



Бахолдин И.Б.

Слабодиссипативные
структуры разрывов с
внутренними
бездиссипативными
разрывами резонансного
типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Слабодиссипативные структуры разрывов с внутренними бездиссипативными разрывами резонансного типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 37. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-37>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Бахолдин И.Б.

СЛАБОДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ
С ВНУТРЕННИМИ БЕЗДИССИПАТИВНЫМИ РАЗРЫВАМИ
РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Москва-2009

УДК 532.59+533.6+533.95

Бахолдин И.Б. Слабодиссипативные структуры разрывов с внутренними бездиссипативными разрывами резонансного типа

На примере обобщенного уравнения Кортевега-Бюргера посредством численного анализа установлено, что для слабодиссипативных сред с дисперсией и нелинейностью встречаются три типа структур разрывов: стационарные, периодические по времени и стохастические. Стационарные слабодиссипативные структуры внутри себя содержат бездиссипативные структуры разрывов типа переходов между однородными или волновыми состояниями. Структура разрыва может быть не единственной. В связи с этим возникают гистерезисы, т. е. тип разрыва зависит от пути эволюции системы. Разработана методика исследования ветвей двоякопериодических решений обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза. Выявлено соответствие между типами структуры разрыва и картинами расположения ветвей. Проведено исследование зависимости типа разрыва от его амплитуды и параметра диссипации.

Bakholdin I.B. Low-dissipative shock structures with internal non-dissipative shocks

It is found for the model described by generalized Korteweg-Burgers equation that three types of shock structures are observed: stationary, time-periodic and stochastic. Stationary low-dissipative structures contain internal non-dissipative shock structures. These structures are transitions between homogeneous or wave states. Shock structure may be not unique. The type of the shock depends on character of evolution of system. Methods of investigation of branches of two-periodic stationary of Korteweg-de Vries equation are developed. Correspondence between types of shock structures and bifurcations of two-periodic branches is found. Analysis of dependence of shock structure type from amplitude of the shock and parameter of dissipation is fulfilled.

Введение

Согласно теории бездиссипативных разрывов [1]–[5] при решении ряда бездиссипативных эволюционных уравнений в частных производных с дисперсией в случае начальных данных типа сглаженной ступеньки со временем возникают решения, в которых имеются волновые зоны и однородные состояния, описываемые некоторыми усредненными и упрощенными уравнениями. При таком описании решения оказываются автомодельными, а переходы между волновыми зонами или однородными состояниями рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. В некоторых случаях решения со временем становятся хаотическими. Слабодиссипативные стационарные структуры разрывов представляют собой переходы между однородными состояниями, но внутри этих переходов имеются волновые зоны, описываемые при стремлении параметра диссипации к нулю, усредненными уравнениями, отличающимися от усредненных уравнений в бездиссипативном случае только дополнительными недифференциальными членами [5], [6]. Переходы между волновыми зонами или однородными состояниями, имеющиеся внутри слабодиссипативной структуры, как и в чисто бездиссипативном случае, рассматриваются как структуры бездиссипативных разрывов. Опыт исследований показывает, что целесообразно вначале развить методику для наиболее простых моделей, а затем переносить ее на аналогичные более сложные. В этом смысле представляют интерес обобщенные уравнения Кортевега–де Вриза и Бюргерса.

$$a_t + [b_1 a + b_n a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = 0 \quad (0.1)$$

$$a_t + [b_1 a + b_n a^2/2 + b_3 a_{xx} + b_5 a_{xxxx}]_x = \varepsilon a_{xx} \quad (0.2)$$

Уравнение (0.1) описывает широкий круг физических явлений, например, распространение длинных волн в жидкости при наличии ледового покрытия [7], [8] ($b_n = 3/2\sqrt{g/H}$, $b_1 = \sqrt{gH}$, $b_3 = 1/2\sqrt{gH}(H^2/3 + Hh - \sigma/(\rho g))$, $b_5 = 1/2\sqrt{H/g}Eh^3/(12(1 - \nu^2)\rho)$, H — глубина жидкости, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, h — толщина льда, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, σ — начальное натяжение) и гравитационно-капиллярные волны [9], в этих случаях a — отклонение поверхности жидкости; частный случай ($b_3 = 0$) уравнения (0.1) можно вывести для описания магнитозвуковых волн в плазме [10]; уравнения такого типа (но с кубической нелинейностью) применяются в теории упругости для материалов с включениями [11]; дисперсия также проявляется в различных средах за счет молекулярных эффектов для ударных волн большой интенсивности. В рассматриваемые модели можно включать диссипацию и получать уравнение (0.2). В частности для волн подо льдом можно формально включить член, соответствующий турбулентной вязкости [5]. В случае волн в канале можно включить силу трения льда о стенку в предположении о том, что из-за наличия жидкой прослойки между льдом и стенкой эта сила носит гидродинамический характер и пропорциональна скорости перемещения поверхности льда в вертикальном направлении. Можно рассматривать лед как вязкоупругую среду, в этом случае в левой части уравнения (0.2) будет член $-\varepsilon a_{xxxx}$, разработанная ниже методика исследования

допускает рассмотрение и такого уравнения, причем зависимость типа разрыва от амплитуды (п.6) не изменится. Задачей настоящей работы является получение полного представления о всех типах слабодиссипативных разрывов и возникающих при этом внутренних бездиссипативных разрывах для уравнения (0.2).

1 Наиболее простые прогнозируемые типы разрывов.

Тип бездиссипативного разрыва зависит от числа пересечений ветвей дисперсионной кривой по обе стороны разрыва и прямой, соответствующей его фазовой скорости [1]. Для определения конкретного типа разрыва в решениях уравнений (0.1) и (0.2) следует найти значения k как ненулевые решения системы

$$\omega = (b_1 + b_n a_{1,2})k - b_3 k^3 + b_5 k^5, \quad \omega = Uk \quad (1.1)$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены значения a для состояний равновесия системы уравнений бегущих волн, U — скорость разрыва, k — волновое число, ω — циклическая частота.

При $b_3 b_5 < 0$ для одной из сторон имеется одно пересечение при $k > 0$ и два действительных (в силу симметрии имеется еще аналогичное пересечение при $k < 0$, поэтому каждому пересечению при $k > 0$ соответствуют два действительных корня) и два мнимых корня, для другой — либо четыре мнимых корня (малые амплитуды разрыва), либо четыре комплексных (большие амплитуды). В первом случае прогнозируется эволюционный разрыв солитонного типа, т.е. переход между однородным состоянием и периодическим, приближающимся к последовательности уединенных волн при $t \rightarrow \infty$, а во втором — эволюционный разрыв с излучением волны вправо, т.е. переход между однородным и периодическим состоянием с конечной длиной волны.

При $b_3 b_5 > 0$ либо (большие амплитуды) для одной из сторон разрыва пересечения нет, корни уравнения (1.1) комплексны, а для другой имеется два действительных и два мнимых, может существовать эволюционный разрыв с излучением, либо (малые амплитуды) для одной из сторон разрыва два действительных и два мнимых корня (одно пересечение), а для другой — четыре мнимых (два пересечения). Теория прогнозирует [9], [5] для малых амплитуд наличие решений типа обобщенной уединенной волны (суперпозиция уединенной и периодической волны). Можно допустить наличие разрывов обобщенно-солитонного типа, т.е. переходов между периодическим состоянием и двоякопериодическим, стремящимся к последовательности обобщенных уединенных волн при $t \rightarrow \infty$. Помимо обобщенных солитонов посредством численного анализа стационарных решений для этого случая были выявлены структуры переходов между периодическим и двоякопериодическим состоянием с целым отношением периодов волн [4]. Эволюционность и наблюдаемость разрывов обоих типов не ясны.

Бездиссипативные разрывы в слабодиссипативном случае встраиваются

внутри стационарной структуры разрыва, а в бездиссипативном — автомодельной (с огибающей зависящей от x/t) расширяющейся структуры разрыва. В обоих случаях структуры описываются некоторыми усредненными уравнениями для волновых зон. В первом случае $U = (a_1 + a_2)/2$ [5], [6], величины $a_{1,2}$ совпадают со значениями a при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, поэтому сделать прогноз наличия внутреннего разрыва одного из рассмотренных выше типов в зависимости от амплитуды разрыва $\Delta = a_2 - a_1$ легко, он дается в п.2. В бездиссипативном случае прогнозируются (и наблюдаются) решения, аналогичные, прогнозируемым в слабодиссипативном случае, но величина U может быть получена только в результате решения (0.1) или решения системы усредненных уравнений [3], [5], при наличии волновой зоны значения a_1 или a_2 не совпадают со значениями a при $x \rightarrow \pm\infty$, поэтому критические значения амплитуды разрыва, определенной как разность значений a при $x \rightarrow \pm\infty$, при которых происходят переходы между различными типами внутренней структуры, не совпадают с их значениями для слабодиссипативного случая.

2 Расчет структуры разрыва.

Численный эксперимент, направленный на выявление зависимости типа структуры разрыва от его амплитуды и диссипативного параметра ε , состоит в исследовании установившихся численных решений уравнения (0.2), возникающих в результате эволюции начальных данных типа сглаженной ступеньки:

$$a = \Delta(1 - \tanh((x - \delta)/l))/2, b_1 = -U = -(a_1 + a_2)/2, a_1 = 0, a_2 = \Delta; \\ b_n = 1, \quad b_3 = \pm 1, \quad b_5 = 1$$

Коэффициенты (0.2) приводятся к единичным растяжением осей x , t , a ; ε и Δ становятся безразмерными параметрами задачи (для волн подо льдом см. [5], [8]). При необходимости поменять знак b_5 или b_n для некоторых других моделей требуется применить еще и зеркальное отражение по осям x и a .

В отличие от работы [6] здесь была применена явная трехслойная схема с центральными разностями для аппроксимации производных нечетного порядка и с трехслойным шаблоном типа "ромб" для производной четного порядка: $a_{xx} \approx (a_{i+1}^j + a_{i-1}^j - a_i^{j-1} - a_i^{j+1})/\Delta x^2$, как в абсолютно устойчивой схеме Дюфорты–Франкеля для уравнения теплопроводности, здесь i и j пространственные и временные индексы сетки, Δx и Δt пространственные и временные шаги. Поддерживалось условие устойчивости: $\Delta t = C\Delta x^5$, $C = const$, поэтому погрешность аппроксимации по времени, вносимая шаблоном "ромб", здесь имеет порядок $\Delta t^2/\Delta x^2 = C^2\Delta x^8$. Это нововведение позволило варьировать параметр ε в широких пределах вплоть до нулевого значения, причем при $\varepsilon = 0$ схемной диссипации нет. Расчет для бесконечной области, как и ранее, аппроксимировался расчетом на достаточно протяженном отрезке. Схемы с центральными разностями предполагают постановку одинакового числа граничных условий на левой и правой границе этого отрезка: $a_0^j = a_1^j = a_2^j = a_2$,

$a_N^j = a_{N-1}^j = a_{N-2}^j = a_1$, N — число разбиений отрезка. В то же время условия корректности постановки задачи на отрезке для уравнения (0.2) подразумевают разное число граничных условий. Для устранения этого противоречия, а также для исключения отражений от границ было сделано еще одно важное нововведение: вблизи границ были созданы узкие поглощающие зоны, в правую часть уравнения (0.2) включался член, $f(x)a_{xxxxxx}$, $f(x) > 0$ внутри поглощающей зоны, $f(x) = 0$ в остальной области, производная шестого порядка аппроксимировалась по шаблону типа "ромб". Это позволило уменьшить размеры расчетной области.

Выявлены стационарные, периодические по времени и стохастические структуры, причем для одних и тех же значений параметров Δ и ε , меняя начальные данные (параметр l) или меняя ε в процессе расчета, можно получить разные решения. Удобным способом определения типа решения является построение графика $\max_x a(t)$, при $t \rightarrow \infty$ этот график может выходить на стационарный, периодический или стохастический режим.

При $b_3 b_5 < 0$ для малых значений ε расчет подтверждает прогноз: солитонный тип при $\Delta < 0.5$, разрыв с излучением при $\Delta > 0.5$. Дальнейшие исследования здесь не требуются. При $b_3 b_5 > 0$ для достаточно больших амплитуд подтверждается наличие разрыва с излучением, рис.1а, $\Delta = 0.62$.

