



**Зараменских И.Е.,
Овчинников М.Ю.**

Использование давления
солнечной радиации для
компенсации влияния
полярного сжатия Земли на
относительное движение
формации спутников

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зараменских И.Е., Овчинников М.Ю. Использование давления солнечной радиации для компенсации влияния полярного сжатия Земли на относительное движение формации спутников // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 5. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-5>

1. Введение

Известно, что в отсутствии внешних возмущений при определенных начальных условиях для группового полета (формации) спутников существуют периодические траектории дочернего спутника относительно главного, движущегося по круговой траектории, даже в отсутствие управления. Это следует из уравнений Хилла, которые получаются путем линеаризации уравнений относительного движения близко летящих друг от друга спутников в центральном ньютоновом гравитационном поле [1].

При наличии возмущений, таких как несферичность гравитационного поля Земли, влияние сопротивления атмосферы, влияние солнечного давления, относительное движение в формации спутников может претерпевать значительные вековые уходы. В настоящей работе проводится верификация методики, позволяющей устранить относительные вековые уходы, которая была разработана ранее в [2], в рамках задачи устранения влияния на формацию полярного сжатия Земли (гармоники J_2 в разложении потенциала земного гравитационного поля) с помощью солнечного паруса. Предполагается, что парус установлен только на дочернем спутнике.

В работе рассматривается относительное движение двух спутников: главного – пассивного (без наличия какого либо способа управления положением в пространстве) и дочернего – активного (с солнечным парусом). Оскулирующие орбиты каждого из спутников – круговые. Из возмущений в учет принимаются возмущение от полярного сжатия Земли, влияющее на орбиты обоих спутников, а также возмущение от солнечного давления на парус дочернего спутника.

Анализ влияния гармоники J_2 на формацию спутников, а также способы устранения ее влияния, являются весьма популярными темами исследования. В [3] поддержание формации спутников осуществляется при помощи инвариантных для J_2 орбит без расхода топлива. В [4] и [5] предлагаются законы управления, необходимые для поддержания формаций. При этом в [5] минимизируется затрачиваемое на маневрирование топливо. В указанных

работах предполагается, что вектор тяги корректирующего орбиту двигателя может быть направлен любым необходимым образом в пространстве, то есть управление трехосное. Возможность применения одноосного управления в связанной с ориентированным спутником системе координат для поддержания необходимой конфигурации рассмотрена в [6], где проведено построение множества возможных траекторий при управлении вдоль одной связанной оси, ориентированной заданным образом в пространстве для невозмущенной задачи Хилла. В [2] продемонстрировано применение методики устранения вековых уходов на примере устранения относительных, то есть как разность, вековых уходов двух спутник из-за полярного сжатия Земли при помощи двигателя малой тяги. При этом доступное управление - одноосное в связанных со спутником осях, спутник точно ориентирован по магнитному полю Земли.

Использование солнечного давления для управления траекторией с целью минимизации затрачиваемой энергии рассматривается в [7]. При анализе движения систем с солнечным парусом выделяют две основные схемы создания управляющего ускорения. Обычно рассматривают движение аппарата, когда управление траекторией осуществляется путем разворота всей отражающей поверхности паруса относительно направления на Солнце. Такая схема условно называется плоским парусом «Flat Solar Sail» [8]. В другой схеме «Solar Photon Thruster» (SPT) парус имеет форму параболоида вращения, который концентрирует отраженный свет в своем фокусе. В фокусе установлено небольшое управляющее зеркало, вращением которого и осуществляется управление движением центра масс. Использование SPT предлагалось сравнительно давно [9], но изучение динамики конкретных спутников с использованием SPT началось недавно [10]. Сравнение обеих схем с точки зрения эффективности управления траекторией и минимизации необходимых затрат на угловой маневр проведено в работе [11]. В [12] проверена возможность управления положением спутника при помощи такого паруса.

Влияние солнечного давления на орбитальные элементы изучено в [13]. Использование солнечного давления для устранения влияния несферичности

Земли проведено в [14], где солнечным парусом снабжены все спутники в формации, представляющей собой тетраэдр, с вершинами - спутниками.

В работах [15] и [16] зеркальный солнечный парус на дочернем спутнике используется для компенсации влияния несферичности Земли на формацию спутников. В этих работах для изучения уходов используются линеаризованные уравнения относительного движения, которые после линеаризации усредняются на периоде вращения. В результате получают “расщепленные” линейные дифференциальные уравнения, с помощью которых проводится поиск параметров паруса. Ось паруса ориентирована вдоль радиус-вектора центра масс спутника относительно центра масс Земли. Отличие цитированной работы от описанной ниже заключается в методике исследования, типе и ориентации паруса.

Перейдем непосредственно к применению методики для устранения относительных вековых уходов из-за полярного сжатия (далее – сжатия) Земли с помощью солнечного паруса, установленного на дочернем спутнике.

2. Уравнения движения. Учет сжатия Земли

Пусть оскулирующие орбиты главного и дочернего спутников – круговые. Чтобы при изучении движения не возникало вырождения по e (эксцентриситету) и ω (направлению на перицентр), введем новые переменные $k = e \sin \omega$, $q = e \cos \omega$ - проекции вектора Лапласа на линию узлов и линию в плоскости орбиты, перпендикулярную линии узлов.

Введем необходимые системы правые ортогональные системы координат. Пусть $OY_1Y_2Y_3$ - геоцентрическая система отсчета. Начало координат O помещено в центр масс Земли, ось OY_3 направлена вдоль ее оси вращения, оси OY_1, OY_2 лежат в плоскости экватора Земли так, что ось OY_1 направлена в точку Весеннего равноденствия, а ось OY_2 дополняет систему до правой; $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ - орты соответствующих осей системы.

