



Сазонов В.В.

Применение усредненных
уравнений движения для
исследования эволюции
орбит объектов
космического мусора

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сазонов В.В. Применение усредненных уравнений движения для исследования эволюции орбит объектов космического мусора // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 73. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-73>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

В.В. Сазонов

**ПРИМЕНЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ ОБЪЕКТОВ
КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА**

Москва – 2009

Аннотация

Математическое моделирование ненаблюдаемой фракции космического мусора в околоземном пространстве в значительной степени основывается на исследовании эволюции во времени движения большой совокупности тел с разнообразными орбитами. Для такого исследования необходимо иметь средства достаточно точного и очень быстрого расчета движения одного тела с учетом основных возмущающих факторов: нецентральности гравитационного поля Земли, сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца, светового давления. Традиционным и удобным средством решения этой задачи является усредненная по орбитальному движению тела система уравнений в оскулирующих элементах. В настоящее время известно много форм таких уравнений, и задача состоит в том, чтобы выбрать из них наиболее подходящую. В данной работе описывается и исследуется форма усредненных уравнений, которая допускает удобное применение численных методов. Оценка точности усредненных уравнений выполняется посредством сравнения их решений с решениями соответствующих полных уравнений движения тела, причем такое сравнение проведено для разных наборов возмущающих факторов.

V.V. Sazonov. Application of average equations for investigation of orbit evolution of space debris bodies. Mathematical modeling of the unobservable fraction of space debris in the near-Earth environment is based on investigating time evolution of motions of a large set of space bodies with various orbits. A means of fast and precise calculation of a body orbit is needed for such investigating, at that the calculation must take into account the main disturbing factors: Earth oblateness, atmosphere drag, gravitation of Moon and Sun, solar radiation pressure. The most abundant means of the orbit evolution study is an averaged system of differential equations for osculating orbital elements. In recent time there are a lot of such systems of various forms. Our task consisted in a choice of the most suitable ones. We describe and investigate in this paper the averaged systems that are well adapted to integrating by numerical methods. We evaluate the accuracy of those systems by comparing their solutions with solutions of appropriate full equations of body motion. At that we make such comparing for some sets of disturbing factors.

1. Усредненная система. Фазовыми переменными усредненной системы, описывающей движение тела (космического аппарата или частицы мусора) на околоземной орбите, служат средняя аномалия M и элементы оскулирующей орбиты тела: большая полуось a , эксцентриситет e , долгота восходящего узла Ω , наклонение i , аргумент широты перигея ω . Последние три элемента относятся ко второй геоэкуаториальной системе координат [1]. Для удобства ссылок усредненную систему запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= F_{a,A} + F_{a,P}, \\
 \frac{de}{dt} &= F_{e,E} + F_{e,A} + F_{e,M} + F_{e,S} + F_{e,P}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E} + F_{\Omega,A} + F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,P}, \\
 \frac{di}{dt} &= F_{i,E} + F_{i,A} + F_{i,M} + F_{i,S} + F_{i,P}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E} + F_{\omega,A} + F_{\omega,M} + F_{\omega,S} + F_{\omega,P}, \\
 \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,E} + F_{M,A} + F_{M,M} + F_{M,S} + F_{M,P}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, $n = \sqrt{\mu_E / a^3}$ – среднее движение тела, μ_E – гравитационный параметр Земли, первый индекс у слагаемых в правой части указывает на соответствующую фазовую переменную, второй индекс указывает на описываемое возмущение. Слагаемые со вторым индексом E учитывают вторую, третью и четвертую зональные гармоники гравитационного потенциала Земли. Эти члены взяты из работ [2, 3]. Слагаемые со вторым индексом A учитывают сопротивление атмосферы. Усреднение возмущающего действия атмосферы выполнялось численно и будет описано ниже. Слагаемые со вторыми индексами M и S учитывают гравитационные возмущения со стороны Луны и Солнца соответственно, слагаемые со вторым индексом P учитывают возмущения от светового давления прямого излучения Солнца. Эти три типа слагаемых рассчитываются по формулам работы [4], которые также обсуждаются ниже. Система (1) получена усреднением по орбитальному движению тела. Интегрирование этой системы выполнялось численно.

2. Усреднение возмущающего действия сопротивления атмосферы. Это усреднение основано на представлении уравнений в оскулирующих элементах, использованном в [4]. Опишем это представление в общем виде. Введем обозначения: \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор тела, \mathbf{w} – возмущающее ускорение. Уравнение движения тела имеет вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_E \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{w}, \quad r = |\mathbf{r}|. \tag{2}$$

Векторы

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} - \frac{\mu_E \mathbf{r}}{r}$$

суть кинетический момент тела и его вектор Лапласа. Эти векторы являются первыми интегралами уравнения (2) при $\mathbf{w} = 0$ наряду со скалярным первым интегралом – интегралом энергии

$$H = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{2\mu_E}{r}.$$

В общем случае вдоль решений уравнения (2)

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{w}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{w} \times \mathbf{h} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{w}), \quad \frac{dH}{dt} = 2\mathbf{w} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3)$$

Чтобы записать соотношения (3) в скалярном виде и преобразовать их в уравнения для оскулирующих элементов орбиты, введем правую декартову систему координат $O\xi\eta\zeta$. Точка O – центр Земли, орты \mathbf{P} , \mathbf{Q} и \mathbf{R} осей ξ , η и ζ определены соотношениями (напомним, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = 0$)

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad \mathbf{R} = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}.$$

Во второй геоэквиаториальной системе координат

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z), \quad \mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z), \quad \mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z).$$

Выписанные компоненты этих ортов выражаются через углы Ω , i , ω с помощью известных тригонометрических формул [1]. Проекции абсолютной угловой скорости системы $O\xi\eta\zeta$ на ее собственные оси обозначим Ω_ξ , Ω_η и Ω_ζ . В этой системе

$$\mathbf{r} = (\xi, \eta, 0), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_\xi, v_\eta, 0), \quad \mathbf{w} = (w_\xi, w_\eta, w_\zeta), \quad \mathbf{h} = (0, 0, h), \quad \mathbf{k} = (k, 0, 0),$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \left(\Omega_\eta h, -\Omega_\xi h, \frac{dh}{dt} \right), \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \left(\frac{dk}{dt}, \Omega_\zeta k, -\Omega_\eta k \right).$$

Из последних соотношений и соотношений (3) с учетом равенств $k = \mu_E e$ и $H = -\mu_E / a$, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu_E} (v_\xi w_\xi + v_\eta w_\eta), \quad \frac{de}{dt} = \frac{(h + \xi v_\eta) w_\eta - \eta v_\eta w_\xi}{h}, \quad (4)$$

$$\Omega_\xi = \frac{\xi w_\xi}{h}, \quad \Omega_\eta = \frac{\eta w_\eta}{h}, \quad \Omega_\zeta = -\frac{(h - \eta v_\xi) w_\xi + \xi v_\xi w_\eta}{\mu_E e}.$$

Здесь h следует представить в виде $h = \sqrt{\mu_E a(1 - e^2)}$, а ξ , η , v_ξ и v_η выразить формулами кеплерового невозмущенного эллиптического движения. Выписанные соотношения позволяют выписать первые 5 уравнений системы (1), поскольку

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega_\xi \sin \omega + \Omega_\eta \cos \omega}{\sin i}, \quad \frac{di}{dt} = \Omega_\xi \cos \omega - \Omega_\eta \sin \omega, \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \Omega_\zeta - \operatorname{ctg} i (\Omega_\xi \sin \omega + \Omega_\eta \cos \omega).$$

Явный вид последнего уравнения (1)

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})}{\sqrt{\mu_E a}} - \Omega_\zeta \sqrt{1 - e^2} \quad (6)$$

или в полностью скалярной форме

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2(\xi w_\xi + \eta w_\eta)}{\sqrt{\mu_E a}} - \Omega_\zeta \sqrt{1 - e^2}.$$

Вернемся к расчету слагаемых правых частей (1), обусловленных сопротивлением атмосферы. Возмущающее ускорение тела, создаваемое таким сопротивлением, имеет вид

$$\mathbf{w} = -c \rho_{\text{атм}} |\mathbf{v}| \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}.$$

Здесь c – баллистический коэффициент тела, $\rho_{\text{атм}}$ – плотность атмосферы в точке нахождения тела, рассчитываемая согласно ГОСТ Р 25645.166-2004 [5], \mathbf{v} – скорость тела относительно поверхности Земли (полагаем, что атмосфера вращается вместе с Землей), $\boldsymbol{\omega}_E$ – угловая скорость вращения Земли. В системе $O\xi\eta\zeta$ $\boldsymbol{\omega}_E = \omega_E (P_z, Q_z, R_z)$, $\omega_E = |\boldsymbol{\omega}_E|$. Отсюда с учетом предыдущих соотношений получаем

$$w_\xi = -c \rho_{\text{атм}} v_E (v_\xi + \omega_E R_z \eta), \quad w_\eta = -c \rho_{\text{атм}} v_E (v_\eta - \omega_E R_z \xi),$$

$$w_\zeta = -c \rho_{\text{атм}} v_E \omega_E (Q_z \xi - P_z \eta), \quad (7)$$

$$v_E = \sqrt{(v_\xi + \omega_E R_z \eta)^2 + (v_\eta - \omega_E R_z \xi)^2 + \omega_E^2 (Q_z \xi - P_z \eta)^2}.$$

Усреднение по времени правых частей уравнений (4) – (7) вдоль кеплерова эллиптического движения сводилось к усреднению этих правых частей по

эксцентрической аномалии E на отрезке $0 \leq E \leq 2\pi$. Величины ξ , η , v_ξ и v_η выражались в функции E (см. [1]), а в соответствующих интегралах делалась подстановка $ndt = (1 - e \cos E)dE$. Вычисление преобразованных интегралов выполнялось по формуле прямоугольников на равномерной сетке с 24 узлами. При этом параметры модели атмосферы и координаты Солнца во второй геоэквиаториальной системе координат считались неизменными. Их значения соответствовали моменту времени, на который вычислялись правые части уравнений (1) в процессе их численного интегрирования.

3. Учет гравитационного влияния Луны и Солнца. Третье тело, например, Луна или Солнце, с гравитационным параметром μ и геоцентрическим радиусом-вектором $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$ создает возмущающее ускорение

$$\mathbf{w} = \mu \left(\frac{\mathbf{D} - \mathbf{r}}{|\mathbf{D} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|^3} \right).$$

Если $D = |\mathbf{D}| \gg r$, то выписанное выражение удобно представить рядом по степеням r/D и в этом ряду сохранить лишь первые несколько членов. Ниже при учете гравитационного влияния Солнца будут сохранены члены первой степени, а при учете гравитационного влияния Луны – члены первой и второй степени. Члены первой и второй степени упомянутого ряда обозначим \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 соответственно. Они имеют вид

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mu}{D^2} \left[\frac{3(\mathbf{D} \cdot \mathbf{r})\mathbf{D}}{D^2} - \mathbf{r} \right], \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mu}{D^5} \left[\frac{15(\mathbf{D} \cdot \mathbf{r})^2 \mathbf{D}}{2D^2} - 3(\mathbf{D} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - \frac{3r^2 \mathbf{D}}{2} \right].$$

Усреднение по кеплерову эллиптическому движению возмущения $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1$ дает [4] (при усреднении третье тело считается неподвижным)

$$F_{a,1} = 0, \quad F_{e,1} = -\frac{15\mu e \sqrt{1-e^2}}{2nD^5} D_\xi D_\eta, \quad \Omega_{\xi,1} = \frac{3\mu(1+4e^2)}{2nD^5 \sqrt{1-e^2}} D_\xi D_\zeta,$$

$$\Omega_{\eta,1} = \frac{3\mu \sqrt{1-e^2}}{2nD^5} D_\eta D_\zeta, \quad \Omega_{\zeta,1} = \frac{3\mu \sqrt{1-e^2}}{2nD^5} (3D_\xi^2 - 2D_\eta^2 - D_\zeta^2),$$

$$\Delta F_{M,1} = -\frac{\mu}{nD^5} \left[(1+9e^2)D_\xi^2 + (1-6e^2)D_\eta^2 - (2+3e^2)D_\zeta^2 \right];$$

аналогичное усреднение возмущения $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2$ приводит к соотношениям [4]

$$F_{a,2} = 0, \quad F_{e,2} = \frac{15\mu a \sqrt{1-e^2}}{16nD^7} D_\eta \left[(1+27e^2)D_\xi^2 + (1-8e^2)D_\eta^2 - (4+3e^2)D_\zeta^2 \right],$$

$$\Omega_{\xi,2} = -\frac{15\mu a e}{16nD^7 \sqrt{1-e^2}} D_\zeta \left[(11+17e^2)D_\xi^2 + (1-8e^2)D_\eta^2 - (4+3e^2)D_\zeta^2 \right],$$

$$\Omega_{\eta,2} = -\frac{75\mu ae\sqrt{1-e^2}}{8nD^7} D_\xi D_\eta D_\zeta,$$

$$\Omega_{\zeta,2} = -\frac{15\mu a\sqrt{1-e^2}}{16neD^7} D_\xi \left[(1+11e^2)D_\xi^2 + (1-24e^2)D_\eta^2 - (4+9e^2)D_\zeta^2 \right],$$

$$\Delta F_{M,2} = \frac{15\mu ae}{8nD^7} D_\xi \left[(3+11e^2)D_\xi^2 + (3-24e^2)D_\eta^2 - (12+9e^2)D_\zeta^2 \right].$$

Здесь $F_{a,k}$, $F_{e,k}$, $\Omega_{\xi,k}$, $\Omega_{\eta,k}$, $\Omega_{\zeta,k}$ и $\Delta F_{M,k}$ – результаты усреднения правых частей уравнений (4) и члена $-2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})/\sqrt{\mu_E a}$ в уравнении (6) для $\mathbf{w} = \mathbf{w}_k$ ($k = 1, 2$).

