ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2009 г.

Волобой А.Г., Ершов С.В.,
Поздняков С.Г.

Решение дифракционной задачи для моделирования освещения тонкого красящего слоя

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Волобой А.Г., Ершов С.В., Поздняков С.Г. Решение дифракционной задачи для моделирования освещения тонкого красящего слоя // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 75. 22 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-75

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

Волобой А.Г., Ершов С.В., Поздняков С.Г.

Решение дифракционной задачи для моделирования освещения тонкого красящего слоя

Москва
2009

Волобой А.Г., Ершов С.В., Поздняков С.Г.

Решение дифракционной задачи для моделирования освещения тонкого красящего слоя

Аннотация

В работе описан подход к моделированию взаимодействия освещения с тонким красящим слоем. Задача была поставлена для генерации изображений слоя чернил, исходя из внутренней структуры слоя и формы красящих частиц. В отличие от обычных красок слой чернил характеризуется высокими объемными концентрациями частиц. Лучевой подход или лучевое уравнение переноса практически не применимы для решения этой задачи. Поэтому был выбран путь непосредственного решения волновых уравнений, естественно, при некоторых ограничениях и упрощениях. В данной работе описаны подходы к решению дифрационной задачи.

Voloboy A.G., Ershov S.V., Pozdnyakov S.G.

Diffraction task solution for lighting simulation inside ink layer

Abstract

One approach to the problem of lighting simulation inside of ink or paint layer is described. The problem arose in the task of rendering of ink basing on information about shape of ink pigments and layer structure. High pigment volume concentration characterizes ink layer structure. Ray tracing or LTE are hardly applicable here. Therefore it was decided to solve it as a diffraction problem basing on wave optics methods. The solution of corresponding diffraction task is considered in the article.

Работа была поддержана РФФИ, грант 08-01-00649, а также компанией INTEGRA Inc. (Япония).

Содержание

1. Введение

В последние годы в литературе по компьютерной графике опубликовано большое количество работ по моделированию различных красящих субстанций [1, 2]. Подавляющее число таких работ базируется или на методах геометрической оптики, или использует компромиссное приближение известное как лучевое уравнение переноса. Однако в случае, когда расстояние между неоднородностями или их характерный размер меньше или порядка длины волны, эти методы вряд ли применимы.

Постановка задачи моделирования чернил, т.е. красящей среды с высокой концентрацией частиц, и их визуализации была подробно описана в [3]. Данная работа является ее продолжением. В работе рассматривается красящий слой, состоящий из малых частиц пигмента с размерами ~ 100÷500 нанометров при объемной концентрации пигмента, доходящей до 50%. Малые размеры частиц, высокая концентрация и малая толщина слоя (~ 1 микрона) не позволяют пременять уравнение переноса. Поэтому был выбран путь непосредственного решения волнового уравнения в скалярном приближении – уравнения Гельмгольца.

Моделирование чернил свелось к решению трех задач:

1. Решение задачи дифракции на тонком периодическом красящем слое с явным распределением коэффициента преломления конечно-разностными методами.
2. Генерация геометрии фрагмента красящего слоя, состоящего из частиц заданных форм и размеров и вычисление распределения коэффициента преломления на используемой пространственной сетке.
3. Вычисление ДФО красящего слоя, расположенного на Ламбертовской подложке исходя из результатов решения задачи дифракции.

В данной работе будет рассмотрено решение задачи дифракции на тонком периодическом красящем слое.

2. Решение дифракционной задачи с помощью Борновского разложения

2.1. Уравнения и граничные условия

Дифракционная задача сводится к уравнению Гельмгольца, которое решается раздельно для трех пространственных областей: заполненное вакуумом верхнее полупространство, красящий слой и нижнее полупространство также заполненное вакуумом:

$$\begin{gathered}\Delta u + k_0^2 u = 0, \quad z < 0 \\ \Delta u + k^2(\boldsymbol{x}) u = 0, \quad 0 \le z \le H \\ \Delta u + k_0^2 u = 0, \quad z > H\end{gathered} \tag{2.1}$$

условия сшивки:

$$\begin{gathered}u\big|_{z=0-0} = u\big|_{z=0+0} \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{x=0-0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{x=0+0} \\ u\big|_{z=H-0} = u\big|_{z=H+0} \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{x=H-0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{x=H+0}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Кроме этого, в вакууме решение должно удовлетворять условиям излучения, которые могут быть сформулированы следующим образом:

$$\begin{aligned}u\big|_{z\to-\infty} &= \sum_{|\boldsymbol{k}|=k_0,\, k_z<0} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}} + \underbrace{e^{ik_0(x\sin\sigma + z\cos\sigma)}}_{\text{падающая волна}} \\ u\big|_{z\to+\infty} &= \sum_{|\boldsymbol{k}|=k_0,\, k_z>0} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Условия излучения означают, что на больших расстояниях от слоя только освещающая плоская волна движется по направлению к слою. Все остальные компоненты поля распространяются в направлении от слоя.

Примечание. Формулы (2.3) уже учитывают периодическую структуру красящего слоя. Для бесконечного непериодического слоя суммы заменяются соответствующими интегралами. Везде далее рассматривается бесконечный красящий слой, состоящий из фрагмента размерами $0 \le x \le L, \quad 0 \le y \le L$ периодически повторенного в двух измерениях. В этом случае поле внутри фрагмента имеет следующий вид: $u(x,y,z) = v(x,y,z)e^{iqx}$, где v есть периодическая функция x и y, а $q = k_0 \sin\sigma$, где σ – угол падения. Отметим, что для некоторого множества углов падения функция u также является периодической.