Введем орбитальную систему координат (ОСК) для каждого спутника следующим образом. Точка O совпадает с центром масс спутника. Ось OX_3 направлена по радиус-вектору спутника в текущей точке орбиты, ось OX_1 выбрана в плоскости орбиты перпендикулярно OX_3 и составляет со скоростью острый угол. Ось OX_2 дополняет систему координат до правой тройки. Направления осей ОСК приведены на рис.1.

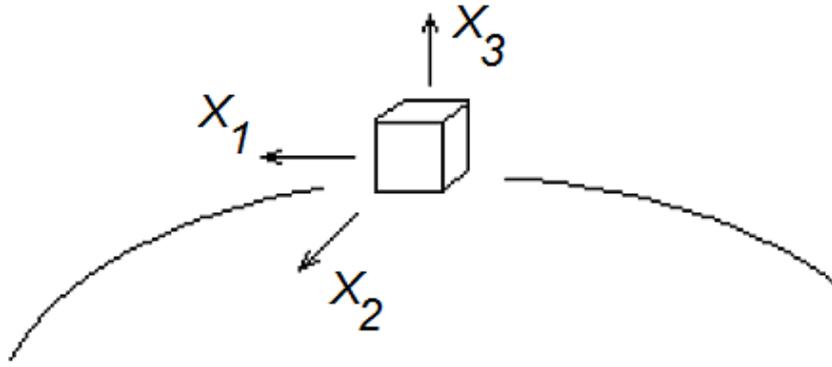


Рис. 1. Оси орбитальной системы координат

Запишем уравнения движения каждого спутника в переменных (Ω, i, p, q, k, u) [17]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} F_2, & \frac{di}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^3}{\mu p} F_2 \cos u, & \frac{dp}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{2r^3}{\mu} F_1, \\ \frac{dq}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ F_3 \sin u + F_1 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} q \right] + F_2 \frac{r}{p} k \sin u \operatorname{ctg} i \right\}, \\ \frac{dk}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\mu} \left\{ -F_3 \cos u + F_1 \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} k \right] - F_2 \frac{r}{p} q \sin u \operatorname{ctg} i \right\}, \\ \frac{dt}{du} &= \frac{1}{\gamma} \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\{F_1 F_2 F_3\}$ – компоненты возмущающего ускорения в ОСК, Ω – долгота восходящего узла, p – параметр орбиты, i – наклонение орбиты, u – аргумент широты, μ – гравитационный параметр Земли. Здесь

$$r = \frac{p}{1 + q \cos u + k \sin u}, \quad p = a(1 - e^2), \quad (2)$$

$\gamma = 1 - \frac{F_2 r^3}{\mu p} \sin u \cos t g i \approx 1$, при $F_2 \ll \frac{\mu}{r^2}$, a – большая полуось орбиты. Элементы орбиты показаны на рис.2.



Рис. 2. Орбитальные элементы

Уравнения (1) для каждого спутника имеют идентичный вид, в случае их использования для первого спутника в обозначении переменных появится индекс «1», в случае второго – индекс «2». Возмущение от сжатия Земли действует на оба спутника. Для исследования влияния возмущения на элементы орбиты нужно подставить в уравнения движения (1) возмущающие ускорения от гармоник J_2 , представимого [18] в ОСК следующим образом:

$$F_1 = -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i, \quad F_2 = -\frac{\delta}{r^4} \sin u \sin 2i, \quad F_3 = \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1). \quad (3)$$

Здесь $\delta = \frac{3}{2} J_2 \mu R_e^2$, R_e – радиус Земли.

Если возмущающее ускорение мало по сравнению с величиной ускорения центрального гравитационного поля, то из (1) видим, что производные орбитальных элементов в таком случае малы. В случае возмущения от сжатия Земли скорость изменения орбитальных элементов имеет порядок J_2 . Следовательно, за время, в течение которого аргумент широты изменится на величину равную 2π , орбитальные элементы изменятся мало. Поэтому, следуя методу Ван-дер-Поля [19], в предположении малых приращений орбитальных

элементов за период обращения спутника по орбите можно заменить правые части системы (1) их средними значениями за период и, таким образом, вычислить среднее изменение орбитальных элементов за период по каждому спутнику.

Вычислим среднее изменение элементов орбиты за период движения по орбите, учитывая выражение для радиус–вектора спутника (2), а также значения стандартных интегралов. Введем символическое обозначение dA/dN , обозначающее изменение параметра A за один оборот спутника по орбите, то есть при изменении аргумента широты u от 0 до 2π .

Изменение угла восходящего узла за период определяется цепочкой равенств

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{\gamma\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} \left(-\frac{\delta}{r^4} \sin u \sin 2i \right) du = \\ &= -\frac{2\delta \cos i}{\gamma\mu p^2} \int_0^{2\pi} (1 + q \cos u + k \sin u) \sin^2 u du = -\frac{2\delta \cos i}{\gamma\mu p^2} \pi. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычислим среднее изменение за период остальных орбитальных элементов. Несложный расчет показывает [20]:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dN} &= -\frac{2\delta \cos i}{\gamma\mu p^2} \pi, & \frac{di}{dN} &= 0, & \frac{dp}{dN} &= 0, & \frac{dq}{dN} &= \frac{\pi\delta}{\gamma\mu p^2} (5\sin^2 i - 4)k, \\ \frac{dk}{dN} &= -\frac{\pi\delta}{\gamma\mu p^2} (5\sin^2 i - 4)q. \end{aligned}$$

Видим, что вековые уходы за период существуют только по восходящему узлу Ω и аргументу перицентра ω . Сжатие Земли не влияет на форму и размеры орбиты, а только на ее положение в пространстве.