Приведенные формулы использовались для расчета слагаемых правых частей уравнений (1) со вторыми индексами M и S . При расчете слагаемых со вторым индексом S (гравитационное влияние Солнца) использовались формулы, отвечающие возмущению \mathbf{w}_1 , в частности,

$$F_{e,S} = F_{e,1}, \quad F_{i,S} = \Omega_{\xi,1} \cos \omega - \Omega_{\eta,1} \sin \omega, \quad F_{M,S} = \Delta F_{M,1} - \Omega_{\zeta,1} \sqrt{1-e^2},$$

при $\mu = 332946\mu_E$ и функции $\mathbf{D}(t)$, определенной во второй геоэкваториальной системе координат простейшими приближенными формулами [6] для положения Солнца. При расчете слагаемых со вторым индексом M (гравитационное влияние Луны) использовались формулы, отвечающие возмущению $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, например,

$$F_{e,M} = F_{e,1} + F_{e,2}, \quad F_{i,M} = (\Omega_{\xi,1} + \Omega_{\xi,2}) \cos \omega - (\Omega_{\eta,1} + \Omega_{\eta,2}) \sin \omega$$

и т.п. при $\mu = \mu_E / 81.30068$ и функции $\mathbf{D}(t)$, определенной во второй геоэкваториальной системе координат приближенными формулами [6] для положения Луны.

4. Учет светового давления прямого излучения Солнца. Поскольку основной объект проводимого исследования – тела, находящиеся на низких околоземных орбитах, примем упрощенную модель земной тени. При расчете тени Землю будем считать шаром радиуса $r_E = 6378.14$ км. Орт направления «Земля-Солнце» обозначим \mathbf{s} . Тогда условие пребывания тела в тени Земли будет выражаться неравенством

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} < -\sqrt{r^2 - r_E^2}. \quad (8)$$

Если это неравенство не выполнено, то тело считается освещенным всей поверхностью Солнца (полутень не рассматриваем). При выполнении неравенства (8) силу светового давления, действующую на тело, полагаем равной нулю. В случае невыполнения этого неравенства возмущающее ускорение, создаваемое такой силой, зададим выражением $\mathbf{w} = -w_0 \mathbf{s}$. Здесь w_0 – положительная

постоянная величина. Если тело полностью поглощает солнечные лучи, то $w_0 = cp_S$, где c – баллистический коэффициент (в случае тела сложной формы этот баллистический коэффициент может отличаться от баллистического коэффициента в формуле аэродинамического возмущающего ускорения), $p_S = 4.64 \cdot 10^{-6} \text{ Н/м}^2$ – сила светового давления Солнца на абсолютно черную пластинку площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно солнечным лучам на орбите Земли. В приводимых ниже формулах $w_\xi = -w_0 s_\xi$, $w_\eta = -w_0 s_\eta$ и $w_\zeta = -w_0 s_\zeta$, где s_ξ , s_η и s_ζ – компоненты орта \mathbf{s} в системе $O\xi\eta\zeta$.

Усреднение возмущения, обусловленного световым давлением, удобно выполнить с использованием эксцентрической аномалии [4]. Если неравенство (8) не выполнено во всех точках орбиты тела, то результат усреднения выражается формулами

$$F_{a,P} = 0, \quad F_{e,P} = \frac{3w_\eta}{2} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu_E}}, \quad \Omega_\xi = -\frac{3w_\zeta e}{2} \sqrt{\frac{a}{\mu_E(1-e^2)}},$$

$$\Omega_\eta = 0, \quad \Omega_\zeta = -\frac{3w_\xi}{2e} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu_E}}, \quad \Delta F_{M,P} = 3w_\xi e \sqrt{\frac{a}{\mu_E}}.$$

Здесь $\Delta F_{M,P}$ означает результат усреднения члена $-2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})/\sqrt{\mu_E a}$ в уравнении (6). Пусть теперь неравенство (8) выполнено на интервале изменения эксцентрической аномалии $E_0 < E < E_1$. Тогда на отрезке $E_1 \leq E \leq E_2$, $E_2 = E_0 + 2\pi$, это неравенство не выполнено. Для любой функции $\varphi(E)$ обозначим

$$\Delta\varphi(E) = \varphi(E_2) - \varphi(E_1),$$

Тогда

$$F_{a,P} = \frac{1}{\pi n} \left(w_\xi \Delta \cos E + w_\eta \sqrt{1-e^2} \Delta \sin E \right),$$

$$F_{e,P} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{8\pi n a} \left[w_\xi \sqrt{1-e^2} \Delta \cos 2E + w_\eta \Delta (6E - 8e \sin E + \sin 2E) \right],$$

$$\Delta F_{M,P} = \frac{w_\xi}{\pi} \sqrt{\frac{a}{\mu_E}} \Delta_1 + \frac{w_\eta}{\pi} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu_E}} \Delta_2, \quad \Omega_\xi = -\frac{w_\zeta \Delta_1}{2\pi n a \sqrt{1-e^2}}, \quad \Omega_\eta = -\frac{w_\zeta \Delta_2}{2\pi n a},$$

$$\Omega_\zeta = -\frac{1}{2\pi n a e} \left[w_\xi \sqrt{(1-e^2)} \Delta \left(\frac{3}{2} E - e \sin E - \frac{1}{4} \sin 2E \right) - w_\eta \Delta \left(e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E \right) \right],$$

$$\Delta_1 = \Delta \left[\frac{3}{2} e E - (1+e^2) \sin E + \frac{e}{4} \sin 2E \right], \quad \Delta_2 = \Delta \left(\cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \right).$$

5. Тестирование усредненной системы. Проверка точности усредненной системы (1) проводилась в несколько этапов. На каждом этапе в (1) сохранялись лишь некоторые возмущающие члены, и решения такой усеченной системы сравнивались с решениями усеченного аналогичным образом исходного уравнения (2). Начнем с тестирования членов в (1), ответственных за гравитационное притяжение Луны и Солнца.

5.1. Тестирование членов усредненной системы, ответственных за гравитационное притяжение Луны и Солнца. Усредненные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, & \frac{de}{dt} &= F_{e,M} + F_{e,S}, & \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S}, & (9) \\ \frac{di}{dt} &= F_{i,M} + F_{i,S}, & \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,M} + F_{\omega,S}, & \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,M} + F_{M,S}. \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений определены соотношениями п. 3. В исходном уравнении (2) положим

$$\mathbf{w} = \mu_M \left(\frac{\mathbf{D}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{D}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{D}_M}{|\mathbf{D}_M|^3} \right) + \frac{\mu_S}{D_S^3} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{r}], \quad (10)$$

и запишем его в скалярной форме во второй геоэквиаториальной системе координат. В (9) и (2), (10) $\mu_M = \mu_E / 81.30068$, $\mu_S = 332946\mu_E$, $D_S = |\mathbf{D}_S|$, $\mathbf{s} = \mathbf{D}_S / D_S$, функции $\mathbf{D}_M = \mathbf{D}_M(t)$ и $\mathbf{D}_S = \mathbf{D}_S(t)$ задают положения Луны и Солнца и выражаются приближенными формулами [6]. Подчеркнем, указанные постоянные и функции в уравнениях (9) и (2), (10) одинаковы.

Пример решения уравнения (2), (10) на отрезке времени длиной $T = 1800$ сут приведен на рис. 1. Начальные условия этого решения заданы в восходящем узле орбиты тела в момент $t_0 = 0^h$ UTC 27.03.2008 соотношениями: радиус перигея $r_\pi = r_E + 1400$ км, $n = 2\omega_E$, $\Omega = -145^\circ$, $i = \arccos 5^{-1/2} \approx 63.4^\circ$, $\omega = -90^\circ$. На рисунке решение представлено графиками зависимости от времени оскулирующих элементов орбиты тела $a = a_1(t)$, $e = e_1(t)$, $\Omega = \Omega_1(t)$, $i = i_1(t)$, $\omega = \omega_1(t)$ и величины $\delta M(t) = M_1(t) - (t - t_0)[M_1(T + t_0) - M_1(t_0)]/T$, где $M_1(t)$ – вычисленная вдоль решения средняя аномалия. Все графики представляют собой ломаные, абсциссы вершин которых образуют равномерную сетку на оси t с шагом 5000с, а ординаты суть значения элементов орбиты и величины δM в узлах сетки.

Непосредственное сравнение решения системы (9) с решением уравнения (2), (10), пусть и пересчитанным в функции $a_1(t)$, $e_1(t)$, $\Omega_1(t)$, $i_1(t)$, $\omega_1(t)$ и $M_1(t)$, затруднительно. Это обусловлено тем, что каждая такая функция содержит медленно меняющуюся – вековую – составляющую, на которую накладываются сравнительно высокочастотные (с частотами, кратными среднему

движению n) колебания малой амплитуды. Решение усредненной системы (9) также содержит вековую составляющую, которая при подходящем выборе его начальных условий должна быть близка к вековой составляющей в функциях $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$. Кроме вековых составляющих решение системы (9) содержит колебательную составляющую малой амплитуды с частотами существенно ниже n , и эта составляющая примерно совпадает с некоторыми низкочастотными гармониками в функциях $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$. Однако сравнение решений системы (9) и уравнения (2), (10) целесообразно выполнять, основываясь на вековых составляющих.

Сравнение выполняется так. Каждая функция $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$, вычисленная вдоль решения уравнения (2), (10) на отрезке $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, аппроксимируется выражением

$$\chi(t) = \alpha_{K+1} + \alpha_{K+2}(t - t_0) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \sin \frac{\pi k(t - t_0)}{T}, \quad (11)$$

где α_k – коэффициенты. Аппроксимация строится методом наименьших квадратов по значениям функции в узлах упоминавшейся выше равномерной сетки. Для всех функций число K в аппроксимирующих выражениях (11) – одно и то же. Если это число намного меньше числа узлов сетки и подобрано правильно, то построенные выражения (11) описывают вековую компоненту функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$. В таком случае эти выражения обозначим $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $M_p(t)$.

Графики построенных аппроксимирующих выражений (11) для рассматриваемого примера приведены на рис. 2 вместе с графиками аппроксимируемых функций. Здесь опущены графики $a_1(t)$ и $a_p(t)$, поскольку с высокой точностью $a_p(t) = 26561.6$ км. Кроме того, как и на рис. 1, вместо графика $M_p(t)$ приведен график функции $\delta M_p(t) = M_p(t) - (t - t_0)[M_p(T + t_0) - M_p(t_0)]/T$. Этот график помещен рядом с графиком функции $\delta M(t)$. В данном случае выражения (11) построены при $K = 100$. Как видно из рисунка, построенные аппроксимации действительно представляют собой вековые составляющие $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $M_p(t)$.

На решениях системы (9) определим функционал

$$\Phi = \sum_{l=0}^L \left\{ [a_p(t_l) - a(t_l)]^2 + [e_p(t_l) - e(t_l)]^2 + [\Omega_p(t_l) - \Omega(t_l)]^2 + \right. \quad (12) \\ \left. + [i_p(t_l) - i(t_l)]^2 + [\omega_p(t_l) - \omega(t_l)]^2 + [M_p(t_l) - M(t_l)]^2 \right\}, \quad t_l = t_0 + \frac{Tl}{L}.$$

Здесь углы выражены в радианах, большая полуось – в тысячах км. Будем минимизировать (12) по начальным условиям решения в точке t_0 при $L = 200$. Решение, доставляющее этому функционалу минимум, обозначим $a_*(t)$, $e_*(t)$,

... $M_*(t)$. Именно это решение имеет смысл сравнивать с функциями $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $M_1(t)$ и $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $M_p(t)$. Примеры такого сравнения приведены на рис. 3, 4. На рис. 3 графики функций $a_*(t)$, ... $\delta M_*(t)$ приведены на фоне графиков функций $a_p(t)$, ... $\delta M_p(t)$. Последние выглядят более плавными. На рис. 4 графики $a_*(t)$, ... $\delta M_*(t)$ приведены рядом с графиками исходных функций $a_1(t)$, ... $\delta M_1(t)$. Здесь при выбранном масштабе рисунка оба набора функций практически совпадают. Следовательно, почти совпадают и упоминавшиеся выше низкочастотные колебательные составляющие в сравниваемых решениях. Чтобы показать различие между тремя типами рассматриваемых функций, на рис. 5 приведены графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$, на рис. 6 – графики разностей $a_1(t) - a_*(t)$, ... $M_1(t) - M_*(t)$. Эти графики служат наглядными оценками точности системы (9).

5.2. Тестирование членов усредненной системы, ответственных за световое давление прямых солнечных лучей и гравитационное притяжение Луны и Солнца. Усредненные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_{a,P}, & \frac{de}{dt} &= F_{e,M} + F_{e,S} + F_{e,P}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,M} + F_{\Omega,S} + F_{\Omega,P}, & \frac{di}{dt} &= F_{i,M} + F_{i,S} + F_{i,P}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,M} + F_{\omega,S} + F_{\omega,P}, & \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,M} + F_{M,S} + F_{M,P}. \end{aligned} \quad (13)$$

Правые части этих уравнений определены соотношениями п.п. 3, 4. Исходным уравнением здесь служит уравнение (2), где теперь

$$\mathbf{w} = \mu_M \left(\frac{\mathbf{D}_M - \mathbf{r}}{|\mathbf{D}_M - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{D}_M}{|\mathbf{D}_M|^3} \right) + \frac{\mu_S}{D_S^3} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} - \mathbf{r}] - w_0 \mathbf{s}, \quad (14)$$

причем $w_0 = 0$ при выполнении неравенства (8) и $w_0 = cp_S$ в противном случае. При $w_0 = 0$ система (13) и уравнение (2), (14) переходят в систему (9) и уравнение (2), (10). Сравнение решений системы (13) и уравнения (2), (14) проведем по схеме предыдущего пункта, приняв $c = 3 \text{ м}^2/\text{кг}$.

Возьмем решение уравнения (2), (14) с начальными условиями из предыдущего пункта. Это решение представлено на рис. 7 графиками функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\delta M(t)$. Рисунок организован аналогично рис. 1. Графики-ломаные построены на равномерной сетке с шагом 5000 с. Аппроксимирующие выражения (11) $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $M_p(t)$ были построены при $K = 150$. Графики этих выражений приведены на рис. 8 (вместо графика $M_p(t)$ изображен график функции $\delta M_p(t)$). При выбранном масштабе рисунков эти графики

сливаются с графиками на рис. 7, поэтому приводим их порознь. Решение системы (13) $a_*(t)$, $e_*(t)$, ... $M_*(t)$, полученное минимизацией функционала (12) при $L=300$ практически совпадает с выражениями $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $M_p(t)$. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$ приведены на рис. 9.