Расчет для умеренных амплитуд показывает появление решений стохастического типа. Но такие решения наблюдаются и тогда, когда корни комплексны, $\Delta > 0.5$, при $\Delta < 0.5$ помимо стохастических встречаются еще стационарные и периодические структуры, требующие дальнейшего анализа. Обнаруженные стационарные структуры качественно можно интерпретировать как структуры, где имеется внутренний переход между периодическим состоянием (справа) и двоякопериодическим состоянием (слева) с целым отношением периодов: $1/2$ (рис.1б, $\Delta = 0.35$), $1/3$ (рис.1в, $\Delta = 0.21$), $1/4$, Основное отличие этих структур от структуры с разрывом с излучением — наличие волновой зоны слева от разрыва, которая расширяется при уменьшении ε , тогда как для разрыва с излучением этого не происходит, расширяется только волновая зона справа, этот разрыв формально интерпретируется как $1/1$ резонанс: отношение действительных частей комплексно сопряженных корней (1.1) для области слева от разрыва равно 1.

Дальнейшие исследования проводились следующими образом: была разработана методика прогноза зависимости типа стационарных структур разрывов от величины Δ при малых значениях ε , описанная в п.8 и основанная на результатах анализа стационарных периодических решений, предварительно проведенного в п.5-7. С целью улучшения восприятия конечных результатов исследования структур разрывов результаты применения методики п.8, подтверждаемые непосредственными расчетами (0.2), приведены в п.3, далее в п.4 исследуется зависимость типа решения от параметра ε и переход от стационарных решений к нестационарным, а затем в п.5-8 излагаются результаты исследования решений уравнений бегущих волн, представляющие интерес не только в контексте исследования структур разрывов.

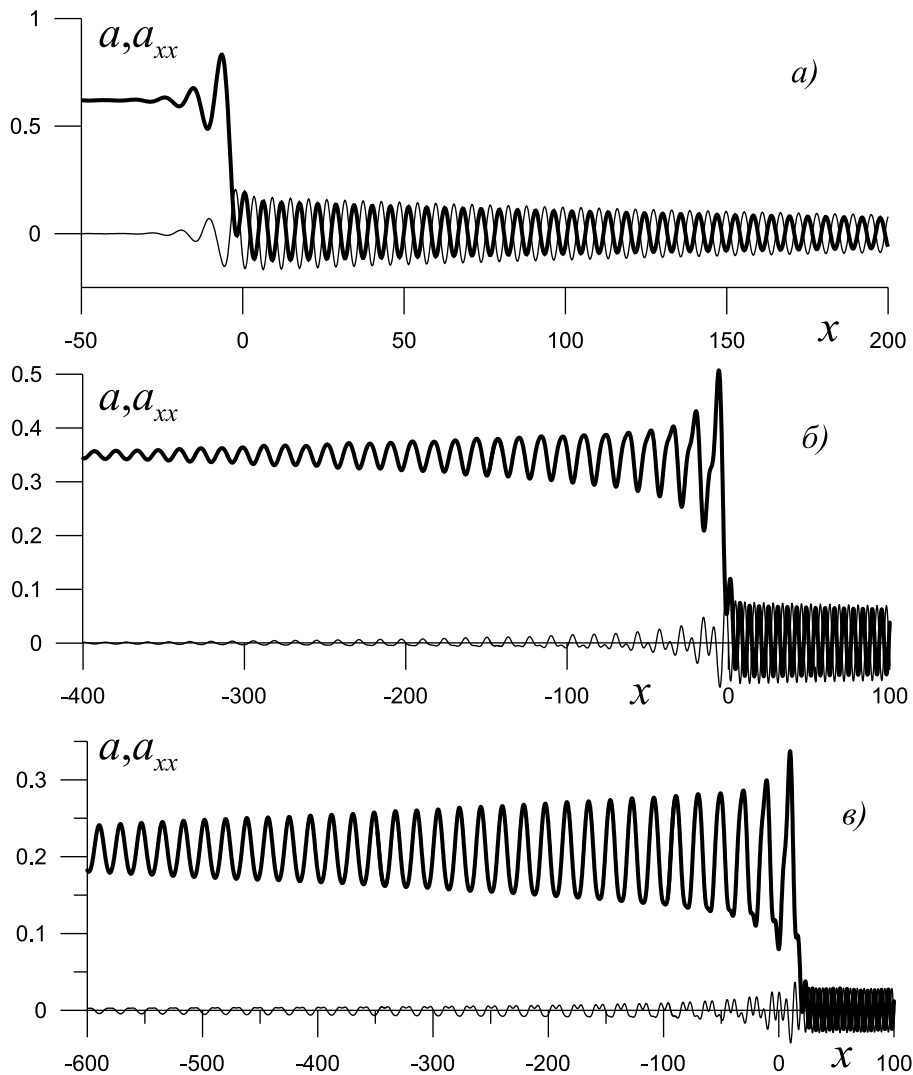


Рис. 1

3 Стационарные слабодиссипативные структуры с внутренними резонансными бездиссипативными разрывами.

На основании проведенных в п.6-7 исследований стационарных решений и анализа графиков решений (0.2) можно заключить, что при $\Delta < 0.5$ стационарное решение, описывающее структуру разрыва, при малых значениях ε справа от внутреннего бездиссипативного разрыва содержит коротковолновый участок, отмеченный на рис.2 как участок $1S$, описываемый усредненными уравнениями для симметричных периодических решений (5.2), см. п.5, а слева — участки, отмеченные как участки S , соответствующие фрагментам длинноволновой ветви, также описываемые уравнениями (5.2). Эти участки разделены переходными зонами с несимметричными периодическими волнами, соответствующими резонансным листьям серии $1/m$, m — целое, они отмечены как участки $1/n$, $1/(n+1)$, где дробь означает визуально наблюдаемое соотношение периодов волн, см. п. 6-7 (визуально наблюдаемое отноше-

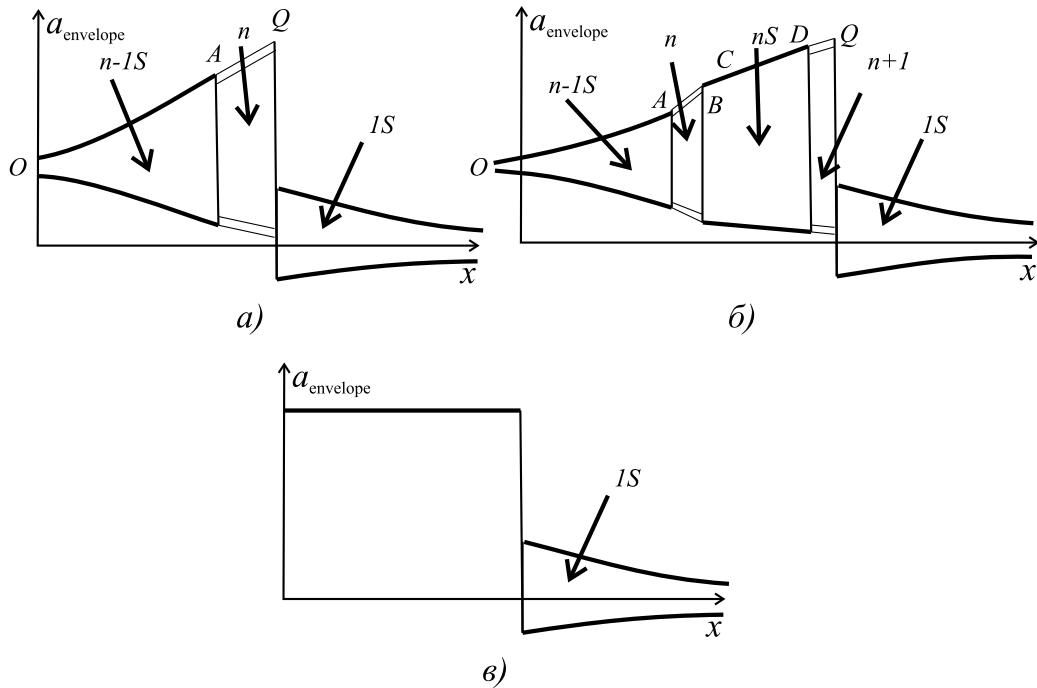


Рис. 2

ние волн на длинноволновых участках бывает разным, поэтому на рис. 2 оно не конкретизировано, его можно предсказать из исследований п.6-7). Анализ п.8 показал, что существуют интервалы значений Δ , для которых есть стационарная структура внутреннего бездиссипативного разрыва для перехода между длинноволновым и коротковолновым участком. В этом случае одна из переходных зон соответствует стационарной структуре внутреннего бездиссипативного разрыва и решение можно наблюдать при достаточно малых значениях ε , поскольку оно описывается усредненными уравнениями. В случае отсутствия такой структуры наблюдается аналогичное решение при больших значениях ε и переходную зону можно интерпретировать как структуру бездиссипативного разрыва только качественно. Фактически были выявлены решения с одной и двумя переходными зонами. На рис.2а,б для этих типов решений схематично показаны огибающие волновых зон, буквами отмечены границы волновых зон, при этом цифрой указано визуально определяемое отношение длин волн в соответствующей волновой зоне, буквой S отмечается, что в этой зоне волны симметричного типа. Огибающие в случае 1/1 резонанса показаны на рис.2в (переходный участок здесь не содержит двоякопериодических волн, известно, что это элемент структуры разрыва с излучением [3], поэтому он не показан). Тип решения зависит от Δ . Методика п.8 позволяет выявлять границы существования различных типов решений.

При $\Delta > 0.5$ имеется участок $\Delta < \Delta_{**}$ где прогнозируемого стационарного решения нет, при $\Delta > \Delta^{1/1} > \Delta_{**}$ наблюдается решение с разрывом с излучением без волновой зоны слева, см. рис.2в.

Рис.3а резюмирует проведенные исследования, слева от оси Δ дробями отмечены участки различного типа начального (если просматривать переход-