Заметим, что в уравнениях движения присутствуют уходы для каждого спутника. Проследим за разностями в уходах. Эти разницы за счет сжатия Земли определяются выражениями

$$\begin{aligned}\Delta\Omega_J &= -\frac{2\delta\pi}{\gamma\mu} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad \Delta i_J = 0, \quad \Delta p_J = 0, \\ \Delta q_J &= \frac{\pi\delta}{\gamma\mu} \left[\frac{(5\sin^2 i_2 - 4)k_2}{p_2^2} - \frac{(5\sin^2 i_1 - 4)k_1}{p_1^2} \right], \\ \Delta k_J &= -\frac{\pi\delta}{\gamma\mu} \left[\frac{(5\sin^2 i_2 - 4)q_2}{p_2^2} - \frac{(5\sin^2 i_1 - 4)q_1}{p_1^2} \right].\end{aligned}\quad (4)$$

Для случая круговых орбит выражения (4) преобразуются к следующему виду:

$$\Delta\Omega_J = -\frac{2\delta\pi}{\gamma\mu} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right), \quad \Delta i_J = 0, \quad \Delta p_J = 0, \quad \Delta q_J = 0, \quad \Delta k_J = 0. \quad (5)$$

Индекс «J» обозначает разницу в улодах за счет сжатия Земли.

3. Уравнения движения. Учет давления солнечной радиации

В соответствии с [21] ускорение за счет давления солнечной радиации выражается следующей формулой:

$$\mathbf{F}_s = -P \cos \beta \frac{A}{m_0} \left[(1 - \varepsilon') \mathbf{S} + 2\varepsilon' \cos \beta \mathbf{N} \right]. \quad (6)$$

Здесь $P \approx 4.56 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}^2$, \mathbf{N} – нормаль к поверхности паруса, \mathbf{S} – вектор направления на Солнце, A – площадь паруса, m_0 – масса спутника с парусом, β – угол между нормалью \mathbf{N} и вектором \mathbf{S} направления на Солнце, как показано на рис.4. В случае полностью зеркального паруса (полное отражение) коэффициент отражения $\varepsilon' = 1$, в случае абсолютно черного паруса $\varepsilon' = 0$.

В геоцентрической системе координат вектор \mathbf{S} направления на Солнце выглядит следующим образом:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \varepsilon \\ \sin \theta \sin \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь θ – долгота Солнца, $\varepsilon = 23^\circ 27'$ – наклон эклиптики к экватору, как показано на рис. 3.

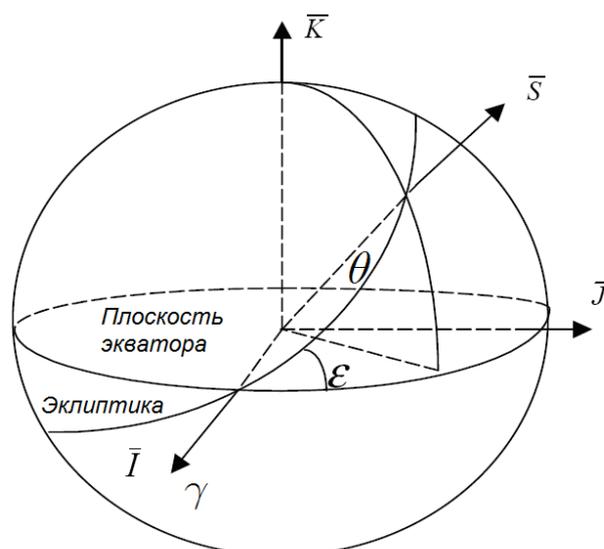


Рис. 3. Вектор направления на Солнце

Перевод вектора S из геоцентрической в ОСК осуществляется при помощи следующего векторного соотношения:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega \sin u - \sin\Omega \cos i \cos u & -\sin\Omega \sin u + \cos\Omega \cos i \cos u & \sin i \cos u \\ \sin\Omega \sin i & -\cos\Omega \sin i & \cos i \\ \cos\Omega \cos u - \sin\Omega \cos i \sin u & \sin\Omega \cos u + \cos\Omega \cos i \sin u & \sin i \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в случае абсолютно черного паруса возмущающее ускорение не зависит от направления вектора нормали паруса, а только от угла между нормалью и направлением на Солнце. При этом изменение угла β можно не учитывать, а учитывать только изменение эффективной площади паруса, то есть в качестве коэффициента регулирования брать выражение $A \cos \beta$.

В случае абсолютно черного паруса возмущающее ускорение от давления солнечной радиации (6) приводится к виду

$$\mathbf{F}_s = -C\mathbf{S} \cos \beta, \quad (7)$$

где $C = PA/m_0$. Так как парус установлен только на одном из спутников, то необходимо найти величину угла поворота паруса (а также возможно площади паруса) для того, чтобы с помощью давления солнечной радиации

скомпенсировать относительный уход между спутниками из-за сжатия Земли (5).

На рис.4 показаны вектора \mathbf{N} , \mathbf{S} , угол между ними, а также результирующий вектор силы от давления солнечной радиации в случае абсолютно черного паруса.

