



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2010 г.



Овчинников М.Ю., Ткачев С.С.

Исследование алгоритма  
трёхосной маховичной  
системы ориентации

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Исследование алгоритма трёхосной маховичной системы ориентации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 25. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-25>

## 1. Введение

Классификацию систем управления ориентацией космических аппаратов можно проводить по разным критериям. Наверное, наиболее используемым можно назвать разделение на пассивные и активные системы. К пассивным относятся гравитационные, магнитные, аэродинамические системы. К активным можно отнести магнитные, маховичные (гироскопические) и системы ориентации, использующие реактивные двигатели. Существует другое разделение – системы, которые используют внешние поля и системы, для работы которых не требуется наличие таких полей. К первому типу относятся магнитные и гравитационные, ко второму – маховичные и системы ориентации с реактивными двигателями.

Так как в дальнейшем речь будет идти о гироскопических системах ориентации (маховики – одноступенные гироскопические системы), отметим их достоинства и недостатки. Основным преимуществом является возможность их использования в отсутствии внешних силовых полей или когда эти поля являются лишь возмущающим фактором; также маховики не расходуют рабочее тело, как это делают реактивные двигатели. К недостаткам можно отнести более сложную динамику аппарата, а также такое явление, как насыщение маховиков (достижение максимальной скорости вращения или максимального кинетического момента). Обычно на космических аппаратах имеются механизмы разгрузки маховиков. Однако на малогабаритных спутниках использовать такие механизмы не представляется возможным в связи с ограниченностью их массово-габаритных характеристик. Поэтому необходимо тщательно разрабатывать конфигурации маховиков, чтобы достичь требуемой длительности работы системы без применения механизмов разгрузки.

В настоящей работе анализируется возможность использования маховичной системы ориентации, состоящей из трёх маховиков, оси которых взаимно перпендикулярны (рис. 1.1), без системы разгрузки. Количество маховиков может быть и больше. В этом случае нужно, зная вектор кинетического момента маховиков, перераспределить его между реальными маховиками.

Следует сказать несколько слов о том, как возникла рассматриваемая в настоящей работе постановка задачи, тогда станут понятными те специфические требования, которые предъявляются к системе. В 2007 году в Институте космической физики (г. Кируна, Швеция) прорабатывался проект марсианского микроспутника [1]. В качестве исполнительных органов системы ориентации этого аппарата рассматривались две системы: двигатели малой тяги и маховики. Это связано в первую очередь с тем, что Марс имеет очень слабое магнитное поле, и использовать активную магнитную систему ориентации не представляется возможным. Расчётное время активного автономного существования аппарата – один марсианский год. Из-за малых размеров и массы аппарата возникла необходимость в сокращении до минимума элементов системы ориентации. Поэтому совместное использование маховиков и двигателей малой тяги исключалось. Для обеспечения энергетических нужд аппарата используются солнечные батареи. Кроме того, для функционирования полезной нагрузки требуется его закрутка с постоянной угловой скоростью вокруг оси, направленной на Солнце. Естественным было сделать аппарат осесимметричным. Система отделения спутника устроена так, что в момент отделения он мог получить незначительную закрутку в плоскости, лежащей перпендикулярно оси симметрии ( $<2^\circ/\text{сек}$ ), а ориентация аппарата в момент отделения была произвольной.

Таким образом, система ориентации должна развернуть аппарат осью симметрии на Солнце, закрутить его вокруг оси симметрии с заданной угловой скоростью и удерживать в этом положении в течение марсианского года (около 687 земных суток). В настоящей работе исследуется, можно ли использовать на таком аппарате трёхосную маховичную систему ориентации. Как уже было сказано, аппарат вместе с закреплёнными в нём маховиками является динамически осесимметричным.

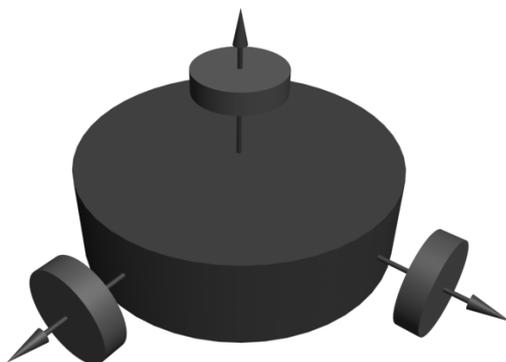


Рис.1.1. Конфигурации маховиков

Существует ряд работ, посвящённых маховичным системам, в которых они рассматриваются в аналогичном ракурсе. В основном в качестве закона управления используется PD-регулятор, основанный на парировании рассогласования по отклонению и скорости, с различными способами задания движения. Часто встречаются кватернионы (например, [2],[3]). В работе [4] представлено несколько вариантов параметризации движения относительно центра масс и записан закон управления в каждой из них. Каждый набор параметров имеет как плюсы, так и минусы, и, как правило, выбор диктуется поставленными задачами, но очевидно, что конечные результаты получаются аналогичными. В представляемой работе ориентация задаётся матрицей направляющих косинусов.

Важным вопросом является выбор коэффициентов пропорциональности PD-регулятора. В конечном итоге они могут определить время разворота, энергопотребление и многое другое. В настоящей работе критерием выбора параметров является скорость протекания переходных процессов. В работах, посвящённых алгоритмам маховичных систем, вопрос выбора параметров либо опускается [5] и приводится лишь несколько примеров работы алгоритма, либо для их определения используются численные методы [6]. В настоящей работе предложена методика выбора параметров PD-регулятора и определены параметры для аппарата, о котором было сказано выше.

Ещё одним вопросом, о котором идёт речь в работе, является эволюция кинетического момента маховиков на длительном интервале времени. Этот вопрос практически никогда не затрагивается, так как маховичные системы управления ориентацией, как правило, имеют механизмы разгрузки (токовые катушки, реактивные двигатели). Задачей настоящей работы является

исследование существующих и/или построение новых алгоритмов, которые позволили бы обойтись без использования элементов разгрузки на протяжении всего времени функционирования аппарата, избавив таким образом конструкторов от необходимости установки дополнительных компонентов системы ориентации на спутник.

## 2. Постановка задачи

Введем необходимые правые ортогональные системы координат с началом в центре масс аппарата (точка  $O$ ). Первая – это связанная система координат, оси которой являются главными центральными осями инерции тела ( $O\xi\eta\zeta$ , ось  $O\xi$  направлена по оси симметрии). Вторая система координат – солнечная  $OX'Y'Z'$ , ось  $OX'$  направлена на Солнце, ось  $OY'$  перпендикулярна плоскости эклиптики, а третья дополняет эту систему координат до правой ортогональной. Ось  $OX$  третьей системы координат  $OXYZ$  совпадает с осью  $OX'$ , другие две оси вращаются вокруг оси  $OX'$  с заданной постоянной угловой скоростью (рис. 2.1).

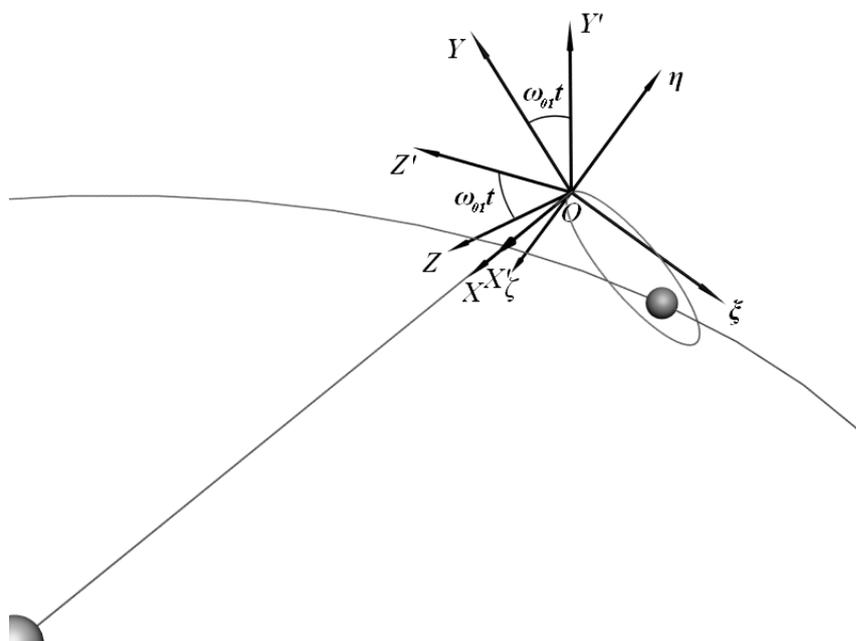


Рис.2.1. Системы координат

Система ориентации совмещает ось симметрии аппарата  $O\xi$  с осью  $OX$  и обеспечивает его закрутку вокруг этой оси с заданной постоянной угловой скоростью  $\omega_{01}$ . Тем самым, связанная система координат должна быть

неподвижной относительно системы  $OXYZ$  и вращаться относительно  $OX'Y'Z'$  с постоянной угловой скоростью.

