



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 16 за 2010 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Овчинников М. Ю., Пеньков В.И.,
Ролдугин Д.С., Карпенко С.О.**

**Исследование
быстродействия алгоритма
активного магнитного
демпфирования**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования / М.Ю.Овчинников [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 16. 32 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-16>

Публикации по материалам препринта

М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков, Д.С. Ролдугин, С.О. Карпенко, Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // Космические исследования, 2012, Т. 50, № 2, с. 176-183. (M.Yu. Ovchinnikov, V.I. Penkov, D.S. Roldugin, S.O. Karpenko, Investigation of the effectiveness of an algorithm of active magnetic damping // Cosmic Research, 2012, V. 50, № 2, pp. 170-176)

DOI: [10.1134/S0010952512010078](https://doi.org/10.1134/S0010952512010078)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952512010078>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.Ю.Овчинников, В.И.Пеньков, Д.С. Ролдугин,
С.О. Карпенко

Исследование быстродействия алгоритма
активного магнитного демпфирования

Москва, 2010

УДК 531.381: 629.78

Исследование быстрогодействия алгоритма активного магнитного демпфирования. М.Ю.Овчинников, В.И.Пеньков, Д.С.Ролдугин, С.О.Карпенко. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, 2010г., 32с., библиография: 16 наименований, 5 рисунков

Рассматривается быстрое вращение спутника, оснащенного активной магнитной системой ориентации. В качестве управляющего используется алгоритм “-Bdot”. Проводится аналитическое исследование уравнений движения спутника. Анализируется зависимость быстрогодействия алгоритма от наклона орбиты, устойчивость установившихся движений. Проводится численное исследование динамики спутника.

Ключевые слова: активная магнитная система ориентации, алгоритм демпфирования, осредненная модель магнитного поля Земли

Study of the effectiveness of active magnetic control algorithm. M.Yu.Ovchinnikov, V.I.Penkov, D.S.Roldugin, S.O.Karpenko. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, 2010, 32p., 16 items of bibliography, 5 figures

Motion of a tumbling satellite with active magnetic control system is considered. “-Bdot” algorithm is used as a control law. The equations of motion are analytically solved. The effectiveness of the algorithm with respect to the orbit inclination is studied. Stability of stationary solutions is analyzed. Numerical analysis is carried out.

Key words: active magnetic control, damping algorithm, averaged geomagnetic field model

Введение

Магнитные системы ориентации (МСО) широко применяются в контуре управления ориентацией искусственных спутников Земли в тех случаях, когда предпочтительно использовать недорогую элементную базу и простые, реализуемые на бортовых компьютерах с ограниченными ресурсами алгоритмы. В качестве основной МСО используется, как правило, на небольших аппаратах. С одной стороны, к системе ориентации таких аппаратов не предъявляют высоких требований по точности и быстродействию, с другой – МСО могут явиться единственно возможным вариантом для установки на борту в силу имеющихся ограничений по массе и энерговооруженности. МСО могут использоваться как самостоятельно, так и совместно с системами ориентации, основанными на других физических принципах. Это, прежде всего, пассивные системы: например, гравитационные и аэродинамические.

Имеется много публикаций, посвященных как подходам к формированию, так и исследованию различных алгоритмов магнитной ориентации. Особенности таких алгоритмов связаны с изменением вектора напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) при движении спутника по орбите, с перекрестной связью каналов управления магнитными моментами, формируемыми электромагнитами, а также с тем, что с помощью такой системы невозможен разворот аппарата вокруг направления, совпадающего с вектором магнитной индукции. Они ограничивают применение магнитных активных систем на спутниках. Тем не менее такие системы часто используют в составе систем стабилизации микроспутников для демпфирования угловой скорости, поддержания одноосной ориентации.

1. Алгоритмы активной магнитной ориентации

1.1. Алгоритмы активной магнитной ориентации

В [1] рассмотрены отдельные вопросы построения и исследования активных магнитных систем одноосной ориентации для спутников, находящихся на слабоэллиптических орбитах. Эти алгоритмы можно, в частности, использовать для одноосной ориентации по вектору МПЗ и демпфирования угловой скорости. Рассмотрен поочередный способ управления магнитными катушками. Приведена общая математическая модель движения аппарата с МСО, а также несколько типов алгоритмов. В качестве примера приведем алгоритм одноосной ориентации (ориентируется ось z связанной со

спутником системы координат), использующий в качестве датчиков определения ориентации датчик угловой скорости и магнитометр,

$$\begin{array}{l}
 M_x = |m_y| B_z \text{sign} \sigma_x \text{sign} B_z, \\
 M_y = 0, \\
 M_z = -|m_y| B_x \text{sign} \sigma_x \text{sign} B_z,
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 |B_z| \geq \delta; \\
 |f_x| \geq |f_y| + \Delta \quad (*); \\
 |f_x| = |f_y| \quad (**);
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 M_x = 0, \\
 M_y = |m_x| B_z \text{sign} \sigma_y \text{sign} B_z, \\
 M_z = -|m_x| B_y \text{sign} \sigma_y \text{sign} B_z,
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 |B_z| \geq \delta; \\
 |f_x| \leq |f_y| \quad (*); \\
 |f_x| = |f_y| + \Delta \quad (**);
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 M_x = |m_z| B_y \text{sign} \sigma_x \text{sign} B_y, \\
 M_y = |m_z| B_x \text{sign} \sigma_x \text{sign} B_y, \\
 M_z = 0,
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 |B_z| < \delta; \\
 |f_x| \geq |f_y| + \Delta \quad (*); \\
 |f_x| = |f_y| \quad (**);
 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 M_x = -|m_z| B_y \text{sign} \sigma_y \text{sign} B_x, \\
 M_y = |m_z| B_x \text{sign} \sigma_y \text{sign} B_x, \\
 M_z = 0,
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 |B_z| < \delta; \\
 |f_x| \leq |f_y| \quad (*); \\
 |f_x| = |f_y| + \Delta \quad (**);
 \end{array} \right.$$

Здесь (*) – условие включения, (**)- условие выключения ветки алгоритма. M_i – проекция управляющего момента на оси связанной системы координат; m_i – максимальный магнитный момент катушки вдоль соответствующей оси; B_i – проекция вектора магнитной индукции \mathbf{B} на соответствующие оси связанной системы координат; δ – минимальное значение любой из составляющих вектора \mathbf{B} ; σ_x, σ_y – управляющие функции следующего вида:

$$\sigma_x = -k_{1x}(\varphi + k_x \omega_x),$$

$$\sigma_y = -k_{1y}(\theta + k_y \omega_y),$$

где k_{1x}, k_x, k_{1y}, k_y – параметры; φ, θ – углы, характеризующие ориентацию оси z связанной системы координат относительно опорной (относительно которой выполняется ориентация); ω_x, ω_y – угловая скорость вращения связанной системы координат относительно опорной; f – регулируемый параметр (угол, угловая скорость, их комбинация); Δ – число, определяющее дискретность переключения ветви.

В [1] также предлагаются алгоритмы квазиэкстенсивного релейного управления ориентацией, использующие теорему Эйлера, в соответствии с которой любое изменение углового положения аппарата в пространстве может

быть произведено одним пространственным разворотом. Ось разворота называют осью эквивалентного вращения (осью Эйлера). Поскольку формирование произвольно расположенного в пространстве вектора управляющего момента с помощью магнитной системы затруднительно, положение оси разворота на практике совпадает с осью эквивалентного вращения, только если вектор геомагнитной индукции параллелен плоскости, проходящей через ориентируемую ось и требуемое направление ориентации. Во всех остальных случаях ориентируемая ось двигается как образующая конуса с вершиной в точке ее пересечения с вектором управляющего момента.

В [2] предлагается использовать для формирования алгоритмов общее выражение для закона управления катушками. Управляющий момент со стороны магнитной системы, действующий на аппарат, определяется выражением

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (1.1)$$

Пусть фазовое состояние аппарата отличается от требуемого на некоторый вектор ошибки Δ . Природа ошибки может быть произвольной. Например, она может быть связана с угловым отклонением спутника от заданного положения и с отклонением его угловой скорости от требуемого значения. В этих случаях система управления должна создавать момент, направление которого противоположно направлению вектора Δ , то есть

$$\mathbf{m} \times \mathbf{B} = -k_y \cdot \Delta,$$

где k_y – некоторый коэффициент пропорциональности. Умножая обе части равенства векторно на \mathbf{B} и разрешая его относительно \mathbf{m} , найдем

$$\mathbf{m} = k_y \frac{\Delta \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.2)$$

Здесь приняли, что $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = 0$, поскольку это условие соответствует оптимальному с точки зрения энергозатрат управлению \mathbf{m} по отношению к \mathbf{B} . Данная формула является общей для закона управления катушками и может служить основой при формулировке различных законов активного магнитного управления.