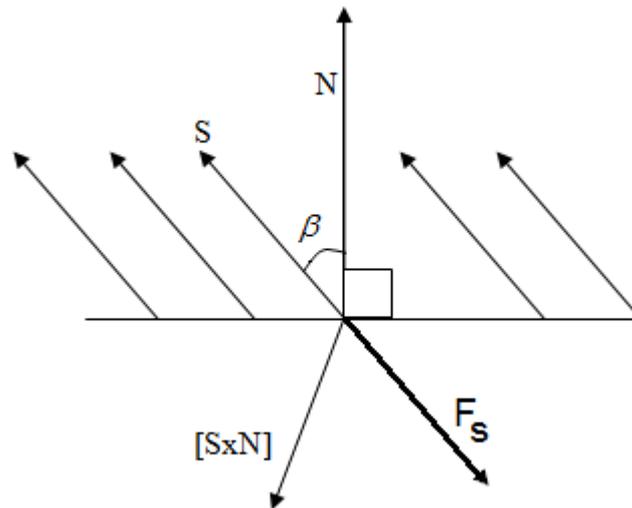


Рис. 4. Вектор \mathbf{F}_S силы от давления солнечной радиации, направление на Солнце – вектор \mathbf{S} , вектор \mathbf{N} нормали паруса

4. Аналитическое построение алгоритма управления

Заметим, что вторая компонента возмущающего ускорения, обусловленная давлением солнечной радиации (7), в орбитальной системе координат принимает вид

$$F_{s2} = -C \cos \beta (s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i),$$

то есть от широты спутника в этом выражении может зависеть только угол поворота паруса. Таким образом, средний за период абсолютный уход аргумента восходящего узла и наклона дочернего спутника с парусом за счет давления солнечной радиации определяется выражениями

$$\Delta \Omega_s = \frac{d\Omega}{dN} = -\frac{Cp^2}{\mu \sin i} (s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i) \int_{\Sigma} \sin u \cos \beta(u) du = -\Delta \Omega_f,$$

$$\Delta i_s = \frac{di_s}{dN} = -\frac{Cp^2}{\mu \sin i} (s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i) \int_{\Sigma} \cos u \cos \beta(u) du = 0.$$

Здесь Σ - некоторое подмножество интервалов из отрезка времени $[0, 2\pi]$. То есть на интервалах Σ мы используем управление с помощью солнечного паруса, иначе «выключаем», то есть либо поворачиваем парус так, чтобы $\beta = 90^\circ$, либо уменьшаем площадь паруса до 0. Здесь и далее соответствующий дочернему спутнику индекс указываться не будет для упрощения записи соотношений.

В силу того, что давления солнечной радиации применяется для компенсации относительного ухода между дочерним и главным спутником из-за сжатия Земли, полученные абсолютные уходы из-за давления солнечной радиации необходимо приравнять относительным уходам из-за влияния гармоник J_2 , указанным в выражении (5). Тогда получим

$$-\frac{Cp^2}{\mu \sin i} (s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i) \int_{\Sigma} \sin u \cos \beta(u) du = -\Delta \Omega_J,$$

$$-\frac{Cp^2}{\mu \sin i} (s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i) \int_{\Sigma} \cos u \cos \beta(u) du = 0.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\Sigma} \cos u \cos \beta(u) du = 0, \quad (8a)$$

$$\int_{\Sigma} \sin u \cos \beta(u) du \neq 0, \quad (8b)$$

$$s_1 \sin \Omega \sin i - s_2 \cos \Omega \sin i + s_3 \cos i \neq 0. \quad (8c)$$

Теперь рассмотрим изменение Δp параметра орбиты p на интервале Σ

$$\Delta p_s = \frac{dp}{dN} = -\frac{2p^3}{\mu} C \left(-\int_{\Sigma} s_1 \cos \Omega \sin u \cos \beta du - \int_{\Sigma} s_1 \sin \Omega \cos i \cos u \cos \beta du - \right. \\ \left. - \int_{\Sigma} s_2 \sin \Omega \sin u \cos \beta du + \int_{\Sigma} s_2 \cos \Omega \cos i \cos u \cos \beta du + \int_{\Sigma} s_3 \sin i \cos u \cos \beta du \right)$$

В силу соотношений (8a-8b) среднее изменение параметра p на интервале Σ определяется выражением

$$\frac{dp}{dN} = -\frac{2p^3}{\mu} C \left(-\int_{\Sigma} s_1 \cos \Omega \sin u \cos \beta du - 0 - \int_{\Sigma} s_2 \sin \Omega \sin u \cos \beta du + 0 + 0 \right).$$

Так как среднее относительное изменение параметра орбиты p из-за сжатия Земли равно нулю в силу (5), то его среднее изменение для дочернего спутника также должно быть равно нулю. Отсюда с учетом (8b) должно выполняться следующее соотношение:

$$s_1 \cos \Omega + s_2 \sin \Omega = 0. \quad (9)$$

Теперь нужно обратить в нуль вековые изменения для k и q , возникающие за счет влияния давления солнечной радиации на парус дочернего спутника. С учетом равенства (9) выражения для компонент вектора давления солнечной радиации в орбитальной системе координат приводятся к следующему виду:

$$e_1 = \cos u (-s_1 \sin \Omega \cos i + s_2 \cos \Omega \cos i + s_3 \sin i) = B \cos u,$$

$$e_3 = \sin u (-s_1 \sin \Omega \cos i + s_2 \cos \Omega \cos i + s_3 \sin i) = B \sin u.$$

Тогда имеют место выражения

$$\Delta q_s = \frac{dq}{dN} = -\frac{BCp^2}{\mu} \int_{\Sigma} (\cos \beta + \cos^2 u \cos \beta) du$$

$$\Delta k_s = \frac{dk}{dN} = -\frac{BCp^2}{\mu} \int_{\Sigma} \cos u \sin u \cos \beta du$$

И в соответствии с (5) необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$-\frac{BCp^2}{\mu} \int_{\Sigma} (\cos \beta + \cos^2 u \cos \beta) du = 0, \quad (10a)$$

$$-\frac{BCp^2}{\mu} \int_{\Sigma} \cos u \sin u \cos \beta du = 0. \quad (10b)$$

Дальнейшая задача построения управления заключается в том, чтобы найти такую функцию $\cos \beta$, чтобы одновременно выполнялись соотношения (8a-8c, 9, 10a-10b). Сложность поиска заключается в том, что функция $\cos \beta$ должна быть строго неотрицательна, так как с помощью давления солнечной

радиации нельзя поменять направление вектора тяги, которое строго противоположно направлению на Солнце.