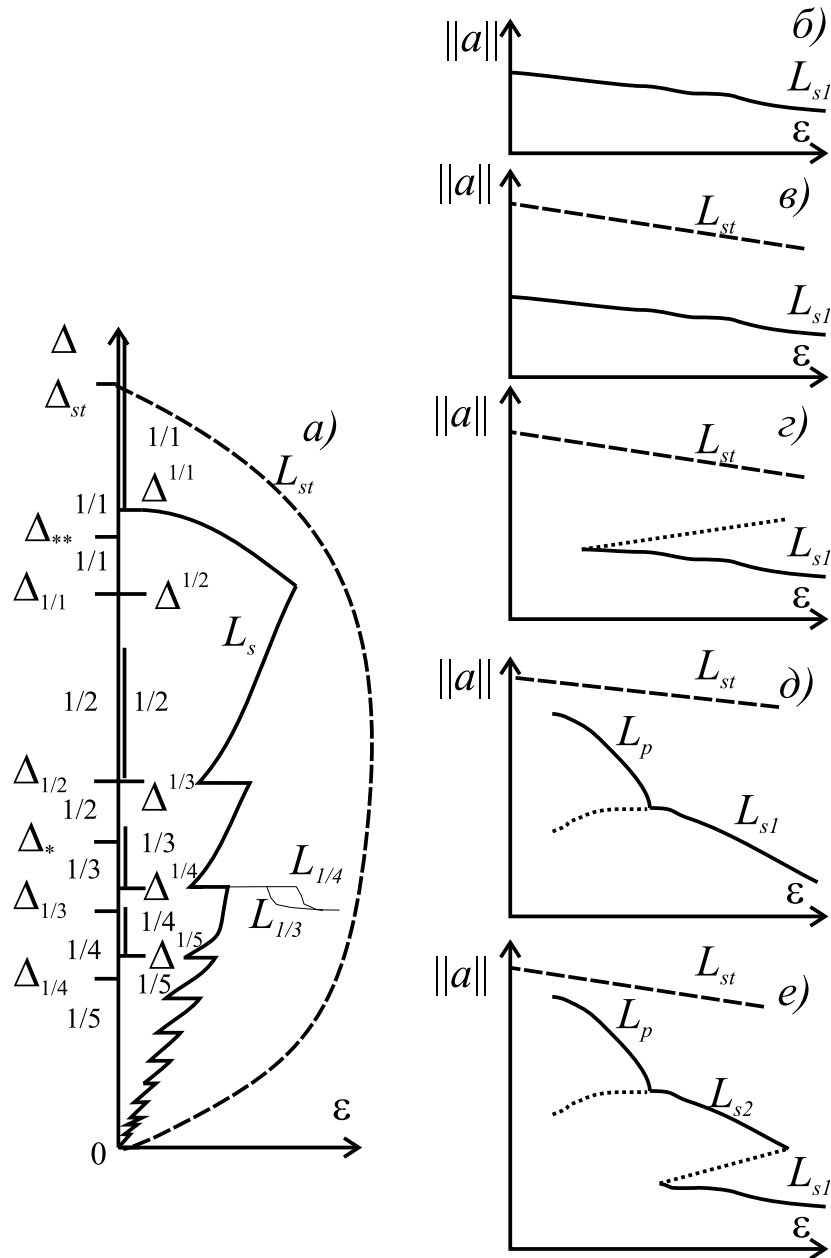


Рис. 3

ные зоны слева направо) перехода, а справа — визуально определяемый тип резонанса для внутреннего разрыва, прочерк означает, что стационарных решений с внутренним бездиссипативным разрывом нет. Двойной линией отмечены участки, имеется структура перехода между коротковолновой и длинноволновой ветвью, см. п.8. Такие участки можно считать опорными при исследовании, поскольку для них методика предсказывает вполне определенное решение. Значения $\Delta_{1/r}$, r — целое, определяются из (1.1) как значения Δ , при которых отношение периодов короткой и длинной линейной волны целое: $\Delta_{1/1} = 0.5$, $\Delta_{1/2} = 0.32$, Значения $\Delta^{1/l}$, определяются в результате численного анализа: $\Delta^{1/3} = 0.32$, $\Delta^{1/4} \approx 0.2$, ...; l — целое число, соответствующее типу резонанса для волновой зоны слева от внутреннего разрыва при $\Delta^{1/(l-1)} < \Delta < \Delta^{1/l}$; $r \geq l$. Значения Δ для особых точек: $\Delta_{**} \approx 0.59$,

$\Delta_* \approx 0.3$, см. п.7.

4 Переход к нестационарным решениям, зависимость типа разрыва от диссипации.

Для турбулентных процессов имеется хорошо развитая теория бифуркаций решений при изменении числа Рейнольдса [16]. При малых числах Рейнольдса устанавливается стационарное решение, называемое первичным решением. При увеличении числа Рейнольдса появляются другие решения: стационарные (устойчивые или неустойчивые), периодические и стохастические, называемые вторичными. Подобная методика исследования была использована и в данном случае, аналогом числа Рейнольдса здесь является величина $1/\varepsilon$, второй безразмерный параметр задачи — число Δ , стационарные решения становятся аналогами ламинарных решений, а стохастические — аналогами турбулентных. Это сходство не случайно: уравнения с высшими производными в принципе можно применять для описания турбулентных процессов при использовании для исследования пространственно двумерных уравнений вместо одного измерения полиномиальных разложений высокого порядка по аналогии с тем, как это делается при выводе уравнений мелкой воды или Буссинеска.

Обнаружено пять типов эволюции решения, которые последовательно выявляются при уменьшении Δ , поэтому и на рис.3 соответствующие им схемы рис.3б-е, показаны сверху вниз. Здесь условно считается, что для каждого решения можно определить некоторую норму и по ней составить бифуркационную диаграмму. Эволюция по первому типу, рис.3б, наблюдается при больших значениях Δ . В этом случае есть только стационарное решение, наблюдаемое при сколь угодно малых значениях ε . При втором типе эволюции, рис.3в, первичное стационарное решение тоже можно получить при сколь угодно малых значениях ε , но только если уменьшать его при расчете постепенно, иначе при малых ε возникнет стохастическое решение. Такой тип эволюции наблюдается на интервале $\Delta_{1/1} < \Delta < \Delta_{st}$. В качестве оценки для Δ_{st} можно взять значение 0.9, соответствующее случаю $U = \min_k c_g$, $c_g(k) = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость слева от разрыва. При $\Delta > 0.9$ слева от бездиссипативного разрыва с излучением не могут распространяться линейные волны [2]. Третий вариант эволюции, рис.3г, наблюдается при $0.5 < \Delta < \Delta_{1/1}$: при постепенном уменьшении ε обнаруживается значение, когда первичное стационарное решение, которое похоже на решение с 1/1 резонансом, резко заменяется стохастическим (точка разворота согласно терминологии [16]). Далее при $\Delta < 0.5$ наблюдается четвертый тип эволюции, рис.3д, когда начиная с некоторого значения ε возникают периодические по времени колебания и установившееся решение становится периодическим (бифуркация Хопфа согласно терминологии [16]), что указывает на то, что стационарное решение сохраняется, но становится неустойчивым. Вблизи точек перехода между различными типами резонансных решений наблюдается пятый тип эволюции, рис.3е. При

уменьшении ε возникает точка разворота, но первичное стационарное решение одного типа, $l = n$ (значение n определяется в п.6), рис.3а, скачкообразно замещается стационарным решением другого типа, $l = n + 1$, рис.3б, для вторичного решения при уменьшении ε возникает бифуркация Хопфа, а при увеличении — точка разворота. Пример: $\Delta = 0.2$, $n = 3$, $\varepsilon \approx 0.011$ — точка разворота первичного решения, $\varepsilon \approx 0.015$ — точка разворота вторичного решения, $\varepsilon \approx 0.008$ — бифуркация Хопфа. На рис.3а кривая L_{st} обозначает зону, где имеется стохастическое решение, на рис.3б-е кривая L_{st} соответствует стохастическому решению (может оказаться что стохастических решений много, поэтому это условное обозначение), кривая L_{s1} — первичному стационарному решению, L_{s2} — вторичному стационарному решению, L_p — периодическому решению. Пунктирными линиями указаны предполагаемые в соответствии с [16] неустойчивые стационарные решения. В связи с тем, что переходных несимметричных зон может быть много, допускается возможность более сложных вариантов эволюции, где по мере уменьшения ε может быть два и более вторичных устойчивых стационарных решения, $l = n + 2$, ..., но выявлены они не были.

Минимальное значение ε , при котором происходит переход к нестационарным решениям, при уменьшении Δ на интервале $\Delta^{1/2} > \Delta > \Delta^{1/3}$ плавно уменьшается, затем на переходе к интервалу $\Delta^{1/3} > \Delta > \Delta^{1/4}$ скачком возрастает и снова начинает уменьшаться, затем снова скачком возрастает на переходе к интервалу $\Delta^{1/4} > \Delta > \Delta^{1/5}$ и опять начинает уменьшаться, максимальные значения ε , т.е. значения для верхних границ интервалов $\Delta^{1/l} > \Delta > \Delta^{1/(l+1)}$, монотонно стремятся к нулю при $l \rightarrow \infty$. На рис.3а эта зависимость показана схематично, кривая L_s . Наилучшим образом с помощью усредненных уравнений описываются структуры, соответствующие нижним границам рассматриваемых интервалов. Для одного из переходов схематично показан возможный вид кривых $L_{1/3}$ и $L_{1/4}$, определяющих границы областей существования стационарных решений с резонансным внутренним разрывом типа $1/3$ и $1/4$. Эти кривые расположены так, что имеется область, где решения два. Вид кривой L_s напоминает вид границы резонансного дерева [13], при $\Delta_{1/1} < \Delta < \Delta_{**}$ зависимость детально не исследовалась, кривая L_s проведена условно (здесь могут быть стационарные структуры, связанные с резонансами серии $(m+1)/m$, не описываемые усредненными уравнениями).

Анализ периодических по времени решений показывает, что они отличаются от стационарных в основном тем, что несимметричная волновая зона, замещается зоной с периодическими по времени колебаниями. Длинноволновый одноволновый участок выполняет здесь стабилизирующие функции. Возможно, чем выше нелинейность, тем большее значение ε требуется для стабилизации. Поэтому неустойчивость проявляется только на конечном участке длинноволновой ветви, с чем и связана периодичность решения, характерная для задач в конечной области. Таким образом, для определения типа периодической по времени структуры применима методика п.8. Интересным фактом является то, что слабодиссипативные уравнения с простой дисперсией но

сложной нелинейностью тоже обладают решениями типа структур разрывов с периодическими по времени колебаниями [17], поэтому можно предполагать, что периодические по времени решения будут описываться нестационарным вариантом усредненных уравнений, рассматриваемых в п.8 .

Для описания нестационарных волновых зон можно применить статистические методы усреднения и получить уравнения, связывающие средние по времени показатели нестационарной структуры разрыва:

$$-UM(a)_x + [(M(a)^2 + D(a))/2]_x + b_3M(a)_{xx} + b_5M(a)_{xxxx} = \varepsilon M(a)_{xx}$$

$$M(a) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)/T dt, \quad D(a) = \int_{t_1}^{t_2} [a(t) - M(a)]^2/T dt, \quad T = t_2 - t_1$$

Здесь T — достаточно протяженный интервал времени. Интегралы аппроксимируются конечными суммами значений $a(t)$ в последовательные расчетные моменты времени. Подразумевается, что речь идет о псевдослучайном процессе, детерминированном начальными данными. Можно вывести и усредненные уравнения для моментов более высокого порядка. Такой подход дает законченный количественный результат только, если цепочку моментных уравнений можно усечь, пренебрегая моментами высшего порядка. Статистический подход корректен именно для диссипативного случая. В бездиссипативном случае фактор, тормозящий нарастание хаоса, отсутствует, поэтому при рассмотрении автомодельных зависимостей $M(a) = g_1(x/t)$, $D(a) = g_2(x/t)$ может оказаться, что эти величины вовсе не выходят на предельные стационарные значения. Методика применима и к периодическим по времени решениям с той разницей, что для них делается усреднение по периоду.

5 Методика исследования ветвей стационарных симметричных периодических решений обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза.

Уравнения бегущих волн для (0.1) после однократного интегрирования принимают вид:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)^T, \quad u_i = \frac{\partial^i a}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{F} = \left(u_1, u_2, u_3, \frac{c - b_1 u_0 - u_0^2/2 - b_3 u_2}{b_5} \right)^T, \quad c = const$$

Существует [4] счетное множество однопараметрических семейств симметричных периодических решений (5.1), одно из семейств соответствует одно-периодному решению, другие семейства — двоякопериодическим решениям с рациональным отношением периодов.

Для исследования семейств симметричных периодических решений найдем численные решения системы (5.1) с начальными данными:

$$u_0(0) = a_2 + z, \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = w, \quad u_3(0) = 0; \quad b_1 = -U, \quad c = b_1 a_2 + a_2^2/2$$

Если мы найдем точку $x = x_*$, где $u_1(x_*) = 0$ и $u_3(x_*) = 0$, то можем построить периодическое решение, x_* — полупериод волны, поскольку в этой точке решение можно продолжить симметричным образом для u_0, u_2 и антисимметричным образом для u_1, u_3 . Для нахождения этой точки варьируем величину x так, чтобы при заданных z и w найти значение $x = x_*$, где $u_3(x) = 0$, затем варьируем величину w так, чтобы найти значение, для которого и $u_1(x_*) = 0$ (можно приравнять к нулю сначала u_1 , а потом u_3). Здесь величина z определена как отклонение a от значения a_2 , что удобно для исследования двоякопериодических волн слева от внутреннего разрыва, но при этом однопериодные решения для области справа тоже находятся, привязку можно было сделать к любому значению.