Приведём параметры системы, рассмотренной в [1]: тензор инерции  $I = \text{diag}(0.81; 0.405; 0.405) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , угловая скорость собственного вращения вокруг оси  $OX'$   $\omega_{01} = 0.07 \text{ с}^{-1}$ , угловая скорость вращения, обусловленная годовым движением Марса  $\omega_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ .

### 3. Уравнения движения

Запишем уравнения, описывающие угловое движение спутника с маховичной системой ориентации:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}.$$

Здесь  $\mathbf{K} = J \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$  - кинетический момент спутника,  $J$  - его тензор инерции вместе с маховиками,  $\boldsymbol{\omega}$  - абсолютная угловая скорость спутника в связанных осях,  $\mathbf{H}$  - вектор, компонентами которого являются кинетические моменты маховиков в связанных осях.

Пусть ориентация связанной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  относительно системы  $OXYZ$  задаётся матрицей направляющих косинусов. Тогда угловую скорость аппарата в связанных осях можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = A^T \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, 0)^T$ ,  $\omega_{01}$  - скорость вращения  $OXYZ$  относительно оси  $OX$ ,  $\omega_{02}$  - угловая скорость системы координат  $OX'Y'Z'$ , равная скорости годового движения Марса,  $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$  - угловая скорость связанной системы координат относительно системы координат  $OXYZ$ . Таким образом получаем следующую систему уравнений, описывающую движение спутника:

$$\begin{aligned}
 J\dot{\omega}_{омн} - JWA^T\omega_0 + JA^T\dot{\omega}_0 + \dot{H} + \omega_{омн} \times J\omega_{омн} + \omega_{омн} \times JA^T\omega_0 + \omega_{омн} \times H + \\
 + A^T\omega_0 \times H + A^T\omega_0 \times J\omega_{омн} + A^T\omega_0 \times JA^T\omega_0 = M, \\
 \dot{A} = AW.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 + \omega_{01} \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 + \omega_{01} & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу осевой симметрии аппарата можно перейти к полусвязанным осям ( $O\xi\eta'\zeta'$ , ось  $O\xi$  направлена по оси симметрии, две другие вращаются с угловой скоростью  $\omega_1 + \omega_{01}$ ) и записать выражения для проекций абсолютной угловой скорости на эти оси

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma$$

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$$

$$\omega_1 = \dot{\gamma} - \omega_{01}.$$

Матрицу направляющих косинусов  $A$  представим в виде

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  самолётные углы (рис 3.1). Запишем матрицу  $A$  следующим образом:

$$A = CG.$$

Здесь

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

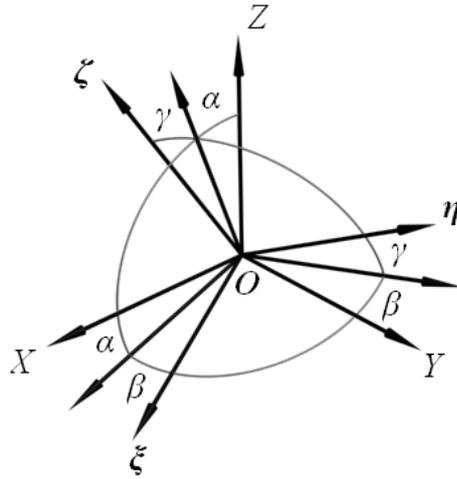


Рис.3.1. Самолётные углы

В этом случае кинематические соотношения переписутся так:

$$\dot{C} = C \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\omega}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma} = \omega_1 + \omega_{01}.$$

На элементы матрицы  $C$  наложено шесть связей в виде тривиальных первых интегралов и одно ограничение – это требование по ориентации  $c_{23} = 0$ . Таким образом, матрица  $C$  имеет лишь два независимых элемента.

Введём обозначения  $\tilde{\omega} = (\omega_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3)^T$ ,  $\tilde{H} = (H_1 \quad \tilde{H}_2 \quad \tilde{H}_3)^T$ ,  $\tilde{M} = (M_1 \quad \tilde{M}_2 \quad \tilde{M}_3)^T$ , где все компоненты с волной – проекции соответствующих векторов на полусвязанные оси  $O\xi\eta'\zeta'$ . Тогда уравнения движения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & J\dot{\tilde{\omega}}_{отн} - J\tilde{W}C^T\omega_0 + JC^T\dot{\omega}_0 + \dot{\tilde{H}} + \tilde{\omega}_{отн} \times J\tilde{\omega}_{отн} + \tilde{\omega}_{отн} \times JC^T\omega_0 + \tilde{\omega}_{отн} \times \tilde{H} + \\ & + C^T\omega_0 \times \tilde{H} + C^T\omega_0 \times J\tilde{\omega}_{отн} + C^T\omega_0 \times JC^T\omega_0 + J_2\omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} + \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix} = \tilde{M}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{C} = C \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\omega}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{\gamma} = \omega_1 + \omega_{01}. \quad (3.2)$$

Видно, что решение уравнения (3.2) можно получить в виде квадратуры после решения системы (3.1). Оно отвечает за циклическую координату, эволюция которой интереса не представляет. Поэтому в дальнейшем будем исследовать систему (3.1).

Строим функцию Ляпунова для этой системы по аналогии с тем, как это было сделано в [4],[8]

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{отн}, J\boldsymbol{\omega}_{отн}) + k_a(1 - c_{11}),$$

где  $c_{11}$  – диагональный элемент матрицы  $C$ ,  $k_a > 0$  ( $[k_a] = H \cdot m$ ). Очевидно, что эта функция положительно определена для всех значений компонент вектора угловой скорости и элемента  $c_{11}$  матрицы направляющих косинусов, кроме значений  $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$  и  $c_{11} = 1$ , отвечающих требуемой ориентации. В этом случае  $V = 0$ . Производную функции  $V$  по времени перепишем с учётом уравнений движения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{отн} (C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times J C^T \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\tilde{H}} + C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times \tilde{H} - \tilde{M} + k_a \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{\omega}_{отн} \times J C^T \boldsymbol{\omega}_0 + \\ & + C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times J \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{отн} + J_2 \boldsymbol{\omega}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\omega}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{S} = (0, -c_{13}, c_{12})^T$ . Для анализа асимптотической устойчивости рассматриваемого положения равновесия воспользуемся теоремой Барбашина-Красовского, которая требует выполнения неравенства  $\dot{V} < 0$  для всех возможных значений  $c_{11}$  и компонент вектора угловой скорости кроме  $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$  и  $c_{11} = 1$  и выполнения равенства  $\dot{V} = 0$  для  $\boldsymbol{\omega}_{отн} = 0$  и  $c_{11} = 1$ . Это означает, что достаточно выполнение следующего равенства:

$$C^T \omega_0 \times JC^T \omega_0 + \dot{\tilde{H}} + C^T \omega_0 \times \tilde{H} - \tilde{M} + k_a \cdot S + \tilde{\omega}_{отн} \times JC^T \omega_0 + C^T \omega_0 \times J\tilde{\omega}_{отн} + \\ + J_2 \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} + \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix} = k_\omega \tilde{\omega}_{отн}.$$

Откуда можно получить номинальный закон управления, разрешая уравнение

$$\dot{\tilde{H}} + C^T \omega_0 \times \tilde{H} = \tilde{M} - k_a \cdot S + k_\omega \tilde{\omega}_{отн} - C^T \omega_0 \times JC^T \omega_0 - \tilde{\omega}_{отн} \times JC^T \omega_0 \\ - C^T \omega_0 \times J\tilde{\omega}_{отн} - J_2 \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} - \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

относительно  $\tilde{H}$ . Здесь  $k_\omega > 0$  ( $[k_\omega] = H \cdot м \cdot с$ ). Таким образом, уравнения движения вместе с законом управления образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$J\dot{\tilde{\omega}}_{отн} + \tilde{\omega}_{отн} \times J\tilde{\omega}_{отн} + \tilde{\omega}_{отн} \times JC^T \omega_0 + \tilde{\omega}_{отн} \times \tilde{H} - k_a \cdot S + k_\omega \tilde{\omega}_{отн} = 0 \\ \dot{\tilde{H}} + C^T \omega_0 \times \tilde{H} = \tilde{M} - k_a \cdot S + k_\omega \tilde{\omega}_{отн} - C^T \omega_0 \times JC^T \omega_0 - \tilde{\omega}_{отн} \times JC^T \omega_0 - \\ + J\tilde{W}C^T \omega_0 - JC^T \dot{\omega}_0 - C^T \omega_0 \times J\tilde{\omega}_{отн} - J_2 \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} - \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\dot{C} = C \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_3 & \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\omega}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее в качестве внешнего момента рассматривается только гравитационный момент  $\tilde{M} = 3\omega_{орб}^2 E_3 \times JE_3$ , где  $\omega_{орб}$  – орбитальная угловая скорость аппарата в его орбитальном движении вокруг Марса,  $E_3$  – местная вертикаль. Исследование этой системы разделяется на два этапа: исследование переходных процессов и стационарного режима.