Возьмем в качестве функции $\cos \beta$ некоторую положительную константу, тогда $\cos \beta = h > 0$, а в качестве Σ выбираем интервал $\Sigma = [u_1, u_2]$. Тогда соотношения (8a-8b) приводятся к виду

$$\int_{u_1}^{u_2} \cos u du = 0 = \sin u_2 - \sin u_1 = 0 \quad (11a)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \sin u du = \cos u_1 - \cos u_2 \neq 0 \quad (11b)$$

Кроме того, (10a) и (10b) с помощью (11b) также упрощаются

$$B \int_{u_1}^{u_2} \cos u \sin u du = \frac{B}{2} (\sin u_2 - \sin u_1) (\sin u_2 + \sin u_1) = 0 \quad (11c)$$

$$B \int_{u_1}^{u_2} (1 + \cos^2 u) du = \left(\frac{3}{2} (u_2 - u_1) + \frac{1}{2} (\sin u_2 \cos u_2 - \sin u_1 \cos u_1) \right) B \quad (11d)$$

Получаем, что (11c) автоматически при выполнении (11a) обращается в нуль. Осталось обратить в нуль выражение (11d). Видим, что оно равно нулю, если выполняется следующая совокупность равенств:

$$B = 0, u_1 = u_2 + \frac{1}{3} \sin 2u_2. \quad (12)$$

Кроме того, из (11a) и (11b) следует

$$\begin{cases} u_2 = \pi - u_1, & u_1 \in [0, \pi], \\ u_2 = 2\pi - u_1, & u_1 \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Исследуем второе уравнение из совокупности (12) на интервале $u_1 \in [0, \pi]$.

В этом случае получим, что $0 = \pi - 2u_1 - \frac{1}{3} \sin(2u_1)$. Функция

$f(u_1) = \pi - 2u_1 - \frac{1}{3} \sin(2u_1)$ на интервале $u_1 \in [0, \pi]$ является монотонной и

строго убывающей, так как ее производная строго меньше нуля. Поэтому нулевое значение функция принимает только в одной точке - при $u_1 = \pi/2$. Но в

таким образом получается, что интервал Σ «включения» паруса состоит только из одной точки $u = \pi/2$, что является неоптимальным с точки зрения паруса. Аналогично проведем исследование на интервале $u_1 \in [\pi, 2\pi]$, получим, что интервал «включения» паруса состоит из одной точки $u = \pi$. Поэтому из совокупности (12) в качестве решения следует брать только равенство нулю коэффициента В.

В итоге получаем, что устранить вековой уход с помощью солнечного паруса на дочернем спутнике можно для орбит, для которых выполнены соотношения

$$tg\Omega_2 = -\frac{1}{\cos\varepsilon}ctg\theta, \quad (13a)$$

$$tgi_2 = -\frac{ctg^2\theta + \cos^2\varepsilon}{\cos\varepsilon\sin\varepsilon}\cos\Omega_2 \quad (13b)$$

$$ctgi_2 \neq \frac{ctg^2\theta + \cos^2\varepsilon}{\cos\varepsilon\sin\varepsilon}\cos\Omega_2 \quad (13c)$$

Возмущающее ускорение в этом случае представимо следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{PA\cos\beta}{m_0}\mathbf{S} = \\ &= \frac{\sin i_2}{p_2^2(\cos u_1 - \cos u_2)} \frac{1}{(s_1 \sin\Omega_2 \sin i_2 - s_2 \cos\Omega_2 \sin i_2 + s_3 \cos i_2)} \frac{2\delta\pi}{\gamma} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right) \mathbf{S} \end{aligned}$$

При этом, так как управляющее ускорение направлено против направления на Солнце, должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{\sin i_2}{p_2^2(\cos u_1 - \cos u_2)} \frac{1}{(s_1 \sin\Omega_2 \sin i_2 - s_2 \cos\Omega_2 \sin i_2 + s_3 \cos i_2)} \frac{2\delta\pi}{\gamma} \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right) < 0.$$

Для минимизации значения управляющего ускорения (а, значит, площади паруса) нужно, чтобы выражение $|\cos u_1 - \cos u_2|$ принимало максимальное возможное значение на интервалах $[0, \pi]$ или $[\pi, 2\pi]$, а это возможно в том случае, когда u_1 и u_2 принимают граничные значения. Тогда алгоритм

управления солнечным парусом на дочернем спутнике с целью устранения относительного векового ухода из-за несферичности Земли можно описать следующим образом:

ЕСЛИ

$$\frac{\sin i_2}{(s_1 \sin \Omega_2 \sin i_2 - s_2 \cos \Omega_2 \sin i_2 + s_3 \cos i_2)} \frac{2\delta\pi \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right)}{\gamma} < 0,$$

ТО «включение» паруса производим на интервале $u \in [0, \pi]$,

ИНАЧЕ парус «включаем» на интервале $u \in [\pi, 2\pi]$.