5.3. Тестирование членов усредненной системы, описывающих нецентральность гравитационного поля Земли. Согласно теории Liu [2, 3] усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0, & \frac{de}{dt} &= F_{e,E}(a, e, i, \omega), & \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E}(a, e, i, \omega), \\ \frac{di}{dt} &= F_{i,E}(a, e, i, \omega), & \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E}(a, e, i, \omega), & \frac{dM}{dt} &= n(a) + F_{M,E}(a, e, i, \omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Как уже говорилось, в системе (15) учитывается вторая, третья и четвертая зональные гармоники гравитационного потенциала Земли. Решения этой системы будем сравнивать с решениями уравнения (2), в котором возмущение \mathbf{w} создается нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4). Здесь имеется в виду максимальный порядок сохраняемых гармоник в разложении геопотенциала в ряд по шаровым функциям. Систему (15) будем рассматривать на низких околоземных орбитах, где нецентральность поля наиболее заметна. Начальные условия уравнения (2) зададим в восходящем узле орбиты тела в момент $t_0 = 0^h$ UTC 27.12.2008 и определим соотношениями: радиус перигея $r_\pi = r_E + 200$ км, радиус апогея $r_\alpha = r_E + 400$ км, $\Omega = 150^\circ$, $i = 51^\circ$, $\omega = 30^\circ$. Графики функций $a_1(t)$, $e_1(t)$, ... $\delta M(t)$ для этого решения на отрезке времени длиной $T = 360$ сут приведены на рис. 10. Как и в предыдущих случаях, графики суть ломаные, абсциссы вершин которых образуют равномерную сетку на оси t , а ординаты суть значения элементов орбиты и величины δM в узлах сетки. В данном случае шаг сетки 1000с. Аппроксимирующие выражения $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $M_p(t)$ были построены при $K = 40$, функционал (12) минимизировался при $L = 200$. Графики функций $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $\delta M_p(t)$ и $a_*(t)$, $e_*(t)$, ... $\delta M_*(t)$ приведены на рис. 11. На вид заметно отличаются только графики функций $a_p(t)$ и $a_*(t)$ – последняя постоянна. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$ приведены на рис. 12.

5.4. Тестирование усредненной системы, описывающей движение низкоорбитального спутника. Усредненную систему запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= F_{a,A}, & \frac{de}{dt} &= F_{e,E} + F_{e,A}, & \frac{d\Omega}{dt} &= F_{\Omega,E} + F_{\Omega,A}, \\ \frac{di}{dt} &= F_{i,E} + F_{i,A}, & \frac{d\omega}{dt} &= F_{\omega,E} + F_{\omega,A}, & \frac{dM}{dt} &= n + F_{M,E} + F_{M,A}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решения этой системы будем сравнивать с решениями уравнения (2), в которых возмущение w создается нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4) и сопротивлением атмосферы (см. п. 2). Выбор параметров системы (16) и уравнения (2) следующий: баллистический коэффициент спутника $c = 0.003 \text{ м}^2/\text{кг}$, параметры атмосферы $F_{81} = 120$, $F_{10.7} = 135$, $K_p = 5$. Эти параметры принимались неизменными на всем интервале интегрирования системы (16) и уравнения (2).

Сравнение решений уравнений (16) и (2) проведем по схеме, описанной в п.п. 5.1 – 5.3. Возьмем решение уравнений (2) с начальными условиями из п. 5.3. Это решение представлено на рис. 13. Графики-ломаные построены на равномерной сетке с шагом 1000 с. Аппроксимирующие выражения $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$, $\omega_p(t)$, $M_p(t)$ были построены при $K = 20$, функционал (12) минимизировался при $L = 200$. Графики функций $a_p(t)$, $e_p(t)$, ... $\delta M_p(t)$ и $a_*(t)$, $e_*(t)$, ... $\delta M_*(t)$ приведены на рис. 14. Оба набора функций достаточно точно совпадают. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, ... $M_p(t) - M_*(t)$ приведены на рис. 15.

6. Заключение. Проведенное исследование показало, что выбранная форма усредненных уравнений в оскулирующих элементах обеспечивает правильное качественное и достаточно точное количественное описание эволюции движения космических объектов в околоземном пространстве. Уравнения допускают быстрое численное интегрирование на персональном компьютере и могут быть использованы для исследования длительной эволюции во времени движения частиц космического мусора.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00566).

Литература

1. Дубошин Г.Н. (ред.). Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике. М., Наука, 1976.
2. Liu J.J.F. Satellite motion about an oblate Earth. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 11, pp. 1511-1516.
3. Liu J.J.F., Alford R.L. Semianalytic theory for a close-Earth artificial satellite. J. Guidance and Control, 1980, vol. 3, No. 4, pp. 304-311.
4. Allan R.R. Satellite orbit perturbations due to radiation pressure and luni-solar forces. Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 1962, vol. 15, pt. 3, pp. 283-301.
5. ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли.
6. Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.

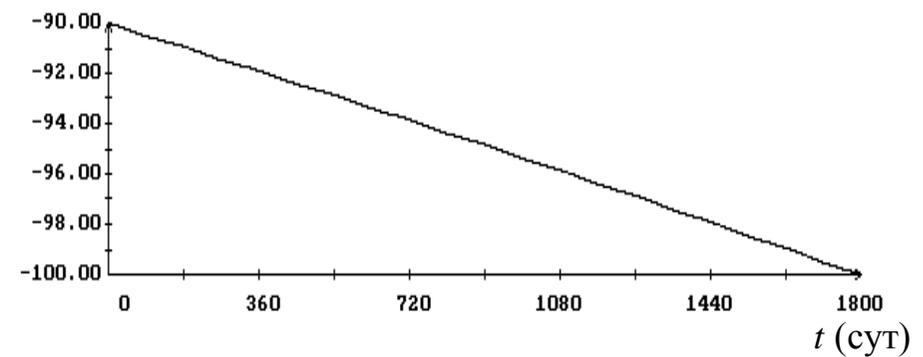
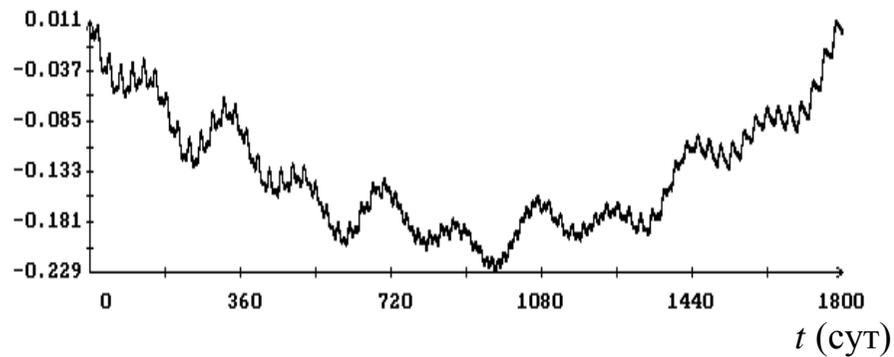
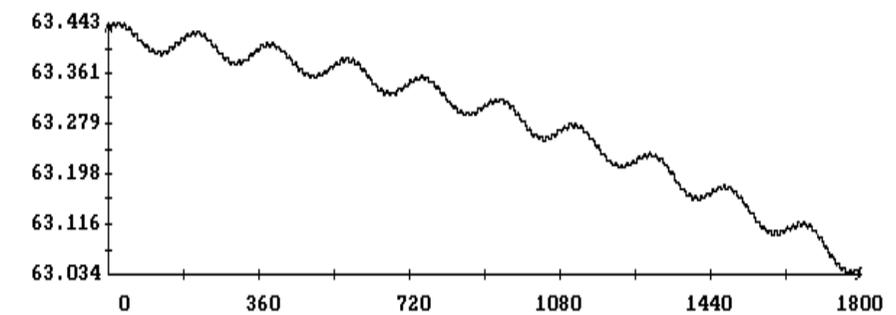
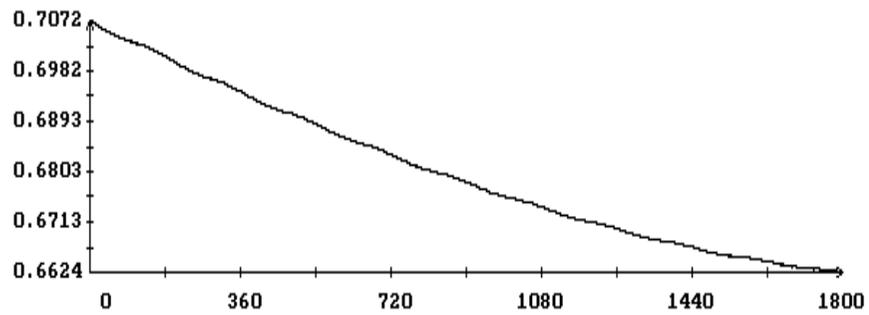
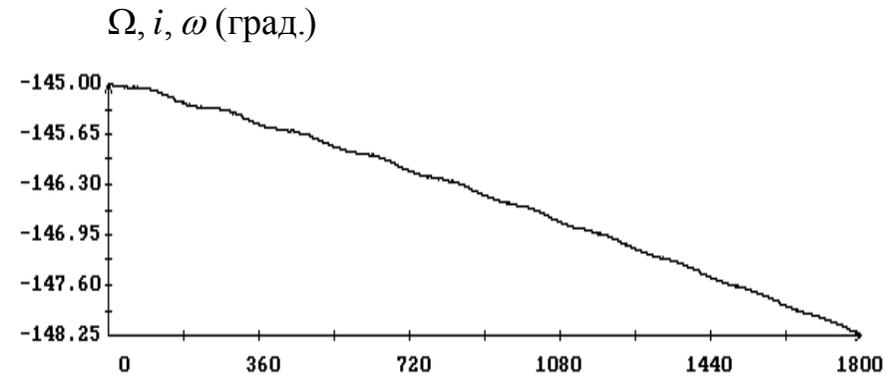
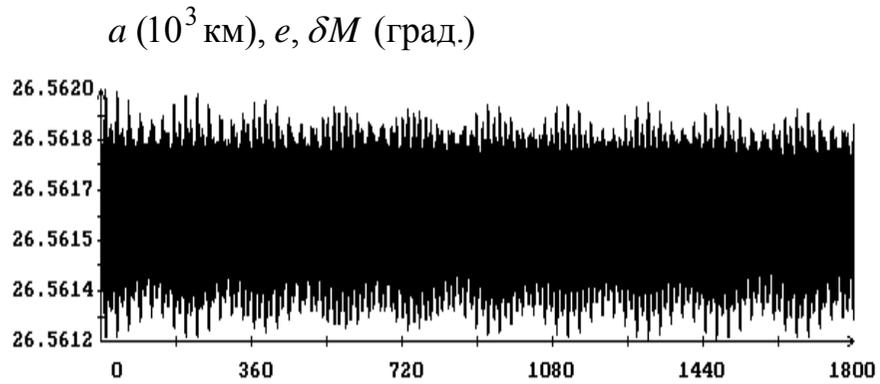


Рис. 1. Изменение элементов орбиты a , e , Ω , i , ω вдоль решения уравнения (2), (10) и функция $\delta M(t)$.