В [3], [4] строится линейный квадратичный регулятор (LQR). Пусть оси связанной системы координат почти совпадают с одноименными осями орбитальной системы координат. В этом случае можно линеаризовать уравнения движения спутника вокруг центра масс

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{m}(t),$$

где \mathbf{x} – вектор состояния, включающий в себя информацию об ориентации и угловой скорости аппарата, \mathbf{F} – линеаризованная матрица уравнений движения спутника вокруг центра масс с учетом гравитационного момента; \mathbf{G} – матрица,

характеризующая эффективность управления, \mathbf{m} – управление (магнитный момент). Для матрицы \mathbf{G} получают выражение в зависимости от проекций вектора индукции на оси орбитальной системы координат, причем в случае использования модели прямого диполя для аппроксимации магнитного поля Земли имеет место соотношение

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(t + T), \quad (1.3)$$

где T – период обращения спутника на орбите. Таким образом, матрица \mathbf{G} является периодической. После усреднения ее по времени получается

$$\bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{G}(t) dt.$$

Для обеспечения оптимальности управления с точки зрения потребления энергии магнитный момент должен лежать в плоскости, перпендикулярной вектору индукции (см. также (1.2)). Поэтому вводят управление \mathbf{U} в виде

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{m} : \mathbf{m} = \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{B}_0}{\|\mathbf{B}\|},$$

где \mathbf{B}_0 – вектор магнитной индукции в орбитальной системе координат. Далее вводят функционал вида

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{U}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}(t) + \mathbf{x}^T(t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(t) \cdot dt. \quad (1.4)$$

Здесь \mathbf{R} , \mathbf{Q} – некоторые весовые матрицы, такие, что

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{U}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}(t) > 0 \\ \mathbf{x}^T(t) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(t) \geq 0 \end{array} \right\} \forall \mathbf{U}(t), \mathbf{x}(t) \neq 0.$$

и

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Необходимо найти такое управление \mathbf{U} , чтобы минимизировать функционал (1.4). Показано, что управление может быть найдено при единичной матрице \mathbf{R} в форме

$$\Delta = -\bar{\mathbf{G}}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x},$$

где матрица \mathbf{P} является решением уравнения Риккати

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \bar{\mathbf{G}}^T \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

Доказывается, что рассмотренный алгоритм для усредненной матрицы \mathbf{G} гарантирует асимптотическую устойчивость. Однако в случае (1.3) матрица \mathbf{G} имеет периодические коэффициенты, поэтому для исследования устойчивости такой системы привлекается теория линейных систем с периодическими коэффициентами (теория Флоке). Далее алгоритм анализируется для

конкретных численных значений параметров системы управления и начальных условий.

В [5] рассмотрены различные подходы к формированию закона управления с использованием магнитных катушек. Для конкретного спутника рассматривается возможность использования алгоритмов ориентации и алгоритмов управления угловой скоростью.

Во-первых, рассматриваются алгоритмы, использующие скользящий режим. При формулировке алгоритма вводится скользящая переменная $\mathbf{s} \equiv \boldsymbol{\omega} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}$,

где $\boldsymbol{\omega}$ – рассогласование по угловой скорости связанной системы координат относительно опорной (орбитальной); $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ – векторная часть кватерниона ориентации связанной системы координат относительно опорной; \mathbf{Q} – положительно-определенная матрица коэффициентов усиления. В качестве поверхности скольжения \mathbf{S} выбирается подмножество значений вектора состояния, на котором значение скользящей переменной равно нулю, то есть $\mathbf{S} \equiv \{\mathbf{q}, \boldsymbol{\omega} : \mathbf{s} = 0\}$. Доказано, что, двигаясь по \mathbf{S} , система обеспечивает требуемое решение

$$\boldsymbol{\omega} = [0 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{q} = [0 \ 0 \ 0].$$

Чтобы обеспечить движение по поверхности скольжения, необходимо, как обычно, найти требуемый закон управления $\mathbf{m}(t)$. Вводится выражение для требуемого механического момента со стороны магнитной системы в виде $\mathbf{M}_{des} = \mathbf{M}_{eq} - \lambda \mathbf{s}$, где

$$\mathbf{M}_{eq} = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i - 3\omega_o^2 (\mathbf{k}_o \times \mathbf{I} \mathbf{k}_o) + \omega_o \mathbf{I} (\mathbf{i}_o \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2} \mathbf{I} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\omega} q_4 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}).$$

Здесь \mathbf{k}_o – проекция на оси связанной системы координат единичного вектора, направленного из центра Земли к центру спутника, \mathbf{i}_o – проекции орта нормали к плоскости орбиты на оси связанной системы координат; \mathbf{I} – тензор инерции аппарата; $\boldsymbol{\omega}_i$ – угловая скорость вращения связанной системы координат относительно инерциальной в проекциях на оси связанной системы координат; ω_o – орбитальная угловая скорость, λ – положительная константа, \mathbf{M}_{eq} – момент, который необходимо приложить к системе для того, чтобы удерживать спутник на поверхности скольжения. Вторая составляющая момента \mathbf{M}_{des} обеспечивает стремление переменной скольжения \mathbf{s} к нулю за конечное время. Тогда

$$\mathbf{m}(t) = \frac{\mathbf{M}_{des} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2},$$

где

$$\mathbf{M}'_{des} = \frac{\mathbf{M}_{des} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^2} \cdot \mathbf{s}$$

В [5] доказывається, что этот закон управления асимптотически устойчив.

Следующий алгоритм используется в случае больших рассогласований параметров ориентации для спутника, оснащенного гравитационной штангой. Рассматривается выражение для управления дипольным моментом спутника вида

$$\mathbf{m}(t) = h \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{V}(t) - \varepsilon \mathbf{q}(t) \times \mathbf{V}(t),$$

где h и ε – положительные константы, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения связанной системы координат относительно орбитальной в проекциях на оси связанной системы; \mathbf{V} – вектор индукции, заданный в связанной системе координат; \mathbf{q} – векторная часть кватерниона ориентации связанной системы координат относительно орбитальной. Доказывается, что спутник со штангой, магнитный момент которого формируется согласно данному закону управления, имеет четыре устойчивых положения равновесия в орбитальной системе координат. В одном из этих положений одноименные оси связанной и орбитальной систем координат совпадают. Доказывается также, что положение равновесия во всех этих случаях асимптотически устойчиво.

1.2. Алгоритм «-Vdot»

Одним из наиболее часто используемых алгоритмов магнитной ориентации является алгоритм «-Vdot» [6]. Этот алгоритм широко используется для гашения начальной угловой скорости после отделения от ракеты-носителя почти на всех микроспутниках, оснащенных активной магнитной системой ориентации [3]-[7]. Однако несмотря на всю кажущуюся простоту алгоритма, представляет интерес проведение количественного исследования его эффективности в зависимости от наклона орбиты и исследование устойчивости движений, им реализуемых. Наиболее подробное исследование изложено в [3], [5] и сводится к следующему. Алгоритм получается из условия минимизации кинетической энергии вращения спутника

$$\frac{dE_{kinetic}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_i \right) < 0.$$

Для того чтобы обеспечить выполнение этого неравенства, необходимо $\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{M}_{mag} < 0$ или $\boldsymbol{\omega}_i (\mathbf{m} \times \mathbf{V}) < 0$. После преобразований получается $\mathbf{m}^T (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{V}) < 0$.

Как видно, для гашения угловой скорости необходимо, чтобы магнитный момент имел компоненту, направленную противоположно по отношению к

произведению $(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{B})$. Наибольшая эффективность будет достигнута, когда два вектора будут антипараллельны, то есть $\mathbf{m} = C(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{B})$, где C – положительная константа.