В стационарном решении может быть много точек, где $u_3(x_*) = 0$ (или $u_1(x_*) = 0$). Задание на поиск периодических решений было составлено так, что вводилось целое число p и была пропущена первая, вторая, и т.д. точка, а учитывалась только p -я. Рис.4 иллюстрирует процесс получения решения в случае $p = 2$: здесь пропускается первая точка и подбирается x_* так, чтобы u_3 (или u_1) было равно нулю для второй точки, затем варьируется w так, чтобы приравнять к нулю $u_1(x_*)$ (или $u_3(x_*)$), при этом одно и то же решение выявляется два раза, ему соответствуют как значения (z, w) , так и (z', w') , см. п.6. В результате для заданного значения p на некотором интервале значений

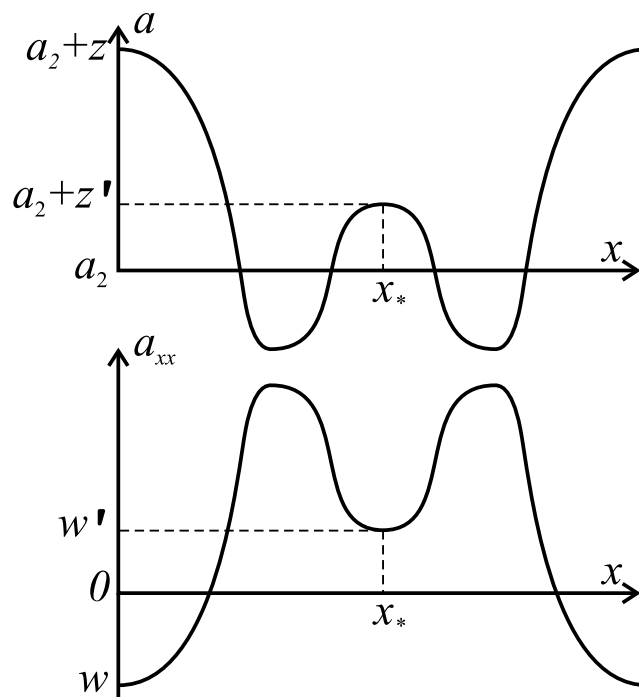


Рис. 4

z определяется некоторая (в общем случае неоднозначная) функция $w(z)$. Графики этой функции будем называть графиками ветвей периодических решений на плоскости (z, w) . При этом подразумевается, что ветвь — некоторый инвариантный однопараметрический геометрический объект (семейство решений), который может быть представлен графиком и в каких-то иных пе-

ременных. В отличие от методики, использованной в [4], данная методика позволяет изучать не все ветви сразу, а последовательно определенные типы ветвей, что облегчает исследование. Одно и то же решение может быть выявлено при разных значениях p , составляющих некоторое множество $\{p\}$, поэтому график для заданного p будет включать в себя разнородные ветви: при $p = 2$ будет одновременно построен график как двоякопериодической ветви с отношением периодов $1/2$, так и однопериодной ветви. Для разделения ветвей и определения типа решения представляет интерес величина $q = \min\{p\}$. Эту величину удобно определять, воспользовавшись цветной графикой: последовательно разными цветами строятся графики при различных значениях p в порядке убывания этой величины, часть из этих графиков накладывается друг на друга, окончательный цвет графика ветви и будет определять значение q . Величина $q + 1$ равна суммарному числу горбов и впадин на графиках $a_{xx}(x)$ (или $a(x)$) на отрезке $[0, x_*]$. Иначе говоря, q это визуально определяемое на графике $a_{xx}(x)$ (или $a(x)$) по числу горбов отношение периодов в двоякопериодическом решении. Значение q для некоторых участков ветвей зависит от того, выбрана ли для первичного приравнивания к нулю величина u_1 или u_3 , но это не влияет на взаимное расположение графиков ветвей в целом. Выбор u_3 предпочтительнее, поскольку расчеты показывают, что на графиках $a_{xx}(x)$ число горбов и впадин в некоторых случаях бывает большим, чем на графиках $a(x)$.

Исходя из существования симметричных периодических решений типа суперпозиции волн с рациональным отношением периодов (резонансное взаимодействие волн) для линейного варианта рассматриваемой системы, можно предполагать наличие аналогичных нелинейных периодических двухволновых решений. Можно предвидеть, что величина q будет совпадать с отношением периодов волн в периодическом двухволновом решении [13], если это отношение целое, что нетрудно понять, построив графики для суперпозиции двух линейных волн: $a(x) = \mu_1 \cos kx + \mu_2 \cos mkx$, k — волновое число для длинной волны, определяемое из дисперсионного соотношения. В то же время нетрудно убедиться, что $q = m$ не при любых значениях амплитуд μ_1 и μ_2 , возможны ситуации, когда $q < m$. Аналогичными свойствами должны обладать и нелинейные симметричные двухволновые решения, которые в принципе можно получить в виде рядов Фурье, основное отличие в том, что здесь k варьируется в некоторых пределах, а амплитуды волн будут вполне определенными (как альтернативу в качестве варьируемого параметра вместо k можно взять, например, амплитуду длинной волны). Линейные симметричные двухволновые решения в резонансном случае образуют двухпараметрическое семейство. Уменьшение числа параметров до одного в нелинейном двухволновом периодическом решении связано с несохранением резонансных торов для неинтегрируемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12], появление "резонансных листьев", рассматриваемых ниже, тоже связано с этим. Однако, если считать Δ варьируемым параметром, то число параметров нелинейного двухволнового решения будет таким же как и в

линейном случае. Определение типа ветвей (одноволновая коротковолновая, одноволновая длинноволновая, двухволновая, двухволновая с фазовыми колебаниями), осуществленное в п.6, базируется на анализе их взаимного расположения, эволюции картины расположения ветвей при изменении параметра Δ и характера изменения потока энергии вдоль ветвей, исследование на основе величины q рассматривается как первичное, вспомогательное. Исследования показали, что $q = m$ на значительном протяжении для двухволновых ветвей с отношением периодов $1/m$, исключения составляют небольшие фрагменты вблизи точек соединения или пересечения с другими ветвями, т.е. бифуркационных точек. Анализ именно этих ветвей наиболее важен для определения типа внутреннего бездиссипативного разрыва в слабодиссипативной структуре разрыва, см. п.7-8. То же можно утверждать и для двухволновых ветвей с отношением периодов $m/(m-1)$, $m = 3, 4, \dots$, но здесь несовпадение q и m вблизи бифуркационных точек типа пересечений этих ветвей с одноволновыми ветвями более выражено.

Для любой из ветвей можно вывести усредненные уравнения, описывающие волновые зоны в решениях уравнений (0.1) и (0.2). Для стационарных слабодиссипативных решений (0.2) эти уравнения принимают вид [5]:

$$\frac{dE}{dX} = -\varepsilon \langle a_x^2 \rangle, \quad E(z) = zP + Uz^2/2 - z^3/6 + b_5 w(z)^2/2, \quad P = c \quad (5.2)$$

Здесь X — медленная переменная, $\langle a_x^2 \rangle$ — соответствующая величина усредненная по периоду стационарного периодического решения, некоторая функция от z . Величины P и E имеют смысл потока импульса и энергии; на бездиссипативных разрывах поток энергии сохраняется. С помощью (5.2) рассчитывалась [6] структура с внутренним разрывом с излучением, т.е. $1/1$ резонансная структура в принятой здесь терминологии. Подчеркнем, что существование стационарных решений (5.2) в отличие от существования автомодельных решений в бездиссипативном случае [3] не предполагает обязательной гиперболичности нестационарного варианта усредненных уравнений, приведенных в [5], [6]. Гиперболичность отсутствует, например, для слабонелинейных длинных волн на интервалах $0.2112 < \Delta < 0.32$ и $0.42 < \Delta < 0.5$, поскольку они описываются нелинейным уравнением Шредингера самофокусирующегося типа [15]. Согласно уравнению (5.2) поток энергии E должен уменьшаться при увеличении X , поэтому в дальнейшем направление уменьшения потока энергии вдоль ветвей будет отслеживаться.

6 Различные типы ветвей и резонансные листья.

Анализ дисперсионного соотношения в случае $\Delta < 0.5$ заставляет предположить наличие одноволновой коротковолновой ветви, одноволновой длинноволновой ветви, а метод нормальных форм, пригодный при $\Delta \rightarrow 0$ [9], — двойкопериодических двухволновых ветвей с отношением периодов волн $1/m$ и иных двухволновых ветвей с другим рациональным отношением периодов.

Длинноволновая и коротковолновая ветви должны пересекаться в начале координат, а двухволновые ветви — иметь вид непересекающихся замкнутых кривых, окружающих начало координат. Все эти ветви действительно определяются, но их конфигурация вдали от начала координат сильно отличается от ожидаемой. Схема расположения рассматриваемых ветвей в типичном случае приведена на рис.5. Сплошными линиями показаны следующие вет-

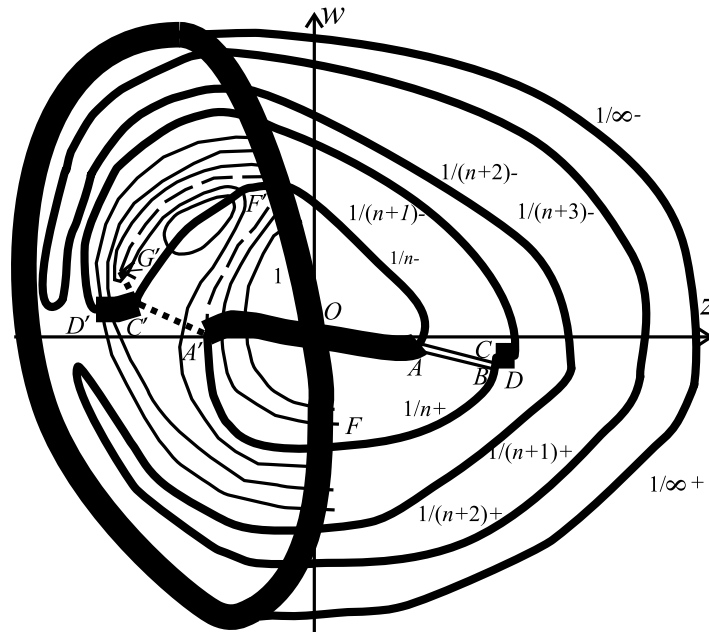


Рис. 5

ви: жирными — одноволновые ветви, средней толщины — двухволновые с целым отношением периодов, тонкими — иные двоякопериодические ветви. Стрелками показаны направления уменьшения потока энергии. Двухволновые ветви с целым отношением периодов обозначены на рис.5 дробями $1/m+$ или $1/m-$, в зависимости от того, интерпретируется ли рассматриваемое решение как синфазное, т.е. имеющее графики a и a_{xx} , аналогичные линейной волне $a(x) = \mu_1 \cos kx + \mu_2 \cos mkx$, $\mu_1 > \mu_2 > 0$ или противофазное, аналогичное волне, где $\mu_1 > |\mu_2| > 0$, $\mu_2 < 0$. Для коэффициентов a_1 и a_m ряда Фурье $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos kix$, описывающего нелинейные волны, видимо справедливы те же неравенства, что и для амплитуд μ_1 и μ_2 . В связи с тем, что для каждой симметричной периодической волны можно определить величину z двумя способами (имеется две точки симметрии: $x = 0$ и $x = x_*$), фрагменты ветвей в области, ограниченной замкнутой эллипсообразной коротковолновой одноволновой ветвью, определяемой при $q = 1$ и проходящей через начало координат и отмеченной цифрой 1, и в области вне ее дублируют друг друга, поэтому вторичные ветви и некоторые обозначения показаны только для одной из областей. Внутри этой области точки будем обозначать буквами со штрихом, имея в виду, что вне ее аналогичные точки обозначаются теми же буквами без штриха. Построение ветвей в обеих областях делает фигуры более наглядными, позволяет легче выявлять закономерности и повышает достоверность исследования. Конкретные примеры графиков ветвей,

рассчитанных при различных значениях $\Delta < 0.5$, показаны также на рис.6 и рис.7а.

Но на рис.6-7, в отличие от рис.7, крупными цифрами отмечены фрагменты ветвей, определяемые при различных значениях q , а мелкими цифрами с двух сторон от указывающей линии — переходы между различными значениями q .