2.2. Борновское разложение

Применим к решению диффракционной задачи метод теории возмущений, известный как Борновское разложение. Данный подход требует, чтобы отклонение коэффициента преломления от его среднего значения (внутри красящего слоя) было бы небольшим. В противном случае ряд теории возмущений расходится. К сожалению, величина малого отклонения показателя преломления, при котором разложение сходится, априори неизвестна.

В методе Борновского разложения решение скалярной дифракционной задачи(2.1)–(2.3) представляется в виде ряда:

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_j u^{(j)}(\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

члены разложения должны удовлетворять следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)} + k_0^2 u^{(0)} &= 0, \quad z < 0 \\ \Delta u^{(0)} + \langle k^2 \rangle u^{(0)} &= 0, \quad 0 \le z \le H \\ \Delta u^{(0)} + k_0^2 u^{(0)} &= 0, \quad z > H \end{aligned} \tag{2.5}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta u^{(j)} + k_0^2 u^{(j)} &= 0, \quad z < 0 \\ \Delta u^{(j)} + \langle k^2 \rangle u^{(j)} &= -\mu(\boldsymbol{x}) u^{(j-1)}, \quad 0 \le z \le H \\ \Delta u^{(j)} + k_0^2 u^{(j)} &= 0, \quad z > H \end{aligned} \tag{2.5'}$$

где

$$\mu(\boldsymbol{x}) \equiv k^2(\boldsymbol{x}) - \langle k^2 \rangle = \left(\eta^2(\boldsymbol{x}) - \langle \eta \rangle^2\right) k_0^2$$

есть отклонение квадрата локального волнового числа от его среднего (по слою) значения. Предполагается, что это отклонение мало.

На границах слой-вакуум каждый член разложения (2.4) удовлетворяет условиям сшивки(2.2). При $z \to \pm\infty$ все $u^{(j)}$ должны удовлетворять условиям излучения (2.3). При этом только член $u^{(0)}$ содержит падающую волну, поэтому вся сумма (2.4) удовлетворяет условиям (2.3).

2.3. Метод Фурье для периодического слоя

Как уже было сказано выше, полное поле u является квази-периодическим и удовлетворяет на боковых поверхностях фрагмента следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u(x+L,y) &= u(x,y)e^{iq} \\ u(x,y+L) &= u(x,y) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Эти условия должны выполняться для каждого члена Борновского разложения. Здесь

$$q = Lk_0 \sin\sigma$$

Представим решение (2.4) в следующем виде:

$$u(x,y,z) = \sum_{m,n} U_{m,n}(z) e^{i\frac{(2\pi m+q)x}{L} + i\frac{2\pi ny}{L}} \equiv \sum_{m,n} U_{m,n}(z) e^{ik_{x,m}x + ik_{y,n}y} \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) есть разложение поле в двумерный ряд Фурье. Вместо ряда Фурье мы используем в численной процедуре дискретное преобразование Фурье.

Подставляя (2.7) в уравнения (2.6) и (2.6'), получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U_{m,n}^{(0)}(z)}{dz^2} + \left(k_0^2 - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(0)} = 0, \quad z<0 \\ &\frac{d^2U_{m,n}^{(0)}(z)}{dz^2} + \left(\langle k^2\rangle - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(0)} = 0, \quad 0 \le z \le H \\ &\frac{d^2U_{m,n}^{(0)}(z)}{dz^2} + \left(k_0^2 - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(0)} = 0, \quad z>H \end{aligned} \qquad (2.8)$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U_{m,n}^{(j)}(z)}{dz^2} + \left(k_0^2 - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(j)} = 0, \quad z<0 \\ &\frac{d^2U_{m,n}^{(j)}(z)}{dz^2} + \left(\langle k^2\rangle - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(j)} = F^{(j-1)}(z), \quad 0 \le z \le H \\ &\frac{d^2U_{m,n}^{(j)}(z)}{dz^2} + \left(k_0^2 - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2\right)U_{m,n}^{(j)} = 0, \quad z>H \end{aligned} \qquad (2.9)$$

где $F^{(j)}$ есть Фурье образ правой части уравнения:

$$-\mu(\boldsymbol{x})u^{(j)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m,n} F_{m,n}^{(j)}(z)e^{i\frac{(2\pi m+q)x}{L}+i\frac{2\pi ny}{L}}, \quad 0 \le z \le H$$

который вычисляется, используя решение для предыдущей итерации. Для применения дискретного преобразования Фурье это выражение может быть переписано в следующем виде:

$$-\mu(\boldsymbol{x})\left(u^{(j)}(\boldsymbol{x})e^{-\frac{iqx}{L}}\right) = \sum_{m,n} F_{m,n}^{(j)}(z)e^{i\frac{2\pi mx}{L}+i\frac{2\pi ny}{L}}, \quad 0 \le z \le H$$

Поскольку условия (2.2) должны быть выполнены, $U_{m,n}^{(j)}(z)$ должна быть непрерывной вместе с первой производной на границах $z = 0$ и $z = H$. Кроме этого, должны быть удовлетворены условия излучения (2.3).

Сначала рассмотрим первый член разложения (2.4) при $j = 0$. Этот член описывает распространение волнового поля в однородном слое. Следовательно, нет никакого рассеяния, а только Френелевское отражение и преломление. Поскольку правые части уравнений (2.5) равны нулю, член $U_{m,n}^{(0}(z)$ отличен от нуля только за счет слагаемого, описывающего падающую волну в условиях излучения (2.3). Фурье-образ этого слагаемого отличен от нуля только при $m = n = 0$, все остальные Фурье-гармоники нулевые.