В случае быстрого вращения аппарата можно записать

$$\dot{\mathbf{B}} \approx -(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{B}), \quad (1.5)$$

и тогда

$$\mathbf{m} = C\dot{\mathbf{B}}. \quad (1.6)$$

Это и есть выражение для алгоритма «-Vdot». Кроме общих соотношений в [3] рассматривается практически важный специальный случай, когда управление катушками с использованием этого алгоритма и измерение магнитометра разделены во времени. Такой режим необходим для того, чтобы магнитное поле, создаваемое катушками, не мешало измерениям магнитометра. Исследование сведено к численному моделированию: длительность цикла составляла 0.5 сек, из которых 0.45 сек использовались для управления, 0.05 сек – для измерения величины $\dot{\mathbf{B}}$.

1.3. Об одной “старой” задаче и ее продолжении

Оказалось, что задача исследования алгоритма «-Vdot» эквивалентна задаче о влиянии вихревых токов на динамику вращения спутника вокруг центра масс. Токи Фуко (вихревые токи) возникают в теле проводника при пересечении им силовых линий магнитного поля. Принято считать, что в теле спутника вихревые токи возникают только за счет составляющей угловой скорости, ортогональной к вектору индукции геомагнитного поля. Порождаемый этими токами момент магнитных сил стремится уменьшить указанную составляющую угловой скорости. Проблема была поставлена и исследована в работах В.В.Белецкого и его учеников. Так, в [8] приводится выражение для магнитного момента, возникающего за счет намагничивания спутника во внешнем поле вихревыми токами

$$\mathbf{m} = k \left(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{B} - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right), \quad (1.7)$$

где k – постоянный положительный коэффициент, зависящий от формы и материала, из которого изготовлен спутник. Второе слагаемое в скобках отвечает за изменение вектора индукции, связанное с движением спутника по орбите, а первое связано собственно с вращением спутника вокруг центра масс. При достаточно быстром вращении спутника вторым членом в скобках в (1.7) пренебрегают, так что выражение (1.7) принимает вид

$$\mathbf{m} = k(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{B}),$$

то есть с учетом (1.5) с точностью до константы совпадает с (1.6).

Далее вводится предположение, что кинетическая энергия вращения спутника существенно больше работы возмущающих сил. Движение спутника считают ротационным: его движение на небольшом интервале времени близко к невозмущенному, но на достаточно большом интервале действие малых возмущений может привести к накоплению возмущений в движении и к постепенной его эволюции. При этом подчеркивается, что анализ перестает быть верным, когда угловая скорость спутника станет достаточно малой. Тогда ротационное движение перейдет в либрационное, которое уже требует другого подхода к анализу задачи. Далее в качестве модели магнитного поля используется прямой диполь. Для исследования возмущенного вращения спутника применяется метод вариации постоянных. Постоянные параметры, являющиеся интегралами для невозмущенного движения, в возмущенном движении считаются переменными, и далее ищутся дифференциальные уравнения, связывающие эти параметры. Рассматривается динамически симметричный спутник. Невозмущенное движение такого спутника является регулярной прецессией. В качестве варьируемых переменных используются величина L кинетического момента, две его угловые координаты ρ , σ относительно инерциальной системы координат, а также углы нутации θ , прецессии ψ и собственного вращения φ спутника относительно системы координат, связанной с вектором кинетического момента \mathbf{L} .

Записываются уравнения движения спутника в указанных переменных в общем виде, затем они исследуются в следующих трех частных случаях.

- Для экваториальной орбиты спутника можно считать, что спутник находится в постоянном магнитном поле. Этот случай легко исследуется, и получается, что вектор \mathbf{L} стремится совпасть по направлению с вектором \mathbf{B} , а его величина экспоненциально уменьшается, стремясь к постоянному значению. Вместе с тем стремится к постоянному значению и скорость прецессии $\dot{\psi} \approx \frac{L}{A}$, где A – момент инерции спутника относительно главной оси, перпендикулярной оси быстрого вращения. Кроме того показано, что динамически сжатый спутник стабилизируется так, что его вращение стремится к постоянному вращению вокруг оси симметрии, которая стремится совпасть по направлению с \mathbf{B} . Динамически вытянутый спутник, наоборот, опрокидывается и стремится к постоянному вращению вокруг поперечной оси, стремящейся совпасть с \mathbf{B} .

- Для полярной орбиты получены явные выражения для $\mathbf{L}(t)$, позволяющие сделать вывод о том, что все компоненты \mathbf{L} стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. При

этом с течением времени вектор кинетического момента стремится установиться параллельно оси магнитного диполя. Кроме того, как и в случае с экваториальной орбитой,

$$\frac{k}{C} - \frac{k}{A} < 0, \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \frac{k}{C} - \frac{k}{A} \geq 0, \quad \theta \rightarrow 0.$$

- В общем случае (без вывода) утверждается, что нетрудно провести интегрирование $\mathbf{L}(t)$ для произвольного наклона орбиты. Особенности движения спутника в общем случае будут аналогичны особенностям движения на полярной орбите.

В работе [9] уравнения, описывающие эволюцию кинетического момента под влиянием диссипативного момента от вихревых токов и полученные в [8], обобщены на случай учета угла между направлением оси геомагнитного диполя и оси вращения Земли, а также движения линии узлов орбиты спутника. Приводятся численные расчеты для определения декремента затухания L для конкретного спутника.

В работе [10] рассматривается задача о движении твердого тела с произвольным эллипсоидом инерции под действием моментов, возникающих при движении проводящей оболочки в однородном магнитном поле. В частности, рассматривается случай вращения тела во вращающемся магнитном поле $B_x = B \cos vt$, $B_y = B \sin vt$, $B_z = 0$. Этот случай может быть полезен при исследовании алгоритма «-Vdot» при движении спутника по полярной орбите в случае, если вместо модели магнитного поля земли в виде прямого диполя использовать модель усредненного магнитного поля [11]. В рамках исследования, проведенного в [10], была получена система дифференциальных уравнений в переменных Белецкого-Черноусько

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\gamma B^2 \sin \rho}{2L} \left[\frac{L}{I_z} \cos \rho \left(1 + Z^2 \frac{(I_z - I_x) \cdot (I_z - I_y)}{I_z \cdot (I_y - I_x)} \right) - 2\nu \right], \\ \frac{d\sigma}{dt} &= 0, \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{\gamma B^2}{2} \left[\frac{L}{I_z} (1 + \cos^2 \rho) \cdot \left(1 + Z^2 \frac{(I_z - I_x) \cdot (I_z - I_y)}{I_z \cdot (I_y - I_x)} \right) - 2\nu \cos \rho \right], \\ \frac{dZ^2}{dt} &= \frac{1}{4} \gamma B^2 \cdot (2 + \sin^2 \rho) \cdot \left(\frac{2}{I_z} - \frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) Z^2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где

$$Z^2 = \left[(I_y - I_x) \cdot (2TI_z - L^2) \right] / \left[(I_z - I_y) \cdot (L^2 - 2TI_x) \right],$$

T – кинетическая энергия тела, γ – положительная константа, ν – истинная аномалия. Из последнего уравнения системы (1.8), в частности, следует, что в случае вращающегося магнитного поля тело стремится к устойчивому стационарному движению – вращению вокруг оси наибольшего момента инерции I_z .

В [11] также приводятся уравнения в переменных Белецкого-Черноуьско для модели прямого диполя, при этом указывается, что исследование системы может быть проведено численными методами. Рассматривается частный случай, допускающий аналитическое исследование, – экваториальный динамически симметричный спутник. Для этого случая повторяются выводы, сделанные в [8]. Приводится также зависимость, описывающая изменение с течением времени модуля вектора \mathbf{L} для орбиты произвольного наклона

$$\frac{dL}{dt} = -kL \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \phi}{A} + \frac{\cos^2 \phi}{B} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{C} \right] \left\{ B^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{L})^2}{L^2} \right\}.$$

Правая часть выражения неположительная и обращается в нуль только тогда, когда векторы \mathbf{L} и \mathbf{B} коллинеарны.

Таким образом, старая задача о влиянии вихревых токов на вращение проводящей оболочки в магнитном поле получает новое и важное приложение к исследованию алгоритма активной магнитной ориентации. Результаты, полученные при исследовании действия момента от вихревых токов, могут быть применены к исследованию алгоритма «-Vdot». Они, однако, требуют развития, поскольку для практического применения, в частности, при оценке проектных параметров системы стабилизации, необходимо иметь:

- простую аналитическую зависимость, отражающую эффективность данного алгоритма в зависимости от наклона орбиты;
- возможные установившиеся движения спутника под управлением данного алгоритма;
- оценку степени устойчивости установившихся движений в зависимости от наклона орбиты.