Длинноволновая ветвь действительно выходит из начала координат. Но затем она переходит в ветвь $1/n-$, при этом имеется еще ветвь $1/n+$, переходящая в следующий фрагмент длинноволновой ветви, этот фрагмент переходит в ветвь $1/(n+1)-$. Длинноволновые и двухволновые решения с целым отношением периодов описываются одним и тем же рядом Фурье, поэтому эти ветви фактически образуют одну кривую, назовем эти ветви первичными. Определим длинноволновые одноволновые фрагменты как участки первичных ветвей, пересекаемые вторичными замкнутыми двухволновыми ветвями с рациональным (не целым) отношением периодов, охватывающими начало координат. При переходе с первичной ветви на вторичную период волны увеличивается в целое число раз (это увеличение периода нетрудно спрогнозировать, рассмотрев график суперпозиции линейных волн $a(x) = \mu_1 \cos m_1 kx + \mu_2 \cos m_2 kx$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, максимальный период равен $m_1 m_2 2\pi / (k \max\{m_1, m_2\})$), следовательно ряд Фурье для вторичных волн другой, он должен включать в себя более длинные моды, чем для первичных волн. Поэтому и имеет место пересечение ветвей, т.е вторичная ветвь ответвляется от первичной, чем и обусловлено само наименование "вторичная". Не все вторичные ветви имеют вид замкнутых кривых, охватывающих начало координат, замкнутые вторичные ветви содержатся и внутри резонансных листьев, см. ниже, эти ветви интерпретируются как двухволновые резонансные ветви с фазовыми колебаниями. Пересечения с такими ветвями при определении одноволнового участка не учитываются. Часть из замкнутых вторичных двухволновых ветвей имеет точку разворота, после которой ветвь уходит внутрь резонансного листа, пересечения с такими ветвями внутри резонансного листа не учитываются также. Причина их исключения в следующем. При пересечении двухволновой ветви с первичной одноволновой достигается локальный минимум потока энергии вдоль двухволновой ветви. При наличии точки разворота меняется направление роста потока энергии, поэтому при пересечении развернувшихся вторичных с первичными достигается локальный максимум потока энергии. Внутри резонансных листьев обнаруживаются еще и третичные ветви, существуют видимо четвертичные и т.д. ветви. Согласно введенному определению одноволновое длинноволновое решение не обязательно является однопериодным: для значительной части ближайшего к началу координат длинноволнового фрагмента $q = n - 1$ (вблизи начала координат $q = 1$). Вдали от начала координат одноволновые участки отсутствуют, поскольку там все замкнутые вторичные ветви заворачивают в резонансные листья. В этом случае двухволновые фрагменты $1/m$ и $1/(m+1)$, $m = 2, 3, \dots$, непосредственно соединяются между собой. Бифуркационную точку между этими фрагментами можно определить как точку, где дости-

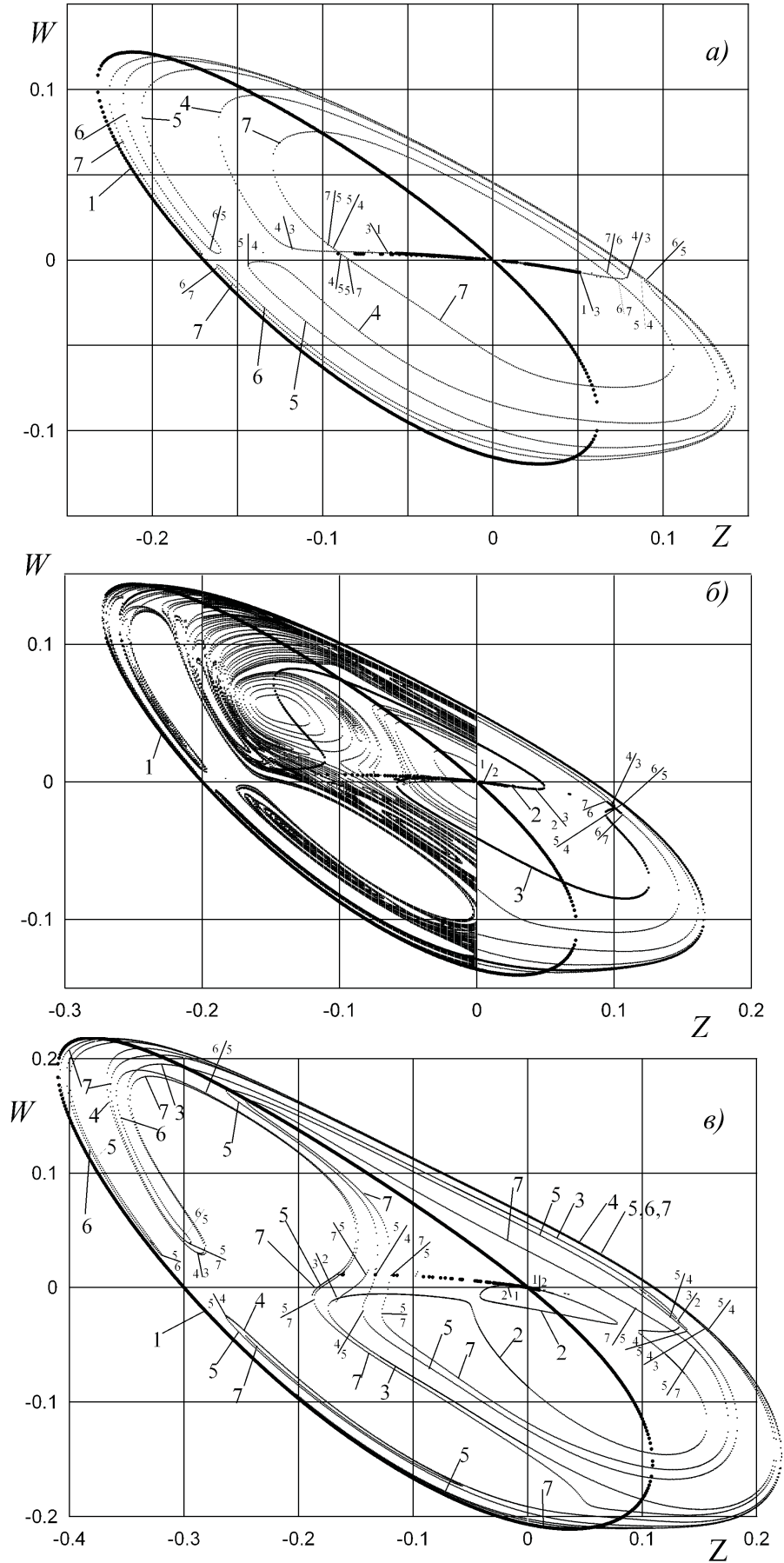


Рис. 6

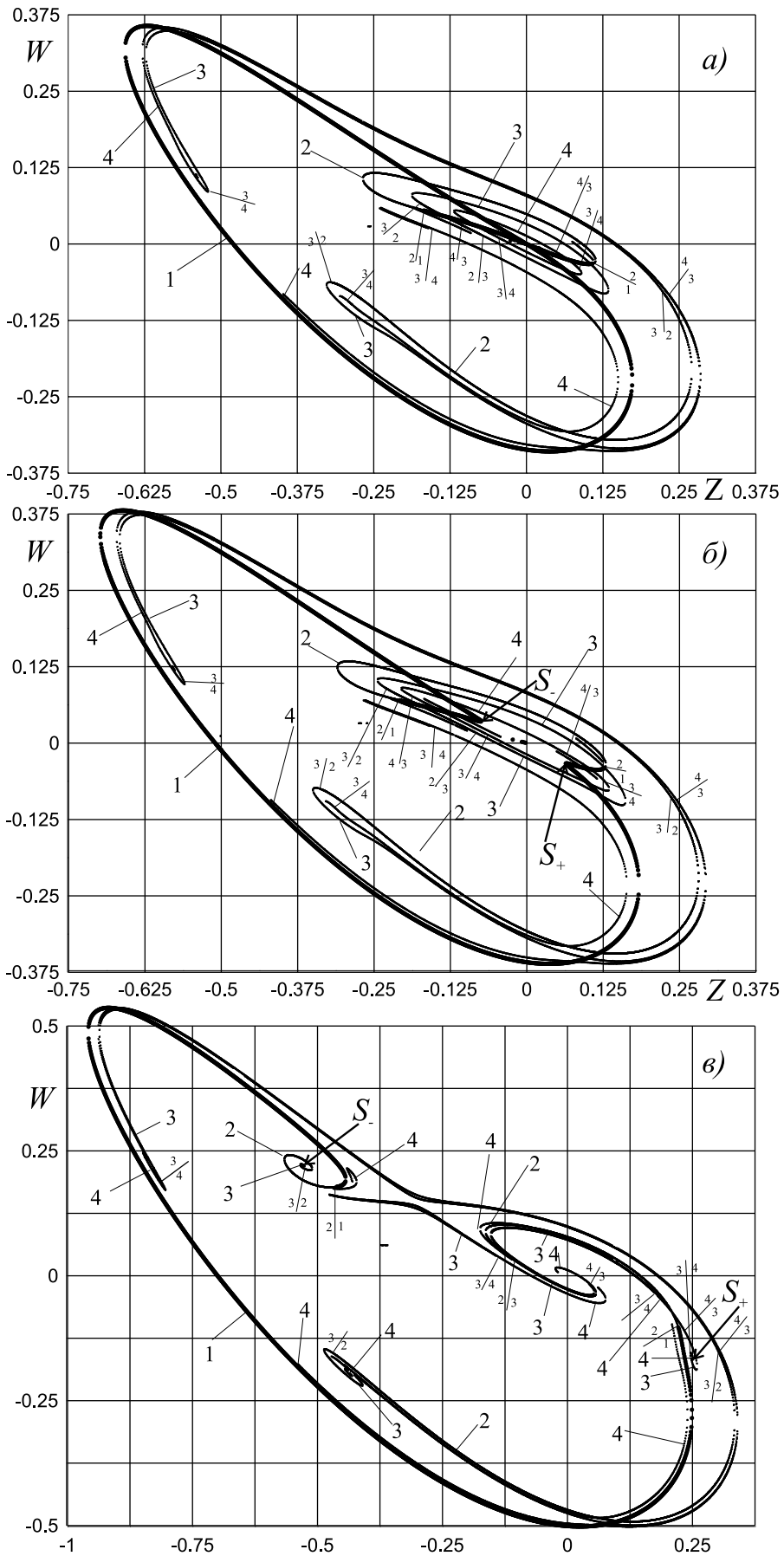


Рис. 7

гается минимум потока энергии. В этом случае изменение потока энергии вдоль ветвей будет монотонным. Так определенная точка практически совпадает с точкой, определенной по изменению q . Таким образом, обнаруживается то, что по аналогии с дефектами кристаллических решеток можно называть дислокациями: первичные двухволновые ветви как бы разрезаны и склеены со смещением на единицу через участки одноволновой ветви или без таких участков. В пределе такая последовательность дислокаций ветвей дает ветвь обобщенных уединенных волн.

В типичном случае характерное для рис.7 число n на единицу больше чем целая часть отношения периодов длинной и короткой линейных волн при рассматриваемом значении фазовой скорости. Имеется участок значений Δ , где $n = 2$, целая часть тоже равна двум, а расположение ветвей нетипичное, см. п.7. Для области внутри коротковолновой ветви фигура построена в предположении, что n нечетное (для четного см. рис.8а, рис.9а).

Конфигурация вторичных ветвей более сложная, поэтому рассмотрим только те особенности, которые важны для исследования структуры разрыва. На рис.6б во внутренней области показаны ветви, рассчитанные при $p = 1, \dots, 33$ (при двойной точности проблемы с расчетом ветвей методом Рунге–Кутты второго порядка появляются только при $p \sim 120$). Только часть вторичных двухволновых ветвей пересекает соответствующий длинноволновый одноволновый участок. Другая часть заворачивает в некоторую область, где имеются некоторые замкнутые ветви, обходит эти ветви и пересекает первичную двухволновую ветвь и затем выходит из этой области. В работе [13] исследовалась область начальных данных для ограниченных стационарных решений, названная резонансным деревом, были найдены области, в которых решения интерпретировались как резонансные двухволновые решения с фазовыми колебаниями. Под резонансом понималось то, что отношение периодов волн равно рациональному числу. На границах резонансного листа период фазовых колебаний стремился к бесконечности и возникали уединенные волны огибающей резонансного решения. В данном случае такие границы тоже выявляются, они схематично показаны на рис.5 линиями с длинными штрихами: $G'F'$ и $A'F'$. Геометрически они имеют смысл сепаратрис вторичных ветвей. В отличие от уединенных волн, графики которых для случая резонанса $1/4$ приведены в [13] [5], для уединенных волн, выявленных здесь, периодическая волна, соответствующая ее подошве, является симметричной, пример графика уединенной волны показан на рис.8а, резонанс $1/3$. Их правильнее называть резонансными обобщенными уединенными волнами, поскольку они отличаются от обычных обобщенных уединенных волн тем, что в них периодическая компонента — резонансная периодическая волна. Для таких уединенных волн в отличие от периодических волн величины (z, w) можно определить уже тремя способами: на гребне и в двух точках на подошве. Кривая $G'F'$ в этом смысле эквивалентна кривым $A'F'$, AF' .