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.8) хорошо известно. Для $j = m = n = 0$ оно имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{0,0}^{(0)}(z) &= \alpha e^{-ik_z z} + \tilde{\beta} e^{ik_z z}, \quad z < 0, \\ U_{0,0}^{(0)}(z) &= a e^{-i\bar{k}_z z} + b e^{i\bar{k}_z z}, \quad 0 \le z \le H \\ U_{0,0}^{(0)}(z) &= \tilde{\alpha} e^{-ik_z(z-H)} + \beta e^{ik_z(z-H)}, \quad z > H \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_z &\equiv k_0 \cos\sigma \\ \bar{k}_z &\equiv \sqrt{\langle k^2 \rangle - k_0^2 \sin^2 \sigma} \end{aligned}$$

Здесь используется значение квадратного корня с неотрицательной мнимой частью.

Условия излучения (2.3) требуют, чтобы $\tilde{\beta}=1, \tilde{\alpha}=0$. Оставшиеся 4 коэффициента могут быть найдены из условий непрерывности $U_{0,0}^{(0)}$ и его первой производной на границах $z = 0$ и $z = H$. Окончательно получаем

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{2k_z}{e^{-2i\bar{k}_z H}(\bar{k}_z + k_z)^2 - (\bar{k}_z - k_z)^2}(\bar{k}_z - k_z) \\
b &= \frac{2k_z}{e^{-2i\bar{k}_z H}(\bar{k}_z + k_z)^2 - (\bar{k}_z - k_z)^2} e^{-2i\bar{k}_z H}(\bar{k}_z + k_z) \\
\alpha &= \left(\frac{2k_z}{e^{-2i\bar{k}_z H}(\bar{k}_z + k_z)^2 - (\bar{k}_z - k_z)^2} 2\bar{k}_z - 1\right)\frac{\bar{k}_z - k_z}{\bar{k}_z + k_z} \\
\beta &= \frac{2k_z}{e^{-2i\bar{k}_z H}(\bar{k}_z + k_z)^2 - (\bar{k}_z - k_z)^2} 2\bar{k}_z e^{-i\bar{k}_z H}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Далее рассмотрим члены Борновского ряда при $j > 0$. В этом случае общее решение системы (2.9) есть:

$$
\begin{aligned}
U_{m,n}^{(j)}(z) &= \alpha_{m,n}^{(j)} e^{-ik_z z} + \tilde{\beta}_{m,n}^{(j)} e^{ik_z z}, \quad z < 0, \\
U_{m,n}^{(j)}(z) &= a_{m,n}^{(j)} e^{-i\bar{k}_z z} + b_{m,n}^{(j)} e^{i\bar{k}_z z} + Q_{m,n}^{(j)}(z), \quad 0 \le z \le H \\
U_{m,n}^{(j)}(z) &= \tilde{\alpha}_{m,n}^{(j)} e^{-ik_z (z-H)} + \beta_{m,n}^{(j)} e^{ik_z (z-H)}, \quad z > H
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
k_{z,m,n} &\equiv \sqrt{k_0^2 - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2} = \sqrt{k_0^2 - \left(\tfrac{2\pi m+q}{L}\right)^2 - \left(\tfrac{2\pi n}{L}\right)^2} \\
\bar{k}_{z,m,n} &\equiv \sqrt{\langle k^2 \rangle - k_{x,m}^2 - k_{y,n}^2} = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \left(\tfrac{2\pi m+q}{L}\right)^2 - \left(\tfrac{2\pi n}{L}\right)^2}
\end{aligned}
$$

Используются значения квадратного корня с неотрицательной мнимой частью.

$$
Q_{m,n}^{(j)}(z) \equiv \frac{e^{i\bar{k}_z z}\int_0^z F_{m,n}^{(j)}(\zeta) e^{-i\bar{k}_z \zeta} d\zeta + e^{-i\bar{k}_z z}\int_z^H F_{m,n}^{(j)}(\zeta) e^{i\bar{k}_z \zeta} d\zeta}{2i\bar{k}_z}
$$

Из условий излучения (2.3) находим $\tilde{\beta}=0, \tilde{\alpha}=0$. Остальные коэффициенты определяются из условий на границах $z = 0$ and $z = H$. В результате получаем:

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(j)}_{m,n} &= a^{(j)}_{m,n} + b^{(j)}_{m,n} + Q^{(j)}_{m,n}(0) \\
\beta^{(j)}_{m,n} &= a^{(j)}_{m,n} e^{-i\bar{k}_z H} + b^{(j)}_{m,n} e^{i\bar{k}_z H} + Q^{(j)}_{m,n}(H) \\
-ik_z \alpha^{(j)}_{m,n} &= -i\bar{k}_z a^{(j)}_{m,n} + i\bar{k}_z b^{(j)}_{m,n} + \left(Q^{(j)}_{m,n}\right)'(0) \\
ik_z \beta^{(j)}_{m,n} &= -i\bar{k}_z a^{(j)}_{m,n} e^{-i\bar{k}_z H} + i\bar{k}_z b^{(j)}_{m,n} e^{i\bar{k}_z H} + \left(Q^{(j)}_{m,n}\right)'(H)
\end{aligned}
$$

Введем две вспомогательные величины

$$
\begin{aligned}
J_1 &\equiv \frac{\int_0^H F^{(j)}_{m,n}(\zeta) e^{i\bar{k}_z \zeta} d\zeta}{2i\bar{k}_z} \\
J_2 &\equiv \frac{\int_0^H F^{(j)}_{m,n}(\zeta) e^{i\bar{k}_z (H-\zeta)} d\zeta}{2i\bar{k}_z}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