2. Постановка задачи

Опишем используемую в работе модель геомагнитного поля. Обычно вектор напряженности геомагнитного поля вычисляется при помощи разложения потенциала поля в ряд Гаусса [11]

$$\mathbf{B} = \mu_0 \nabla V, \quad V = -R \sum_{i=1}^k \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} \sum_{n=0}^m (g_n^m(t) \cos m \lambda_0 + h_n^m(t) \sin m \lambda_0) P_n^m(\cos \vartheta_0),$$

где λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности, $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта, r – расстояние от центра Земли, R – средний радиус Земли. g_n^m и h_n^m – коэффициенты Шмидта, определяемые из таблицы, μ_0 – магнитная постоянная. P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра.

Использование этой модели в аналитических исследованиях затруднительно, поэтому вводятся упрощенные модели. Модель *наклонного* диполя, получающаяся из гауссовой модели при учете первых трех слагаемых, описывает поле диполя, наклоненного под углом $168^\circ 26'$ к оси вращения Земли. Хотя эта модель допускает достаточно простую запись, с ее использованием не удастся провести аналитическое исследование получающихся уравнений. Широко используется дальнейшее упрощение этой модели – модель *прямого* диполя, согласно которой геомагнитное поле аппроксимируется полем диполя, лежащего на оси вращения Земли в ее центре и антипараллельного ей. При движении спутника по орбите вектор индукции движется практически равномерно по почти круговому конусу в системе координат, начало которой лежит в центре масс спутника, а оси параллельны осям инерциальной системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, где O_a – центр масс Земли, ось $O_a Y_3$ направлена по оси вращения Земли, $O_a Y_1$ лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника, $O_a Y_2$ дополняет систему до правой. Но и при использовании этой модели еще не удастся получить решение уравнений движения спутника хотя бы в квадратурах. Поэтому логично провести дальнейшее упрощение, моделируя геомагнитное поле вектором, равномерно движущимся по круговому конусу. Если перенести вектор индукции в центр масс Земли, то конус касается оси $O_a Y_3$ системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_a Y_2 Y_3$ (рис. 1). Угол полураствора конуса вычисляется [10] из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2 \left(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right)}. \quad (2.1)$$

Вектор геомагнитной индукции в рамках этой модели движется по конусу равномерно с удвоенной орбитальной скоростью, $\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi'_0$, где ω_0 – орбитальная скорость, u – аргумент широты. Без ограничения общности можно считать, что $\chi'_0 = 0$.

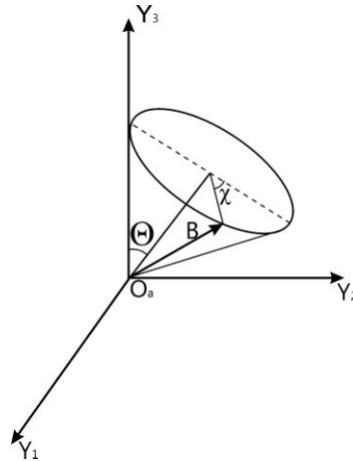


Рис. 1. Осредненная модель геомагнитного поля

Описанную модель геомагнитного поля, иногда называемую *осредненной*, будем использовать в настоящей работе. Хотя эта модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает, например, модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя), тем не менее, она позволяет достаточно достоверно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на динамику спутника. Детальное сравнение моделей выполнено в [11]. Заметим только, что отклонение вектора индукции в модели наклонного диполя от вектора индукции в осредненной модели не превышает $1^{\circ}11'$.

Введем недостающие для описания движения спутника правые ортогональные системы координат.

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ поворотом на угол Θ вокруг оси $O_a Y_1$.

$OL_1 L_2 L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. O – центр масс спутника, ось OL_3 направлена по вектору кинетического момента спутника, ось OL_2 – перпендикулярно OL_3 и лежит в плоскости, параллельной $O_a Z_1 Z_2$ и проходящей через O , ось OL_1 дополняет систему до правой.

$Ox_1 x_2 x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

$OX_1 X_2 X_3$ – орбитальная система координат, ось OX_1 лежит в плоскости орбиты и направлена по нормали к радиус-вектору в сторону движения спутника, ось OX_3 – по радиус-вектору центра масс спутника относительно центра масс Земли, OX_2 дополняет систему до правой.

Ориентацию систем друг относительно друга будем определять двумя матрицами направляющих косинусов \mathbf{Q}, \mathbf{A} , записанными в виде таблиц соответственно

$$\begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \\ Z_1 & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ Z_2 & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ Z_3 & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ L_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ L_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ L_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}.$$

Введем индексы Z, L, x для обозначения векторов и их компонент, заданных, соответственно, в системах $O_a Z_1 Z_2 Z_3$, $OL_1 L_2 L_3$ и $Ox_1 x_2 x_3$.

Для описания движения спутника будем использовать уравнения в переменных Белецкого-Чернуосько $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ [12], где L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно инерциальной системы $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (рис.2). Ориентация осей системы $Ox_1 x_2 x_3$ относительно системы $OL_1 L_2 L_3$ задается углами Эйлера φ, ψ, θ .

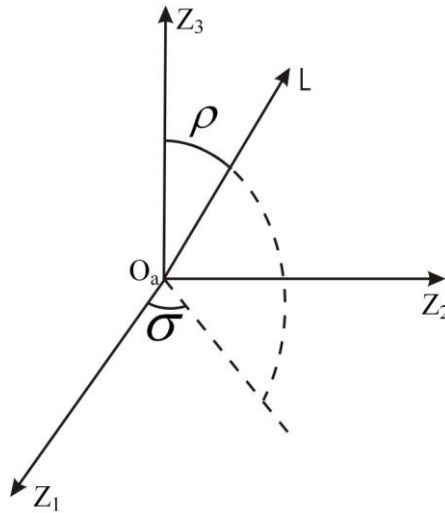


Рис. 2. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве
Матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{A} направляющих косинусов имеют соответственно вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим осесимметричный спутник и введем его тензор инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, A, C)$. Считаем, что его центр масс движется по круговой орбите. Движение такого спутника относительно центра масс описывается [13] системой уравнений

$$\frac{dL}{dt} = M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L},$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L}(M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\
\frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где M_{1L}, M_{2L}, M_{3L} – компоненты вектора суммарного внешнего момента.

Переменные Белецкого-Чернуосько удобно использовать для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника, характеризуемая переменной L . Установившееся движение удобнее рассматривать при помощи уравнений Эйлера. В этом случае для описания динамики спутника рассматриваются переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma$. Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $Ox_1x_2x_3$ ($i=1,2,3$), самолетные углы α, β, γ задают ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OX_1X_2X_3$. Матрица направляющих косинусов \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Уравнения движения спутника, с учетом гравитационного момента и момента, создаваемого взаимодействием МСО с геомагнитным полем, имеют вид

$$\begin{aligned}
A \frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)(\omega_2 \omega_3 - 3\omega_0^2 d_{32} d_{33}) + M_{1x}, \\
B \frac{d\omega_2}{dt} &= -(A - C)(\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 d_{31} d_{33}) + M_{2x}, \\
C \frac{d\omega_3}{dt} &= -(B - A)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 d_{31} d_{32}) + M_{3x}, \\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \gamma} (\omega_1 \sin \beta + \omega_2 \cos \beta) - \omega_0, \\
\frac{d\beta}{dt} &= \omega_3 + \operatorname{tg} \gamma (\omega_1 \sin \beta + \omega_2 \cos \beta), \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 \cos \beta - \omega_2 \sin \beta,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где M_{1x}, M_{2x}, M_{3x} – компоненты вектора момента в системе $Ox_1x_2x_3$.

3. Исследование переходных процессов

Исследуем быстрые вращения спутника под действием магнитного момента в поле осредненной модели, описываемые уравнениями (2.4). Механический момент описывается выражением $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, где \mathbf{m} – дипольный магнитный момент спутника. Считаем, что на спутнике установлена система магнитных катушек, позволяющая реализовать любой наперед заданный дипольный момент. Управление формируется алгоритмом “-Bdot”, согласно которому дипольный магнитный момент спутника задается [6] выражением

$$\mathbf{m}_x = -k \frac{d\mathbf{B}_x}{dt},$$

где k – постоянный коэффициент.