#### 4. Переходные процессы

Основными задачами исследования переходных процессов являются нахождение зависимости кинетических моментов маховиков после протекания переходных процессов от начальных условий и определение параметров закона управления  $k_a$  и  $k_\omega$ , для которых степень устойчивости характеристического многочлена линеаризованной системы максимальна. Как уже было сказано, аппарат отделяется так, что вектор начальной угловой скорости лежит в плоскости  $O\eta\zeta$ . В силу осесимметричности аппарата в качестве связанных осей  $O\eta$  и  $O\zeta$  можно выбрать любые две оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Поэтому без ограничения общности направим вектор начальной угловой скорости по оси  $O\zeta$ , то есть  $\omega_{омн0} = (0; 0; \omega_{30})$ , а в качестве кинетических моментов маховиков выберем их проекции на эти оси.

Для дальнейших исследований перейдём в модели (3.4) к безразмерным переменным  $\Omega$ ,  $h$  и безразмерному времени  $\tau$  по формулам

$$\tau = \omega_{01}t, \tilde{\omega}_{омн} = \omega_{01}\tilde{\Omega}, \tilde{W} = \omega_{01}\tilde{w}, \tilde{H} = J_1\omega_{01}\tilde{h}, \bar{k}_a = \frac{k_a}{J_1\omega_{01}^2}, \bar{k}_\omega = \frac{k_\omega}{J_1\omega_{01}},$$

$$J = J_1 \cdot \text{diag}(1, \theta, \theta) = J_1\tilde{J}, \Omega_0 = (1, \varepsilon, 0), \theta = J_2/J_1, \varepsilon = \omega_{02}/\omega_{01}.$$

Уравнения движения (3.4) с учётом этих замен переписутся в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{J}\tilde{\Omega}' + \tilde{\Omega} \times \tilde{J}\tilde{\Omega} - \bar{k}_a S + \bar{k}_\omega \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega} \times \tilde{J}C^T \Omega_0 + \tilde{\Omega} \times \tilde{h} = 0, \\ &\tilde{h}' + C^T \Omega_0 \times \tilde{h} + C^T \Omega_0 \times \tilde{J}C^T \Omega_0 + \bar{k}_a S - \bar{k}_\omega \tilde{\Omega} - \tilde{J}\tilde{w}C^T \Omega_0 + \\ &+ C^T \Omega_0 \times \tilde{J}\tilde{\Omega} + \tilde{J}C^T \dot{\Omega}_0 + \theta \Omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Omega}_3 \\ -\tilde{\Omega}_2 \end{pmatrix} + \Omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_3 \\ -\tilde{h}_2 \end{pmatrix} = 3 \frac{\omega_{опб}^2}{\omega_{01}^2} E_3 \times \tilde{J}E_3, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\dot{C} = C \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_2 \\ \tilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Величина  $\varepsilon \approx 10^{-6}$ , а  $\frac{\omega_{orb}^2}{\omega_{01}^2} \approx 10^{-5}$ , поэтому при исследовании переходных процессов можно пренебречь слагаемыми, содержащими эти множители.

#### 4.1. Зависимость значений кинетических моментов маховиков от начальных условий

Найдём сначала зависимость значений кинетических моментов маховиков от начальных условий после протекания переходных процессов. В этом случае, как было сказано выше, можно пренебречь гравитационным моментом. Поэтому вектор кинетического момента сохраняется в инерциальном пространстве, и с высокой степенью точности можно считать, что и в системе координат, связанной с Солнцем, он также будет сохраняться. Запишем вектор кинетического момента в этой системе координат

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}_{инерц} = const .$$

Перепишем это выражение в безразмерном виде через переменные в полусвязанных осях

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{J}}(\tilde{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Omega}_0) + \tilde{\mathbf{h}}) = const .$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{h}}$  – вектор кинетических моментов маховиков в полусвязанных осях;  $\mathbf{C}$  – матрица перехода от инерциальных осей к полусвязанным,

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} .$$

Найдём теперь зависимость между начальными условиями и конечными значениями кинетических моментов маховиков. Естественно считать, что в начальный момент времени маховики не раскручены, т.е.  $\tilde{\mathbf{h}} = 0$ . В конечный

момент времени  $C$  – единичная матрица, а относительная угловая скорость равна нулю. Воспользовавшись законом сохранения вектора кинетического момента, получим

$$C\tilde{J}(\tilde{\Omega}|_{t=0} + C^T\Omega_0) = \tilde{J}\Omega_0 + \tilde{h}.$$

Отсюда несложно получить значения кинетических моментов маховиков

$$\tilde{h} = C\tilde{J}(\tilde{\Omega}|_{t=0} + C^T\Omega_0) - \tilde{J}\Omega_0$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} h_1 &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \theta \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \theta \sin^2 \alpha - 1 + \Omega_{10} \cos \alpha \cos \beta - \\ &\quad - \theta \Omega_{20} \cos \alpha \sin \beta + \theta \Omega_{30} \sin \alpha, \\ \tilde{h}_2 &= \cos \alpha \cos \beta \sin \beta - \theta \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \Omega_{10} \sin \beta + \theta \Omega_{20} \cos \beta, \\ \tilde{h}_3 &= -\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta - \theta \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \beta + \theta \cos \alpha \sin \alpha - \\ &\quad - \Omega_{10} \sin \alpha \cos \beta + \theta \Omega_{20} \sin \alpha \sin \beta + \theta \Omega_{30} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Как уже было сказано выше, в силу особенностей отделения аппарата, а также в силу его осевой симметрии, можно считать, что  $\Omega_{10} = \Omega_{20} = 0$ , тогда эти выражения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} h_1 &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \theta \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \theta \sin^2 \alpha - 1 + \Omega_{10} \cos \alpha \cos \beta, \\ \tilde{h}_2 &= \cos \alpha \cos \beta \sin \beta - \theta \cos \alpha \cos \beta \sin \beta + \Omega_{10} \sin \beta, \\ \tilde{h}_3 &= -\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta - \theta \cos \alpha \sin \alpha \sin^2 \beta + \theta \cos \alpha \sin \alpha - \Omega_{10} \sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

На рис.4.1 для иллюстрации приведены зависимости кинетических моментов от начального угла  $\alpha$ , при этом  $\beta = 0$  и  $\omega_{10} = 0.1 \text{ сек}^{-1}$ .

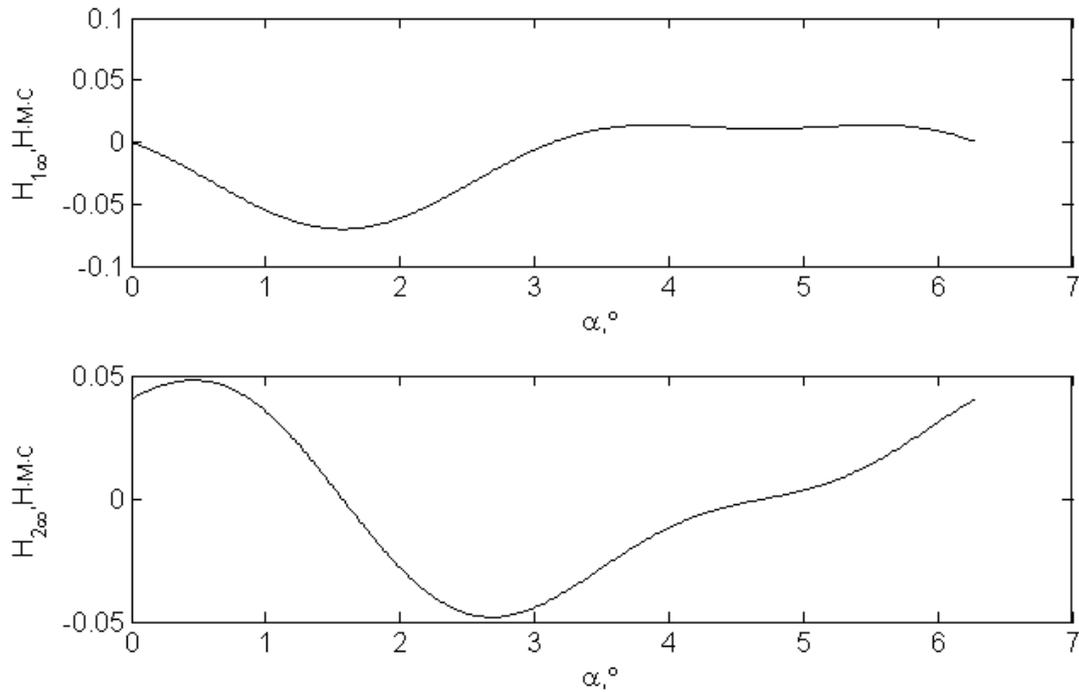


Рис.4.1. Зависимость кинетических моментов маховиков от начального угла  $\alpha$