При этом эффективная площадь паруса определяется выражением

$$A \cos \beta = -\frac{m_0}{P} \frac{\sin i_2}{p_2^2 (\cos u_1 - \cos u_2)} \times \\ \times \frac{1}{(s_1 \sin \Omega_2 \sin i_2 - s_2 \cos \Omega_2 \sin i_2 + s_3 \cos i_2)} \frac{2\delta\pi \left(\frac{\cos i_2}{p_2^2} - \frac{\cos i_1}{p_1^2} \right)}{\gamma}.$$

Все расчеты выше проводились без учета солнечной тени. Покажем, что для траектории дочернего спутника, удовлетворяющей условиям (13а – 13с), тень от солнца учитывать не нужно. Подставим (13а) – (13с) в матрицу перехода из геоцентрической СК в ОСК

$$\begin{pmatrix} -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos i \cos u & -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos i \cos u & \sin i \cos u \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \\ \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \cos i \sin u & \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \cos i \sin u & \sin i \sin u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то есть вектор направления на Солнце в ОСК имеет только компоненту в направлении по нормали к плоскости орбиты, а значит, орбита дочернего спутника всегда освещена и влияние солнечной тени учитывать не нужно – ее попросту нет.

5. Численное моделирование

Построим траектории относительного движения с помощью разработанного алгоритма. Для этого воспользуемся тем, что в

геоцентрической системе координат координата центра масс каждого спутника связана с орбитальными элементами при помощи соотношений

$$X_j = r_j (\cos u_j \cos \Omega_j - \sin u_j \sin \Omega_j \cos i_j),$$

$$Y_j = r_j (\cos u_j \sin \Omega_j + \sin u_j \cos \Omega_j \cos i_j), Z_j = r_j \sin u_j \sin i_j,$$

где j – номер спутника. Таким образом, рассчитав численно изменение орбитальных элементов по (1) с учетом выражений (3) и (7) без использования методов осреднения, в каждый момент времени можно найти координаты каждого из спутников в ОСК при наличии и отсутствии солнечного паруса на дочернем спутнике. На всех последующих рисунках главный спутник находится в точке с координатами $(0,0,0)$.

Построим относительную траекторию и управление для одинаковых параметров орбиты p и разных наклонений для круговых орбит дочернего и главного спутников. Разницу в наклонениях выберем такую, чтобы максимальное расхождение спутников (при прохождении наивысшей точки орбиты) не превосходило 10000 м, а значит, величина разницы в наклонениях для радиуса орбиты около 7500 км должна быть не более чем $10000/7500000 \sim 0,1^\circ$. Пусть $p_1 = p_2 = 7.4 \cdot 10^6$ м, наклонения $i_1 = -69.9^\circ$, $i_2 = -69.8^\circ$, $\Omega_1 = \Omega_2 = -32.2^\circ$. Высота орбиты выбрана равной 7400 км, так как для орбит высотой более 700 км влияние сопротивления атмосферы становится значительно меньше влияния солнечного давления [22].

На рис.5 показана траектория относительного движения дочернего спутника на пяти периодах в случае отсутствия солнечного паруса. Видим, что уход в относительном движении равен примерно 100 м.

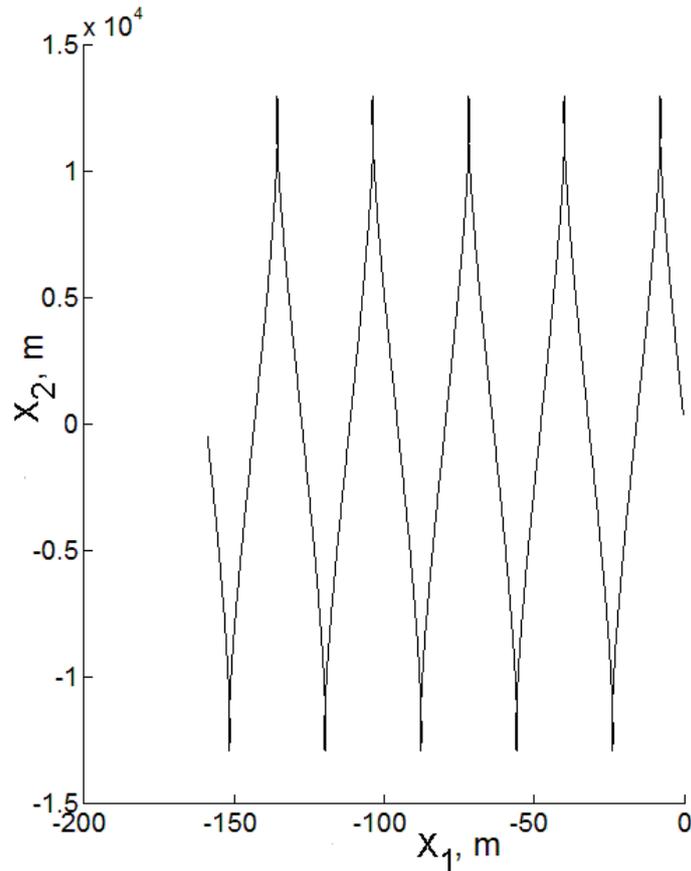


Рис. 5. Относительное движение в системе Formation Flying при отсутствии солнечного паруса

На рис.6 показана траектория относительного движения дочернего спутника с солнечным парусом на пяти орбитальных периодах. Видим, что уход в относительном движении практически отсутствует. На рис.7 показана сила тяги, создаваемая давлением солнечной радиации, компенсирующая уход из-за полярного сжатия Земли. Знак «минус» указывает на то, что тяга направлена противоположно вектору \mathbf{S} направления на Солнце. При этом эффективная площадь солнечного паруса равна $A \cos \beta \approx 10m_0 \text{ м}^2/\text{кг}$, где m_0 масса спутника, измеряемая в единицах массы - кг. Кроме того, из выражения для площади паруса видно, что $A \cos \beta \propto p^{-4}$. Таким образом, чем выше орбита, тем меньшей площади требуется парус для устранения влияния сжатия Земли.

