



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 36 за 2010 г.



Аким Э.Л., Степаньянц В.А.,
Тучин А.Г., Сазонов В.В.

Управление и навигация в
перелете КА с малой тягой
от Земли к Юпитеру

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Управление и навигация в перелете КА с малой тягой от Земли к Юпитеру / Э.Л.Аким [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 36. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-36>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Э.Л. Аким, В.А. Степаньянц, А.Г. Тучин, В.В. Сазонов

**УПРАВЛЕНИЕ И НАВИГАЦИЯ В ПЕРЕЛЕТЕ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ
ОТ ЗЕМЛИ К ЮПИТЕРУ**

Москва – 2010

Аннотация

Исследованы задачи навигационного обеспечения перелета космического аппарата (КА) с солнечной электроракетной двигательной установкой (СЭРДУ) от Земли к Юпитеру. Цель перелета – посадка на Европу. Рассматривается межпланетный участок перелета, состоящий из участков управляемого и пассивного движения. Требуется оценивать фазовый вектор КА и вектор тяги СЭРДУ по данным измерений, а также корректировать номинальный закон управления вектором тяги. Измерения включают радиотехнические измерения радиальной скорости и наклонной дальности, выполняемые российскими наземными станциями, и измерения бортового акселерометра. При решении навигационных задач учитываются как ошибки в данных измерений, так и ошибки в реализации закона управления вектором тяги СЭРДУ. Последние представлены в виде суммы систематической и шумовой составляющих. Систематические составляющие на интервале их корреляции представляются линейными функциями времени, коэффициенты которых уточняются вместе с фазовым вектором КА по данным измерений. Выполнено математическое моделирование процесса управления полетом КА. Получены зависимости ошибок оценивания искомых величин от следующих факторов: частоты проведения траекторных измерений, длительности интервалов корреляции систематических ошибок, отношения величин систематической и шумовой составляющих ошибок. Найдены дополнительные затраты рабочего тела, необходимого для компенсации ошибок управления. Показано, что ошибки навигации могут быть существенно уменьшены при наличии бортового акселерометра с точностью не хуже 10^{-7} м/с².

E.L. Akim, V.A. Stepanyants, A.G. Tuchin, V.V. Sazonov. Navigation and control during low-thrust transfer from Earth to Jupiter. We consider the interplanetary flight of a spacecraft with low-thrust engines (LTE) from Earth to Jupiter. The flight purpose is landing in Europa. We limit ourself to the long-term part of the trajectory including both LTE operating arcs and coasting arcs. The problem is to determine the spacecraft state vector and LTE parameters (direction and magnitude of the thrust) basing on Russian ground-based radar observations and onboard acceleration measurements. Radar observations include range, range rate, and 3-way Doppler measurements. Solving navigation problems, we take into account both errors in the measurement data and errors in the LTE operation. The last-named errors are presented as a sum of systematic and random components. The systematic components are approximated by linear functions of time in the interval of their correlation. The coefficients of the functions are determined jointly the spacecraft state vector by radar and acceleration measurements. Using the described model, we investigate how the errors in estimating and predicting the spacecraft motion depend on the following factors: the length of correlation intervals of systematic errors, the ratio of systematic and random error components, and from the frequency of determination of the motion fulfillment. We estimate the addition fuel expense to compensate thrust operation errors. The navigation errors can be significantly reduced if the accuracy of onboard accelerometer is better than 10^{-7} m/s².

1. Схема перелета. Цель данной работы состоит в оценке возможности управления перелетом КА с ЭРДУ от Земли к Юпитеру российскими средствами. Более детальная постановка задачи формулируется следующим образом. Для перелета сотрудниками МАИ предложена оптимальная траектория, на которой вектор тяги ЭРДУ является заданной функцией времени [1, 2]. Необходимо проверить, возможна ли достаточно точная реализация этой траектории традиционными российскими приемами управления полетом КА, и можно ли заметно повысить точность реализации, привлекая для управления показания бортового акселерометра. Ответы на эти вопросы получены с помощью математического моделирования.