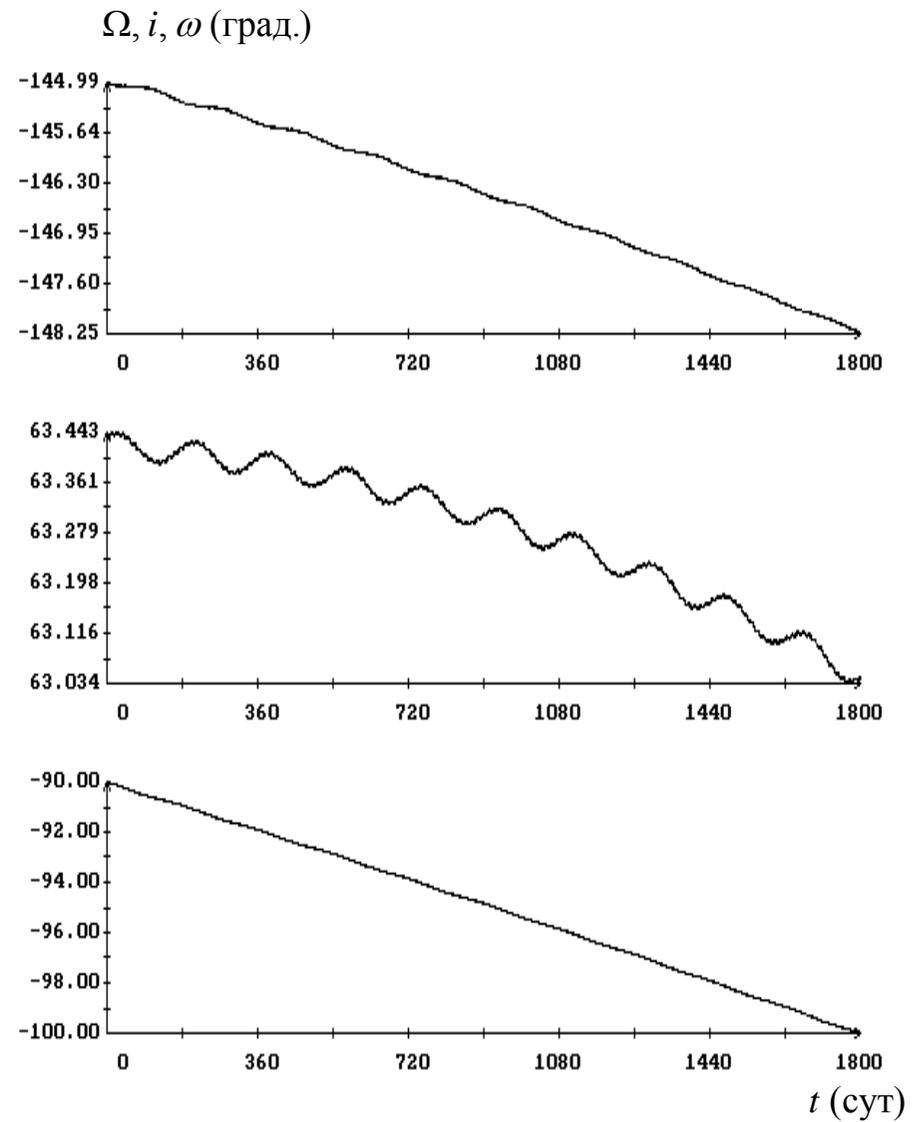
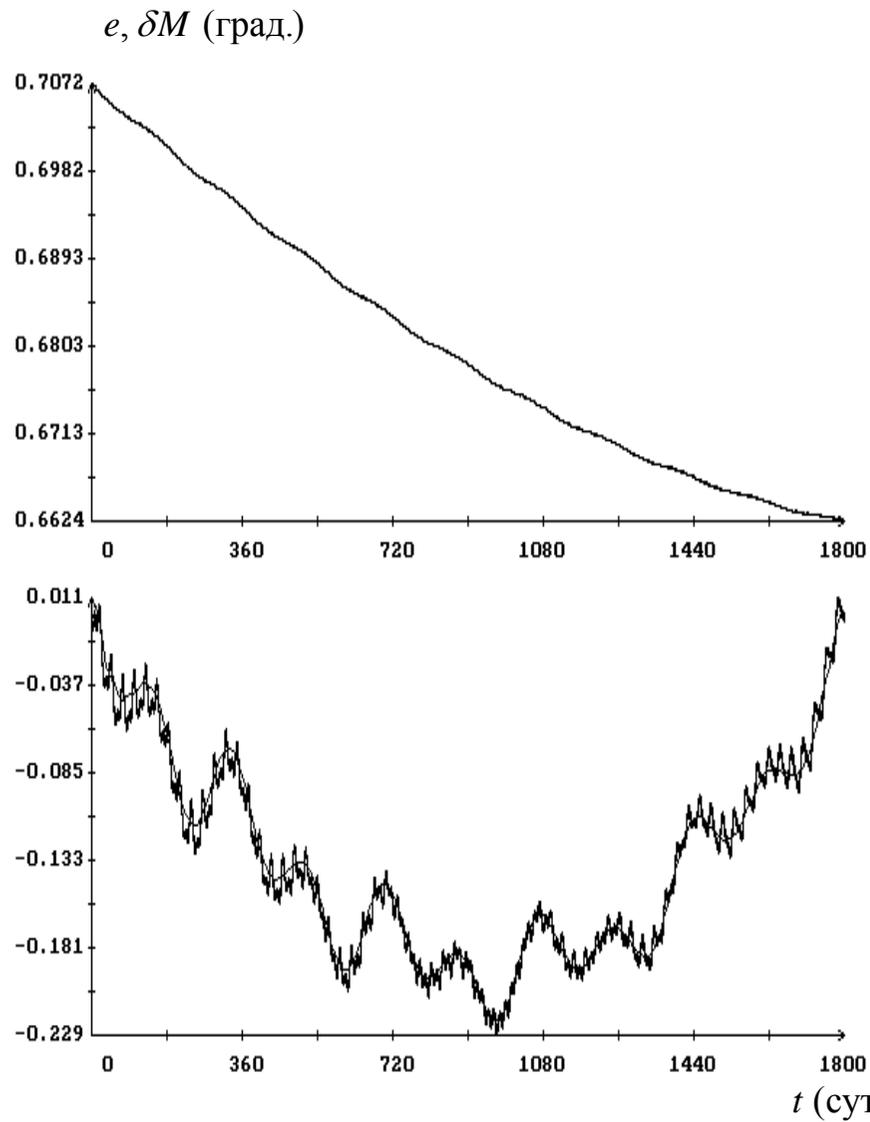


Рис. 2. Изменение элементов орбиты e, Ω, i, ω вдоль решения уравнения (2), (10) и функция $\delta M(t)$; аппроксимация этих элементов выражениями (11) и функция $\delta M_p(t)$.

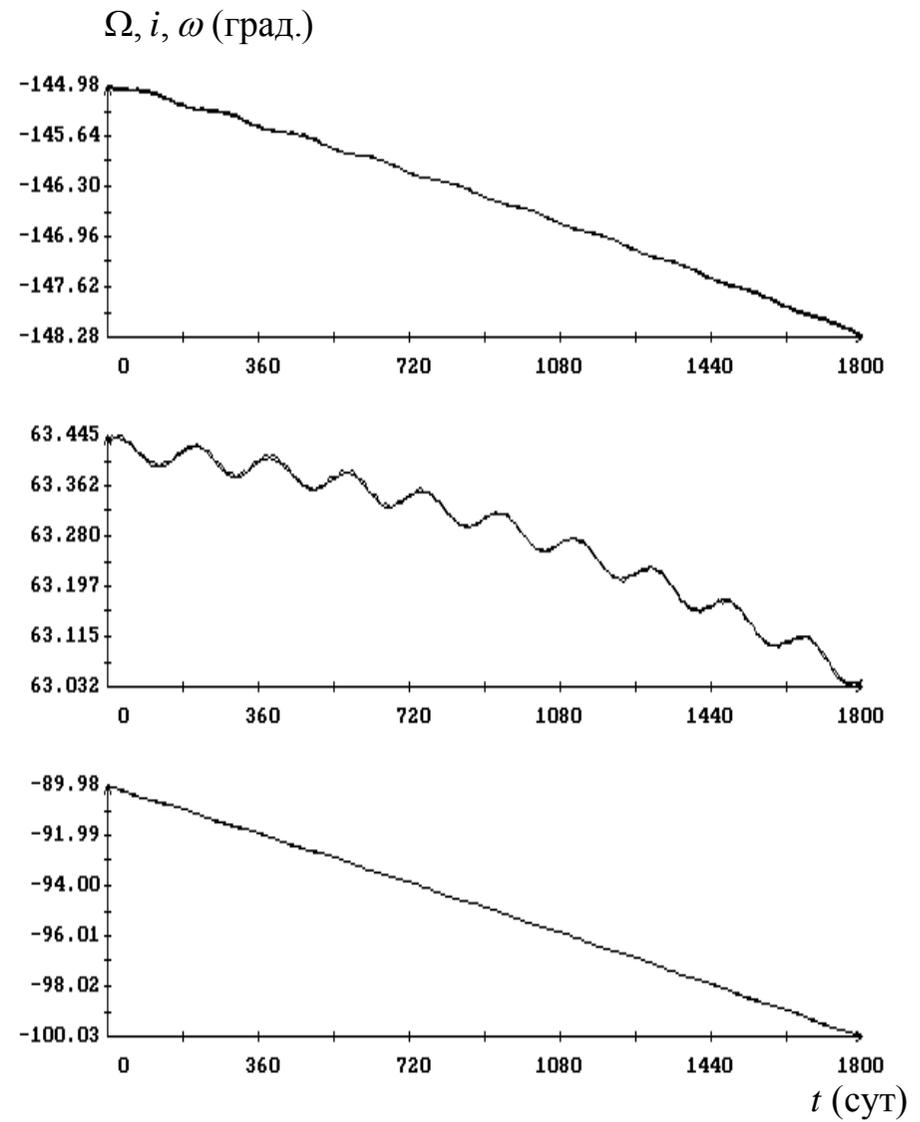
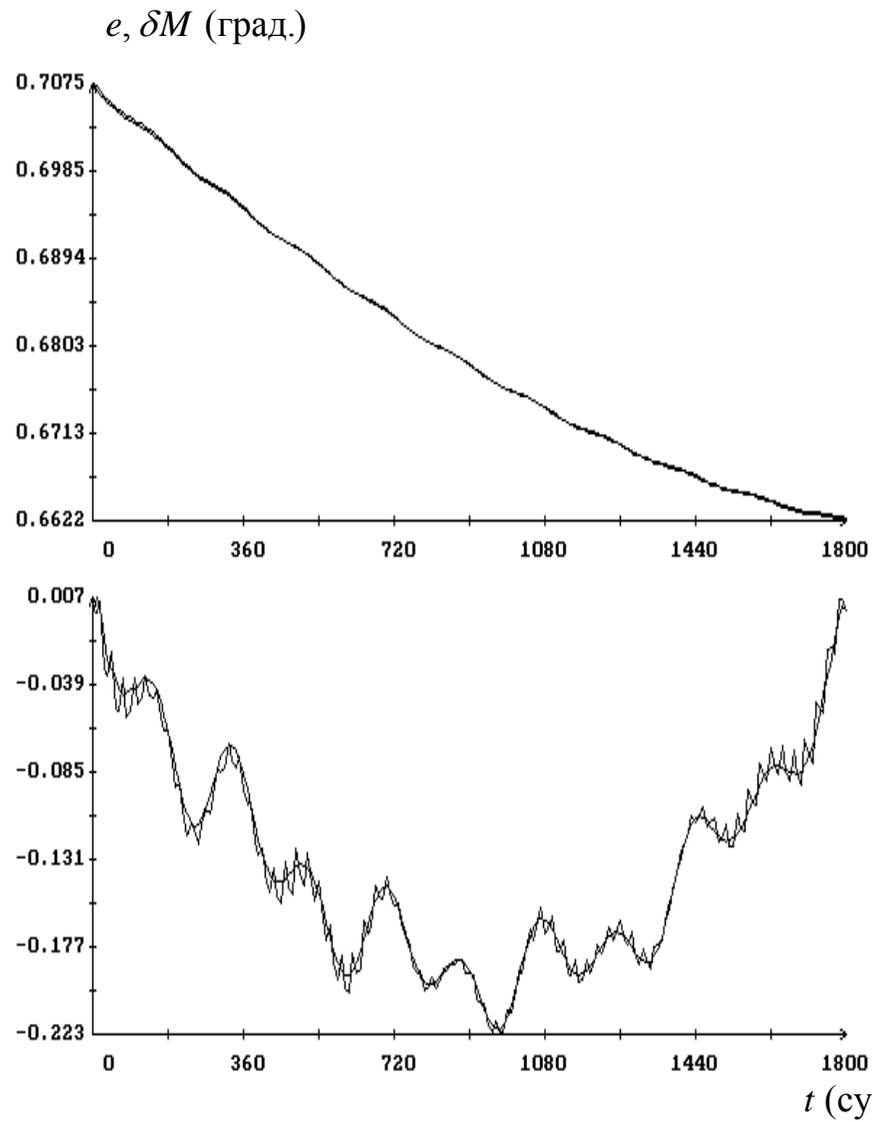


Рис. 3. Графики функций $e_p(t), \delta M_p(t), \Omega_p(t), i_p(t), \omega_p(t)$ и $e_*(t), \delta M_*(t), \Omega_*(t), i_*(t), \omega_*(t)$. Случай системы (9).