Приведем также трехмерное изображение траекторий относительного движения при наличии (рис.9) и при отсутствии паруса на дочернем спутнике (рис.8). Видим, что в случае отсутствия солнечного паруса в траектории относительного движения наблюдается явный вековой сдвиг в направлении

«вдоль траектории», в то время как с помощью солнечного паруса этот вековой сдвиг удалось практически устранить.

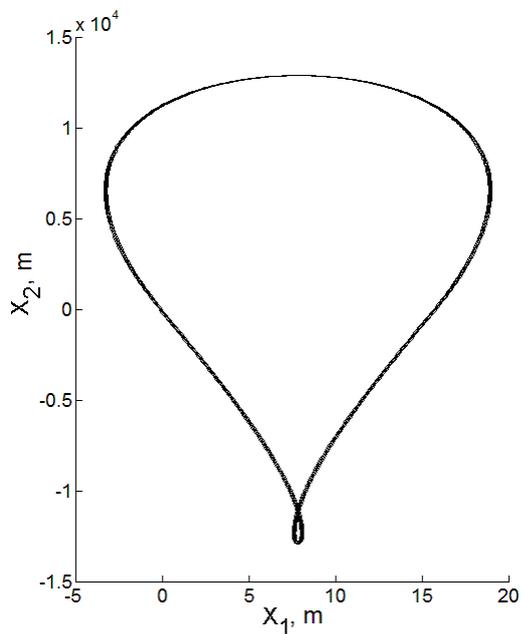


Рис. 6. Относительное движение в системе Formation Flying при наличии солнечного паруса

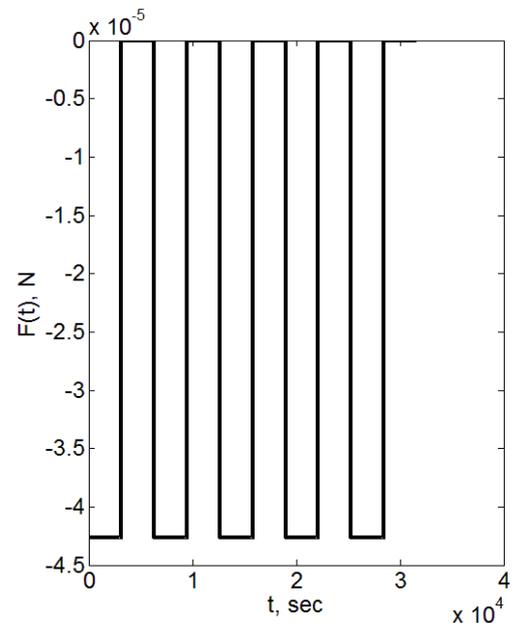


Рис. 7. Величина силы тяги, создаваемой давлением солнечной радиации. Знак «минус» указывает на то, что тяга противоположна вектору направления на Солнце

