ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 44 за 2009 г.

Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В.

Дискретные повороты и обобщённые цепные дроби

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников и Т.В. Локоть

ДИСКРЕТНЫЕ ПОВОРОТЫ

И ОБОБЩЁННЫЕ ЦЕПНЫЕ

ДРОБИ

Москва, 2009 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников и Т.В. Локоть. Дискретные повороты и обобщённые цепные дроби. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009.

Проведены качественные и экспериментальные исследования динамических систем, представляющих дискретизацию поворота на плоскости. Для различных значений угла поворота и различных начальных данных находятся первая периодическая точка, период, максимальное и минимальное значения координат точек траектории. Главный результат — обнаружение такого угла поворота, для которого все траектории с различными начальными положениями уходят очень далеко от своих начальных положений и от начала координат. Первая периодическая точка возникает после того, как появятся более чем 1500000 непериодических точек на траектории, и максимальное значение её координат более, чем 1022. Значение периода равно 2049. Угол поворота, для которого такое явление имеет место, отличается от угла $\pi/2$ только в 14-том десятичном разряде компьютерного представления $\pi/2$. Алгебраическая и алгоритмическая структура дискретного поворота покрывается концепцией новой теории обобщённой цепной дроби.

L.D. Pustyl'nikov and T.V. Lokot'. Discrete rotations and generalized continued fractions. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2009.

The qualitative and experimental investigation of a dynamical system representing a discretization of a rotation is established. For different values of the angle of rotation and different initial data we found the first periodic point, the period, the maximal and minimal values of the coordinates of the trajectory points. The main result we found was the discovery of such a value of the angle of rotation for which all the trajectories with different initial positions (points) go very far from their initial positions and from the origin. The first periodic point occurs after more than 1500000 non-periodic points of the trajectory appear and the maximal value of its coordinates is greater than 1022. The value of the period is 2049. The angle for which such a phenomenon takes place differs from $\pi/2$ only at the 14th decimal place in the computer representation of $\pi/2$. The algebraic and algorithmic structure of the discrete rotation map is covered by the concept of the new theory of generalized continued fractions.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00082 и 09-01-00291.

Сайт: www.keldysh.ru

Введение

В последние годы возрастающий интерес был адресован проблемам, связанным с численным моделированием сложной динамики. Классические математические результаты в этой области доставляют теоретическое обоснование для численного моделирования устойчивых динамических систем. Анализ математических проблем, возникающих вокруг ошибок округления, был инициирован недавно. Вероятно первые теоретические результаты были опубликованы в 1984 в [1]. Начиная с 1984 большое число проблем связаны с численным моделированием сложной динамики ([2], [3] и список литературы в этих работах).

Одна из наиболее сложных проблем, возникающих в этой области, связана с анализом влияния ошибок округления для систем нейтрального типа. Типичный пример доставляет отображение поворота $(\alpha, r) \to (\alpha+\varphi, r)$ двумерной плоскости вокруг начала координат (здесь α — угол поворота, а r — радиус).

Явление, обнаруженное в этом случае, показывает, что влияние ошибок округления может очень сильно изменить поведение траекторий отображения поворота. Наши аргументы также показывают, что результирующее поведение зависит очень чувствительно от структуры фазового пространства, соответствующего этим ошибкам.

Заметим, что алгоритмическая и алгебраическая структура отображения дискретного поворота покрываются понятием новой теории обобщённых цепных дробей [4] в ситуации, когда дискретный поворот, введённый ниже, играет ту же роль, что и отображение Гаусса в классической теории цепных дробей. Оказывается, что свойство периодичности траекторий дискретного поворота есть аналог периодичности классических цепных дробей в случае квадратичных цепных дробей (теорема Лагранжа).