и выразим через них значения функции $Q^{(j)}_{m,n}(z)$ и ее производной

$$
\begin{aligned}
Q^{(j)}_{m,n}(0) &= J_1 \\
Q^{(j)}_{m,n}(H) &= J_2 \\
\left(Q^{(j)}_{m,n}\right)'(0) &= -i\bar{k}_z J_1 \\
\left(Q^{(j)}_{m,n}\right)'(H) &= i\bar{k}_z J_2
\end{aligned}
$$

Для неизвестных коэффициентов получаем систему линейных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(j)}_{m,n} &= a^{(j)}_{m,n} + b^{(j)}_{m,n} + J_1 \\
\beta^{(j)}_{m,n} &= a^{(j)}_{m,n} e^{-i\bar{k}_z H} + b^{(j)}_{m,n} e^{i\bar{k}_z H} + J_2 \\
-k_z \alpha^{(j)}_{m,n} &= -\bar{k}_z a^{(j)}_{m,n} + \bar{k}_z b^{(j)}_{m,n} - \bar{k}_z J_1 \\
k_z \beta^{(j)}_{m,n} &= -\bar{k}_z a^{(j)}_{m,n} e^{-i\bar{k}_z H} + \bar{k}_z b^{(j)}_{m,n} e^{i\bar{k}_z H} + \bar{k}_z J_2
\end{aligned}
$$

Решение этой системы имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(j)}_{m,n} &= 2\bar{k}_z \frac{(\bar{k}_z + k_z) e^{-i\bar{k}_z H} J_1 + (\bar{k}_z - k_z) J_2}{(\bar{k}_z + k_z)^2 e^{-i\bar{k}_z H} - (\bar{k}_z - k_z)^2 e^{i\bar{k}_z H}} \\
\beta^{(j)}_{m,n} &= 2\bar{k}_z \frac{(\bar{k}_z + k_z) e^{-i\bar{k}_z H} J_2 + (\bar{k}_z - k_z) J_1}{(\bar{k}_z + k_z)^2 e^{-i\bar{k}_z H} - (\bar{k}_z - k_z)^2 e^{i\bar{k}_z H}} \\
a^{(j)}_{m,n} &= (\bar{k}_z - k_z) \frac{J_1 (\bar{k}_z - k_z) e^{i\bar{k}_z H} + (\bar{k}_z + k_z) J_2}{(\bar{k}_z + k_z)^2 e^{-i\bar{k}_z H} - (\bar{k}_z - k_z)^2 e^{i\bar{k}_z H}} \\
b^{(j)}_{m,n} &= (\bar{k}_z - k_z) \frac{J_1 (k_z + \bar{k}_z) e^{-i\bar{k}_z H} + (\bar{k}_z - k_z) J_2}{(k_z + \bar{k}_z)^2 e^{-i\bar{k}_z H} - (\bar{k}_z - k_z)^2 e^{i\bar{k}_z H}}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Вычисляя последовательно члены Борновского ряда, мы находим (если ряд сходится) искомое решение дифракционной задачи в виде разложения (2.4).

3. Метод релаксации (счет на установление)

3.1. Краевые условия излучения

К сожалению, Борновский ряд сходится не всегда. Существуют способы несколько улучшить ситуацию с его сходимостью или совсем без потери точности или с минимальными погрешностями, но они не решают проблему кардинально. Поэтому был разработан метод решения уравнения (2.1)-(2.3) с помощью счета на установление.

Рассмотрим решение стационарного уравнения (2.1)-(2.3) и для простоты ограничимся случаем нормального падения. Обобщение на случай произвольного наклонного падения не вызывает никаких затруднений. Введем в элементарном фрагменте прямоугольную пространственную сетку с постоянными шагами во всех трех направлениях. Для простоты будем считать, что величины шагов во всех направлениях одинаковы и равны h. В случае нормального падения функция $u(x,y,z)$ будет периодической по переменным *(x,y)* и к ней можно применить дискретное преобразование Фурье по координатам *x* и *y*:

$$u(x,y,z) = \sum_{m,n} u_{mn}(z) \exp(2\pi i x m/L) \exp(2\pi i y n/L) \tag{3.1}$$

Подставив (3.1) в (1.1), получаем систему уравнений для Фурье-гармоник:

$$\sum_{m,n} \exp(2\pi i x m/L) \exp(2\pi i y n/L) \left\{ \frac{d^2 u_{mn}}{dz^2} + \left[k_0^2 \eta^2(\boldsymbol{x}) - \frac{4\pi^2}{L^2}\left(m^2+n^2\right) \right] u_{mn} \right\} = 0 \tag{3.2}$$

Решение (3.2) внутри расящего слоя ищется на сетке. В областях вне красящего слоя показатель преломления постоянен ($\eta = 1$) и система (3.2) распадается на обыкновенные дифференциальные уравнения для каждой гармоники $u_{mn}(z)$:

$$\frac{d^2 u_{mn}}{dz^2} + \left[k_0^2 - \frac{4\pi^2}{L^2}\left(m^2+n^2\right) \right] u_{mn} = \frac{d^2 u_{mn}}{dz^2} + \kappa_{mn}^2 u_{mn} = 0 \tag{3.3}$$

Общее решение (3.3) находится в аналитическом виде и сшивается с соответствующей гармоникой на поверхностях слоя. Такая процедура позволяет записать граничные условия, которым должна удовлетворять гармоника $u_{mn}(z)$, в явном виде.