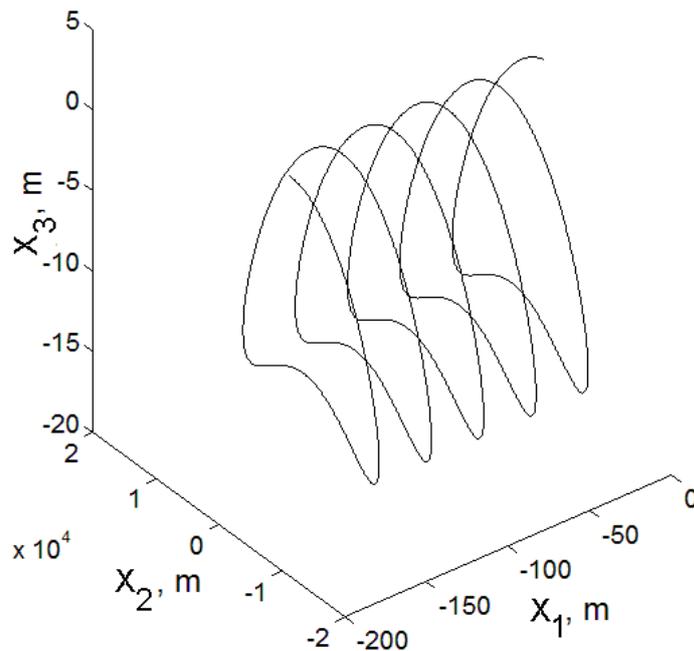


Рис. 8. Траектория относительного движения в случае отсутствия солнечного паруса

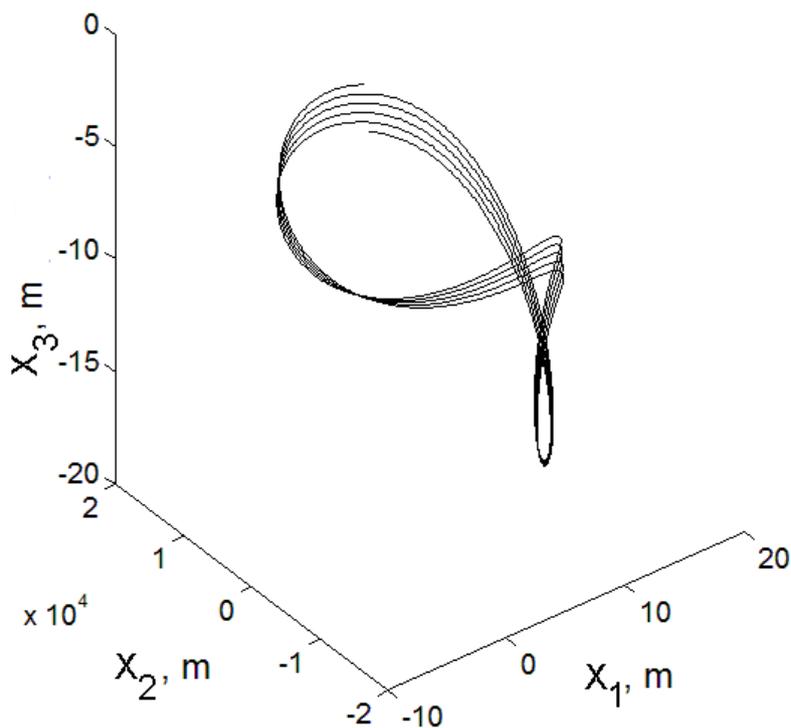


Рис. 9. Траектория относительного движения при наличии солнечного паруса на дочернем спутнике

6. Заключение

В работе проверена возможность устранения относительных вековых уходов, возникающих из-за сжатия Земли, с помощью солнечного паруса, установленного на одном из спутников.

Выведены уравнения движения в орбитальных элементах, учитывающие как полярное сжатия Земли, так и влияние давления солнечной радиации. Проведено усреднение уравнений в предположении малости возмущений. Непосредственно указаны аналитические выражения для управления, устраняющего вековые уходы в зависимости от начальных условий на орбитальные элементы главного и дочернего спутников.

Проведено численное моделирование относительного движения с использованием исходных уравнений движения. Показана состоятельность метода устранения вековых уходов из-за указанного гравитационного возмущения. Верифицирована разработанная ранее методика устранения относительных вековых уходов.

7. Благодарности

Работа поддержана РФФИ, Федеральным агентством по науке и инновациям (Контракт N 02.514.11.4068) и Программой N 22 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В.Белецкий. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972, 360с.
2. И.Е.Зараменских, М.Ю.Овчинников, И.В.Ритус. Компенсация влияния сжатия Земли в относительном движении формации спутников с малой тягой заданного направления. Препринт ИПМ им.М.Келдыша РАН, Москва, 2008 г., № 55, 23с.
3. H.Schaub and K. T.Alfriend, "J₂ Invariant Relative Orbits for Spacecraft Formations", NASA Goddard Symposium, May 1999.
4. H.Schaub, S.R.Vadali, J.L.Junkins, K.T.Alfriend, Spacecraft Formation Flying Control Using Mean Orbit Elements, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 48, N 1, Jan.–March, 2000, pp.69–87.
5. K.T.Alfriend, S.R.Vadali, H.Schaub, Formation Flying Satellites: Control by an Astrodynamist, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Vol. 81, N 1–2, 2001, pp.57–62.
6. И.Е.Зараменских. Множество достижимых траекторий относительного движения двух спутников при управлении вдоль вектора магнитного поля, Сборник трудов V Научно-практической конференции "Микротехнологии в авиации и космонавтике". Москва, 17-19 сентября, 2007, 10с.
7. C.R.McInnes, Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications, Springer - Praxis Series, Berlin, 1999, 296 pp.
8. B.Wie, Solar Sail Attitude Control and Dynamics. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 27(4), 2004, pp. 526-544.
9. Е.Н.Поляхова. Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 304 с.
10. C. R.McInnes, Payload Mass Fractions for Minimum-Time Trajectories of Flat and Compound Solar Sails, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 23, No. 6, 2000, pp. 1076-1078.
11. A.D.Guerman, G.Smirnov, Attitude Control of Solar Photon Thruster vs Plane Solar Sail. Advances in the Astronautical Sciences, 2006, v.123, pp. 2635 – 2648.
12. A.D.Guerman, G.V.Smirnov, Attitude Dynamics of a Compound Solar Sail. Proc. of the 57th International Astrodynamics Congress, Valencia, Spain, 2006, Paper IAC-06-C1.1.8.
13. J.C.Van der Ha, V.J.Modi, Orbital Perturbations and Control by Solar Radiation Forces, Journal of Spacecraft and Rockets 15 (2) (1978) 105–112.

14. G.V. Smirnov, M. Ovchinnikov, A. Guerman, Use of Solar Radiation Pressure to Maintain a Spatial Satellite Formation, *Acta Astronautica*, 2007, Vol. 61, N 6-7, Academy Transactions Note, pp.724 – 728.

15. T. Williams, Z.S. Wang, Uses of Solar Radiation Pressure for Satellite Formation Flight, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (2002) 163–183.

16. Zhong-Sheng Wang, Dynamics Analysis of Satellite Formation Flight Using Solar Radiation Pressure, Degree PhD, University of Cincinnati, Engineering: Aerospace Engineering, 2001.

17. H. Schaub, Relative Orbit Geometry Through Classical Orbit Element Differences, *Journal of Guidance, Navigation and Control*, Vol.27, N 5, Sept.-Oct., 2004, pp.839 – 848.

18. М.Ф. Решетнев, А.А. Лебедев, В.А. Бартнев, М.Н. Красильщиков, В.А. Малышев, В.В. Малышев. Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.: Машиностроение, 1988, 336с.

19. Н.Н. Моисеев, Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981, 400с.

20. Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полета, М.: Наука, 1990, 448с.

21. O. Montenbruck, E. Gill, *Satellite Orbits: Models, Methods, and Applications*, Springer-Verlag, 2001.

22. П.Е. Эльясберг. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, М.: Наука, 1965, 540с.