## 4.2. Определение параметров управления

Для дальнейшего исследования проведём линеаризацию уравнений движения спутника в окрестности положения равновесия

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (0, 0, 0), \mathbf{h} = (h_{01}, \tilde{h}_{02}, \tilde{h}_{03}), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$(h_{01}, \tilde{h}_{02}, \tilde{h}_{03})$  – значения кинетических моментов маховиков на момент окончания переходных процессов. Линеаризованная матрица направляющих косинусов запишется в следующем виде:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда линеаризованная система запишется так:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1' + \bar{k}_\omega \Omega_1 + \tilde{h}_{03} \tilde{\Omega}_2 - \tilde{h}_{02} \tilde{\Omega}_3 &= 0, \\
 \theta \tilde{\Omega}_2' + \tilde{\Omega}_3 + \bar{k}_\omega \tilde{\Omega}_2 - \tilde{h}_{03} \tilde{\Omega}_1 + (\tilde{h}_{01} + 1) \tilde{\Omega}_3 + \bar{k}_a \alpha &= 0, \\
 \theta \tilde{\Omega}_3' - \tilde{\Omega}_2 + \bar{k}_\omega \tilde{\Omega}_3 + \tilde{h}_{02} \tilde{\Omega}_1 - (\tilde{h}_{01} + 1) \tilde{\Omega}_2 + \bar{k}_a \beta &= 0, \\
 \alpha' &= \tilde{\Omega}_2, \\
 \beta' &= \tilde{\Omega}_3.
 \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для неё принимает вид

$$\begin{aligned}
 \theta^2 \lambda^5 + (\theta^2 + 2\theta) \bar{k}_\omega \lambda^4 + ((\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2) \theta + (\tilde{h}_{01} + 1)^2 + \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_\omega^2 + 2\bar{k}_a \theta) \lambda^3 + \\
 + (2\bar{k}_a \theta + (\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2) + (\tilde{h}_{01} + 1)^2 + 2\bar{k}_a + \bar{k}_\omega^2) \bar{k}_\omega \lambda^2 + \\
 + ((\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2) + 2\bar{k}_\omega^2 + \bar{k}_a) \bar{k}_a \lambda + \bar{k}_\omega \bar{k}_a^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Для определения параметров управления  $k_a$  и  $k_\omega$ , обеспечивающих максимальную степень устойчивости, сначала рассмотрим случай

$$\tilde{h}_{01} = \tilde{h}_{02} = \tilde{h}_{03} = 0.$$

Тогда характеристическое уравнение (4.1) примет вид

$$\begin{aligned}
 \theta^2 \lambda^5 + (\theta^2 + 2\theta) \bar{k}_\omega \lambda^4 + (1 + \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_\omega^2 + 2\bar{k}_a \theta) \lambda^3 + \\
 + (2\bar{k}_a \theta + 1 + 2\bar{k}_a + \bar{k}_\omega^2) \bar{k}_\omega \lambda^2 + (2\bar{k}_\omega^2 + \bar{k}_a) \bar{k}_a \lambda + \bar{k}_\omega \bar{k}_a^2 = 0
 \end{aligned}$$

или, учитывая, что  $\lambda = -\bar{k}_\omega$  – корень,

$$(\theta^2 \lambda^4 + 2\theta \bar{k}_\omega \lambda^3 + (\bar{k}_\omega^2 + 2\bar{k}_a \theta + 1) \lambda^2 + 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega \lambda + \bar{k}_a^2) (\lambda + \bar{k}_\omega) = 0. \tag{4.2}$$

Проведём теперь исследование устойчивости многочлена (выражение во втором сомножителе не повлияет на устойчивость полинома)

$$P(\lambda) = \theta^2 \lambda^4 + 2\theta \bar{k}_\omega \lambda^3 + (\bar{k}_\omega^2 + 2\bar{k}_a \theta + 1) \lambda^2 + 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega \lambda + \bar{k}_a^2.$$

Легко показать с помощью критерия Рауса-Гурвица его устойчивость. Для этого запишем главные миноры определителя Гурвица и убедимся, что они больше нуля

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\theta \bar{k}_\omega > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2\theta \bar{k}_\omega & 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega \\ \theta^2 & \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_a + 1 \end{vmatrix} = 2\theta \bar{k}_\omega (\bar{k}_\omega^2 + \bar{k}_a \theta + 1) > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2\theta \bar{k}_\omega & 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega & 0 \\ \theta^2 & \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_a + 1 & \bar{k}_a^2 \\ 0 & 2\theta \bar{k}_\omega & 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega \end{vmatrix} = 4\theta \bar{k}_\omega^2 \bar{k}_a (\bar{k}_\omega^2 + 1) > 0, \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} 2\theta \bar{k}_\omega & 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega & 0 & 0 \\ \theta^2 & \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_a + 1 & \bar{k}_a^2 & 0 \\ 0 & 2\theta \bar{k}_\omega & 2\bar{k}_a \bar{k}_\omega & 0 \\ 0 & \theta^2 & \bar{k}_\omega^2 + 2\theta \bar{k}_a + 1 & \bar{k}_a^2 \end{vmatrix} = \bar{k}_a^2 \Delta_3 > 0. \end{aligned}$$

Уравнение  $P(\lambda) = 0$  можно переписать в виде

$$(\theta \lambda^2 + \bar{k}_\omega \lambda + \bar{k}_a)^2 = -\lambda^2.$$

Тогда его корнями будут две пары комплексно-сопряженных корней с отрицательными действительными частями

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= -\frac{\bar{k}_\omega}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a \theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a \theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}} + \\ &+ i \left( \frac{1}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a \theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2} - (\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a \theta - 1)}{2}} \right), \end{aligned}$$

$$\lambda_{2,4} = -\frac{\bar{k}_\omega}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}} +$$

$$+ i \left( -\frac{1}{2\theta} \pm \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2} - (\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)}{2}} \right).$$

Будем искать такие параметры, для которых степень устойчивости многочлена максимальна. Степенью устойчивости многочлена называется [7] действительная часть самого правого его корня, взятого с обратным знаком. Эта величина является показателем скорости протекания переходных процессов. Прежде чем перейти к поиску, нужно указать ещё одно ограничение на параметры  $k_a$  и  $k_\omega$ , которое следует из закона управления (3.3) и свойств маховиков. Каждый маховик имеет максимальное значение управляющего момента. Тогда можно записать следующее неравенство:

$$\dot{H}_{\max} \geq k_a + \omega_{\max} k_\omega. \quad (4.3)$$

Здесь  $\dot{H}_{\max}$  и  $\omega_{\max}$  – максимальный момент, создаваемый маховиком, и максимальная начальная угловая скорость, соответственно. Неравенство (4.3) задаёт полуплоскость, лежащую ниже прямой

$$k_\omega = -\frac{1}{\omega_{\max}} (k_a - \dot{H}_{\max}), \quad (4.3a)$$

или в безразмерных параметрах  $\bar{k}_a$  и  $\bar{k}_\omega$

$$\bar{k}_\omega = -\frac{\omega_{01}}{\omega_{\max}} \left( \bar{k}_a - \frac{\dot{H}_{\max}}{J_1 \omega_{01}^2} \right).$$

Вернёмся теперь к характеристическому уравнению (4.2). Действительные части его корней имеют вид

$$real \lambda_{1,2} = -\frac{\bar{k}_\omega}{2\theta} + \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}},$$

$$real \lambda_{3,4} = -\frac{\bar{k}_\omega}{2\theta} - \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}}.$$

Ясно, что первая пара корней лежит правее второй (для всех  $k_\omega > 0$ ), поэтому можно ограничиться нахождением зависимости значения действительной части от параметров управления первой пары корней характеристического уравнения (4.2). На рис. 4.2 представлена зависимость действительной части первой пары корней от параметров управления  $k_a$  и  $k_\omega$ . Прямая линия (4.3а) ограничивает область допустимых значений этих параметров (как уже было сказано  $k_a$  и  $k_\omega$  – положительные числа, поэтому интересующая нас область лежит внутри треугольника, образованного прямой (4.3а) и прямыми  $k_a = 0$  и  $k_\omega = 0$ ). Кривые – это изолинии с одинаковым значением действительной части первой пары корней характеристического уравнения.