При подходе к кривым $A'F'$ и $G'F'$ изнутри и снаружи резонансного листа можно выделить последовательности ветвей, для которых $q \rightarrow \infty$, а реше-

ние стремится к последовательности чередующихся резонансных обобщенных уединенных волн двух разных типов, у первой из них гребень расположен в точке $x = 0$ (график на рис.8а, получен симметризацией относительно $x = 0$) и ее тип не зависит от того, с какой стороны осуществляется подход и как соотносится значение q со значением m , определяющим тип резонансного листа серии $1/m$.

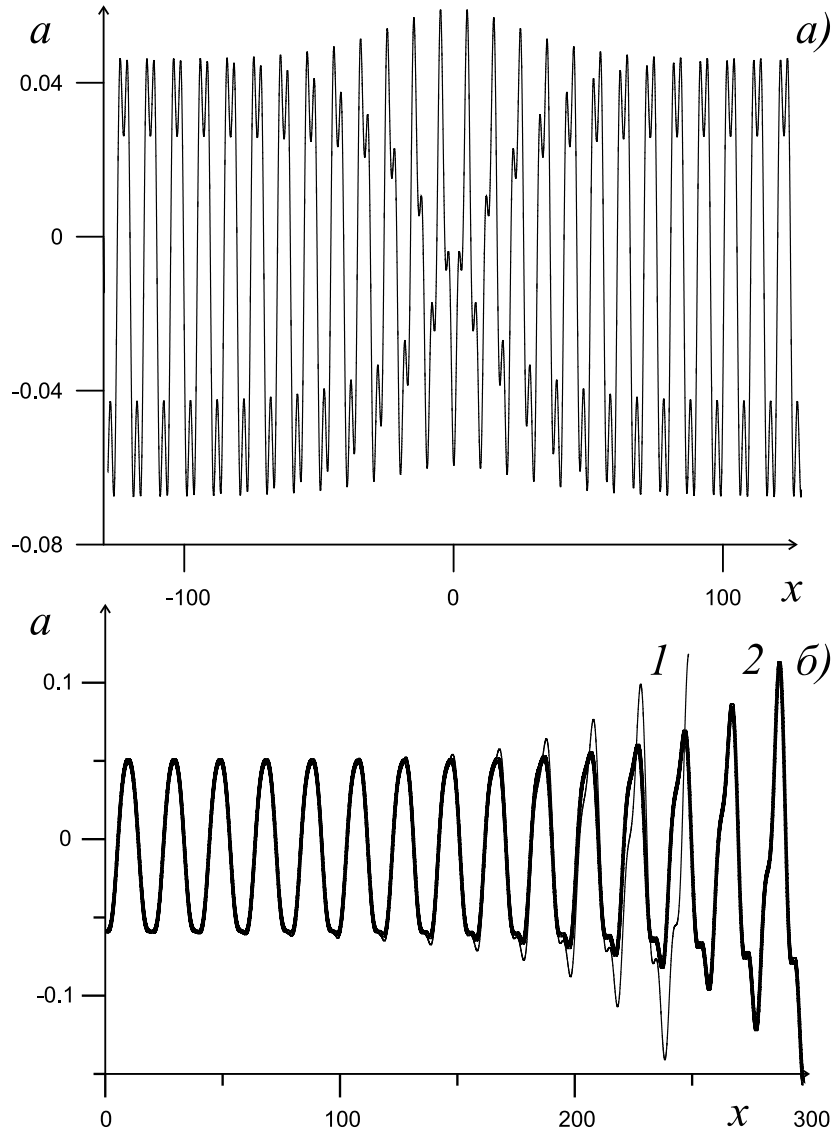


Рис. 8

Тип второй зависит от этих параметров, но для внешней стороны границы $A'F'$, а также для обеих сторон границы $G'F'$ может и совпадать с типом первой, для границы $A'F'$ при подходе с внутренней стороны резонансного листа простейших резонансных обобщенных уединенных волн четыре (среди них можно выделить пары однотипных волн, находящихся как бы в противофазе друг к другу, одна из волн совпадает с волной на границе $G'F'$). При подходе к точке A' с внутренней стороны листа (а именно это направлении наиболее интересно с точки зрения дальнейшего исследования структур разрывов) выявляются только два типа второй волны: рис.8б, кривая 1, $q = 76$,

рис.8б, кривая 2, $q = 91$, показаны графики для полупериодов. Первая резонансная обобщенная уединенная волна здесь уже практически совпадает с периодическим решением, параметры z, w для гребня второй, в случае, когда она соответствует кривой 2, почти совпадают с точкой G' . Для внешней стороны от кривой $A'F'$ тоже выявляется два типа второй волны, но один из типов совпадает с типом первой, а второй находится к ней в противофазе, поэтому при приближении к точке A' с внешней стороны все эти волны стремятся к периодическому решению. Как и в случае обычных обобщенных уединенных волн [4], есть также мультисолитоны, составленные из простейших резонансных обобщенных уединенных волн. Можно условно выделить еще две границы резонансного листа $A'C'$ и $C'G'$, соединив точки на вторичных ветвях, где достигается минимум потока энергии.

Наличие резонансных листьев, т.е. областей на плоскости z, w , соответствующих решениям с фазовыми колебаниями, согласуется с результатами, приведенными в [12], подробнее см. п.8. Однако конкретное строение рассмотренного здесь листа существенно отличается от того, что можно было бы предвидеть из результатов, полученных методом усреднения в окрестности точки резонанса [12]. Это связано с тем, что рассматриваемый здесь резонанс приводит к разрыву ветви и его можно назвать неклассическим. В классическом случае ветвь не рвется а лишь пересекается другой ветвью, строение резонансного листа существенно проще, в него не проникают вторичные двухволновые ветви через границы $A'C' - C'G'$, что имеет место быть в рассматриваемом случае. Анализ расположения всех ветвей позволяет утверждать, что имеется один объект — резонансный лист $1/\infty$, в который вложены листы серии $1/m$, а в них — резонансные листы других серий.

7 Зависимость картины расположения ветвей от амплитуды разрыва.

Представление о расположении ветвей в типичном случае при $\Delta < 0.5$ дают рис.6а, $\Delta = 0.17$, и рис.6б, $\Delta = 0.2$, соответствующие $n = 4$ и $n = 3$. Первичные двухволновые ветви и фрагменты длинноволновой ветви склеиваются так, что образуются замкнутые подковообразные кривые. В четном случае первая из таких кривых, проходящая через начало координат, отличается от остальных и похожа на половину дуги окружности, концы которой соединены хордой. Имеется участок значений $0.32 > \Delta > \Delta_* \approx 0.3$, при котором расположение такой ветви не типичное, рис.6в, $\Delta = 0.3$, здесь можно было бы ожидать соединения длинноволновой ветви с ветвью $1/3$ —, поскольку при $\Delta = 0.32$ достигается линейный резонанс $1/2$. Но длинноволновая ветвь, исходящая из начала координат, соединяется с ветвью, определяемой при $q = 2$, причем первая замкнутая кривая расположена нетипично: она пересекает коротковолновую ветвь снизу, а не сверху, как это бывает в четном случае. При $\Delta = \Delta_*$ происходит сращивание двух длинноволновых фрагментов, с $q = 2$.

На участке $0.5 > \Delta > 0.32$, расположение ветвей соответствует $n = 2$ и в целом типично для четных значений n , см. рис.7а, $\Delta = 0.48$. При $\Delta = 0.32$ длинноволновая ветвь, исходящая из начала координат, отсутствует совсем.

Характерные типы расположения ветвей при $\Delta > 0.5$ показаны на рис.7б,в.

В варианте, представленном на рис.7б, $\Delta = 0.51$, длинноволновая ветвь не исходит из начала координат, а соединяется с коротковолновой в двух особых точках S_+ и S_- , при этом возникает замкнутая самопересекающаяся кривая. Эти точки соответствуют гребням двух разных $1/1$ солитонам. Такие солитоны находятся также методом нормальных форм [9], они представляют собой уединенные волны с бесконечным числом горбов и похожи на солитоны огибающей нелинейного уравнения Шредингера. Вторичные двухволновые ветви (серии $m/(m+1)$ и прочие) имеют вид замкнутых кривых, охватывающих начало координат и две особые точки. Основное отличие рис.7б от рис.7а именно появление особых точек, на основании их рассмотрения их бифуркации из начала координат при переходе от $\Delta < 0.5$ к $\Delta > 0.5$ и определяются длинноволновая и коротковолновая ветви. Других уединенных волн здесь нет (речь идет о классических уединенных волнах, наличие обобщенных уединенных волн не исключается). Соответствующий диапазон $0.5 < \Delta < \Delta_{**} \approx 0.59$.

Случай $\Delta > \Delta_{**}$ представлен на рис.7в, $\Delta = 0.7$. Длинноволновая ветвь здесь не отделима от коротковолновой, они образуют общую незамкнутую кривую, начинающуюся в начале координат и заканчивающуюся в особой точке S_- . Данная кривая выделяется в результате анализа изменений в расположении ветвей при переходе от $\Delta < \Delta_{**}$ к $\Delta > \Delta_{**}$. Различные ветви спиралеобразно сходятся к началу координат, при этом $q \rightarrow \infty$. Кроме того, имеются и другие точки спиралеобразного схождения ветвей, в частности точки S_+ и S_- , соответствующие $1/1$ солитону, с гребнем вверх и гребнем вниз. Остальные подобные точки соответствуют $1/1$ мультисолитонам.

Резюмируя проведенные исследования, можно отметить, что при $\Delta \rightarrow 0.5+$ типы слабонелинейных решений совпадают с тем, что дает метод нормальных форм, причем выявлено значение Δ_{**} , определяющее границу его применимости. При $\Delta = \Delta_{**}$ наблюдается некий кризис, приводящий к качественному изменению картины расположения ветвей. В то же время аналогичного кризиса не выявлено при $0 < \Delta < \Delta_*$, и картина расположения ветвей только частично совпадает с тем, что прогнозирует этот метод при $\Delta \rightarrow 0+$. Известно, что этот метод, представляющий собой метод поиска решений в виде полиномиальных рядов, дает с точностью до любого порядка при $\Delta \rightarrow 0+$ решение в виде уединенной волны, которого нет у системы (5.1) [9], есть только обобщенная уединенная волна. Это означает отсутствие сходимости для данного типа решения. Наверное это относится и к некоторым другим типам решений, например к обобщенным мультисолитонам и сходящимся к ним последовательностям периодических волн. В случае $\Delta \rightarrow 0+$ размерность инвариантного многообразия ограниченных решений больше его размерности при $\Delta \rightarrow 0.5+$. Именно с этим связаны различия.

8 Методика определения зависимости типа стационарной слабодиссипативной структуры разрыва от его амплитуды.

Проведем некоторый предварительный анализ возможных типов усредненных уравнений пригодных для исследования слабодиссипативной структуры.