1 Определения дискретного поворота и сложного дискретного поворота

Рассмотрим дискретную динамическую систему, которая есть ограничение стандартного вращения вещественной двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ на двумерную решётку. Предположим, что $\mathbb{R}^2$ снабжена стандартной ортогональной системой координат x, y и пусть $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ — стандартная двумерная целочисленная решётка, вложенная в $\mathbb{R}^2$. Каждая точка $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ имеет целочисленные координаты n и m. Для любого вещественного числа обозначим через $[a]$ целую часть a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Пусть $A = A(\varphi)$ — преобразование $A = A(\varphi)$: $(n, m) \to (n', m')$ решётки $\mathbb{Z}^2$ в себя, зависящее от вещественного числа φ, которое отображает точку $(n,\, m)$ в точку $(n',\, m')$, такую что $n' = [x']$, $m' = [y']$, где $x' = n\cos\varphi - m\sin\varphi$, $y' = n\sin\varphi + m\cos\varphi$. Так как отображение $(n,\, m) \to (x',\, y')$ есть вращение любого вектора $(n,\, m)$ на угол φ, то будем называть преобразование $A(\varphi)$ дискретным поворотом на угол φ. Наша цель — изучить поведение траекторий $(n_k,\, m_k) = A^k(n,\, m)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ точки $(n,\, m)$ и установить, как траектории системы зависят от угла φ и начальной точки $(n,\, m)$. Мы рассматриваем также более общий случай, в котором угол φ — не константа, но есть функция $\varphi = \varphi(r)$ от расстояния $r = \sqrt{n^2 + m^2}$ между точками $(n,\, m)$ и началом координат $(0,\, 0)$, отображение $A = A_r = A_r(\varphi)$ определено следующим образом: $A_r = A_r(\varphi)\colon\ (n,\, m) \to \big(n^{(r)},\, m^{(r)}\big)$, где $n^{(r)} = \big[x^{(r)}\big]$, $m^{(r)} = \big[y^{(r)}\big]$, $r = \sqrt{n^2 + m^2}$, $x^{(r)} = n\cos\varphi(r) - m\sin\varphi(r)$, $y^{(r)} = n\sin\varphi(r) + m\cos\varphi(r)$. Этот более общий случай будем называть сложным дискретным поворотом и также будем изучаеть его траектории.

2 Описание теоретического результата, относящегося к траекториям сложного дискретного поворота

Случай сложного дискретного поворота с функцией $\varphi(r)$, удовлетворяющей некоторым общим условиям, был изучен качественно в [?] и [?]. В этих работах показано, что каждая траектория $\Big(n_k^{(r)},\, m_k^{(r)}\Big) = A_r^k(n,\, m)$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots)$ становится периодической, то есть для некоторых положительных целых чисел k_0 и t при всех $k \geq k_0$ справедливы равенства

$$n_k^{(r)} = n_{k+t}^{(r)}, \qquad m_k^{(r)} = m_{k+t}^{(r)}. \tag{1}$$

Будем называть наименьшие числа k_0 и t, для которых выполняются равенства (1), началом периода и периодом соответственно. Из периодичности следует, что все траектории не стремятся к бесконечности, а находятся в ограниченной области на плоскости $\mathbb{R}^2$. Периодичность была доказана в [?] и [?] для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(r)$, входящей в определение сложного дискретного поворота, которая удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{d\varphi}{dr}(r)\right| > \frac{c^*}{r} \tag{2}$$

для некоторой положительной константы c^*.

Идея доказательства состоит в том, что наша дискретная система аппроксимируется гладкими системами сверху и снизу, для каждой из которых справедлива теорема типа КАМ-теории. Поэтому аппроксимирующие отображения обладают бесконечными семействами инвариантных кривых, окружающих начало координат, и точка, находящаяся внутри области, ограниченной такой кривой, никогда из неё не выйдет. При этом условие (2) приводит к так называемому “твист” условию, согласно которому производная угла поворота для отображения в полярных координатах не вырождается. Важное условие теории КАМ (условие Мозера) о том, что любая замкнутая кривая, близкая к окружности с центром в начале координат, пересекается со своим образом, выводится из наличия целых частей в определении сложного дискретного поворота. В случае дискретного поворота (в отличие от сложного дискретного поворота) $\varphi = \varphi(r) = \mathrm{const}$, и неравенство (2) не выполнено. Поэтому для дискретного поворота утверждение о периодичности траекторий не доказано. Тем не менее качественные, но нестрогие аргументы, а также численные результаты позволяют утверждать, что в случае дискретного поворота периодичность также имеет место.

3 Описание численных результатов, относящихся к траекториям дискретного поворота

Ввиду того, что в случае дискретного поворота свойство периодичности выполняется (см. конец секции 2), следующие вопросы могут быть поставлены:

- насколько далеко траектория может уйти от начальной точки (n, m) и от начала координат,
- где находится начало периода,
- какова величина периода?

Невозможно дать ответы на эти вопросы, используя только строгие математические методы. Поэтому была проведена экспериментальная работа. На основе численного анализа для различных значений угла φ и начальных точек (n, m) были определены следующие параметры:

1) максимум и минимум координат точек траектории,
2) начало периода,
3) величина периода.