Если $\kappa_{mn}^2 > 0$, то решение (3.3) состоит из приходящей и убегающей от слоя волн. При $\kappa_{mn}^2 < 0$ решение (3.3) содержит растущую и затухающую экспоненты. При настоящих условиях освещения полное поле $u(\boldsymbol{x})$ в дальней зоне (на достаточно большом или бесконечном расстоянии от слоя) должно "состоять" из падающего поля и убегающих от слоя волн. Таким образом, значения гармоник $u_{mn}(z)$ вне слоя должны соответствовать или убегающим волнам, или затухающим решениям. Исключение составляет только одна гармоника, соответствующая падающему полю. Она должна включать в себя и падающую и уходящую волну.

Каждая гармоника из (3.2) должна быть непрерывна вместе с нормальными производными на поверхностях слоя. В результате получаем граничные условия излучения:

$$\begin{aligned} &\frac{du_{mn}}{dz}\Big|_{z=0} + i\kappa_{mn}u_{mn}(0) = 2i\kappa_{mn}A\delta_{m0}\delta_{n0} \\ &\frac{du_{mn}}{dz}\Big|_{z=H} - i\kappa_{mn}u_{mn}(H) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Вспомогательное нестационарное уравнение

Далее рассмотрим нестационарное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\left[\Delta u + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})u\right] \tag{3.5}$$

Правая часть (3.5) вычисляется при соответствующих граничных условиях излучения (3.4). Поскольку мнимая часть $\eta^2(\boldsymbol{x})$ неотрицательна, действительные части собственных значений оператора в правой части (3.5) неположительны. Иными словами, решение (3.5) как функция времени может убывать или осциллировать, но не будет расти. Форма уравнения (3.5) совпадает с формой нестационарного уравнения Шредингера.

Используя уравнение (3.5), удается найти решение стационарных уравнений (2.1)-(2.3). Приведем обоснование данного утверждения.

Обозначим $u_0(\boldsymbol{x})$ – искомое решение уравнений (2.1)-(2.3), $u(\boldsymbol{x},t)$ – произвольное решение (3.5), и рассмотрим разность $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t) = u(\boldsymbol{x},t) - u_0(\boldsymbol{x})$. Нетрудно видеть, что $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)$ также удовлетворяет уравнению (3.5), но при однородных условиях излучения (без падающей освещающей волны). Легко показать, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint |\tilde{u}|^2 dxdydz = -2\,\mathrm{Im}\iiint \tilde{u}^*\left[\Delta\tilde{u} + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\tilde{u}\right]dxdydz \qquad (3.6)$$

Здесь звездочка означает комплексное сопряжение. В (3.5) рассматривается решение на периодическом слое, поэтому при интегрировании по x и y достаточно ограничиться одним периодом. Преобразуем интеграл в правой части (3.6) с помощью интегрирования по частям и отбросим чисто действительные слагаемые.

$$\mathrm{Im}\iiint \tilde{u}^*\left[\Delta\tilde{u} + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\tilde{u}\right]dxdydz = \mathrm{Im}\iiint |\tilde{u}|^2 k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})dxdydz + \iint \tilde{u}^*\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H} dxdy \qquad (3.7)$$

Для периодического слоя условия излучения ставятся для Фурье–гармоник в явном виде, поэтому используем дискретное представление Фурье для $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\tilde{u}(x,y,z,t) = \sum_{m,n} u_{mn}(z,t)\exp(2\pi ixm/L)\exp(2\pi iyn/L)$$

В результате для второго интеграла в правой части (3.7) получим:

$$\iint \tilde{u}^*\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H} dxdy = L^2\sum_{m,n}\left(u_{mn}^*(H)u'_{mn}(H) - u_{mn}^*(0)u'_{mn}(0)\right)$$

С учетом однородных граничных условий излучения окончательно получаем:

$$\iint \tilde{u}^*\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\bigg|_{z=0}^{z=H} dxdy = iL^2\sum_{m,n}\kappa_{mn}\left[|u_{mn}(H)|^2 + |u_{mn}(0)|^2\right] \qquad (3.8)$$

Окончательно вместо (3.6) находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint |\tilde{u}|^2 dxdydz = -2k_0^2\iiint |\tilde{u}|^2\,\mathrm{Im}\left[\eta^2(\boldsymbol{x})\right]dxdydz - 2L^2\sum_{m,n}\left[|u_{mn}(H)|^2 + |u_{mn}(0)|^2\right]\mathrm{Re}(\kappa_{mn}) \quad (3.9)$$

Из выражения (3.9) видно, что существуют две причины сходимости. Первое слагаемое в правой части описывает поглощение в слое (если

$\mathrm{Im}\left[\eta^2(\boldsymbol{x})\right] > 0$), второе слагаемое соответствует “вытеканию энергии” из слоя за счет убегающих волн. Отметим, что сумма во втором слагаемом в правой части (3.9) берется только по убегающим волнам.

В случае, когда $\mathrm{Im}\left[\eta^2(\boldsymbol{x})\right] \equiv 0$ сходимости нет. Например, в однородном непоглощающем слое может распространяться волна под углом, большим угла полного внутреннего отражения. В этом случае для достижения сходимости применяется следующий прием.

Вычислим среднее от $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)$ за время, большее характерного периода осцилляций. В результате такого усреднения амплитуды осциллирующих составляющих $\tilde{u}(\boldsymbol{x},t)$ существенно уменьшатся. (Например, таким способом легко найти положение равновесия маятника, колеблющегося без затухания). После этого продолжим интегрировать уравнение (3.5), используя полученное среднее в качестве начального условия. Комбинируя отрезки интегрирования с усреднением и без усреднения, удается добиться сходимости.