Для исследования стационарных решений в окрестности длинноволновой ветви можно применить результаты теории Гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [12], основанные на приведении уравнений к каноническому виду и потому носящие общий характер. Для анализа поведения решений в окрестности некоторого решения из однопараметрического семейства периодических решений (точки на ветви в терминологии принятой здесь) делается линеаризация уравнений относительно этого, находят частоты линеаризованной системы ОДУ, далее делается разложение в некоторый ряд, первые члены которого с некоторой точностью описывают нелинейные волны. Если отношение частот рациональное, то это резонансный случай. В окрестности резонанса ряд строится специальным образом и для каждого значения расстройки частоты выводится система ОДУ второго порядка со сложной нелинейностью. Методика эквивалентна применению метода усреднения и позволяет исследовать длинноволновые фазовые колебания. Фазовый портрет этой системы ОДУ содержит центральную точку равновесия, соответствующую исследуемой ветви. В типичном случае (кроме точек в точности соответствующих резонансам $1/2$, $1/3$ и иногда $1/4$) эта точка фокус, т.е. можно ожидать, что резонанс не приводит к неустойчивости. Для иррациональных отношений периодов существует теорема об устойчивости по Ляпунову. Поэтому на участках длинноволновой ветви не должно быть структур разрывов для перехода на какие-либо еще ветви. На некотором удалении от центральной точки равновесия могут (в зависимости от знака расстройки частоты) располагаться острова фазовых колебаний (фрагменты резонансных листьев в принятой здесь терминологии) и другие стационарные точки, расположенные круговым образом, две из них в рассматриваемом здесь случае соответствуют вторичным двухволновым резонансным ветвям, другие — каким-то иным несимметричным двухволновым резонансным решениям. Такой фазовый портрет предполагает наличие структур типа кинков, фазовых переходов, но эти переходы происходят без изменения отношения периодов волн и никак не связаны с длинноволновой ветвью. Для Гамильтоновых систем четвертого порядка, к которым относится система (5.1), вообще типична ситуация, когда инвариантные торы (двухволновые решения с иррациональным отношением периодов в принятой здесь терминологии) делят множество уровней энергии (потока энергии в принятой здесь терминологии) и фазовая кривая, начавшись в щели между двумя инвариантными торами, навечно оказывается запертой в ней [12]. В случае неклассического резонанса, см. п.6, очевидно, некоторые инвариантные торы, в обычной ситуации располагающиеся вблизи замкнутых кривых, соответствующих точкам на длинноволновой

ветви, отсутствуют и эта закономерность может нарушаться.

В эту методику можно включить диссипацию, но число уравнений увеличится, поскольку параметр расстройки частоты будет меняться за счет диссипации. Можно ожидать, что свойства решений такой системы уравнений будут аналогичны свойствам решений уравнений бегущих волн для уравнения Кортевега–Бюргера, где фокус переходит в устойчивый центр, это связано с тем, что на длинноволновой ветви достигается минимум потока энергии.

С целью рассмотрения строения резонансного листа были исследованы ветви несимметричных периодических решений. Для этого задание на поиск периодических решений из п.5 было модифицировано так, что $u_1(0) = v$ стало варьируемой переменной, теперь варьируемых переменных три: x_* , w , v . Этого количества переменных достаточно, чтобы добиться выполнения трех условий, например: $u_3(0) = u_3(x_*) = 0$, $u_0(0) = u_0(x_*)$, $u_1(0) = u_1(x_*)$. Четвертое условие $u_2(0) = u_2(x_*)$ должно выполняться автоматически из-за наличия интеграла энергии. Однако из-за сложного нелинейного характера этого интеграла четвертое условие выполняется не всегда и требует дополнительной проверки. Методика позволяет находить как несимметричные, так и симметричные ветви, значение p здесь надо брать в два раза большим: $p = 4$ для резонанса $1/2$, $p = 6$, для резонанса $1/3$, и т.д.

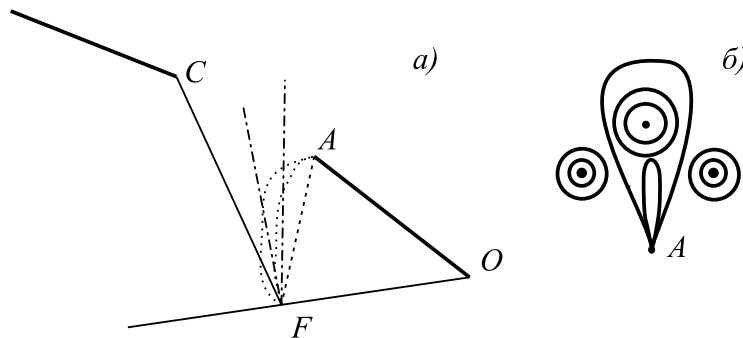


Рис. 9

На рис.9а показана схема расположения наиболее существенных ветвей для резонанса $1/3$ в случае, когда наблюдается переход через резонансный лист. Из описания метода поиска несимметричных периодических решений понятно, что при их рассмотрении целесообразно строить трехмерные изображения, например в переменных z , w , v ; данная схема является условной и отражает только топологические связи между ветвями. Штриховыми и пунктирными линиями показаны неустойчивые ветви, а сплошными и штрих-пунктирными — устойчивые (гиперболические и эллиптические ветви в общепринятой терминологии теории ОДУ). Устойчивость ветви можно проверить непосредственным счетом, поскольку случайные возмущения в нем всегда присутствуют. Кроме того обнаружилось, что симметричные периодические ветви, являются устойчивыми, если они пересекаются другими симметричными периодическими ветвями и неустойчивыми, если таких пересечений нет. Помимо ранее рассматривавшихся одноволновых длинноволновой (жирная линия на рис.9) и коротковолновой ветви (сплошная тонкая линия) а также резо-

нансных симметричных ветвей с отношением периодов $1/3$ (кривые FA и FC) здесь пунктирными и штрих-пунктирными линиями показаны и ветви несимметричных решений с резонансом $1/3$. На рис.9б показан качественный вид фазовых кривых усредненной системы уравнений для уровня потока энергии, соответствующего точке соединения длинноволновой и двухволновой резонансной симметричной ветви в случае резонанса. Рис.9б составлен на основе анализа расположения устойчивых и неустойчивых точек равновесия (здесь им соответствуют периодические решения) и описанных в п.7 уединенных волн, которым соответствуют сепаратрисы. Подразумевается, что это качественное описание, поскольку рассматриваемый метод усреднения строго можно применять только для длинноволновых фазовых колебаний. Можно предполагать, что при добавлении диссипации, как и в случае уравнения Кортевега-Бюргера, появится притягивающая точка и устойчивая ветвь станет притягивающей и появятся фазовые кривые, стремящиеся к ней по спирали, т.е. переход на другую двухволновую симметричную ветвь возможен. Для резонанса $1/2$ несимметричных ветвей обнаружено не было. Для резонанса $1/4$ обнаружено дополнительно 6 несимметричных ветвей, исходящих из точки F . Очевидно для резонанса $1/5$ их будет 8, как и можно было бы предположить из рисунка, приведенного в [12], который описывает область вблизи точки F .

Можно ожидать, что такой подход количественно описывает строение переходов между участками длинноволновой ветви при $n \rightarrow \infty$, когда эти переходы узки, и качественно в иных случаях. Фактически здесь предлагается трехмасштабный подход к описанию слабодиссипативной структуры: крупный масштаб для фрагментов длинноволновой ветви, усредненные уравнения с производными первого порядка; средний масштаб для переходных зон, усредненные уравнения с производными второго и третьего порядка; мелкий масштаб для структур внутренних бездиссипативных разрывов, уравнение (0.1).

Множество всех двухволновых стационарных решений не обладает сплошностью: нерезонансные торы в неинтегрируемых системах сохраняются, а резонансные распадаются, порождая щели [12]. Поэтому можно предвидеть, что уход с одноволновой ветви в область двухволновых решений общего вида может приводить к существенной нестационарности и хаосу, что и наблюдается фактически, см. п.4. Пренебрегая наличием этих щелей, в окрестности двухволновой ветви можно вывести усредненные уравнения на основе приближенных стационарных двухволновых решений общего вида. В таком классе решений при фиксированном значении отношения периодов на одноволновой ветви видимо достигается локальный минимум усредненной плотности энергии ($\langle a^2 \rangle$) и локальный минимум усредненных потерь энергии за счет диссипации ($\varepsilon \langle a_x^2 \rangle$), поэтому одноволновая ветвь в этом приближении устойчива относительно локальных возмущений.

Для построения слабодиссипативной структуры разрыва при $\Delta < 0.5$ на участке от начала координат до точки A воспользуемся уравнениями (5.2). Если в точке A (точка A определяется как точка на ветви, где достигается

минимум потока энергии) есть структура перехода на коротковолновую ветвь, то перепрыгнем на коротковолновую ветвь, снова воспользуемся (5.2), и дойдем по этой ветви до точки пересечения с осью z вне начала координат. Решение построено. Внутренний бездиссипативный разрыв существует для отдельных интервалов Δ для некоторого участка неустойчивой двухволновой резонансной ветви вплоть до точки соединения ее с одноволновой длинноволновой ветвью. Исследование эволюционности этой структуры показало, что эволюционность есть (точнее есть эволюционность для одной из двух взаимнообратных структур): в случае структуры на двухволновой ветви для области короткой волны характеристики, ассоциированные с волной уходящие, характеристика, ассоциированная с течением приходящая, для двухволновой области одна из характеристик, ассоциированных с волной уходящая, а другая приходящая, характеристика, ассоциированная с течением приходящая. Характеристические скорости рассчитывались по методике, описанной в [5],[3], проверка проводилась при $\Delta = 0.35$. Для точки соединения двухволновой и длинноволновой одноволновой ветви в длинноволновой зоне одна из характеристик, ассоциированных с волной идет вдоль линии разрыва, т.е. это аналог разрыва Жуге в газовой динамике. Для других точек длинноволновой ветви структуры нет, поскольку эта ветвь устойчивая. Такое расположение характеристик дает возможность построить и чисто бездиссипативное решение типа расширяющейся со временем структуры разрыва с простой волной огибающей слева от внутреннего разрыва и с однородным волновым участком и простой волной огибающей справа. Однако для стабилизации решений такого типа нужна диссипация. Структура внутреннего бездиссипативного разрыва не единственна. Интерес представляет простейшая из структур. Именно она наблюдается и определяет нижнее значение $\Delta = \Delta^{1/4}$ перехода от решения с резонансом $1/3$ к решению с резонансом $1/4$. Сложные структуры с резонансом $1/3$ сохраняются на некотором интервале значений $\Delta < \Delta^{1/4}$. Верхняя граница существования простейшей структуры $\Delta^{1/l+}$ не столь существенна, поскольку при $\Delta > \Delta^{1/l+}$ она продолжает сохраняться как приближенное решение, не замещается сложными структурами и поэтому наблюдается при расчете (0.2). Заметим, что ранее [3] подобное явление было обнаружено в бездиссипативных расчетах для $1/1$ резонанса: решения со сложно устроенными структурами с немонотонными огибающими слева от разрыва не наблюдались, они замещались нестационарными решениями. Решение может содержать один или несколько переходов через резонансные листья, проходимость таких переходов рассматривалась выше.

Поиск структуры внутреннего бездиссипативного разрыва, представляющего собой с точки зрения теории ОДУ переход между циклом 1 и циклом 2, производился с помощью модификации метода, описанного в работах [5],[6]. На цикле 2, т.е. периодическом решении $\mathbf{u}_{p2}(x)$, (этот цикл соответствует некоторой точке на неустойчивой двухволновой ветви, см. рис.9а), бралась некоторая точка $\mathbf{u}_{p2}(x_2)$, здесь x_2 — произвольная величина, по ней вычислялось значение потока энергии, далее как и в работе [3] по интегралам энергии

и импульса определялся цикл, соответствующий коротковолновой ветви, т.е. периодическое решение $\mathbf{u}_{p1}(x)$. Затем рассматривались решения $\mathbf{u}(x)$ с начальными данными с возмущением, $u_0(0) = u_{0p1}(x_0) + \nu$, $u_i(0) = u_{ip1}(x_0)$, $i = 1, 2, 3$, величина x_0 варьировалась по периоду (возможны и иные способы введения возмущения). Рассматривались графики $\min_x(|\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}_{p2}(x_2)|)(x_0)$, величина x здесь принимает значения от 0 до некоторого достаточно большого значения L . В случае достижения минимумом значений близких к нулю считалось, что структура существует. Исследование показывает, что структур бывает много, но для наиболее простой из них график дает четко выраженный широкий провал, тогда как для более сложных эти провалы узкие. Для надежности строились графики для различных значений малой величины $\nu = \nu_1, \nu = \nu_2, \dots$, отличающихся в 10 раз. На рис.10а для $\Delta = 0.35$ показан график бездиссипативной структуры разрыва с резонансом $1/2$ для точки соединения двухволновой и длинноволновой одноволновой ветви, а на рис.10б — график минимума модуля

$$d = \min_x (|u_0(x) - u_{0p2}(x_2)| + |u_1(x) - u_{1p2}(x_2)| + |u_2(x) - u_{2p2}(x_2)| + |u_3(x) - u_{3p2}(x_2)|)$$

Значение x_0 , соответствующее показанной на рис.12а структуре разрыва, отмечено стрелкой. Более аккуратным способом здесь было бы нахождение растущих волн системы ОДУ, линейризованной относительно цикла 1, как это описано в [4], однако и такой упрощенный подход оказался вполне эффективным. Этот подход пригоден и в случае $1/1$ резонанса, когда цикл 2 вырождается в точку. Заметим, что в [4] подобные структуры уже находились, но только методом рассмотрения последовательностей обобщенных мультисолитонов.

