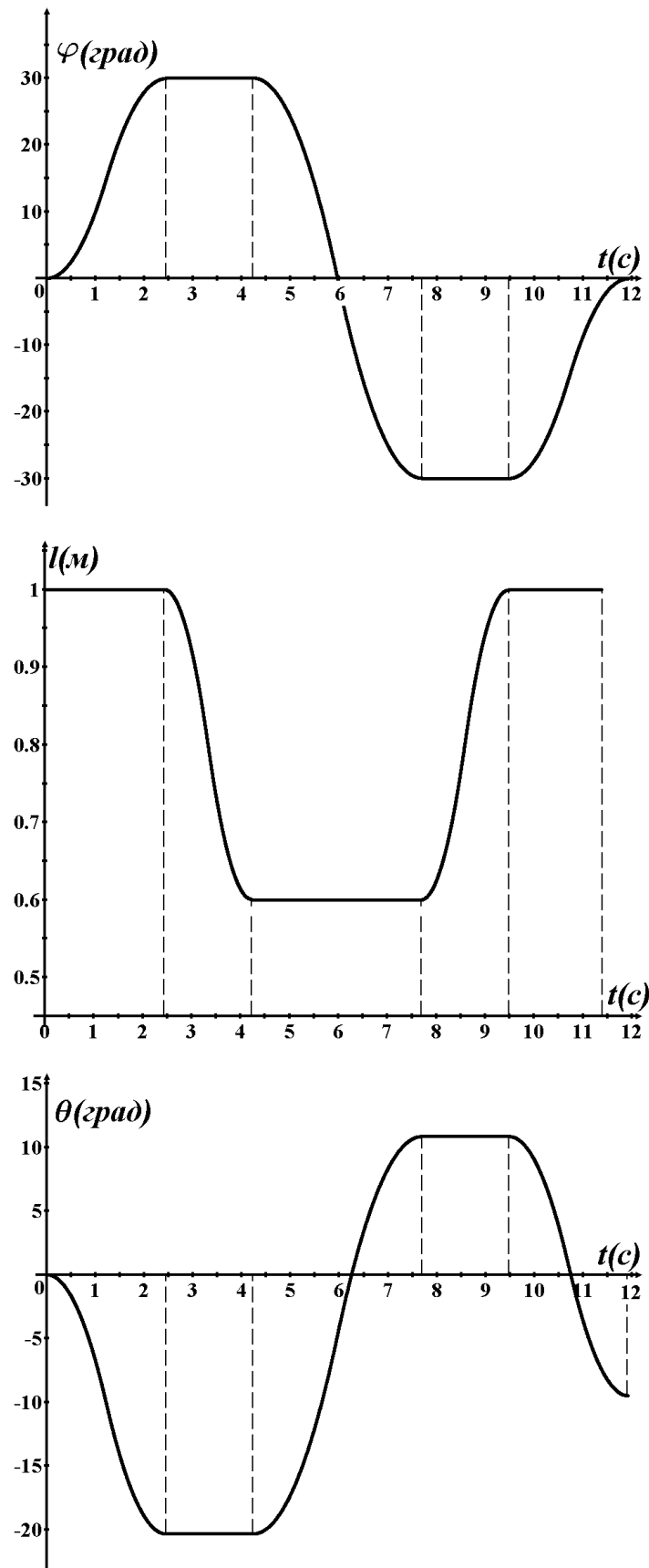


Рис. 13. Зависимость координат  $\varphi, l, \theta$  от времени.

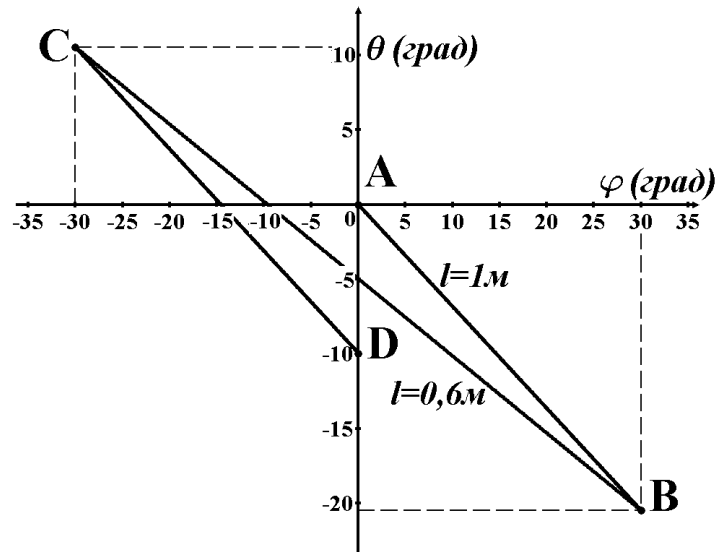


Рис. 14. Траектория изображающей точки на плоскости  $\varphi, \theta$

### Литература

1. Okhotsimsky D.E., et al. Walking machines. *Advances in mechanics*, 1992, №1-2, p. 39–70.
2. Лапшин В.В. Динамика и управление движением прыгающего аппарата. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1983, № 5, с. 42–51.
3. Лапшин В.В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета. *Известия АН СССР. Механика твердого тела*, 1984, № 1, с. 159–165.
4. Raibert M.H. Legged robots that balance. *Robotics research: The fourth international symposium*. Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1986, 233 p.
5. Lapshin V.V. Motion control of a legged machine in the supportless phase of hopping. *The international journal of robotics research*, 1991, №4, p. 327–337.
6. Kane T.R., Scher M.P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon. *International journal of solids and structures*, 1969, № 7.
7. *Курс теоретической механики, под ред. К.С.Колесникова*. М., МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005, 736 с.
8. Понтрягин Л.С. и др. *Математическая теория оптимальных процессов*. М., Физматгиз, 1961, 39