3.3. Численные методы и разностные схемы

Для интегрирования уравнения (3.5) по времени применяется симметричная явно – неявная схема:

$$\frac{\hat{u}-u}{\tau} = \frac{i}{2}\left[\Delta\hat{u} + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\hat{u}\right] + \frac{i}{2}\left[\Delta u + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})u\right] \qquad (3.10)$$

Здесь τ – шаг по времени, $u = u(\boldsymbol{x},t)$, $\hat{u} = u(\boldsymbol{x},t+\tau)$. Схема (3.9) устойчива вне зависимости от шага по времени и имеет ошибку $O(\tau^2)$. Кроме этого, можно показать, что полученное в результате применения (3.10) решение стационарного уравнения не зависит τ.

Перепишем уравнение (3.10) в виде:

$$\left\{1 - \frac{i\tau}{2}\left[\Delta + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\right]\right\}\hat{u} = \left\{1 + \frac{i\tau}{2}\left[\Delta + k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\right]\right\}u \qquad (3.11)$$

Операторы в (3.11) при малых τ можно расщепить, используя стандартную технику:

$$1-\frac{i\tau}{2}\left[\Delta+k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\right]\approx\left\{1-\frac{i\tau}{2}\left[k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})-<k^2(z)>\right]\right\}\left\{1-\frac{i\tau}{2}\left[\Delta+<k^2(z)>\right]\right\}$$
$$1+\frac{i\tau}{2}\left[\Delta+k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})\right]\approx\left\{1+\frac{i\tau}{2}\left[k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})-<k^2(z)>\right]\right\}\left\{1+\frac{i\tau}{2}\left[\Delta+<k^2(z)>\right]\right\} \quad (3.12)$$

Здесь также как и для Борновского разложения $<k^2(z)>$ – функция, описывающая усредненные свойства слоя, для простоты ее можно считать постоянной.

Подставляя (3.12) в (3.11), получаем:

$$\left[\Delta+\langle k^2(z)\rangle+\frac{2i}{\tau}\right]\hat{u}=\frac{1+\frac{i\tau}{2}\left[k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})-\langle k^2(z)\rangle\right]}{1-\frac{i\tau}{2}\left[k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})-\langle k^2(z)\rangle\right]}\left[\Delta+\langle k^2(z)\rangle-\frac{2i}{\tau}\right]u \quad (3.13)$$

Обращение оператора в левой части (3.13) производится также как и в случае Борновского разложения с помощью использования дискретного преобразования Фурье по переменным x и y. И вся схема вычислений практически такая же, как и для Борновского разложения. Сначала при известном u вычисляется Фурье преобразование от правой части (3.13). Оператор в левой части (3.13) не зависит от x и y его обращение сводится к решению краевой задачи по переменной z для каждой Фурье-гармоники. Решение краевой задачи при граничных условиях (3.4) производится с помощью простой прогонки. Затем с помощью обратного преобразования Фурье находится решение (3.5) $\hat{u}$ в следующей точке по времени.

Выбор шага по времени τ определяется в значительной степени экспериментально.

Наш опыт показывает, что оценка оптимального шага следующая: $\tau\sim 1/\left[k_0^2\eta^2(\boldsymbol{x})-<k^2(z)>\right]$.

Примечание. В данной версии вычислительной процедуры случай наклонного падения с произвольным углом σ не был реализован по следующей причине. Как правило, в компьютерной графике угловые распределения рассеянного излучения (Bi-directional distribution function – BDF) задаются для фиксированного числа углов падения на некоторой угловой сетке. При промежуточных углах падения BDF вычисляются с помощью интерполяции.

При достаточных размерах элементарного фрагмента количество Фурье-гармоник и соответствующих направлений велико. Поэтому фиксированные углы падения для задания BDF могут быть с необходимой точностью приближены направлениями из множества направлений для Фурье-гармоник. Погрешность для существенных углов падения не превышает 0.5^0, что вполне допустимо. В этом случае вычислительная процедура претерпевает минимальные изменения, только в части краевых условий (3.4). Ненулевая правая часть появляется не для Фурье-гармоники с $m=n=0$, а для той Фурье-гармоники, которая соответствует направлению падения.

4. Угловое распределение рассеянного излучения в дифракционной задаче

4.1. Излучение конечной области

Результатом решения дифракционной задачи для периодического красящего слоя являются значения волнового поля на поверхности слоя (комплексные амплитуды Фурье-гармоник). Для вычисления Bi-directional distribution function (BDF) эти амплитуды нужно преобразовать в угловое распределение рассеянного излучения в дальней зоне.

Сначала рассмотрим поле, полученное при решении дифракционной задачи с периодическими граничными условиями на боковых поверхностях элементарного фрагмента (размер LxL) , на поверхности конечной квадратной области со стороной l:

$$-l/2 \le x \le l/2; \quad -l/2 \le y \le l/2 \tag{4.1}$$

Будем считать, что область состоит из многих элементарных фрагментов и ее размер так велик, что с достаточной точностью поле вне области можно положить равным нулю, пренебрегая краевыми эффектами. Таким образом, нам известно поле на верхней поверхности области (4.1) - $u(x,y,0)$. За пределами (4.1) поле равно нулю.