Методика определения типа решений при $\Delta < 0.5$ установлена. Она состоит в построении ветвей двоякопериодических решений, выделении одноволновых длинноволновых фрагментов и анализе возможности перехода между этими фрагментами, если таких фрагментов более одного. Актуален только анализ возможности перехода между двумя наиболее удаленными от начала координат фрагментами, остальные переходы будут проходимы всегда. На рис.5 буквами отмечены кривые AB, BC, CD , соответствующие аналогичным кривым на рис.2б.

При $0.5 < \Delta < \Delta_{**} \approx 0.59$ можно предполагать, что нет структуры разрыва с излучением, поскольку такая структура строится как предел последовательности $1/1$ мультисолитонов [3], [5], а здесь мультисолитонов нет. Расчеты (0.2) показывают, что такой разрыв действительно не наблюдается. Заметим, что наличие подобного диапазона можно было предвидеть исходя из результатов работы [14], где также исследовались мультисолитонные решения (5.1). Поэтому здесь следует ожидать появления хаотических решений, что и наблюдается фактически.

В случае $\Delta > \Delta_{**}$ можно предполагать, что существует структура разрыва типа перехода между однородным и периодическим состоянием (разрыв с излучением). Ранее [3] при значениях Δ близких к Δ_{**} была выявлена неединственность построения структуры бездиссипативного разрыва с излучением,

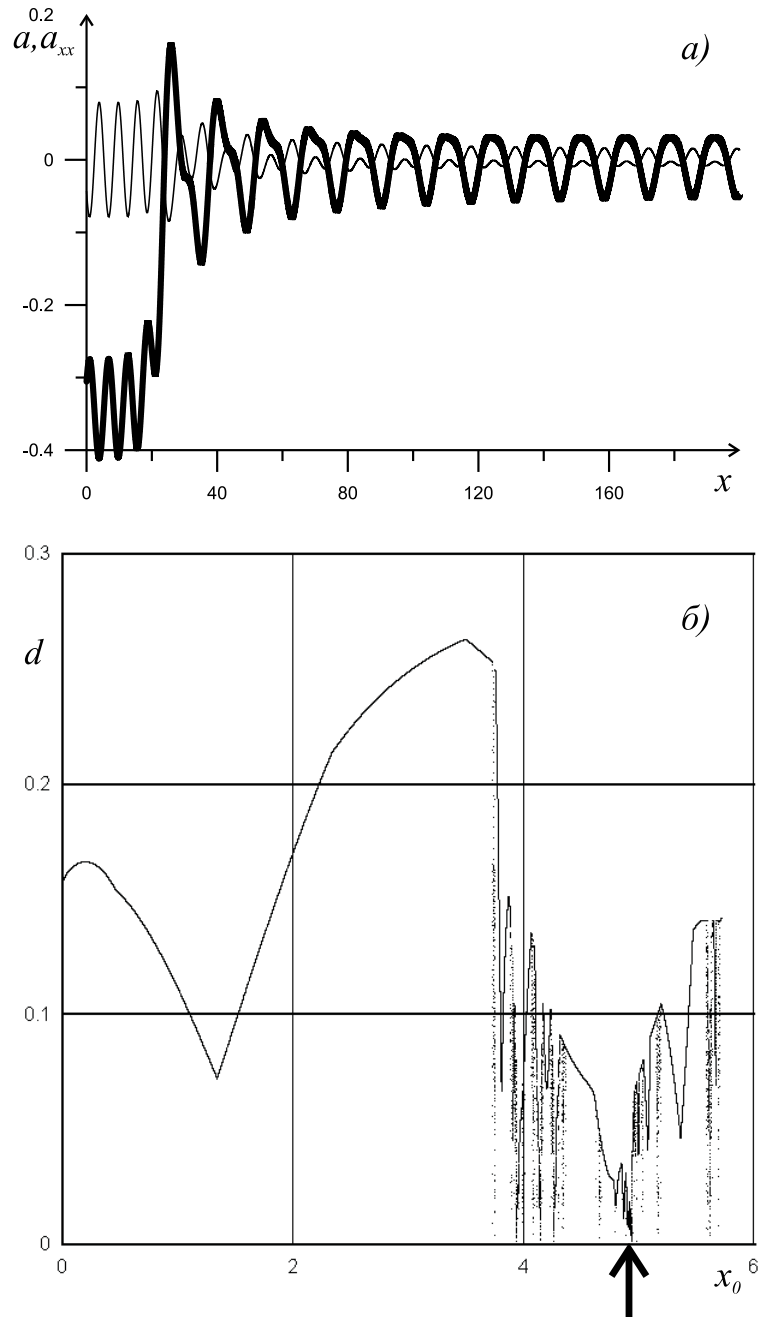


Рис. 10

связанная с тем, что в $1/1$ мультисолитонные решения можно добавлять дополнительные солитоны. Это означает и неединственность слабодиссипативной структуры. При этом при уменьшении Δ сначала исчезала простейшая структура, а более сложные не наблюдались, поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ граница перехода от стационарных решений к нестационарным $\Delta^{1/1}$ лежит несколько выше чем Δ_{**} .

Результаты проведенного исследования отражены в п.3.

Участок значений Δ при $\Delta \rightarrow 0$, где отсутствовали бы обобщенные мультисолитоны (а именно они используются для построения решения типа перехода между периодическим и двоякопериодическим состоянием [3]) выявлен

не был, поэтому можно предполагать, что $\Delta^{1/l} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, см. п.3 и рис.2а.

9 Выводы и обсуждение.

Исследование показало, что в случае $b_3 b_5 > 0$ по мере уменьшения амплитуды разрыва выявляется последовательность стационарных структур резонансного типа. Посредством численного анализа расположения ветвей стационарных периодических решений приближенно определены границы существования таких решений в зависимости от амплитуды разрыва. Наблюдаются также периодические по времени и стохастические структуры. Структура разрыва может быть не единственной и зависеть от начальных данных и процесса эволюции. При исследовании зависимости типа разрыва от диссипативного параметра выявлены закономерности бифуркаций различных типов решений, характерные для турбулентных процессов.

Проанализирован тип решения при всех значениях амплитуды начального разрыва, в частности при малых амплитудах. Это позволяет определять тип решения при малых значениях параметра b_5 , что актуально для моделей, где члены с высшими производными рассматриваются как уточняющие более низкое приближение.

Исследованы закономерности расположения ветвей двоякопериодических стационарных решений, дана их классификация. Разработана методика определения типа стационарной слабодиссипативной структуры разрыва на основе анализа картины расположения ветвей.

Обнаруженные здесь закономерности качественного поведения решений справедливы не только для рассмотренного здесь уравнения, но и для аналогичных моделей, в которых имеется дисперсионная ветвь с точкой перегиба и соответственно возможен резонанс линейных волн, связанный с тем, что прямая, соответствующая фазовой скорости, пересекает эту ветвь при $k > 0$ два раза. Таким свойством обладает, например, быстрая магнитозвуковая ветвь в холодной плазме. Было проведено исследование расположения ветвей периодических решений и выявлена аналогичная картина. Однако в различных моделях механики сплошной среды, например в случае волн в композитных материалах [18], встречается и другой случай резонанса, связанный с пересечением двух разных ветвей, также приводящий к появлению бездиссипативных структур типа переходов между одноволновыми и двухволновыми резонансными состояниями и требующий дальнейшего исследования.

Исследование различных решений задачи о структуре разрыва представляет прежде всего непосредственный практический интерес для определения результатов воздействия ударной волны и разработки способов модификации ее структуры с целью снижения этого воздействия. Выявленные свойства периодических стохастических и стационарных структур разрывов могут быть использованы для обнаружения распространяющейся волны, оценки ее амплитуды и параметров среды.

Исследование актуально с математической точки зрения для развития методов решения гиперболических уравнений в тех случаях, когда задача о распаде произвольного разрыва решается неоднозначно [19] и могут возникать бифуркации в решениях. В этом случае при использовании методов с выделением разрывов для однозначности очевидно нужно ставить не задачу о распаде, а о столкновениях разрывов в рамках полной дисперсионно-диссипативной модели, т.е. об эволюции гладких начальных данных, включающих в себя вполне определенные структуры разрывов. Периодические по времени и стохастические структуры в отличие от стационарных в такой задаче порождают континуум наборов начальных данных. Для упрощенного гиперболического уравнения $a_t + (b_n a^2/2)_x = 0$ неоднозначности решения о распаде разрыва нет, но это уравнение и уравнение (0.2) может быть редуцированным вариантом для более сложной не скалярной модели.

Исследование актуально для развития методов получения слабых решений гиперболических уравнений методом регуляризации, т.е. добавления членов с высшими производными и последующим устремлением коэффициентов при них к нулю. Слабое решение зависит от соотношений между коэффициентами, это может быть разрывное или статистическое решение. Полученные результаты позволяют найти слабое решение нелинейного уравнения переноса в случае начальных данных типа ступеньки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00618-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1959.208.1).

Список литературы

- [1] Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных разрывов в бездиссипативных системах// Прикл. матем. механ. - 1999. - Т. 63. - Вып. - 1. - С. 52-62.
- [2] Бахолдин И.Б. Разрывы, описываемые обобщенными уравнениями Кортевега – де Вриза// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 1999. - № 4. - С.95-109.
- [3] Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза// Прикл. матем. механ. - 2001. - Т. 65. - вып. 1. - С. 59-68.
- [4] Бахолдин И.Б. Уединенные волны и структуры разрывов в бездиссипативных моделях с усложненной дисперсией// Прикл. матем. механ. - 2003. - Т. 67. - вып. 1. - С. 49-64.
- [5] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
- [6] Бахолдин И.Б. Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией// Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45. № 2. — С. 330–343.

- [7] Ильичев А. Т., Марченко А. В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газов. 1989. № 1. С. 88–95.
- [8] Бахолдин И.Б. Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия// Изв. РАН. Механ. жидк. газа - 2000. - № 4. - С. 139-146.
- [9] Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- [10] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
- [11] Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов. гос. тех. ун-т. Саратов 1999, 130 с.
- [12] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.:Физматлит, 1988, 472с.
- [13] Бахолдин И. Б. Нелинейные резонансы и волновые разрывы в средах с дисперсией высокого порядка // Изв. РАН. Мех. жидк. и газов. 1996. № 4. С. 113–124.
- [14] Buffoni B., Champnays A.R., Toland J.F. Bifurcation and coalescence of a plethora of Homoclinic orbits for a Hamiltonian system// J. Dynam. Diff. Eq. 1993. V.8. P.221-228.
- [15] Grimshaw R., Malomed B., Benilov E. S. Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Physica D. 1994. V. 77. P. 473–485.
- [16] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.:Физматлит. 2005. 287с.
- [17] Куликовский А. Г., Чугайнова А. П. Моделирование влияния мелкомасштабных дисперсионных процессов в сплошной среде на формирование крупномасштабных явлений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 6. С. 1119–1126.
- [18] Бахолдин И. Б., Томашпольский В. Я. Уединенные волны в модели предварительно напряженного нелинейного композита // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 527-538.
- [19] Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А., Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.:Физматлит. 2001. 607с.