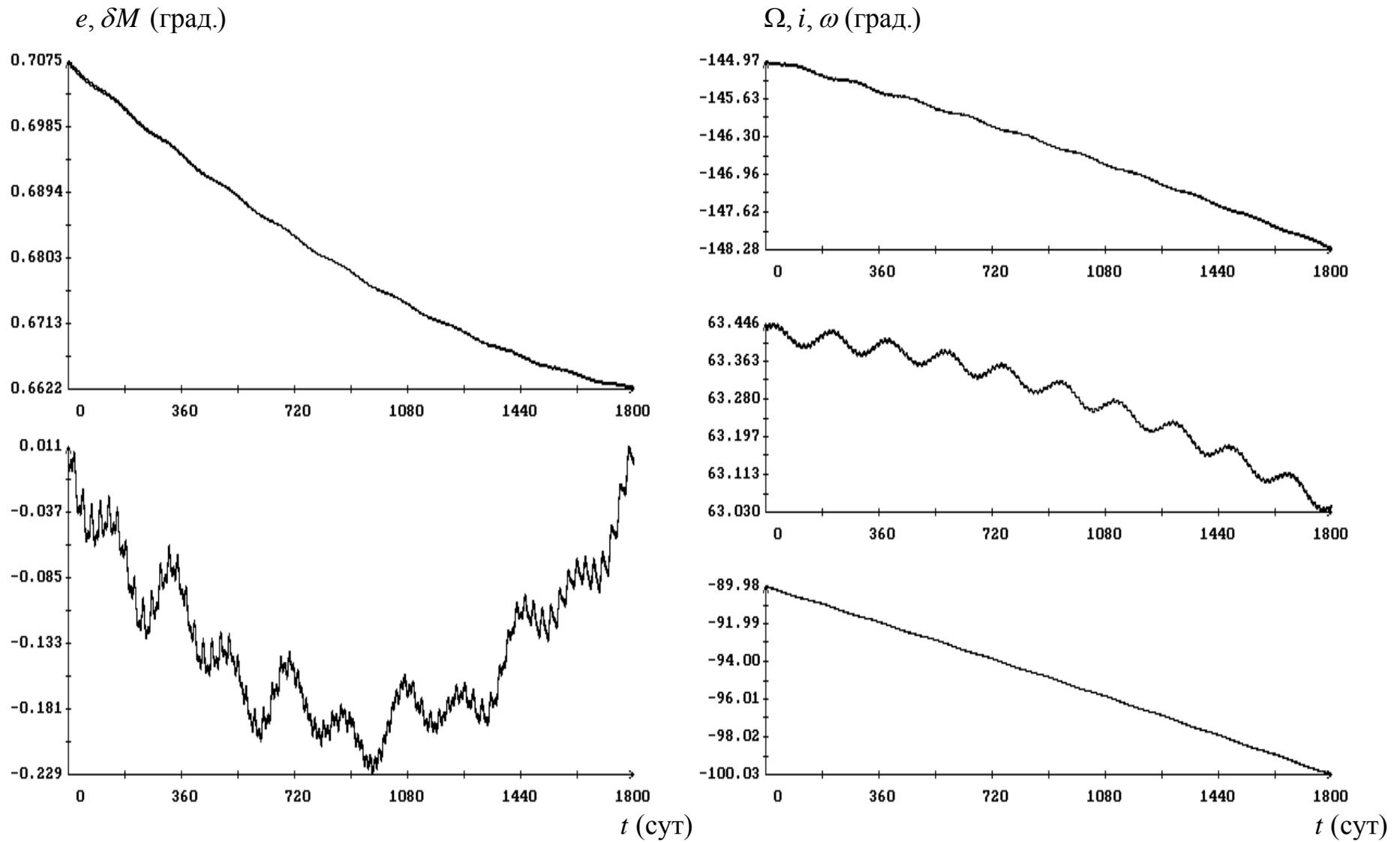
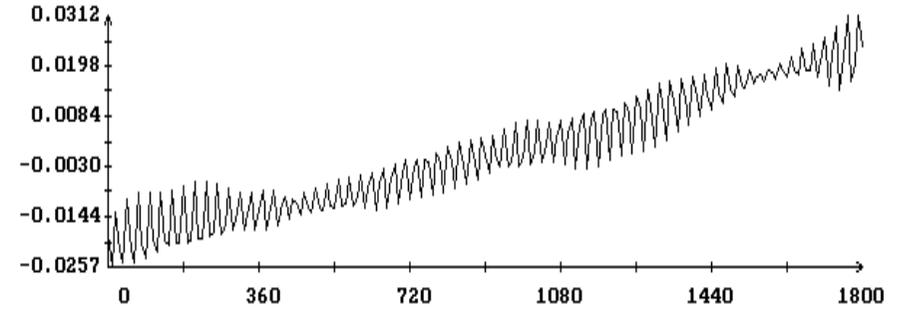
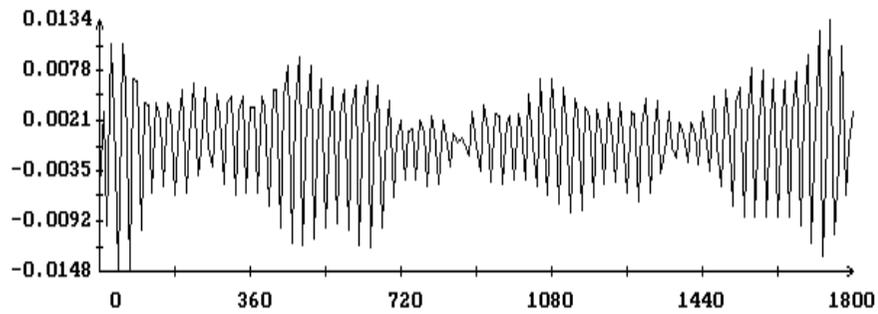
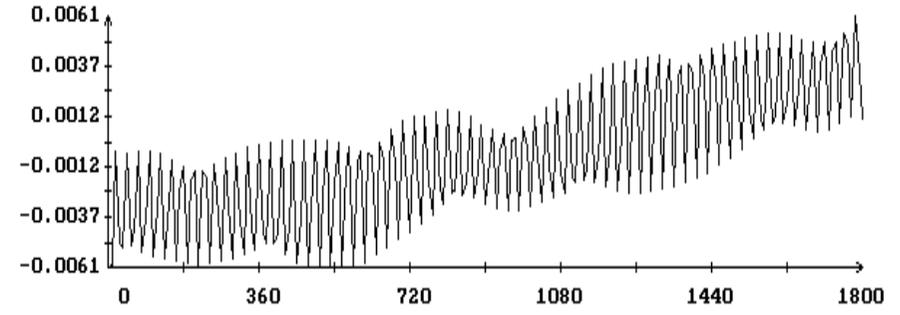
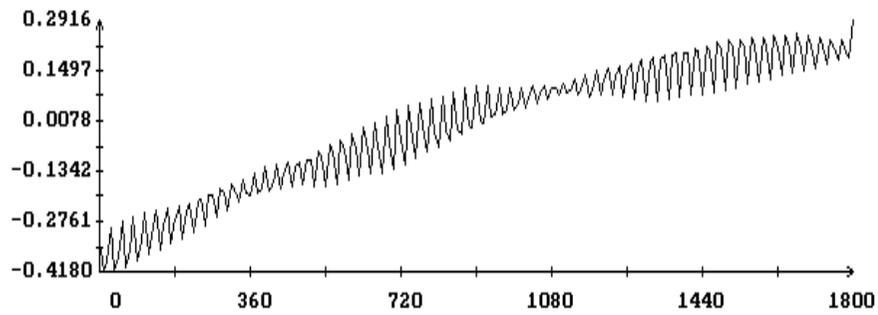
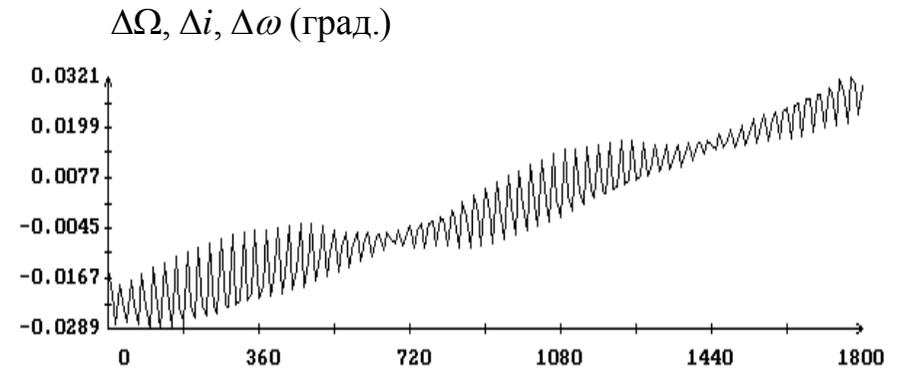
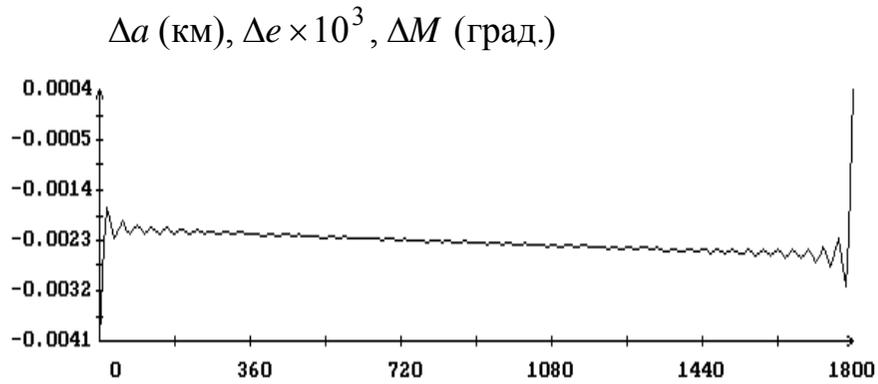


Рис. 4. Изменение элементов орбиты e, Ω, i, ω и величины δM вдоль решения уравнения (2), (10); решение системы (9) для переменных e, Ω, i, ω и величина $\delta M_*(t)$.



t (сут)

t (сут)

Рис. 5. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, $e_p(t) - e_*(t)$, $M_p(t) - M_*(t)$, $\Omega_p(t) - \Omega_*(t)$, $i_p(t) - i_*(t)$, $\omega_p(t) - \omega_*(t)$.

Случай системы (9).

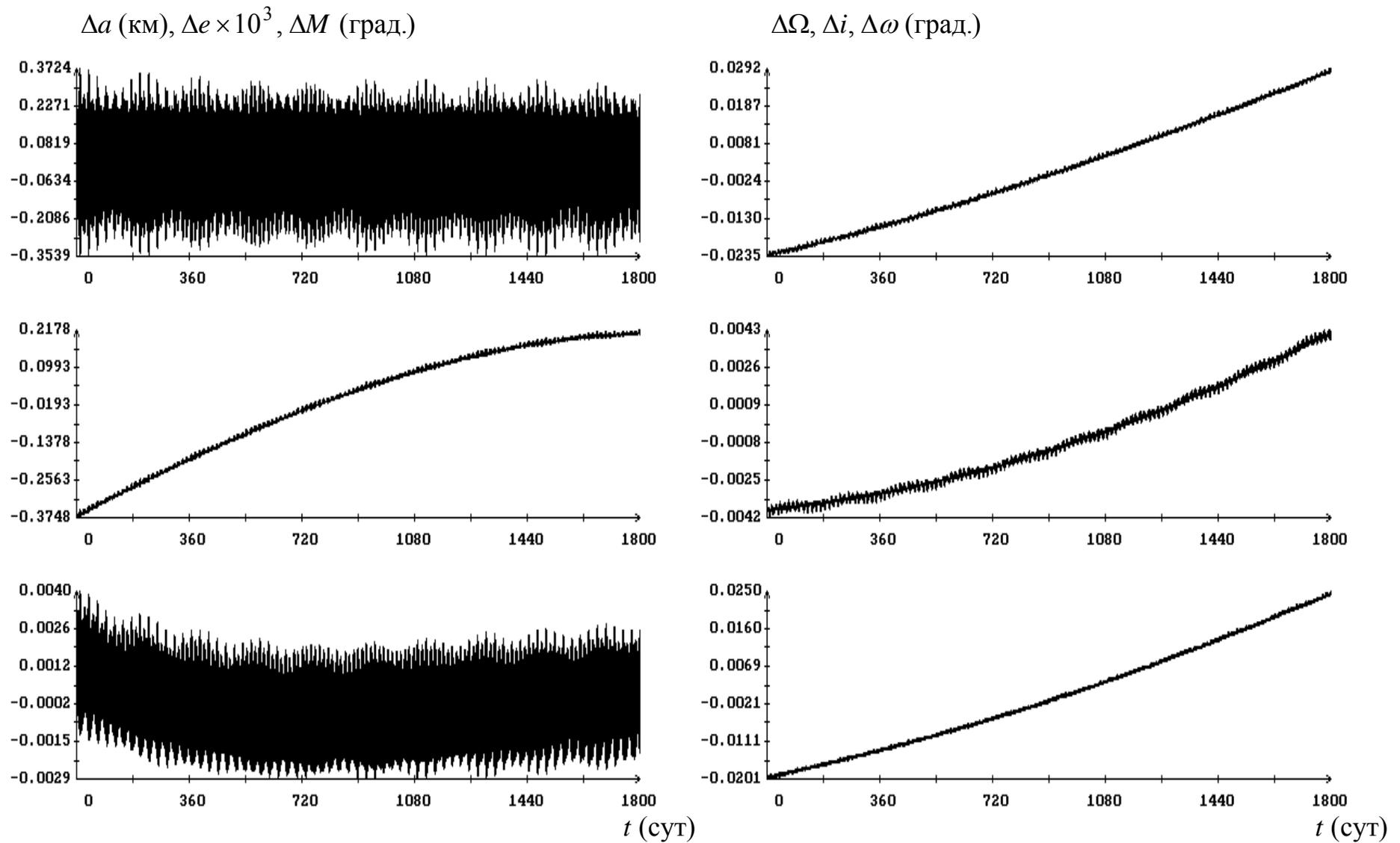


Рис. 6. Графики разностей $a_1(t) - a_*(t)$, $e_1(t) - e_*(t)$, $M_1(t) - M_*(t)$, $\Omega_1(t) - \Omega_*(t)$, $i_1(t) - i_*(t)$, $\omega_1(t) - \omega_*(t)$.
Случай уравнения (2), (10) и системы (9).

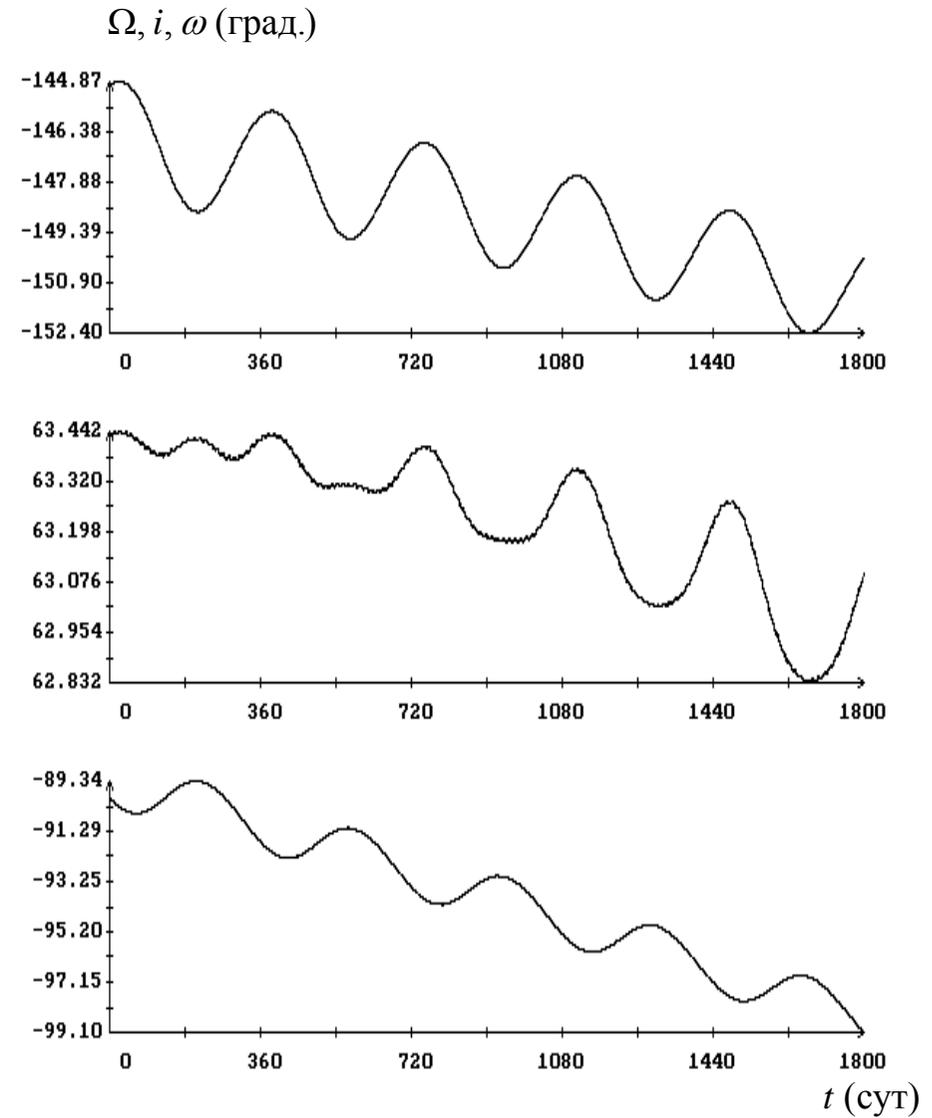
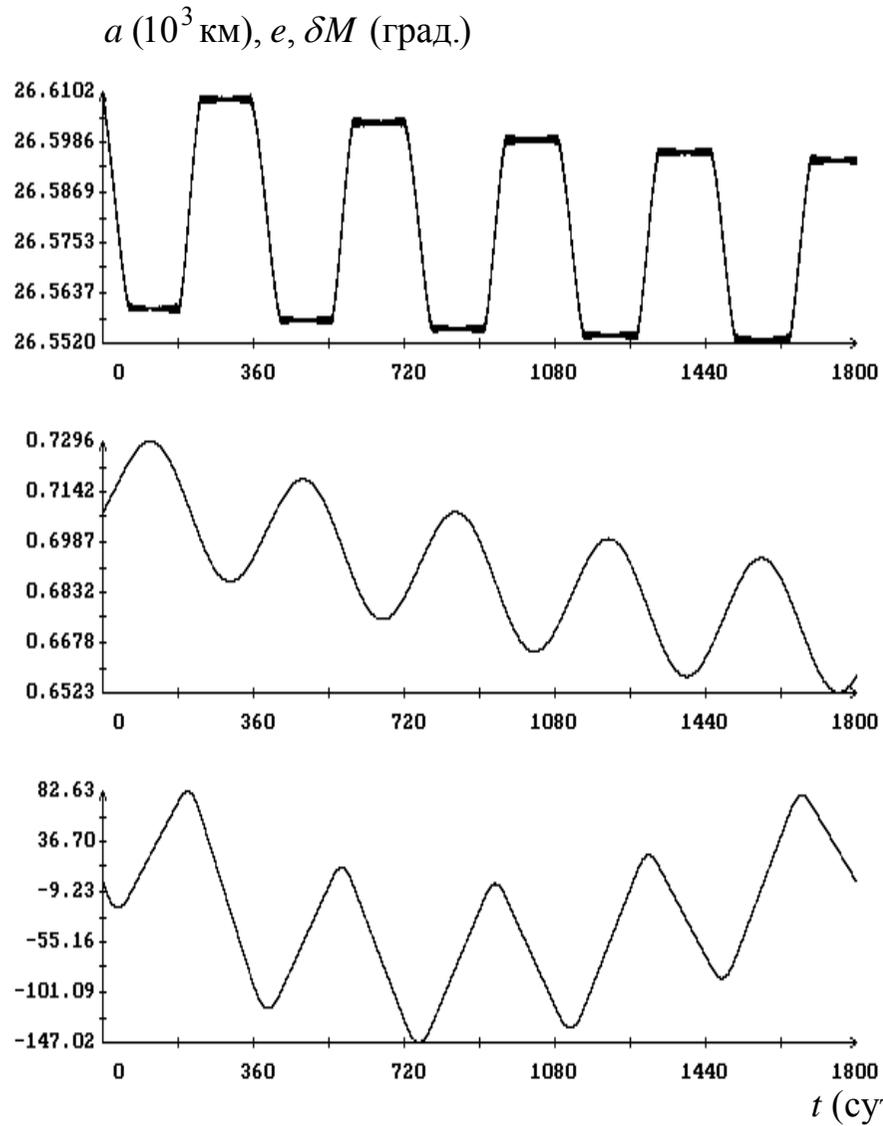