Вычислим производную вектора геомагнитной индукции в системе $Ox_1x_2x_3$ через его производную в инерциальной системе $O_aZ_1Z_2Z_3$ по следующей формуле:

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \mathbf{A}^T \frac{d\mathbf{B}_z}{dt} - \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x. \quad (3.1)$$

Рассмотрим теперь быстрые вращения спутника, при которых первым слагаемым, описывающим вращение вектора \mathbf{B} относительно инерциального пространства, в правой части (3.1) можно пренебречь, то есть считаем, что угловая скорость спутника намного больше его орбитальной скорости ($L/A \gg \omega_0$, $L/C \gg \omega_0$). Такой режим может иметь место на начальном этапе движения спутника, когда он имеет большую угловую скорость, полученную при отделении от носителя. В этом случае использование магнитной системы позволяет демпфировать начальную угловую скорость, после чего управление движением спутника может быть организовано с использованием другого алгоритма или даже другой системы ориентации. Итак, будем рассматривать движение спутника под действием момента

$$\mathbf{M}_x = k(\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x) \times \mathbf{B}_x. \quad (3.2)$$

Выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент: $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$. Поскольку известен вид кинетического момента $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)^T$ в системе $OL_1L_2L_3$, то можем пересчитать его в систему $Ox_1x_2x_3$ по формуле

$\mathbf{L}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_L$, откуда $\mathbf{L}_x = L(a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$. Это позволяет записать выражение для

угловой скорости в системе $Ox_1x_2x_3$ так: $\boldsymbol{\omega}_x = L \left(\frac{1}{A} a_{31}, \frac{1}{A} a_{32}, \frac{1}{C} a_{33} \right)^T$.

В уравнениях (2.4) присутствуют компоненты внешнего момента, которые необходимо задать в системе $OL_1L_2L_3$. Запишем его в этой системе, учитывая, что $\boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}_x$ и $\mathbf{B}_L = \mathbf{Q}^T\mathbf{B}_Z$,

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} \omega_{3L}B_{1L}B_{3L} - \omega_{1L}B_{3L}^2 - \omega_{1L}B_{2L}^2 + \omega_{2L}B_{1L}B_{2L} \\ \omega_{1L}B_{1L}B_{2L} - \omega_{2L}B_{1L}^2 - \omega_{2L}B_{3L}^2 + \omega_{3L}B_{2L}B_{3L} \\ \omega_{2L}B_{2L}B_{3L} - \omega_{3L}B_{2L}^2 - \omega_{3L}B_{1L}^2 + \omega_{1L}B_{1L}B_{3L} \end{pmatrix}.$$

Вектор геомагнитной индукции, перенесенный в точку O_a , в системе $O_aZ_1Z_2Z_3$ имеет вид

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Запишем теперь уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент $\overline{\mathbf{M}}_L$, определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = \frac{kB_0^2L}{C} \overline{\mathbf{M}}_L. \quad (3.4)$$

Перейдем в (2.4) к дифференцированию по аргументу широты $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 – некоторый начальный момент времени. Введем безразмерный кинетический момент l по формуле $L = L_0l$, где L_0 – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения (2.4) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \overline{M}_{3L}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \overline{M}_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \overline{M}_{2L}, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\overline{M}_{2L} \cos \psi - \overline{M}_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\overline{M}_{1L} \cos \psi + \overline{M}_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_2 l - \varepsilon \overline{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \overline{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{\omega_0 C}$, $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$, $\eta_2 = \frac{L_0}{A\omega_0}$. Параметр

ε имеет смысл отношения изменения вектора кинетического момента за виток к его значению. В случае слабого магнитного момента параметр ε и отношения

$\frac{\varepsilon}{\eta_i} \sim \frac{kB_0^2}{L_0}$ малы. В этом случае, как следует из вида уравнений (3.5), переменные

φ, ψ, u можно считать быстрыми по сравнению с переменными l, ρ, σ, θ .

Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать известные методы асимптотического анализа [14]. Поскольку нас интересует, в первую очередь, эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, будем рассматривать первое приближение по степеням параметра ε . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения. Порождающим решением является регулярная прецессия вокруг вектора кинетического момента. Поскольку при $\varepsilon = 0$ быстрые переменные изменяются равномерно, при усреднении временное и пространственное средние совпадают, поэтому достаточно усреднить правую часть уравнений для медленных переменных независимо по всем быстрым переменным. Для этого также будем считать, что моменты инерции A и C выбраны так, что η_1, η_2 и 1 (скорость изменения u) рационально несоизмеримы. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u, \varphi, \psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u, \varphi, \psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u, \varphi, \psi}$. Для усреднения (3.5) по u необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i B_j du, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3.6)$$

где B_i – компоненты безразмерного геомагнитного поля в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$, определяемые выражениями (3.3). В результате получаем

$$B_{11} = B_{22} = p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta, \quad B_{33} = q = \cos^2 \Theta, \quad B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0.$$

Усредняя, получаем уравнения, описывающие эволюцию переменных l, ρ, σ, θ ,

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \left[(1 - q_{13}^2) B_{11} + (1 - q_{23}^2) B_{22} + (1 - q_{33}^2) B_{33} \right], \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \left[q_{11} q_{13} B_{11} + q_{21} q_{23} B_{22} + q_{31} q_{33} B_{33} \right], \\ \frac{d\sigma}{du} &= \varepsilon \left[\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right] \frac{1}{\sin \rho} \left[q_{12} q_{13} B_{11} + q_{22} q_{23} B_{22} \right], \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta \left[B_{11} (1 + q_{13}^2) + B_{22} (1 + q_{23}^2) + B_{33} (1 + q_{33}^2) \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C}{A} \right)$. Учитывая (2.2) и выражения для B_{ij} , получаем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[2p + (1-3p) \sin^2 \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p-1) \sin \rho \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda \left[2(1-p) + (3p-1) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решение полученной системы уравнений удастся найти в квадратурах. Рассмотрим сначала два частных случая.

1. Осесимметричный спутник, то есть $A = B = C = J_0$. Тогда все рассуждения о разделении переменных остаются в силе (при достаточно быстрых вращениях спутника, когда $\varepsilon \sim L_0 / J_0 \omega_0$, φ является быстрой переменной), а усредненная система первого приближения для медленных переменных принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[2p + (1-3p) \sin^2 \rho \right], \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p-1) \sin \rho \cos \rho, \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \quad \frac{d\theta}{du} = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Интегрируя эту систему и учитывая, что $l(0) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} l &= \exp \left[-2\varepsilon p u + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \exp(2\varepsilon(3p-1)u + c_0)}{1 + \exp c_0} \right) \right], \\ \rho &= \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\varepsilon(3p-1)u + \frac{1}{2} c_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\sigma = \sigma_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где $c_0 = \ln \operatorname{tg}^2 \rho_0$. В результате имеем зависимость модуля вектора кинетического момента спутника от p , а значит, и от наклонения орбиты i .

2. Случай $3p-1=0$, то есть $i = i_0 \approx 46^\circ$. При этом наклонении $B_{11} = B_{22} = B_{33}$. При меньших наклонениях проекция среднего вектора

геомагнитной индукции на ось $O_a Z_3$ больше, чем на плоскость $O_a Z_1 Z_2$, при больших наклонениях – меньше. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= -\frac{2}{3}\varepsilon l \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\rho}{du} &= 0, \frac{d\sigma}{du} = 0, \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{4}{3}\varepsilon \lambda \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Интегрируя последнее выражение в (3.11), получаем

$$\frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta| - c_0 = \frac{2}{3} \varepsilon \lambda u,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \theta_0|$. Отсюда $\operatorname{tg}^2 \theta = \exp\left(\frac{8}{3} \varepsilon \lambda u + 4c_0\right) = f(u)$ и для l получаем

уравнение

$$\frac{dl}{du} = -\frac{2}{3}\varepsilon l \frac{A + Cf(u)}{A + Af(u)},$$

откуда

$$l = \exp \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\exp\left(\frac{8}{3} \varepsilon \lambda u + 4c_0\right) + 1}{\exp(4c_0) + 1} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon u \right].\tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Разделим в (3.8) первое уравнение на второе и сгруппируем одноименные переменные. Тогда получим уравнение

$$\frac{dl}{l} = -\frac{2p + (1 - 3p) \sin^2 \rho}{(3p - 1) \sin \rho \cos \rho} d\rho.$$

Знаменатель в правой части не равен нулю (иначе, см выше случай 2).