Далее вычислим поле на поверхности удаленной полусферы, окружающей нашу квадратную область, используя хорошо известную формулу Кирхгофа [4]:

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint u(x,y,0)\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_0 R}}{R}dxdy \tag{4.2}$$

Здесь интегрирование производится по всей плоскости $z=0$ (за пределами области $u=0$), R – есть расстояние от точки на полусфере

$$(x', y', z') = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$$

до точки $(x,y,0)$ на плоскости верхней поверхности слоя.

Для большой сферы

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_0 R}}{R} \approx -\frac{ik_0 z'}{R}\frac{e^{ik_0 R}}{R}$$

Следовательно

$$u \approx -\frac{ik_0 z'}{2\pi}\iint u(x,y,0)\frac{e^{ik_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}dxdy \tag{4.3}$$

и, предполагая, что центр поверхности квадратной области и центр полусферы находятся в начале координат, получаем

$$\begin{aligned}
u &\approx -\frac{ik_0}{2\pi}\frac{z'}{\rho}\iint u(x,y,0)\frac{e^{ik_0\left(\rho-\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho}\right)}}{\rho\left(1-2\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho^2}\right)}dxdy \\
&\approx -\frac{ik_0}{2\pi}\frac{z'}{\rho}\iint u(x,y,0)\frac{e^{ik_0\left(\rho-\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho}\right)}}{\rho-2\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho}}dxdy \\
&= -\frac{ik_0}{2\pi}\cos\vartheta\iint u(x,y,0)\frac{e^{ik_0(\rho-x\sin\vartheta\cos\varphi-y\sin\vartheta\sin\varphi-z\cos\vartheta)}}{\rho-x\sin\vartheta\cos\varphi-y\sin\vartheta\sin\varphi-z\cos\vartheta}dxdy \\
&\approx -\frac{ik_0 e^{ik_0\rho}}{2\pi\rho}\cos\vartheta\iint u(x,y,0)\left(1+\frac{x\sin\vartheta\cos\varphi+y\sin\vartheta\sin\varphi}{\rho}\right)e^{-ik_0(x\sin\vartheta\cos\varphi+y\sin\vartheta\sin\varphi)}dxdy \\
&= -\frac{ik_0 e^{ik_0\rho}}{2\pi\rho}\cos\vartheta\iint u(x,y,0)e^{-ik_0(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin\vartheta}dxdy
\end{aligned} \tag{4.4}$$

В этом случае поток равен

$$J \approx \frac{1}{\rho^2}\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}\left|\iint u(x,y,0)e^{-ik_0(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\sin\vartheta}dxdy\right|^2 \qquad (4.5)$$

Далее используем представление поля вблизи и на поверхности квадратной области в виде разложения Фурье

$$u=\sum_{m,n}\alpha_{m,n}e^{-ik_z z+ik_x x+ik_y y} \qquad (4.6)$$

где

$$k_x=\frac{2\pi m+q}{L},\quad k_y=\frac{2\pi n}{L},\quad k_z=\sqrt{k_0^2-k_x^2-k_y^2} \qquad (4.7)$$

и

$$q = k_0 L\sin\sigma$$

Здесь σ – есть угол падения. В результате получаем следующее выражение для потока:

$$J \approx \frac{1}{\rho^2}\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}\left|\sum_{m,n}\alpha_{m,n}e^{-ik_z z}\int_{-l/2}^{l/2}\int_{-l/2}^{l/2}e^{ik_x x+ik_y y}e^{-i(xk_0\sin\vartheta\cos\varphi+yk_0\sin\vartheta\sin\varphi)}dxdy\right|^2$$

Следовательно

$$J \approx \frac{l^4}{\rho^2}\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}\left|\sum_{m,n}\alpha_{m,n}e^{-ik_z z}\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right|^2 \qquad (4.8)$$

Эта сумма содержит только уходящие незатухающие волны. Члены с комплексным k_z должны быть исключены (поскольку они затухают по мере удаления от слоя). Кроме этого, должна быть исключена мода, соответствующая освещающей волне. Действительно, рассмотрим “пустой” слой (заполненный вакуумом) под нормальным освещением, приходящем из того же вакуума. В этом случае полное поле равно падающей волне и $\alpha_{0,0} = 1$. Если не исключить падающую волну из (4.8) появится вклад, соответствующий обратной уходящей волне, и в результате мы получим, что однородное пустое пространство отражает волну с коэффициентом отражения, равным 1!

Таким образом, угловое распределение плотности интенсивности, отнесенное к единичной площадке бесконечного красящего слоя, имеет вид

$$G(\vartheta,\varphi)\approx\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}l^2\left|\sum_{m,n}\alpha_{m,n}e^{-ik_z z}\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right|^2 \tag{4.9}$$

Из суммы исключен член $\alpha_{0,0}$ и все моды с комплексным k_z.

4.2 Предельный переход к бесконечному периодическому слою

Угловое распределение излучения бесконечного периодического слоя равно пределу выражения (4.9) при стремлении размеров области к бесконечности $l\to\infty$.