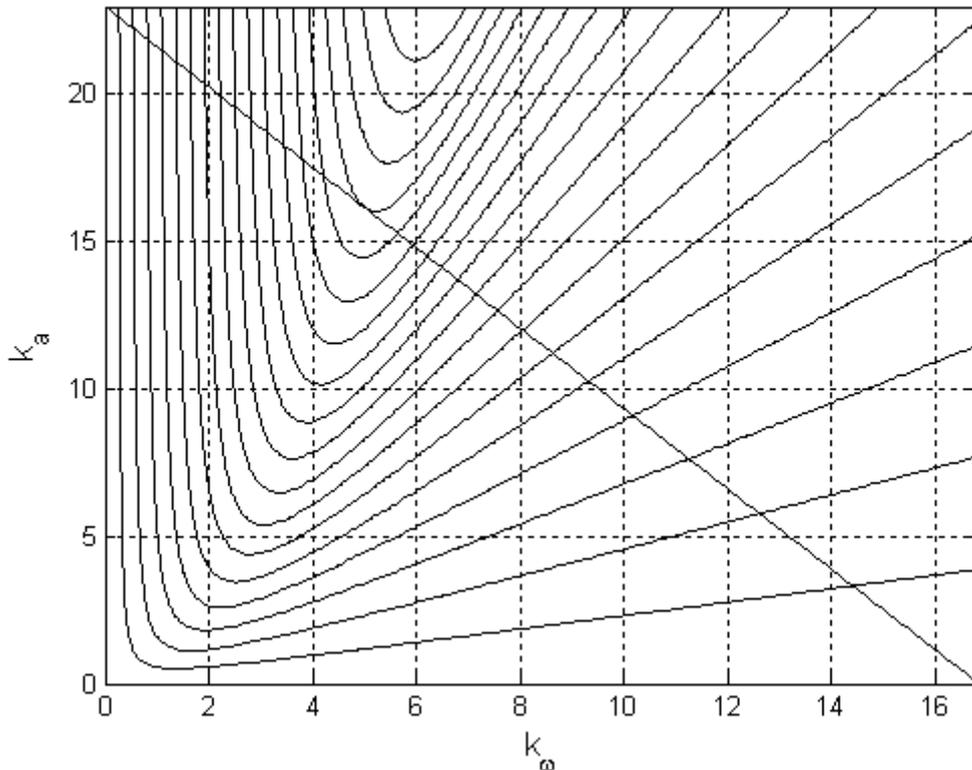


Рис.4.2. Зависимость действительных частей первой пары корней характеристического уравнения от параметров управления

На рис. 4.2 изолинии (линии одинаковых значений действительных частей) с уменьшением действительной части корней уравнения смещаются вверх. Поэтому параметрами, обеспечивающими максимальную степень устойчивости, будут те, которые находятся в точке касания кривых-изолиний и прямой (4.3а). Для того чтобы их определить, запишем уравнение кривых, изображённых на рис. 4.2,

$$\bar{k}_a = \frac{1}{4\theta} (\bar{k}_\omega^2 - 1 - (2\theta\mu + k_\omega)^2 + \frac{\bar{k}_\omega^2}{(2\theta\mu + \bar{k}_\omega)^2}).$$

Здесь  $\mu$  – такое значение действительной части корня, при котором происходит касание. Так как прямая (4.3а) является касательной, то для нахождения  $k_a, k_\omega, \mu$  нужно решить следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{k}_a}{d\bar{k}_\omega} &= \frac{1}{4\theta} (2\bar{k}_\omega - 2(2\theta\mu + \bar{k}_\omega) + \frac{2\bar{k}_\omega}{(2\theta\mu + \bar{k}_\omega)^2} - \frac{2\bar{k}_\omega^2}{(2\theta\mu + \bar{k}_\omega)^3}) = -\omega_{\max}, \\ \frac{1}{4\theta} (\bar{k}_\omega^2 - 1 - (2\theta\mu + \bar{k}_\omega)^2 + \frac{\bar{k}_\omega^2}{(2\theta\mu + \bar{k}_\omega)^2}) &= \bar{k}_a, \\ -\omega_{\max} \bar{k}_\omega + \dot{H}_{\max} &= \bar{k}_a. \end{aligned}$$

Решая эту систему численно, находим значения параметров:  $\bar{k}_a \approx 16$ ,  $\bar{k}_\omega \approx 5$ .

В размерных величинах (для указанных значений параметров аппарата)  $k_a \approx 0.07 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $k_\omega \approx 0.3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ .

До этого мы рассматривали полином четвёртой степени, теперь вернёмся к исходному уравнению. Может получиться так, что самым правым корнем окажется  $\lambda = -\bar{k}_\omega$ , тогда найденные выше параметры уже не будут обеспечивать максимальную степень устойчивости. Это произойдёт тогда, когда

$$-\bar{k}_\omega \geq -\frac{\bar{k}_\omega}{2\theta} + \frac{1}{2\theta} \sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}}.$$

Решим это неравенство. Перепишем его в виде

$$\sqrt{\frac{\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1 + \sqrt{(\bar{k}_\omega^2 - 4\bar{k}_a\theta - 1)^2 + 4\bar{k}_\omega^2}}{2}} \leq \bar{k}_\omega(1 - 2\theta).$$

Для выполнения неравенства необходимо выполнение  $1 - 2\theta \geq 0$ . Равенство  $\theta = 1/2$  при ограничениях, наложенных на параметры управления, не выполняется. Неравенство же  $\theta < 1/2$  противоречит условию физической реализуемости тела (неравенству треугольника для моментов инерции). То есть корень  $\lambda = -\bar{k}_\omega$  лежит левее самого правого корня уравнения четвёртой степени при всех допустимых значениях параметров системы.

Перейдём теперь к исходному уравнению. Его можно переписать в виде

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\left(1 + \frac{(\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2)\theta + \tilde{h}_{01}^2 + 2\tilde{h}_{01}}{\bar{k}_\omega^2 + 2\theta\bar{k}_\omega^2 + 2\bar{k}_a\theta}\right)\lambda^3 + \\ + a_3\left(1 + \frac{\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2 + \tilde{h}_{01}^2 + 2\tilde{h}_{01}}{2\bar{k}_a\theta + 2\bar{k}_a + \bar{k}_\omega^2}\right)\lambda^2 + a_4\left(1 + \frac{\tilde{h}_{02}^2 + \tilde{h}_{03}^2}{2\bar{k}_\omega^2 + \bar{k}_a}\right)\lambda + a_5 = 0.$$

Здесь  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  – коэффициенты исходного полинома. В общем случае параметры управления будут зависеть от кинетических моментов маховиков и, как следствие, от начальных условий, что потребует расчета этих параметров при отделении. Сделать это точно в условиях ограниченных вычислительных возможностей бортового компьютера и времени до включения системы ориентации проблематично. Однако, учитывая малость кинетического момента маховиков после протекания переходных процессов, можно сказать, что корни уравнения (4.1) будут мало отличаться от корней уравнения (4.4) (все корни различные, поэтому, согласно [10], корни будут аналитичны по малому параметру). Следовательно, параметры управления для любых значений кинетических моментов маховиков будут близки к тем, что были получены выше.

Итак, исследование переходных процессов, в первую очередь, продемонстрировало, какие параметры управления  $k_a$  и  $k_\omega$  необходимо выбирать с точки зрения быстроты протекания переходных процессов. Кроме того приведены зависимости конечных значения кинетических моментов маховиков от начальных условий.