Рис. 7. Изменение элементов орбиты вдоль решения уравнения (2), (14) и функция $\delta M(t)$.

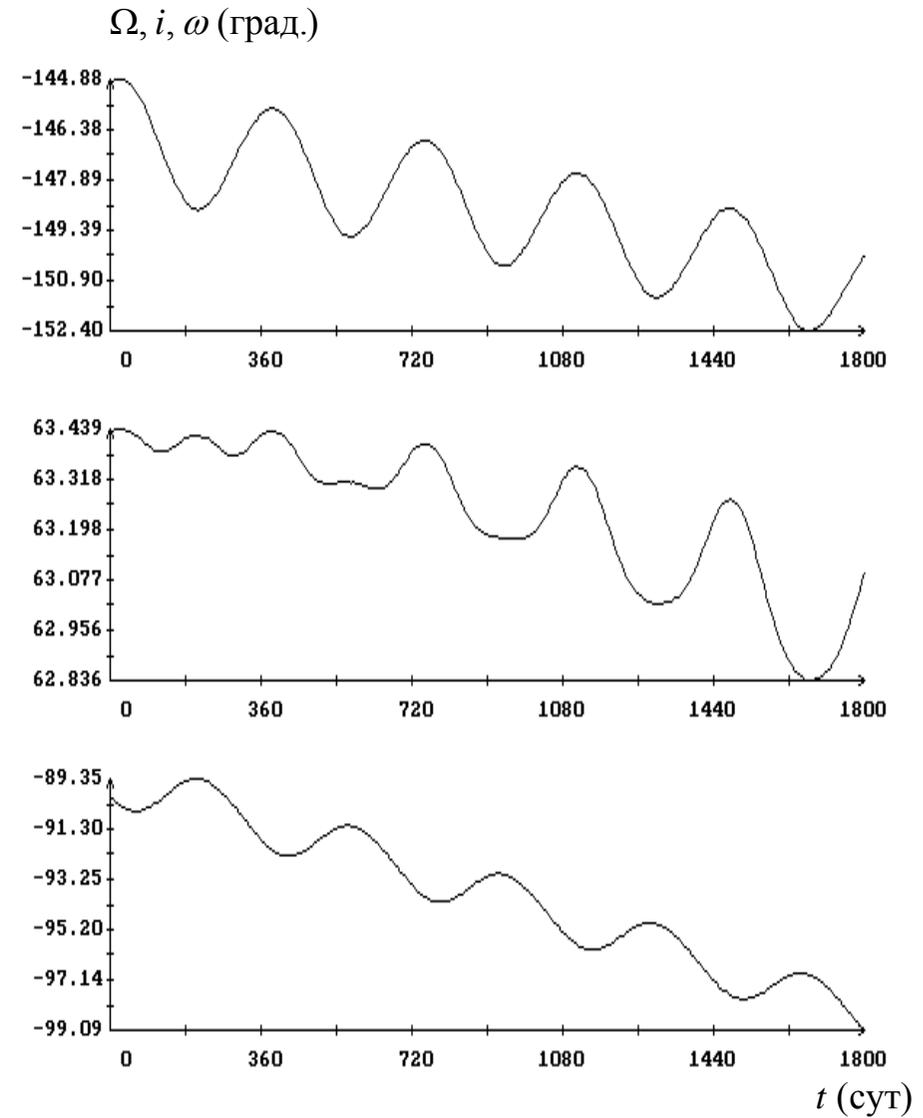
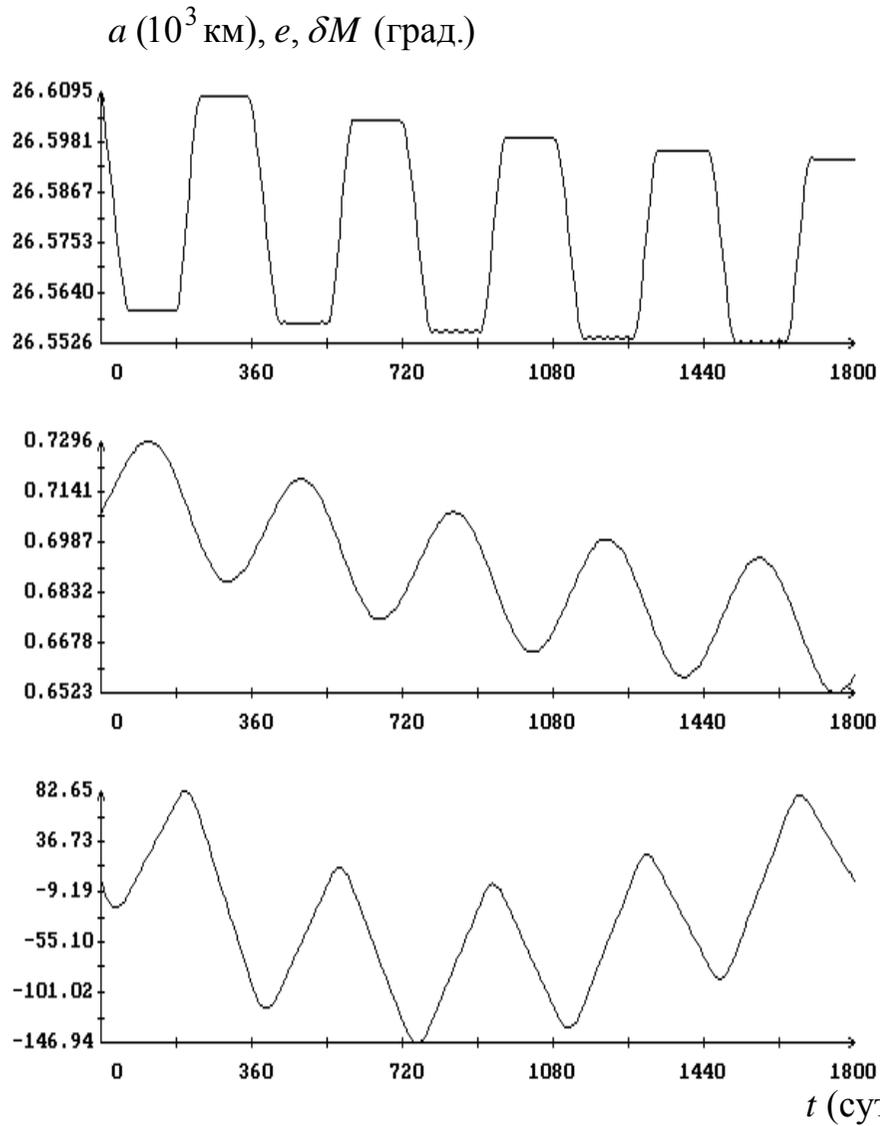


Рис. 8. Графики функций $a_p(t)$, $e_p(t)$, $\delta M_p(t)$, $\Omega_p(t)$, $i_p(t)$ и $\omega_p(t)$, построенных для решения уравнения (2), (14).

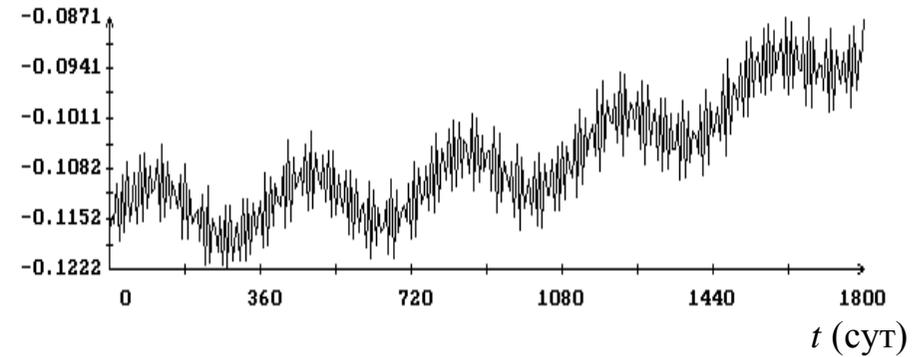
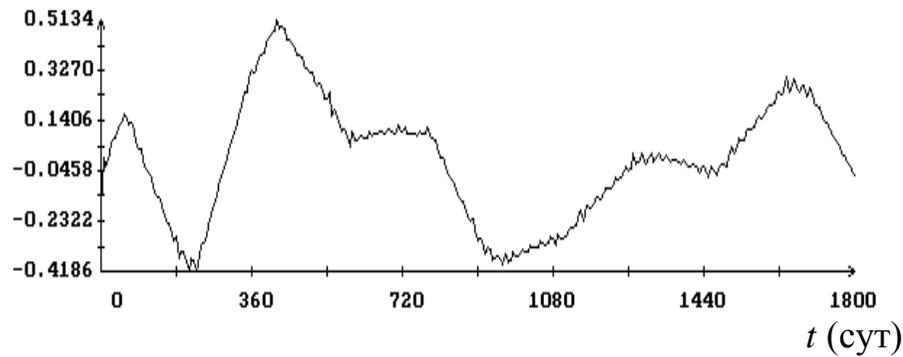
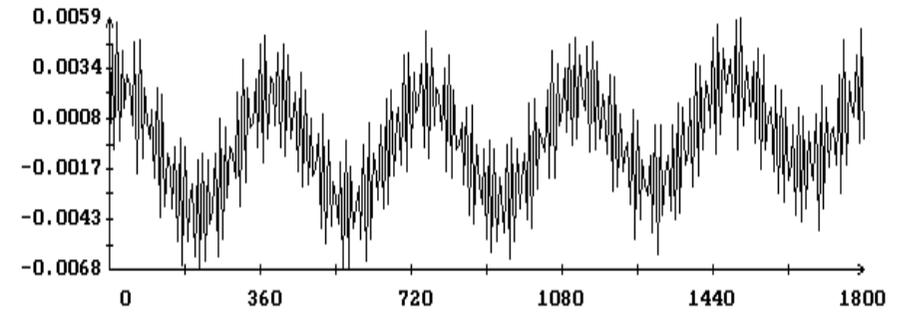
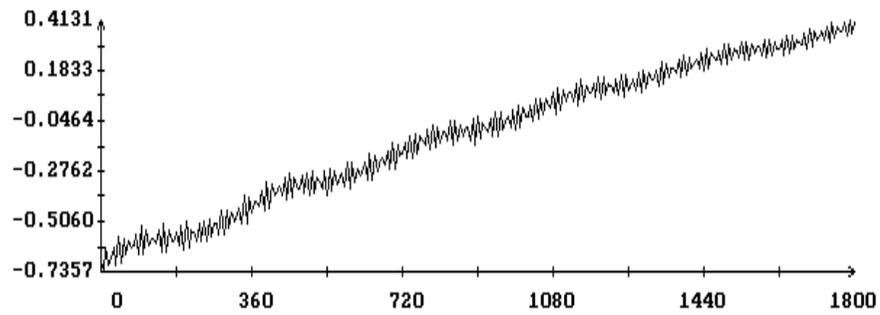
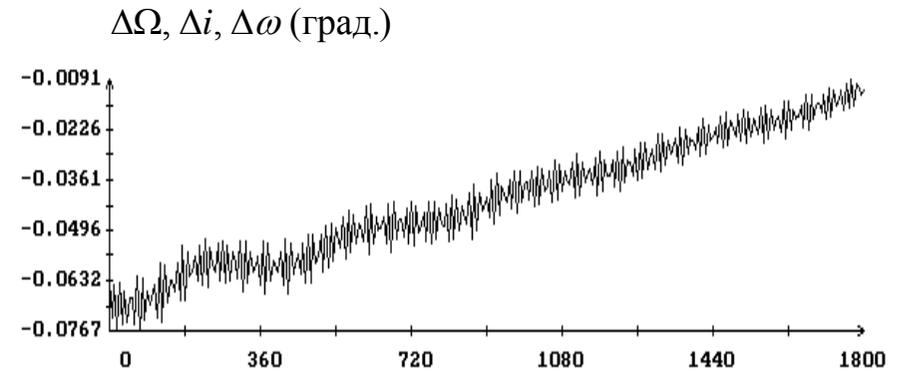
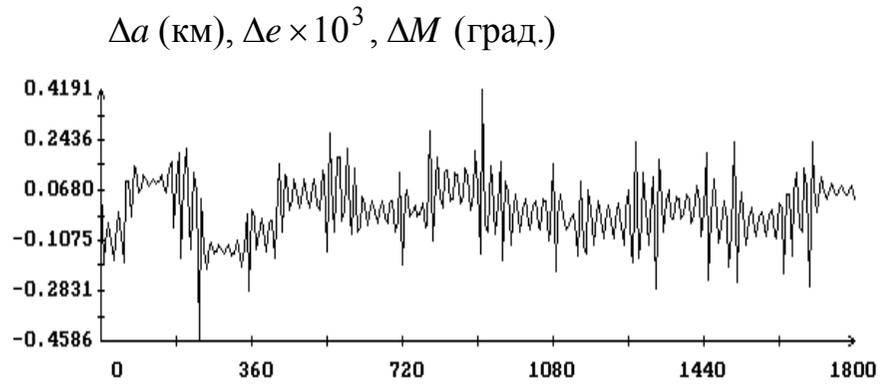


Рис. 9. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, $e_p(t) - e_*(t)$, $M_p(t) - M_*(t)$, $\Omega_p(t) - \Omega_*(t)$, $i_p(t) - i_*(t)$, $\omega_p(t) - \omega_*(t)$.
Случай системы (13).