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln l = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln(\operatorname{tg} \rho) - c_0,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho_0 + 1) - \frac{2p}{3p - 1} \ln(\operatorname{tg} \rho_0)$. Таким образом, имеем первый интеграл

системы (3.8)

$$I_1(l, \rho) = \ln l - \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \frac{2p}{3p - 1} \ln |\operatorname{tg} \rho|.\tag{3.13}$$

Разделим теперь второе уравнение на третье из (3.8) и получим

$$\frac{2(1-p) + (3p-1)\sin^2 \rho}{(3p-1)\sin \rho \cos \rho} d\rho = \frac{1}{\lambda} \frac{\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta. \quad (3.14)$$

Знаменатели в выражениях слева и справа не равны нулю (иначе, см. случаи 2 и 1 соответственно). Интегрирование уравнения (3.14) дает еще один первый интеграл

$$I_2(\rho, \theta) = \frac{\lambda}{2} (3p-1) \ln(\operatorname{tg}^2 \rho + 1) + \lambda(2-2p) \ln |\operatorname{tg} \rho| - (3p-1) \ln |\sin \theta| + (3p-1) \frac{C}{A} \ln |\cos \theta|.$$

Интеграл $I_2(\rho, \theta)$ задает θ как неявную функцию ρ . Из (3.14) видно, что $I_2(\rho, \theta)$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции (существует производная по θ и первый интеграл непрерывен) и можно определить θ как функцию ρ . Аналогичные рассуждения можно применить к (3.13) и записать ρ как функцию l . Тем самым, решение уравнений (3.8) может быть найдено в квадратурах.

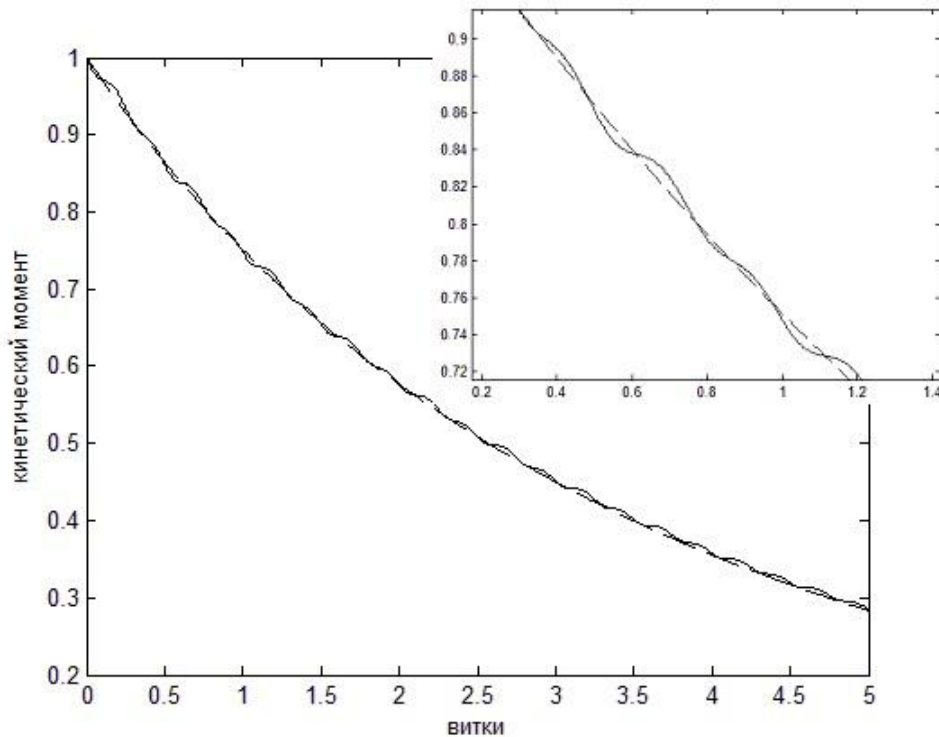


Рис. 3. Сравнение численного и аналитического решений

На рис. 3 приведено сравнение результатов интегрирования системы (3.8) с контролем точности и интегрирования исходной системы (3.5) при $\varepsilon = 0.1$, $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = 5$ (при таких параметрах η_1, η_2 , моментах инерции спутника $A = 3 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $C = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, орбитальной скорости $\omega_0 = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ угловая скорость спутника в начальный момент времени на порядок больше его орбитальной скорости), $\rho_0 = 1$, $\theta_0 = 1$, $i = 80^\circ$. Как видно из рис. 3, решения исходных и

усредненных уравнений совпадают с точностью порядка ε . Сплошная линия соответствует решению исходной системы, штриховая – решению усредненной.

Кинетический момент является функцией трех параметров: $l = l(i, \rho_0, \theta_0)$. Таким образом, на быстроедействие могут оказать влияние наклонение орбиты и начальные условия – угол между вектором кинетического момента и осью конуса осредненной модели и угол между осью симметрии спутника и вектором кинетического момента. На рис. 4 и рис. 5 показано влияние наклонения орбиты и ρ_0 .