## 5. Стационарный режим

Для исследования насыщения маховиков в течение длительного времени исследуем стационарный режим. Для этого запишем закон управления, который будет описывать изменение кинетических моментов маховиков в установившемся режиме. Ясно, что в этом случае

$$\omega_{отн} = 0, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\dot{\tilde{H}} + \tilde{\omega}_0 \times \tilde{H} = \tilde{M} - \tilde{\omega}_0 \times J\tilde{\omega}_0 - J\dot{\tilde{\omega}}_0 \quad (5.1)$$

Здесь

$$\tilde{M} = 3 \cdot \omega_0^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (J_1 - J_2)e_1e_3 \\ (J_2 - J_1)e_1e_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\omega_{02}t)\sin u \cos i - \cos(\omega_{02}t)\cos u \\ \sin i \sin u \\ \sin(\omega_{02}t)\cos u + \cos(\omega_{02}t)\cos i \sin u \end{pmatrix}.$$

Перепишем систему (5.1) в скалярном виде

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_1 &= -\tilde{H}_3 \omega_{02}, \\
 \dot{H}_2 &= 3\omega^2 (J_1 - J_2) e_1 e_3, \\
 \dot{H}_3 &= H_1 \omega_{02} + 3\omega_{orb}^2 (J_2 - J_1) e_2 e_1 + J_1 \omega_{01} \omega_{02}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь  $\omega_{orb}$  – орбитальная угловая скорость. Решая эту систему для круговой орбиты, получаем

$$\begin{aligned}
 H_1 &= F_1(t) - \frac{3}{8} \omega_0^2 (J_1 - J_2) \sin 2i \sin(\omega_{02} t) \\
 h_2 &= f_2(t), \\
 h_3 &= f_3(t) + \frac{3}{8} \omega_0^2 (J_1 - J_2) \sin 2i \cos(\omega_{02} t)
 \end{aligned}$$

где  $F_1(t), f_2(t), f_3(t)$  – периодические функции, которые в случае круговой орбиты принимают вид

$$\begin{aligned}
 F_1(t) &= \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1) \omega_0 (\omega_{02} + 2\omega_0)}{\omega_0 + \omega_{02}} \sin 2i \cos((\omega_{02} + 2\omega_0)t) + \\
 &+ \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1) \omega_0 (\omega_{02} - 2\omega_0)}{\omega_0 - \omega_{02}} \sin 2i \cos((\omega_{02} - 2\omega_0)t) + \\
 &+ \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1) \omega_0 (\omega_{02} + 2\omega_0)}{\omega_0 + \omega_{02}} \sin i \cos((\omega_{02} + 2\omega_0)t) + \\
 &+ \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1) \omega_0 (\omega_{02} - 2\omega_0)}{\omega_0 - \omega_{02}} \sin i \cos((\omega_{02} - 2\omega_0)t) + \\
 &+ \frac{3}{8} (J_1 - J_2) \omega_0^2 \sin 2i \cos(\omega_{02} t), \\
 f_2(t) &= \frac{3}{8} \omega_0^2 (J_1 - J_2) \left( \frac{\cos i \cos(2(\omega_0 - \omega_{02})t)}{\omega_0 - \omega_{02}} + \frac{\cos i \cos(2(\omega_0 + \omega_{02})t)}{\omega_0 + \omega_{02}} - \frac{\cos^2 i \cos \omega_{02} t}{\omega_{02}} + \right. \\
 &+ \frac{\cos 2\omega_{02} t}{\omega_{02}} - \frac{\cos^2 i \cos(2(\omega_0 - \omega_{02})t)}{2(\omega_0 - \omega_{02})} + \frac{\cos^2 i \cos(2(\omega_0 + \omega_{02})t)}{2(\omega_0 + \omega_{02})} + \\
 &\left. + \frac{\cos(2(\omega_0 + \omega_{02})t)}{2(\omega_0 + \omega_{02})} - \frac{\cos(2(\omega_0 - \omega_{02})t)}{2(\omega_0 - \omega_{02})} \right),
 \end{aligned}$$

$$f_3(t) = \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1)\omega_0\omega_{02}}{\omega_0 + \omega_{02}} \sin 2i \sin((\omega_{02} + 2\omega_0)t) + \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1)\omega_0\omega_{02}}{\omega_0 - \omega_{02}} \sin 2i \times \\ \times \sin((\omega_{02} - 2\omega_0)t) + \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1)\omega_0\omega_{02}}{\omega_0 + \omega_{02}} \sin i \sin((\omega_{02} + 2\omega_0)t) + \\ + \frac{3}{16} \frac{(J_2 - J_1)\omega_0\omega_{02}}{\omega_0 - \omega_{02}} \sin i \sin((\omega_{02} - 2\omega_0)t) + \omega_{01}.$$

Тогда, переходя к связанной системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , получим

$$\begin{aligned} H_1 &= F_1(t) + \left(\frac{3}{8}\omega_0^2(J_1 - J_2)\sin 2i \sin \omega_{02}t\right)t, \\ \tilde{H}_2 &= F_2(t) + \left(\frac{3}{8}\omega_0^2(J_1 - J_2)\sin 2i \cos \omega_{02}t \sin \omega_{01}t\right)t, \\ \tilde{H}_3 &= F_3(t) + \left(\frac{3}{8}\omega_0^2(J_1 - J_2)\sin 2i \cos \omega_{02}t \cos \omega_{01}t\right)t. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь  $F_2(t)$ ,  $F_3(t)$  можно выразить через  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} F_2 &= f_2 \cos \omega_{01}t + f_3 \sin \omega_{01}t, \\ F_3 &= -f_2 \sin \omega_{01}t + f_3 \cos \omega_{01}t. \end{aligned}$$

Видно, что в решении (5.5) имеются члены, пропорциональные времени, однако коэффициенты при них достаточно малы, что позволяет избежать насыщения маховиков длительное время. Более того, коэффициенты в этих слагаемых содержат  $\sin 2i$ , который обращается в нуль при значениях  $i = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ . Если есть возможность выбора орбиты, то следует выбирать такую орбиту спутника, чтобы она либо лежала в плоскости эклиптики, либо была перпендикулярная ей. В случае некруговой орбиты решение однородной системы можно найти аналитически, а частное решение неоднородной найти не удастся, поэтому приходится использовать численные расчеты. На рис.5.1 представлены графики зависимостей кинетических моментов маховиков от времени при параметрах орбиты  $T=24000\text{с}$ ,  $e=0.57$ ,  $a=8500\text{км}$ ,  $i=77^\circ$  (это параметры орбиты для задачи, о которой шла речь в разделе 2).

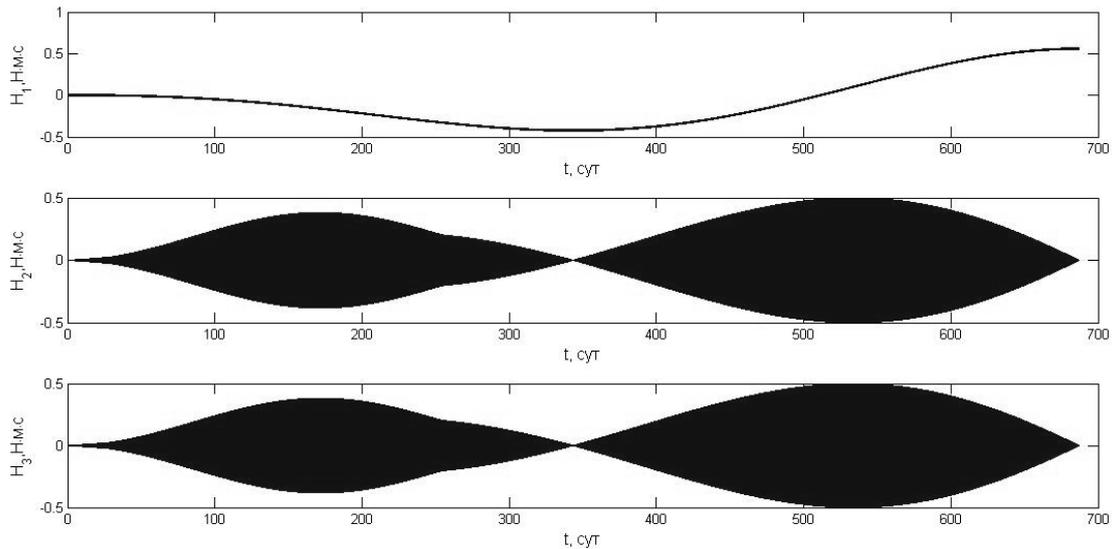


Рис.5.1. Зависимость кинетических моментов маховиков от времени

Из графиков видно, что для эффективного управления в течение длительного времени необходим запас кинетического момента каждого маховика порядка  $0.5 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$  (например, для маховика массой 0.96 кг Microwheel 10SP-M фирмы SSTL эта величина составляет  $0.42 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ ).