Главный результат, установленный из экспериментов, состоит в следующем. Существует специфическое значение φ_0 угла φ, для которого имеется много начальных точек $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, удовлетворяющих неравенствам $10 \leq n, m \leq 50$, таких что для каждой из них траектория дискретного поворота с углом φ_0 очень далеко уходит от начала координат и от начальной точки (n, m). Максимальное расстояние от начала координат превосходит $2^{10}-1$, хотя начальная точка близка к началу координат. В рассмотренных случаях период равен 2049, начало периода наступает после прохождения более чем 1500000 точек траектории, максимальное и минимальное значения координат точек траектории, а также величина периода не зависят от начальной точки (n, m). Этот результат является неожиданным, так как для всех других значений угла максимальное и минимальное отклонения точек траектории почти такие же, как начальное расстояние $r = \sqrt{n^2+m^2}$, что естественно, так как дискретный поворот близок к стандартному вращению на угол φ, для которого расстояние между точкой траектории и началом координат постоянно. Значение угла $\varphi = \varphi_0$, для которого обнаружены большие уклонения, отличается от угла $\frac{\pi}{2}$, для которого нет больших уклонений, только в 14-том десятичном разряде компьютерного представления числа $\frac{\pi}{2}$. Таким образом очень маленькие возмущения угла поворота φ приводит к огромному изменению поведения траектории с универсальными характеристиками. В случае больших уклонений значение периода, а также минимальных и максимальных значений координат точек траектории не зависят от начальной точки.

4 Связь дискретных поворотов с обобщёнными цепными дробями

Опишем связь отображения дискретного поворота с обобщёнными цепными дробями [4]. Разложение числа x в обычную цепную дробь имеет вид $x = \left[a^{(0)}, \ldots, a^{(m)}\right]$, если цепная дробь — конечная, и имеет вид $x = \left[a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots\right]$, если цепная дробь — бесконечная. Здесь неполные частные $a^{(0)}$, $a^{(1)}$, … — целые числа, определённые с помощью рекуррентной процедуры, на k-том шаге которой осуществляются следующие три операции:

1) взятие целой части $a^{(k)} = \left[x^{(k)}\right]$ числа $x^{(k)}$, найденного на $(k-1)$-ом шаге, где $a^{(0)} = [x]$;

2) сравнение дробной части $\delta^{(k)} = \left\{x^{(k)}\right\}$ числа $x^{(k)}$ с числом 0;

3) окончание процесса, если $\delta^{(k)} = 0$, определение числа $x^{(k+1)}$ с помощью отображения Γ: $\delta^{(k)} \to x^{(k+1)} = \frac{1}{\delta^{(k)}}$, если $\delta^{(k)} \neq 0$. Заметим, что отображение $\hat{\Gamma}$: $\delta \to \frac{1}{\delta} \mod 1$, полученное из Γ с помощью проекции на единичный круг (длина окружности равна 1), есть отображение Гаусса.

Дискретный поворот соответствует подобной рекуррентной процедуре, в которой вместо числа x, взятия его целой части, взятия его дробной части и отображения Γ мы берём соответственно двумерный вектор $(x,\, y)$, вектор $(\{x\},\, \{y\})$, вектор $([x],\, [y])$ и обычное вращение на угол φ. В этой обобщённой процедуре сам дискретный поворот соответствует отображению Гаусса, а траектории дискретного поворота соответствуют последовательности остатков в разложении числа в обычную цепную дробь. Периодичность траектории дискретного поворота приводит к периодичности соответствующей обобщённой цепной дроби, которая в случае обычной цепной дроби числа имеет место только в случае, когда это число — квадратная иррациональность.

Авторы выражают благодарность Ф.Л. Пустыльникову, который разработал программу, на которой были проведены эксперименты.

Список литературы

[1] М.Л. Бланк. Эргодические свойства дискретизации динамических систем // ДАН СССР, 278:4 (1984), 779–782.

[2] M.L. Blank, T. Krüger, and L.D. Pustyl'nikov. A KAM-type theorem for systems with round-off errors. BiBoS-preprint, 765(3), 1997, BiBoS Universität.

[3] M.L. Blank, T. Krüger, and L.D. Pustyl'nikov. A KAM-type theorem for systems with round-off errors. In 15-th IMACS world congress on scientific computation, modelling and applied mathematics, Berlin, 1997, v. 2, p. 6.

[4] Л.Д. Пустыльников. Обобщённые цепные дроби и эргодическая теория // УМН, 58:1 (2003), 113–164.