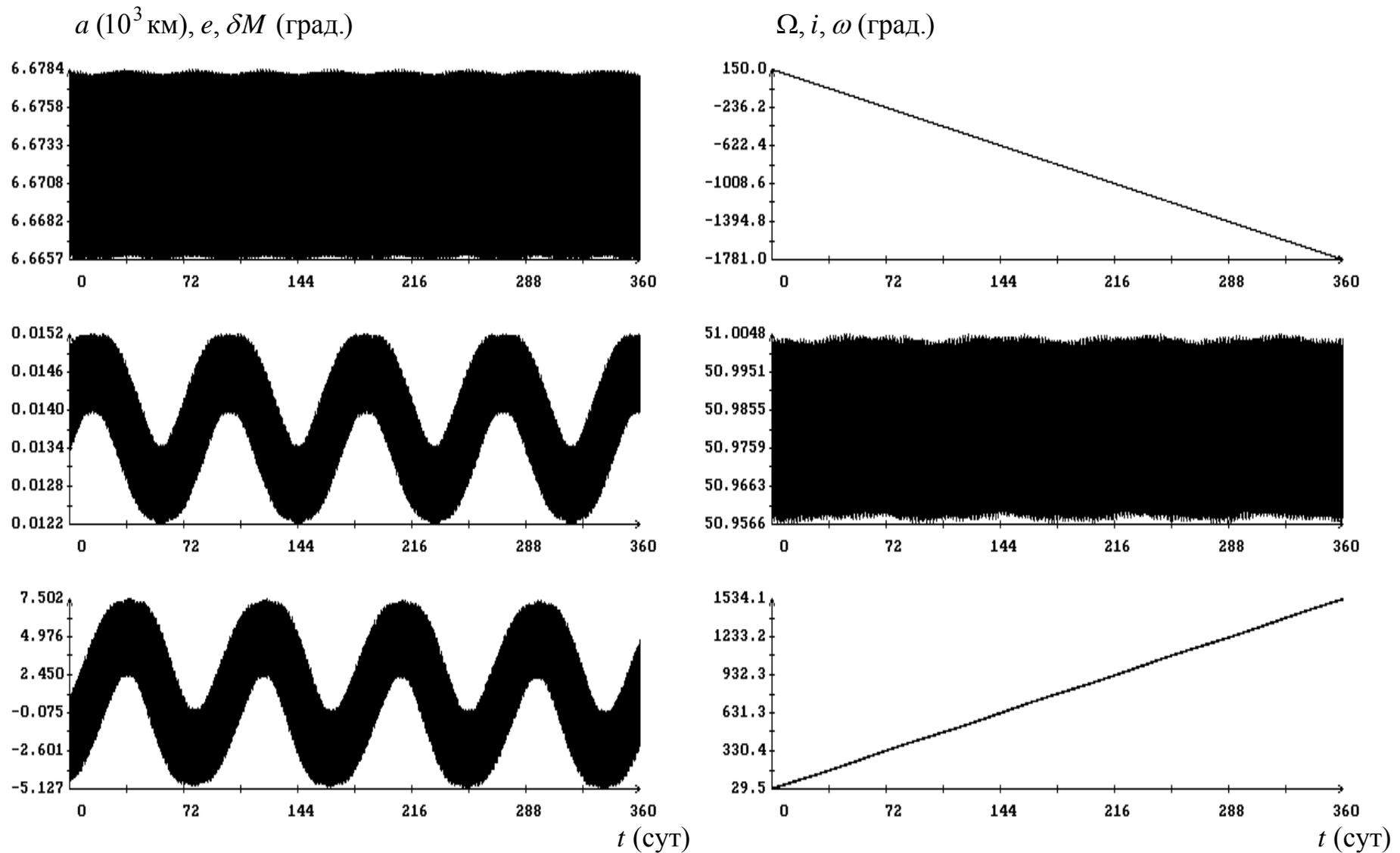


Рис. 10. Изменение элементов орбиты вдоль решения уравнения (2), в котором возмущение w создается нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4), и функция $\delta M(t)$.

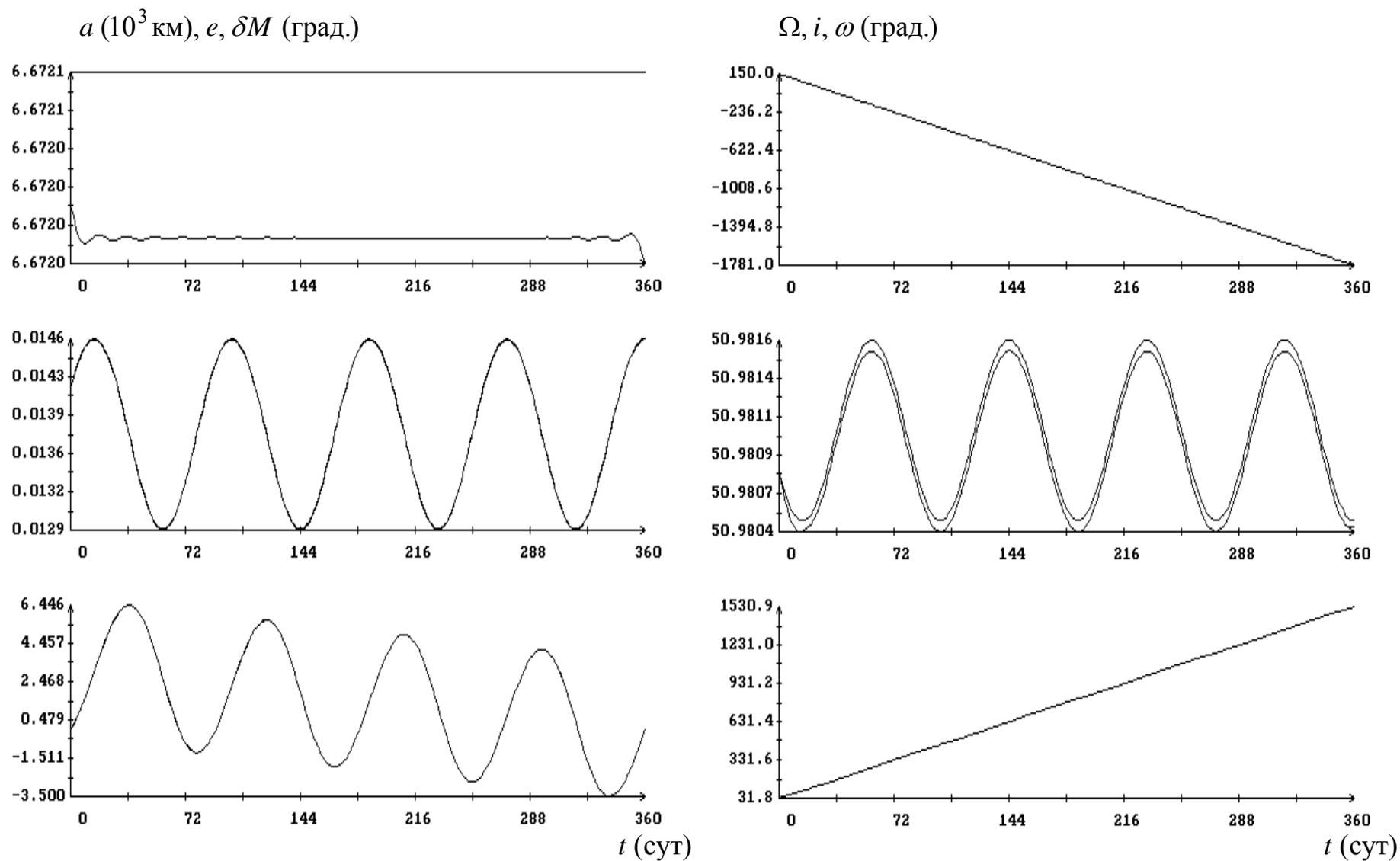


Рис. 11. Решение системы (15), подогнанное к аппроксимации элементов орбиты, вычисленных вдоль решения уравнения (2).

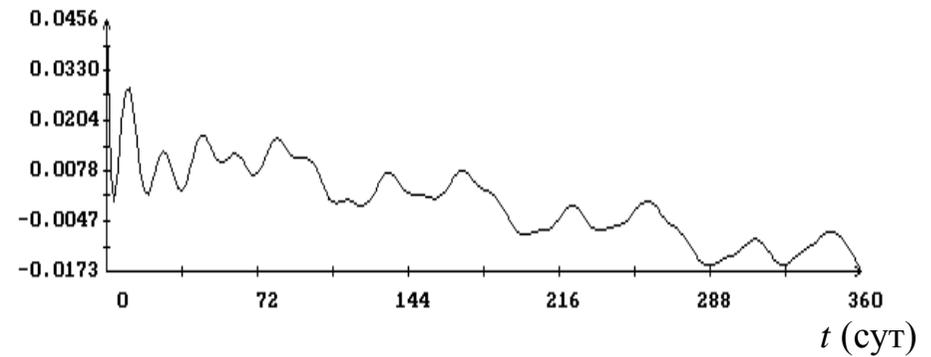
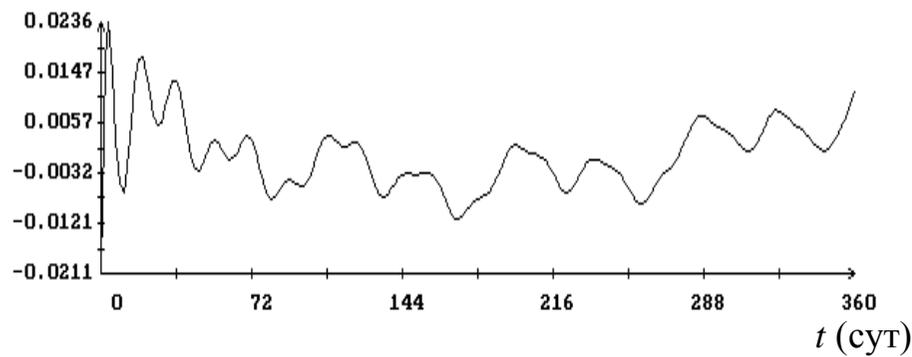
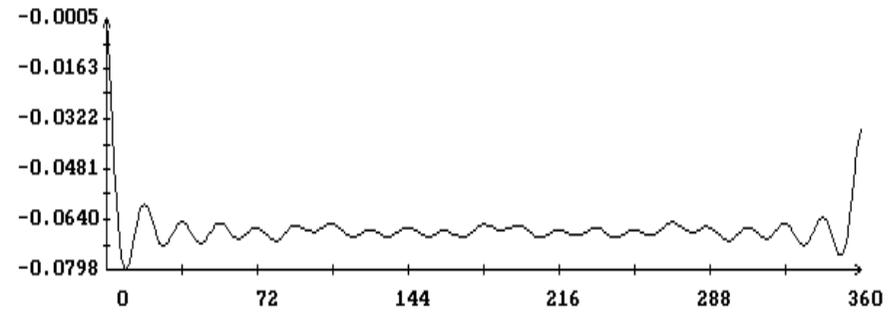
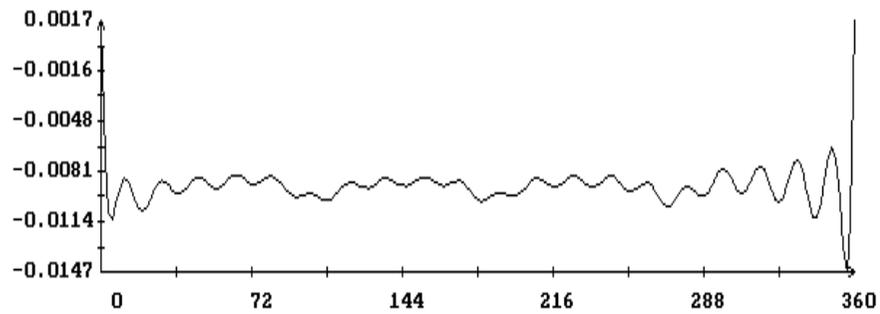
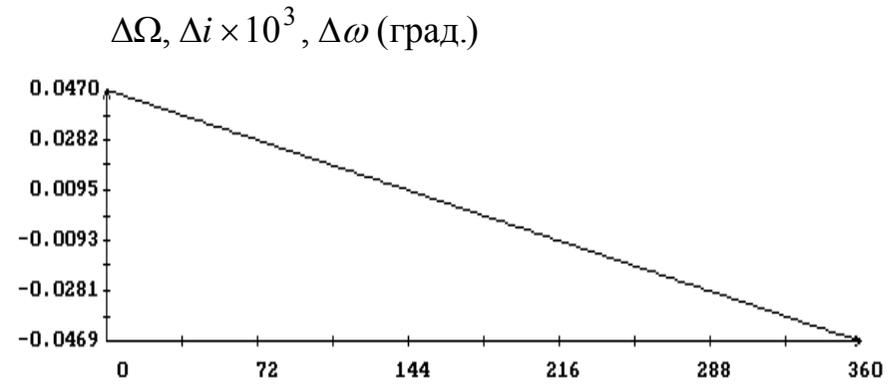
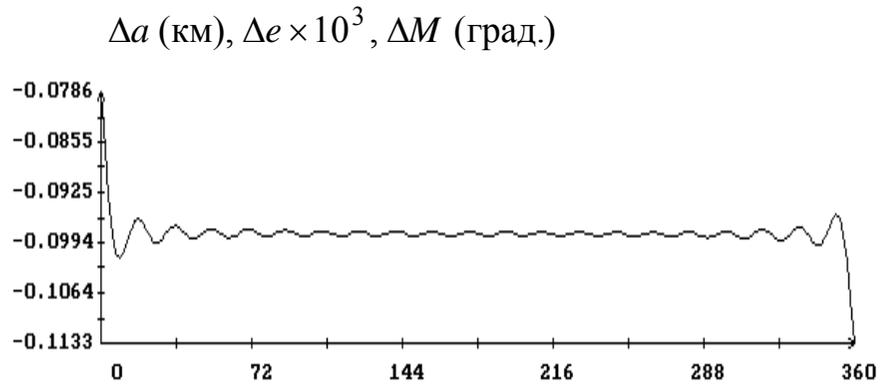