## 6. Модификация алгоритма

Из закона управления (3.3) видно, что для его реализации необходимо знать или уметь вычислять гравитационный момент. Это накладывает ряд требований к измерительным устройствам. Во-первых, нужно знать направление местной вертикали в связанных осях аппарата, во-вторых, необходимо знать значение орбитальной угловой скорости в каждый момент времени. Более того, система определения ориентации должна постоянно вычислять ориентацию аппарата относительно орбитальной системы координат, что накладывает дополнительные требования на вычислительные возможности бортового компьютера. Всего этого можно избежать, модифицировав алгоритм. Запишем, как и раньше, функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_{\text{омн}}, J\tilde{\omega}_{\text{омн}}) + k_a(1 - c_{11}).$$

Запишем её производную в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\tilde{\omega}_{отн} (C^T \omega_0 \times J C^T \omega_0 + \dot{\tilde{H}} + C^T \omega_0 \times \tilde{H} + k_a \cdot S + \omega_{отн} \times J C^T \omega_0 + \\ & + C^T \omega_0 \times J \tilde{\omega}_{отн} + J_2 \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} + \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}) + (\tilde{\omega}_{отн}, \tilde{M}). \end{aligned}$$

Всё, что стоит в скобках при  $\tilde{\omega}_{отн}$ , приравниваем к  $k_\omega \tilde{\omega}_{отн}$ , тогда получим

$$\dot{V} = -k_\omega (\tilde{\omega}_{отн}, \tilde{\omega}_{отн}) + (\tilde{\omega}_{отн}, \tilde{M}).$$

Потребуем  $\dot{V} < 0$  для асимптотической устойчивости. Чтобы гарантировать выполнение этого неравенства, возьмём максимум второго слагаемого, который будет достигаться тогда, когда косинус угла между  $\tilde{\omega}_{отн}$  и  $\tilde{M}$  равен единице, и неравенство  $\dot{V} < 0$  запишется в следующем виде:

$$-k_\omega |\tilde{\omega}_{отн}|^2 + |\tilde{M}| |\tilde{\omega}_{отн}| < 0.$$

Из этого выражения получим, что для выполнения условия  $\dot{V} < 0$  достаточно выполнение неравенства

$$|\tilde{\omega}_{отн}| > \frac{|\tilde{M}|}{k_\omega}.$$

Для оценки сверху величины гравитационного момента можно записать следующую цепочку:

$$|\tilde{M}| = |3\omega_{орб}^2 E_3 \times J E_3| < 3\omega_{\max}^2 J_{\max}.$$

Здесь  $\omega_{\max}$  и  $J_{\max}$  – максимальная орбитальная угловая скорость (если орбита круговая, то это – угловая скорость орбитального движения) и максимальный

момент инерции аппарата. Окончательно алгоритм управления трехосной маховичной системы ориентации можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{H}}} + C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{M}} - k_a \cdot \mathbf{S} + k_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} - C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times J C^T \boldsymbol{\omega}_0 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} \times J C^T \boldsymbol{\omega}_0 \\ - C^T \boldsymbol{\omega}_0 \times J \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} - J_2 \boldsymbol{\omega}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_3 \\ -\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} - \omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{H}_3 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}, \text{ если } |\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}}| > \frac{3\omega_{\text{max}}^2 J_{\text{max}}}{k_\omega}, \end{aligned}$$

$$H_1 = H_{10},$$

$$\tilde{H}_2 = \tilde{H}_{20} \cos(\omega_{01} t) + \tilde{H}_{30} \sin(\omega_{01} t), \text{ если } |\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}}| \leq \frac{3\omega_{\text{max}}^2 J_{\text{max}}}{k_\omega}.$$

$$\tilde{H}_3 = -\tilde{H}_{20} \sin(\omega_{01} t) + \tilde{H}_{30} \cos(\omega_{01} t),$$

Исследуем теперь движение аппарата около положения равновесия с выключенной системой ориентации.

Как видно из условия переключения, вектор относительной угловой скорости достаточно мал. Поэтому можно линеаризовать систему в окрестности положения равновесия. В качестве параметров ориентации возьмём самолётные углы (рис.3.1). Запишем уравнения движения в безразмерных величинах. Для этого снова воспользуемся соотношениями

$$\tau = \omega_{01} t, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{отн}} = \omega_{01} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}, \tilde{W} = \omega_{01} \tilde{w}, \tilde{\mathbf{H}} = J_1 \omega_{01} \tilde{\mathbf{h}}, \bar{k}_a = \frac{k_a}{J_1 \omega_{01}^2}, \bar{k}_\omega = \frac{k_\omega}{J_1 \omega_{01}},$$

$$J = J_1 \cdot \text{diag}(1, \theta, \theta) = J_1 \tilde{J}, \boldsymbol{\Omega}_0 = (1, \varepsilon \cos \omega_{01} t, -\varepsilon \sin \omega_{01} t), \theta = \frac{J_2}{J_1}, \varepsilon = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}.$$

Кроме того, запишем уравнения в проекциях на оси системы координат OXYZ. Тогда уравнения движения запишутся в следующем виде:

$$\tilde{J}\tilde{\Omega}' + \tilde{\Omega} \times \tilde{J}\tilde{\Omega} - \bar{k}_a \mathbf{S} + \bar{k}_\omega \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega} \times \tilde{J}C^T \Omega_0 + \tilde{\Omega} \times \tilde{h} = 0,$$

$$\dot{C} = C \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_2 \\ \tilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\gamma} = \Omega_1.$$

$$\tilde{h}' + C^T \Omega_0 \times \tilde{h} + C^T \Omega_0 \times \tilde{J}C^T \Omega_0 + \bar{k}_a \mathbf{S} - \bar{k}_\omega \tilde{\Omega} - \tilde{J}\tilde{w}C^T \Omega_0 + C^T \Omega_0 \times \tilde{J}\tilde{\Omega} \quad (6.1)$$

$$+ \tilde{J}C^T \dot{\Omega}_0 + \theta \Omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Omega}_3 \\ -\tilde{\Omega}_2 \end{pmatrix} + \Omega_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_3 \\ -\tilde{h}_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ если } |\tilde{\Omega}_{omn}| > 3 \frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{01}^2} \frac{J_{\max}}{J_1} \frac{1}{\bar{k}_\omega},$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 &= \tilde{h}_{20} \cos \tau + \tilde{h}_{30} \sin \tau \\ \tilde{h}_3 &= -\tilde{h}_{20} \sin \tau + \tilde{h}_{30} \cos \tau \end{aligned}, \text{ если } |\tilde{\Omega}_{omn}| \leq 3 \frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{01}^2} \frac{J_{\max}}{J_1} \frac{1}{\bar{k}_\omega}.$$

Рассмотрим движение системы, когда управление выражается двумя последними уравнениями системы (6.1). Естественно предположить, что фазовые переменные имеют порядок малости  $\varepsilon$ . Это видно из условия переключения в (6.1). Линеаризованная матрица направляющих косинусов будет выглядеть следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & \alpha \\ \beta & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (6.1) после линеаризации примут вид

$$\begin{aligned} \Omega_1' &= -\tilde{\Omega}_2 h_{30} + \tilde{\Omega}_3 h_{20} + \zeta h_{20} + \xi h_{30} - \varepsilon h_3, \\ \theta \tilde{\Omega}_2' &= \Omega_1 h_{30} - \tilde{\Omega}_3 (h_1 + 1 - 2\theta) - \zeta ((1 - \theta) + h_1) + h_{30} + \\ &\quad + 3\omega_{op\bar{\theta}}^2 (1 - \theta) e_1 e_3, \\ \theta \tilde{\Omega}_3' &= -\Omega_1 h_{20} + \tilde{\Omega}_2 (h_1 + 1 - 2\theta) - \xi ((1 - \theta) + h_1) - h_{20} - \\ &\quad - 3\omega_{op\bar{\theta}}^2 (1 - \theta) e_1 e_2 - \varepsilon (1 - 2\theta) \cos \tau + h_1, \\ \dot{\xi} &= \tilde{\Omega}_3 + \zeta, \dot{\zeta} = \tilde{\Omega}_2 - \xi, \dot{\gamma} = \Omega_1. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Запишем характеристическое уравнение этой системы

$$\theta^2 \lambda^6 + ((h_2^2 + h_3^2)\theta + 2\theta^2 + (h_1 - \theta + 1)^2)\lambda^4 + \theta(h_2^2 + h_3^2 + \theta)\lambda^2 = 0. \quad (6.3)$$

Уравнение (6.3) имеет нулевой корень кратности два, то есть система (6.2) имеет два нулевых собственных значения. При этом существует лишь один линейно независимый собственный вектор, соответствующий этому собственному числу. Это говорит о том, что решение будет содержать члены, пропорциональные времени. Покажем, что остальные четыре корня будут чисто мнимыми величинами. Обозначим

$$a = \theta^2, b = (h_2^2 + h_3^2)\theta + 2\theta^2 + (h_1 - \theta + 1)^2, c = \theta(h_2^2 + h_3^2 + \theta),$$

тогда уравнение (6.3) запишется в следующем виде:

$$(a\lambda^4 + b\lambda^2 + c)\lambda^2 = 0. \quad (6.4)$$

Ввиду того, что  $\theta > 0$ ,  $b$  и  $c$  также будут положительными величинами. Покажем, что  $b^2 - 4ac > 0$ . Действительно,

$$b^2 - 4ac = ((h_2^2 + h_3^2)\theta + (h_1 - \theta + 1)^2)^2 + 4\theta^2(h_1 - \theta + 1)^2 > 0.$$

Теперь становится ясно, что ненулевые корни уравнения (6.4) записываются в виде

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \lambda_{3,4} = -\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

то есть все корни будут чисто мнимыми. Отсюда следует, что нарастание амплитуды происходит по линейному закону от времени.