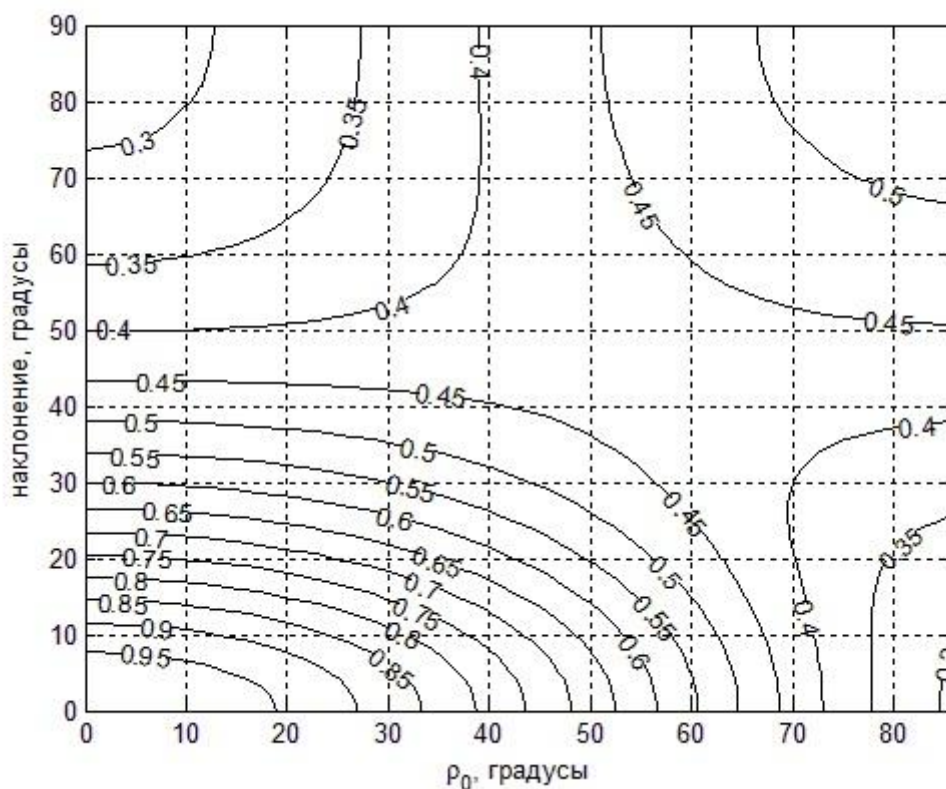


Рис. 4. Значение кинетического момента через 2 витка

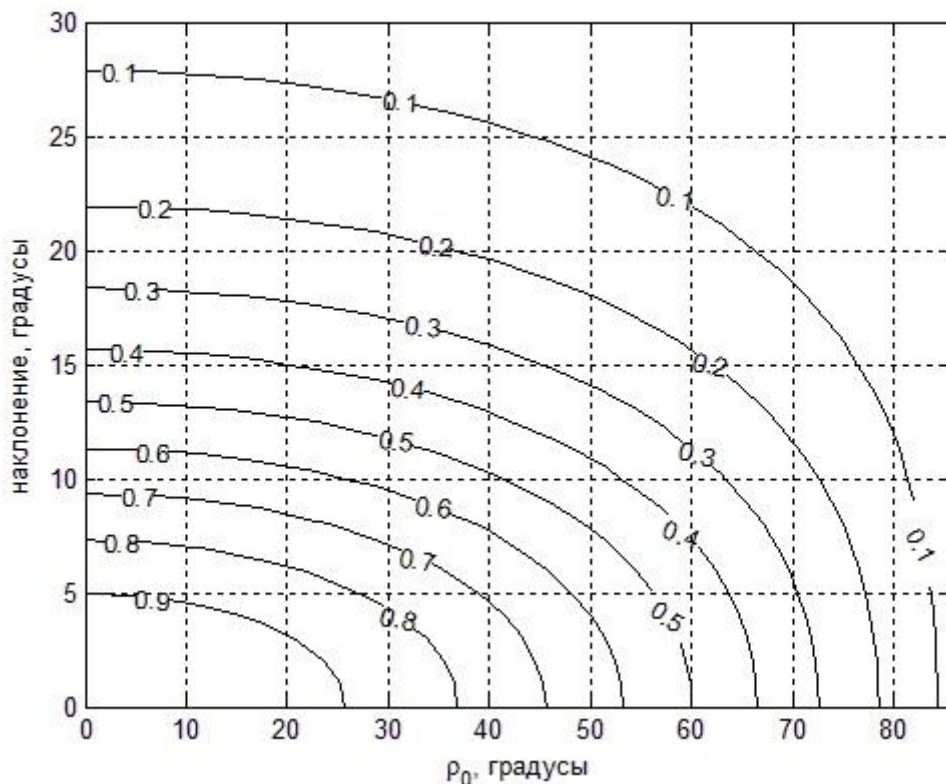


Рис. 5. Значение кинетического момента через 10 витков

На рис. 4 и рис. 5 представлены изолинии, соответствующие значению кинетического момента через 2 (рис. 4) и через 10 (рис. 5) витков в зависимости от наклона орбиты и ρ_0 . При этом учтено, что уравнения (3.8) симметричны относительно $\rho = 0$ и $\rho = \pi/2$. Рис. 4 и рис. 5 практически не изменяются при изменении θ_0 . Как видно из рис. 4, при ρ_0 , близких к 90° , кинетический момент демпфируется быстрее при меньших наклонениях. Однако рис. 5 позволяет заключить, что быстродействие алгоритма растет с увеличением наклона. Для объяснения этого расхождения обратимся к соотношениям (3.10). При ρ_0 , близких к 90° , в течение некоторого небольшого времени (это время увеличивается с уменьшением наклона) в показателе экспоненты превалирует второе слагаемое, зависящее от ρ_0 . Существует предел второго слагаемого, поэтому через некоторое время превалировать начинает первое слагаемое, которое монотонно убывает. Отбрасывая второе слагаемое и учитывая, что Θ и i близки (они отличаются не более чем на 11°), получаем $l \approx \exp(-\varepsilon \sin^2 i \cdot u)$. Таким образом, быстродействие алгоритма на интервале времени, когда кинетический момент уменьшается в 10 раз, увеличивается с ростом наклона орбиты (пропорционально $\sin^2 i$). Анализ уравнений показал, что влияние θ_0 аналогично влиянию ρ_0 . В течение некоторого времени также может наблюдаться большее быстродействие при меньшем

наклонении орбиты (влияние первого слагаемого в (3.12)). В [15] было показано, что кинетический момент спутника под действием момента (3.2) стремится к определенному положению в инерциальном пространстве. Полученное решение позволяет найти это направление. Действительно, найдем наклонение i_0 , определяющее ориентацию вектора кинетического момента в инерциальном пространстве. Значение i_0 , как следует из (3.10), определяется из знака выражения $\varepsilon(3p-1)u$, то есть $i_0 \approx 46^\circ$. При наклонении меньшем, чем i_0 , кинетический момент спутника стремится ориентироваться вдоль оси конуса осредненной модели геомагнитного поля, при наклонении более i_0 – перпендикулярно ей. При $i = i_0$ направление вектора кинетического момента в инерциальном пространстве не изменяется (см. случай 2). Анализ общего случая подтверждает существование полученного “пограничного” значения i_0 .

4. Установившееся движение

Рассмотрим, как влияет на движение осесимметричного спутника магнитный момент совместно с восстанавливающим гравитационным моментом в предположении, что гравитационный момент является определяющим в движении спутника, а магнитный момент – слабым. Воспользуемся уравнениями движения спутника в форме (2.6) и перепишем их, перейдя к дифференцированию по аргументу широты

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\omega}_1}{du} &= (1-\nu)(\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3 - 3d_{32}d_{33}) + \varepsilon M_{1x}, \\ \frac{d\bar{\omega}_2}{du} &= -(1-\nu)(\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3 - 3d_{31}d_{33}) + \varepsilon M_{2x}, \\ \frac{d\bar{\omega}_3}{du} &= \varepsilon \frac{1}{\nu} M_{3x}, \\ \frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos\gamma}(\bar{\omega}_1 \sin\beta + \bar{\omega}_2 \cos\beta) - 1, \\ \frac{d\beta}{du} &= \bar{\omega}_3 + \operatorname{tg}\gamma(\bar{\omega}_1 \sin\beta + \bar{\omega}_2 \cos\beta), \\ \frac{d\gamma}{du} &= \bar{\omega}_1 \cos\beta - \bar{\omega}_2 \sin\beta,\end{aligned}$$

где $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$, $\nu = \frac{C}{A}$, $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{A\omega_0}$ – новый малый параметр, так как по предположению магнитный момент мал. Заметим, что $\nu < 1$, так как рассматривается устойчивая гравитационная ориентация спутника, для которой $A > C$ [12].

Введем полусвязанные оси Резаля, не участвующие в собственном вращении спутника. Обозначая проекции абсолютной угловой скорости на эти оси

$$\Omega_1 = \bar{\omega}_1 \cos \beta - \bar{\omega}_2 \sin \beta, \Omega_2 = \bar{\omega}_1 \sin \beta + \bar{\omega}_2 \cos \beta, \Omega_3 = \bar{\omega}_3$$

запишем уравнения движения в полусвязанных осях в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{du} &= -\Omega_2 (\nu\Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2) - 3(1-\nu) \cos^2 \alpha \sin \gamma \cos \gamma + \varepsilon (M_{1x} \cos \beta - M_{2x} \sin \beta), \\ \frac{d\Omega_2}{du} &= \Omega_1 (\nu\Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2) - 3(1-\nu) \cos \alpha \sin \alpha \cos \gamma + \varepsilon (M_{1x} \sin \beta + M_{2x} \cos \beta), \\ \frac{d\Omega_3}{du} &= \varepsilon \frac{1}{\nu} M_{3x}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\cos \gamma} \Omega_2 - 1, \quad \frac{d\beta}{du} = \Omega_3 + \operatorname{tg} \gamma \Omega_2, \quad \frac{d\gamma}{du} = \Omega_1,$$

Если на спутник действует только гравитационный момент ($\varepsilon = 0$), то система (4.1) допускает стационарное решение $\alpha = \gamma = 0, \beta = \beta_0, \Omega_1 = \Omega_3 = 0, \Omega_2 = 1$. Будем искать решения, рождающиеся из него при действии слабого магнитного момента, используя метод Пуанкаре [16]. Представим уравнения движения (4.1) в виде $\frac{d\mathbf{x}}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где

$\mathbf{x} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$. Решение ищем в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{x}_1 + O(\varepsilon^2)$, где $\mathbf{x}_0 = (0, 1, 0, 0, \beta_0, 0)$ – стационарное решение, $\mathbf{x}_1 = (w_1, w_2, w_3, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ – добавка с искомыми компонентами. Тогда подставляем его в уравнение движения $\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2)$, где $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Для исследуемой

системы

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu & 0 & 0 & 2\nu - 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3(1-\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$. Заметим, что стационарное решение \mathbf{x}_0 соответствует нулевой относительной скорости систем $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$ и повернутой на угол β_0 связанной системе относительно орбитальной. Полусвязанная система, не участвующая в собственном вращении спутника, совпадает с системой $OX_1X_2X_3$, а значит, совпадают и производные вектора геомагнитной индукции в этих системах. Используем снова осредненную модель геомагнитного поля. Хотя это не позволяет отследить колебаний скоростей спутника, тем не менее можно достаточно точно оценить возникающее из-за использования МСО отклонение от стационарного решения. Одновременно, использование осредненной модели позволяет найти решение системы для \mathbf{x}_1 за счет значительного упрощения уравнений в силу постоянной величины вектора геомагнитной индукции.