Величины

$$\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}},\quad \frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}$$

как функции углов (θ,φ) имеют максимумы около направления, для которого

$$k_x=k_0\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$k_y=k_0\sin\vartheta\sin\varphi$$

т.е. для углов

$$\sin\vartheta_{m,n}=\frac{\lambda}{L}\sqrt{m^2+n^2}$$
$$\tan\varphi_{m,n}=n/m$$

Если количество Фурье-гармоник фиксированно (оно определяется только размерами элементарного фрагмента L), а размер всей области l стремится к бесконечности, то ширина максимумов падает как $O(1/l)$. Следовательно, для достаточно больших l члены в сумме (4.9) расцепляются, и квадрат суммы становится суммой квадратов:

$$G(\vartheta,\varphi)\xrightarrow{l\to\infty}l^2\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}\sum_{m,n}\left|\alpha_{m,n}\right|^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right)^2$$

Рассмотрим поведение некоторого члена (n,m) при $l\to\infty$.

$$G_{n,m}(\vartheta,\varphi)\equiv l^2\frac{k_0^3\cos^2\vartheta}{4\pi^2}\left|\alpha_{(m,n)}\right|^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right)^2$$

Вблизи от направления $(\vartheta_{m,n},\varphi_{m,n})$, т.е. при углах

$$\vartheta=\vartheta_{m,n}+\Delta\vartheta$$
$$\varphi=\varphi_{m,n}+\Delta\varphi$$

Обозначая

$$T(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

получаем

$$\left(\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right)^2\approx T\left(\frac{k_0 l}{2}(\sin\vartheta_{m,n}\sin\varphi_{m,n}\Delta\varphi-\cos\varphi_{m,n}\cos\vartheta_{m,n}\Delta\vartheta)\right)$$
$$\times T\left(\frac{k_0 l}{2}(-\sin\vartheta_{m,n}\cos\varphi_{m,n}\Delta\varphi-\sin\varphi_{m,n}\cos\vartheta_{m,n}\Delta\vartheta)\right)$$

Вычислим интеграл по окрестности ($\Delta\vartheta$, $\Delta\varphi$) около направления $(\vartheta_{m,n},\varphi_{m,n})$

$$\iint\left(\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right)^2 d\Delta\varphi d\Delta\vartheta=\frac{4}{k_0^2 l^2\cos\vartheta\sin\vartheta}\iint T(\xi)T(\eta)d\xi d\eta$$

При $l\to\infty$ область интегрирования по переменным (ξ,η) становится бесконечной независимо от размера области углов $(\Delta\vartheta,\Delta\varphi)$, а интеграл в правой части равенства сходится к следующей величине:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2\left(\frac{\sin\eta}{\eta}\right)^2 d\xi d\eta=\pi^2$$

Отсюда,

$$\iint\left(\frac{\sin\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}{\frac{l(k_x-k_0\sin\vartheta\cos\varphi)}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}{\frac{l(k_y-k_0\sin\vartheta\sin\varphi)}{2}}\right)^2 d\Delta\varphi d\Delta\vartheta\xrightarrow{l\to\infty}\frac{4\pi^2}{k_0^2 l^2\cos\vartheta\sin\vartheta}$$

Интеграл от плотности углового распределения по любой малой окрестности направления $(\vartheta_{m,n},\varphi_{m,n})$ равен

$$\iint G_{n,m}(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi \equiv k_0 \left|\alpha_{(m,n)}\right|^2 \cos\vartheta$$

Это означает, что величина $G_{n,m}$ (слабо) сходится к дельта-функции:

$$G_{n,m}(\boldsymbol{v}) \xrightarrow{l\to\infty} k_0 \cos\vartheta \left|\alpha_{(m,n)}\right|^2 \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{n,m})$$

где

$$\boldsymbol{v} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$$

и

$$\boldsymbol{v}_{m,n} = (\sin\theta_{m,n}\cos\varphi_{m,n},\ \sin\theta_{m,n}\sin\varphi_{m,n},\ \cos\theta_{m,n})$$

здесь $\boldsymbol{v}$ есть единичные вектора в направлении наблюдения (θ, φ) и направлении, соответствующему углам $(\vartheta_{m,n}, \varphi_{m,n})$.

А вся сумма (4.9) сходится к:

$$G(\boldsymbol{v}) = k_0 \cos\vartheta \sum_{m,n\neq 0;\,\mathrm{Im}\,k_z=0} \left|\alpha_{(m,n)}\right|^2 \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{m,n}) \qquad (4.10)$$

Выражение (4.10) есть искомая плотность углового распределения интенсивности рассеянного излучения, отнесенная к единичной площадке бесконечного красящего слоя. Дельта-функции возникают из-за периодичности (аналогично случаю бесконечной дифракционной решетки). В сумме исключены моды, соответствующие падающей волне и волнам, затухающим при удалении от слоя.

Полная отраженная мощность имеет вид:

$$E = k_0 \sum_{m,n\neq 0;\,\mathrm{Im}\,k_z=0} \left|\alpha_{m,n}\right|^2 \cos\vartheta_{m,n} = \sum_{m,n\neq 0;\,\mathrm{Im}\,k_z=0} k_z \left|\alpha_{m,n}\right|^2$$

5. Заключение

В данной работе было приведено решение задачи дифракции для моделирования красящего слоя с высокой концентрацией частиц. Задача была поставлена для генерации изображений слоя чернил, исходя из внутренней структуры слоя и формы красящих частиц. Это – вторая работа, описывающая наш подход (первая – [3]). Также предполагается оставшиеся части работы опубликовать в дальнейшем.

Список литературы

[1] Ershov, S., Kolchin, K., Myszkowski, K., Rendering pearlescent appearance based on paint-composition modeling. Computer Graphics Forum, Vol. 20, No 3, 2001, pp. 227-238.

[2] Durikovic, R., Kolchin, K., Ershov, S., Rendering of Japanese artcraft. In Proceeding of the EUROGRAPHICS, short presentations, 2002, pp. 131-138.

[3] А.Г. Волобой, С.В. Ершов, Э.С. Клышинский, С.Г. Поздняков, Об одном подходе к моделированию взаимодействия освещения с тонким красящим слоем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 92, 2008.