Рис. 12. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, $e_p(t) - e_*(t)$, $M_p(t) - M_*(t)$, $\Omega_p(t) - \Omega_*(t)$, $i_p(t) - i_*(t)$, $\omega_p(t) - \omega_*(t)$.
Случай системы (15).

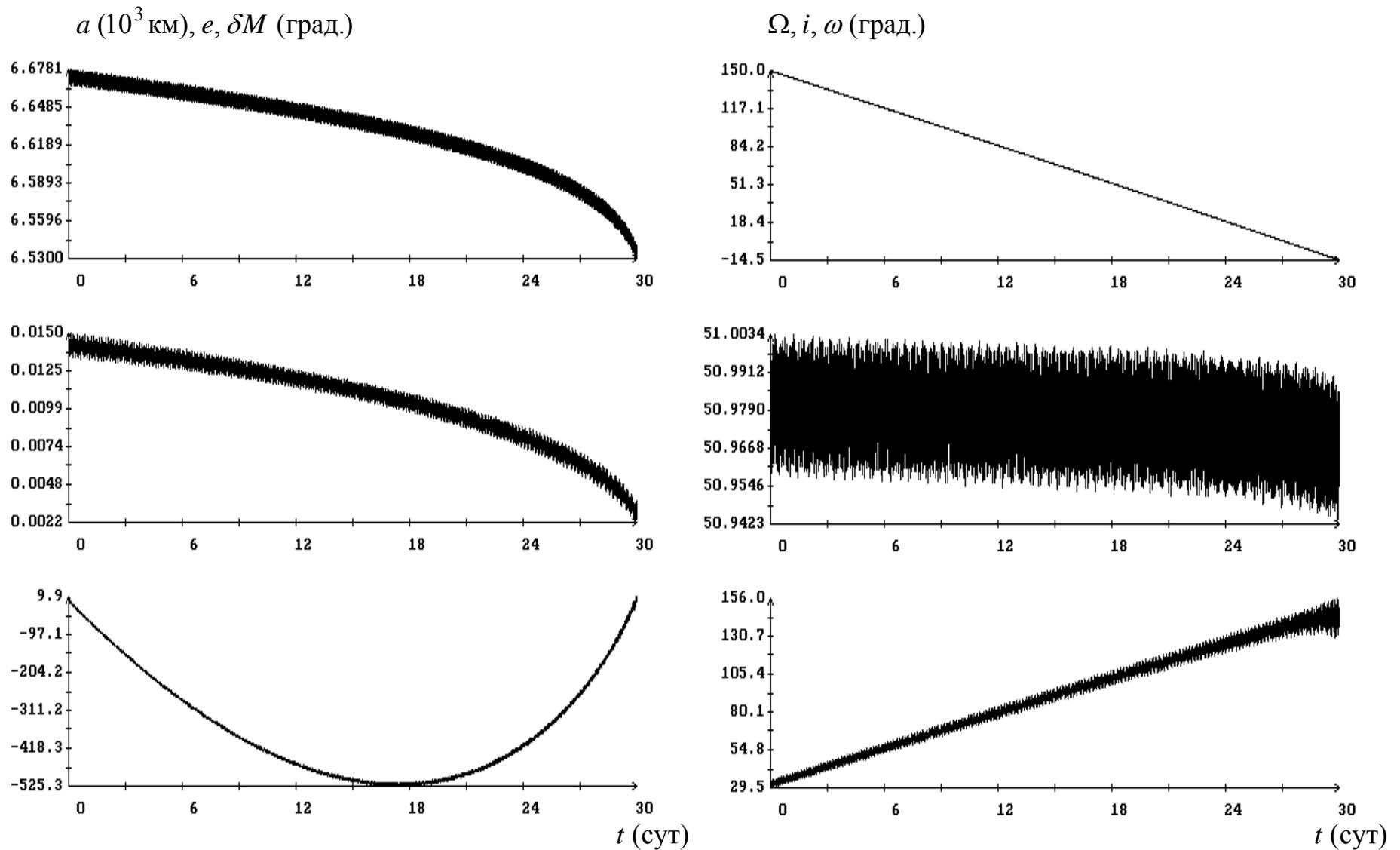


Рис. 13. Изменение элементов орбиты вдоль решения уравнения (2), в котором возмущение \mathbf{w} создается нецентральностью гравитационного поля Земли порядка (4,4) и сопротивлением атмосферы; функция $\delta M(t)$.

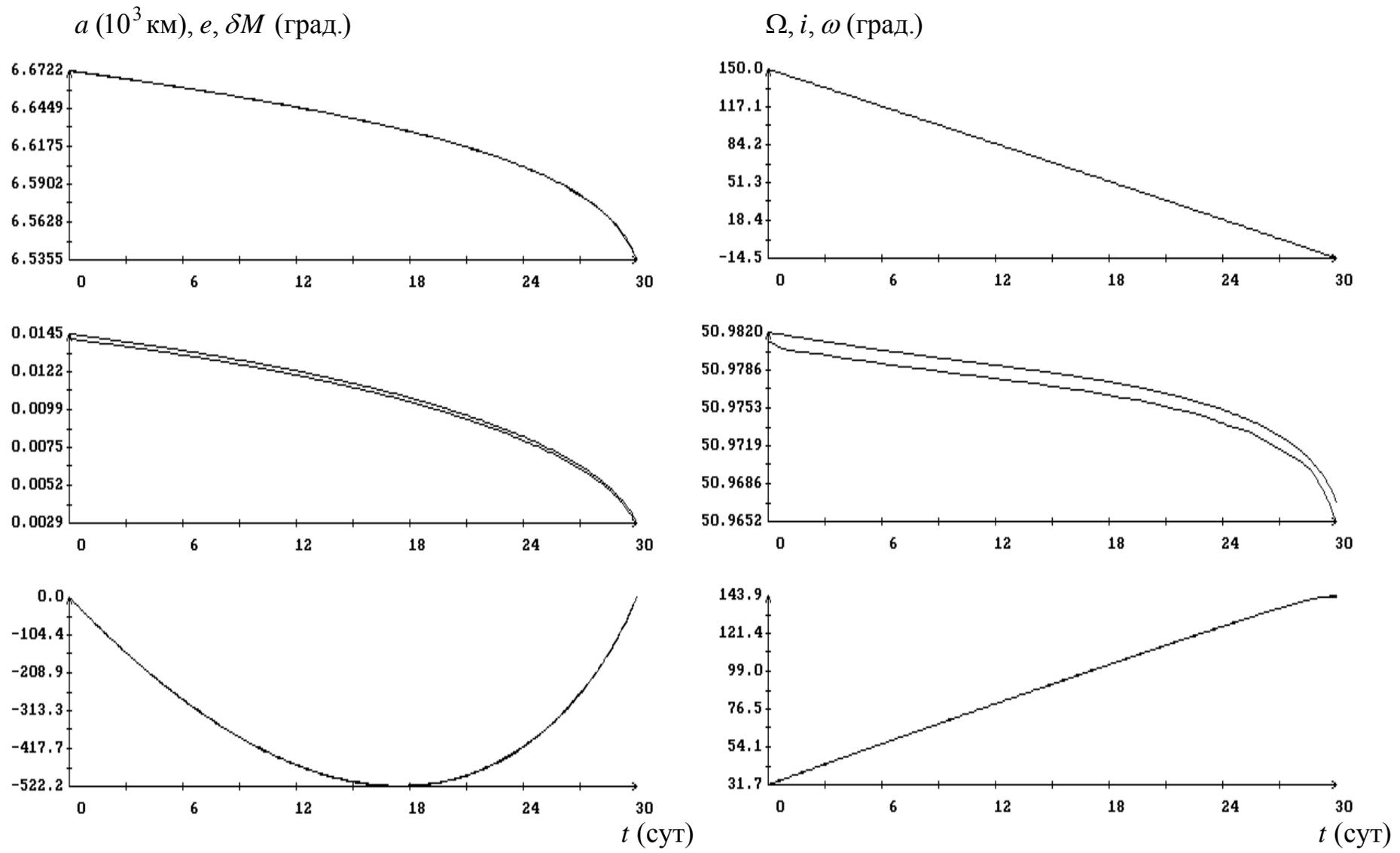


Рис. 14. Решение системы (16), подогнанное к аппроксимации элементов орбиты, вычисленных вдоль решения уравнения (2).

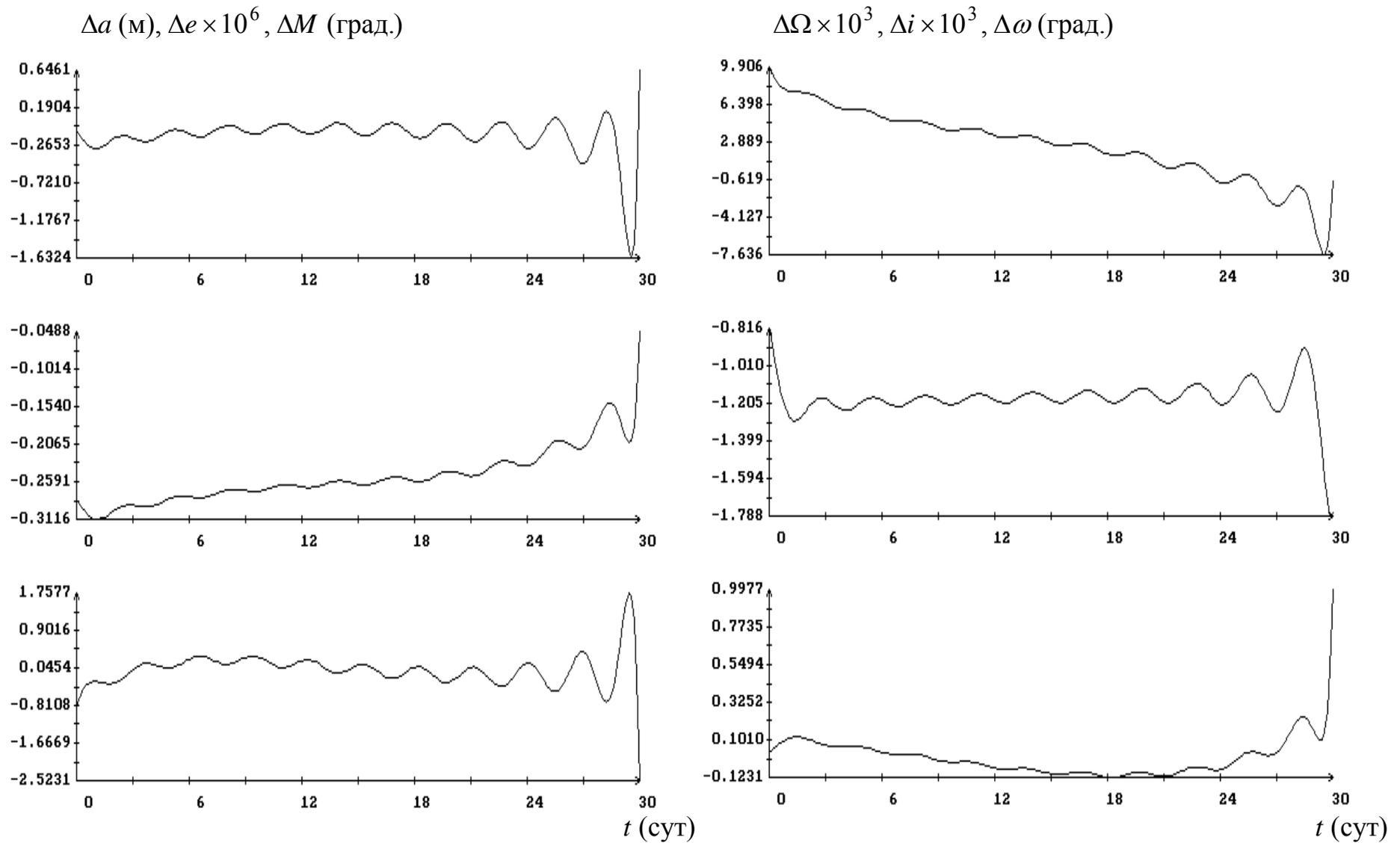


Рис. 15. Графики разностей $a_p(t) - a_*(t)$, $e_p(t) - e_*(t)$, $M_p(t) - M_*(t)$, $\Omega_p(t) - \Omega_*(t)$, $i_p(t) - i_*(t)$, $\omega_p(t) - \omega_*(t)$.
Случай системы (16).