Для осредненной модели вектор геомагнитной индукции в системе $OX_1X_2X_3$ имеет вид

$$\mathbf{B} = B_0 \begin{pmatrix} \sin i \cos u \\ \cos i \\ -\sin i \sin u \end{pmatrix}.$$

Алгоритм “-Bdot”, как видно из (3.1), позволяет демпфировать угловую скорость до значения порядка орбитальной. Это значит, что ни одним из слагаемых нельзя пренебречь. Однако поскольку порождающее решение соответствует нулевой скорости вращения аппарата, необходимо учитывать только первое слагаемое в (3.1). Это слагаемое вынуждает спутник вращаться с орбитальной угловой скоростью, что и приводит к неточной ориентации. Заметим, что в случае использования алгоритма управления $m = k(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})$ достигается точная гравитационная ориентация аппарата (при рассмотрении только гравитационного и магнитного моментов). После этих рассуждений получаем

$$\frac{d\mathbf{B}_x}{dt} = \omega_0 \sin i (-\sin u, 0, -\cos u)^T$$

и

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = \sin i \cos i (-\cos u, \operatorname{tgi}, \sin u, 0, 0, 0)^T.$$

Для определения компонент вектора \mathbf{x}_1 получаем систему

$$\frac{dw_1}{du} = -\nu(w_3 + \gamma_1) - 3(1-\nu)\gamma_1 - \sin i \cos i \cos u,$$

$$\frac{dw_2}{du} = -3(1-\nu)\alpha_1 + \sin i \cos i \operatorname{tgi},$$

$$\frac{dw_3}{du} = \frac{1}{\nu} \sin i \cos i \sin u,$$

$$\frac{d\alpha_1}{du} = w_2, \quad \frac{d\beta_1}{du} = \gamma_1 + w_3, \quad \frac{d\gamma_1}{du} = w_1$$

с нулевыми начальными условиями. Уравнение для w_3 сразу интегрируется

$$w_3 = \frac{1}{\nu} \sin i \cos i (1 - \cos u).$$

Система для определения γ_1, w_1 отделяется:

$$\frac{dw_1}{du} = -\nu(w_3 + \gamma_1) - 3(1-\nu)\gamma_1 - \sin i \cos i \cos u,$$

$$\frac{d\gamma_1}{du} = w_1.$$

Подставляя в нее полученное выражение для w_3 и представляя систему в виде одного уравнения, получаем

$$\frac{d^2\gamma_1}{du^2} + (3-2\nu)\gamma_1 = \sin i \cos i.$$

Запишем его общее решение в виде

$$\gamma_1 = A_1 \sin \sqrt{3-2\nu}u + A_2 \cos \sqrt{3-2\nu}u - \frac{\sin i \cos i}{3-2\nu}.$$

С учетом нулевых начальных условий

$$\gamma_1 = \frac{\sin i \cos i}{3-2\nu} (\cos \sqrt{3-2\nu}u - 1).$$

Для определения α_1 аналогично получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2\alpha_1}{du^2} + 3(1-\nu)\alpha_1 = \sin i \cos i \operatorname{tgi}.$$

Его решение с учетом начальных условий имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{\sin^2 i}{3\nu-3} (\cos \sqrt{3-3\nu}u - 1).$$

Для определения β_1 получаем уравнение

$$\frac{d\beta_1}{du} = \sin i \cos i \left(\frac{1}{\nu} (1 - \cos u) + \frac{1}{3-2\nu} (\cos \sqrt{3-2\nu} u - 1) \right),$$

имеющее решение

$$\beta_1 = \sin i \cos i \left(\frac{3(1-\nu)}{\nu(3-2\nu)} u - \frac{1}{\nu} \sin u + \frac{1}{(3-2\nu)\sqrt{3-2\nu}} \sin \sqrt{3-2\nu} u \right).$$

Таким образом, получено движение, рождающееся из стационарного решения \mathbf{x}_0 , в полусвязанной системе координат:

$$\alpha = \varepsilon \frac{\sin^2 i}{3\nu-3} (\cos \sqrt{3-3\nu} u - 1),$$

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon \sin i \cos i \left(\frac{3(1-\nu)}{\nu(3-2\nu)} u - \frac{1}{\nu} \sin u + \frac{1}{(3-2\nu)\sqrt{3-2\nu}} \sin \sqrt{3-2\nu} u \right),$$

$$\gamma = \varepsilon \frac{\sin i \cos i}{3-2\nu} (\cos \sqrt{3-2\nu} u - 1),$$

$$\Omega_1 = \varepsilon \sin i \cos i \frac{\sqrt{3-2\nu}}{2\nu-3} \sin \sqrt{3-2\nu} u,$$

$$\Omega_2 = 1 + \varepsilon \sin i \cos i \frac{\sqrt{3-3\nu}}{3-3\nu} \sin \sqrt{3-3\nu} u,$$

$$\Omega_3 = \varepsilon \frac{1}{\nu} \sin i \cos i (1 - \cos u).$$

Получены выражения для малых колебаний оси симметрии спутника по углам α, γ , выражение для угла β , линейно возрастающего по времени, и выражения для угловой скорости под действием гравитационного и магнитного моментов. Наибольший интерес вызывает постоянное смещение по углам α и γ . Если орбита спутника – не приэкваториальная, то смещение в плоскости орбиты имеет величину

$$\alpha = \varepsilon \frac{\sin^2 i}{3\nu-3}.$$

Отклонение зависит от моментов инерции, и чем больше их разница, тем меньше влияние МСО, так как $\nu < 1$. С возрастанием наклона орбиты отклонение также возрастает, что соответствует повышению эффективности работы МСО на высоких наклонениях. При $\nu = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ и наклонении 50° отклонение составляет около 2.3° .

Заключение

Изучены быстрые вращения спутника после отделения от ракеты-носителя под действием демпфирующего магнитного момента. Получено решение усредненных уравнений в квадратурах, для двух частных случаев получены конечные формулы, выражающие закон изменения модуля вектора кинетического момента спутника и его направления в пространстве в зависимости от времени. Определена зависимость скорости уменьшения модуля кинетического момента от наклона орбиты, которую можно рассматривать как эффективность алгоритма “*Bdot*”. Получена упрощенная наглядная формула, описывающая эффективность алгоритма. Найдено направление в инерциальном пространстве, к которому стремится вектор кинетического момента. В установившемся режиме определена точность гравитационной ориентации.

Литература

1. Алпатов А.П. и др. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. Москва: Машиностроение, 1978.
2. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975.
3. Gießelmann J. Development of an Active Magnetic Attitude Determination and Control System for Picosatellites on Highly Inclined Circular Low Earth Orbits // Thesis for Master Degree in Engineering, School of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering Science, Engineering and Technology, RMIT University, 2006.
4. Makovec K., Turner A., Hall C. Design and implementation of a nanosatellite attitude determination and control system // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2001. V. 109. pp. 167-186.
5. Jung J., Kuzuya N., Alvarez J. The design of the OPAL attitude control system // 10th Annual AIAA/USU Conference on Small Satellites, Utah, 1996. 6p.
6. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1976. V. 13. № 5. pp. 282-287.
7. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965.

8. Драновский В.И., Яншин А.М. Влияние диссипативных моментов от вихревых токов на ориентацию спутника, стабилизированного вращением // Космические исследования. 1975. Т. 13. № 4. с. 487-493.
9. Мартыненко Ю.Г., Урман Ю.М. О малых колебаниях быстро закрученного твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР, Мех. тв. тела. 1981. № 1. с. 27-32.
10. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // Астрономический журнал. 1973. Т. 50. № 2. с. 327-335.
11. Белецкий В.В., Хентов А.. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.
12. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского университета, 1975.
13. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладные математика и механика. 1963. Т. XXVII. № 3. с. 473-483.
14. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
15. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
16. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

Содержание

Введение.....	3
1. Алгоритмы активной магнитной ориентации.....	3
1.1. Алгоритмы активной магнитной ориентации.....	3
1.2. Алгоритм «-Vdot».....	8
1.3. Об одной “старой” задаче и ее продолжении.....	9
2. Постановка задачи.....	12
3. Исследование переходных процессов.....	17
4. Установившееся движение.....	25
Заключение	30
Литература	30