Ясно, что найти решение уравнений (6.2) для конкретных значений  $h_1, h_2, h_3$  не составляет труда. Поэтому можно предсказать эволюцию фазовых переменных при законе управления, выражающемся последними двумя уравнения (6.1). При этом даже нет необходимости использовать систему определения ориентации, что может сэкономить энергию. Кроме того,

использование модифицированного закона управления позволяет отказаться от определения гравитационного момента в каждый момент времени, что позволит уменьшить объём вычислений и сократить количество необходимых датчиков (не требуется знание ориентации аппарата относительно орбитальной системы координат), а также значительную часть времени использовать простой гармонический закон управления. К недостаткам можно отнести снижение точности ориентации по угловой скорости. Ее оценку можно получить из следующей цепочки равенств:

$$|\tilde{\omega}_{\text{отн}}| = \frac{3\omega_{\text{max}}^2 J_{\text{max}}}{k_{\omega}} = \frac{3\mu_M J_1}{a^3 (1-e)^3 k_{\omega}} = 2 \times 10^{-5} \text{ рад/с}.$$

В том случае, когда такая точность достаточна для выполнения миссии, лучше использовать модифицированный закон управления. Далее представлена эволюция элемента  $c_{11}$  матрицы направляющих косинусов (рис 6.1), а также разница между кинетическими моментами маховиков для закона управления (6.1) и закона управления, выраженного двумя последними формулами из (6.1) (рис. 6.1).

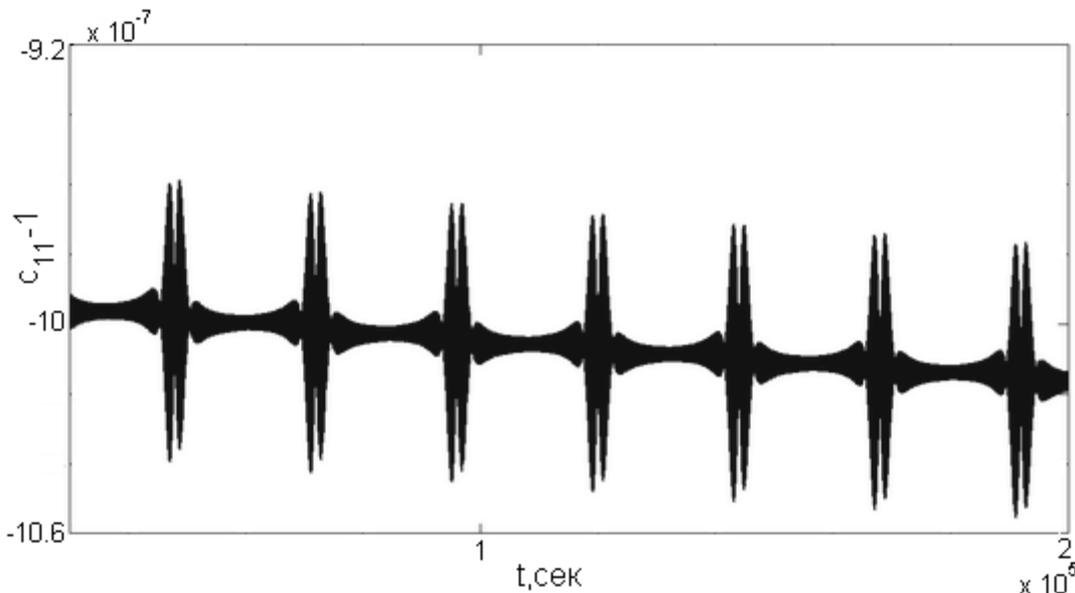


Рис. 6.1. Зависимость элемента  $c_{11}$  матрицы направляющих косинусов от времени

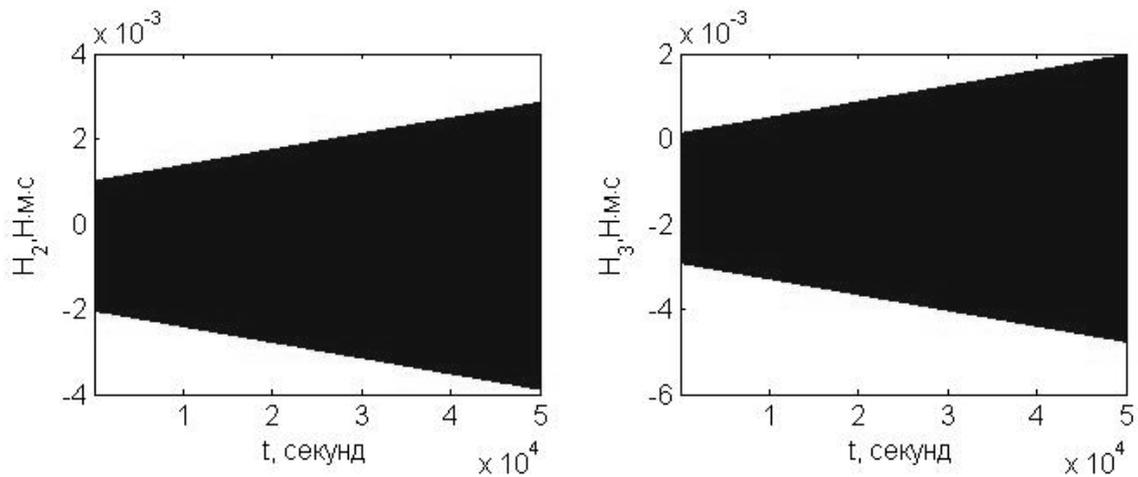


Рис.6.2. Разность кинетических моментов маховиков (вторая компонента слева, третья - справа)

Наблюдается линейное изменение элемента матрицы направляющих косинусов  $c_{11}$  и разности кинетических моментов соответствующих маховиков, о котором говорилось выше. Это, в свою очередь, также соответствует закону (6.1).

### Заключение

В работе изучен алгоритм управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость требуемого положения. Проведено аналитическое исследование переходных процессов. Предложена методика выбора параметров управления, и при конкретной конфигурации системы эти параметры найдены. Изучены процессы насыщения маховиков и проведена оценка времени работы системы ориентации. Предложен способ снижения информационных требований к системе путем модернизации алгоритма.

### Литература

1. T.Ott, Technical Pre-Phase, A study of a spinning microsatellite for Martian missions, Master thesis report, Lulea University of Technology, Department of Space Science, Kiruna, 2007, 70p.
2. B.Wie, J.Lu, Feedback control logic for spacecraft eigenaxis rotations under slew rate and control constraints, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 1995, Vol.18, No.6, pp.1372-1379.

3. B.Wie, P.M.Barba, Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. Journal of Guidance Control, and Dynamics, Vol.8, No 3, 1985
4. P.Tsitorias, New Control Laws for the Attitude Stabilization of Rigid Bodies, Proceedings of 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Palo Alto, CA, Sept. 1216, 1994, pp.316-321.
5. S.Kim, Y.Kim, Spin-axis stabilization of a rigid spacecraft using two reaction wheels, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 2001, Vol.24, No.5, pp.1046-1049.
6. B.J.Kim, H.Lee, S.D.Choi, Three-axis reaction wheel attitude control system for Kitsat-3 microsatellite, [http://satrec.kaist.ac.kr/english/res\\_kitsat3.html](http://satrec.kaist.ac.kr/english/res_kitsat3.html)
7. Я.З.Цыпкин, П.В.Бромберг. О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. № 12. С.1163–1168.
8. В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. М.: Наука, 1973, 320 с.
9. И.Г.Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956, 491 с.