Общая схема управления заключается в следующем. На отрезке времени длиной 10 сут реализуется предписанный закон управления вектором тяги. Реализация содержит ошибки. На этом же отрезке по мере возможности собираются измерения параметров движения КА – радиотехнические измерения радиальной скорости и наклонной дальности, выполняемые наземными станциями, и измерения акселерометра. В конце рассматриваемого временного отрезка собранные измерения обрабатываются и оценивается фазовый вектор КА. Из-за разного рода ошибок полученная оценка будет лежать в стороне от номинальной оптимальной траектории. Примем, что оценка является достаточно точной, и будем парировать обнаруженное отклонение. С этой целью построим новую оптимальную траекторию попадания в окрестность Юпитера из текущего положения КА. Эту новую траекторию (точнее, закон изменения тяги) заложим в БЦВМ и будем реализовывать в течение последующих 10 сут и т. д.

2. Номинальная траектория перелета. Чтобы реализовать эту схему, необходимо уметь строить оптимальную траекторию перелета КА к Юпитеру из произвольной точки, лежащей в окрестности номинальной траектории. В частности, необходимо уметь воспроизводить номинальную оптимальную траекторию. Для начала было решено испытать описанную схему управления полетом на отрезке траектории, начинающемся после выполнения пертурбационного маневра у Земли и заканчивающемся достижением сферы действия Юпитера. Во-первых, этот участок наиболее сложен для определения траектории по наземным измерениям. Во-вторых, номинальная траектория на этом участке устроена довольно просто – ЭРДУ работает непрерывно.

Полученная из принципа максимума система дифференциальных уравнений, определяющая оптимальные траектории, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{a_0(1-\beta t)}{r^\alpha \xi} \mathbf{e}, \quad \dot{\xi} = -\frac{q(1-\beta t)}{r^\alpha}, \\ \dot{\mathbf{p}}_r &= \frac{1}{r^3} \left[\mathbf{p}_v - \frac{3(\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right] + \frac{\alpha a_0(1-\beta t)}{r^{\alpha+2}} \left(\frac{p_v}{\xi} - qp_\xi \right) \mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{p}}_v = -\mathbf{p}_r, \\ \dot{p}_\xi &= \frac{(1-\beta t)p_v}{r^\alpha \xi^2}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad p_v = |\mathbf{p}_v|. \end{aligned} \quad (1)$$

Она записана в предположении, что ЭРДУ работает непрерывно; из гравитационных сил, действующих на КА, учитывается только притяжение Солнца. Система (1) с точностью до замены переменных совпадает с системой, использованной на том же участке разработчиками номинальной траектории. Эта система записана в безразмерных переменных в декартовой гелиоцентрической системе координат, плоскость (x, y) которой совпадает с плоскостью эклиптики, а ось x направлена в среднюю точку весеннего равноденствия на эпоху даты подлета КА к Юпитеру. Единицей измерения расстояния служит астрономическая единица, единица измерения времени выбрана так, что кеплерово среднее движение, соответствующее одной астрономической единице, также равно 1. Используемые в (1) обозначения имеют следующий смысл: точкой обозначено дифференцирование по времени t ; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – гелиоцентрический радиус-вектор КА; $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$ – орт направления тяги ЭРДУ; ξ – отношение текущей массы m КА к его начальной массе m_0 на рассматриваемом участке полета; $a_0 = 0.0314$ и $q = 0.0325$ – ускорение, сообщаемое данной ЭРДУ КА с массой m_0 на единичном расстоянии от Солнца, и реализуемый при этом расход массы; множитель $(1 - \beta t)/r^\alpha$, $\alpha = 1.7$, $\beta = 0.00477$ в уравнениях для \mathbf{v} и ξ характеризует деградацию солнечных батарей КА со временем и зависимость их мощности от гелиоцентрического расстояния; \mathbf{p}_r , \mathbf{p}_v и $a_0 p_\xi$ – сопряженные переменные для фазовых переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} и ξ .

Система (1) содержит параметры a_0 , q и β . Их значения были определены из условия наилучшей аппроксимации заданной номинальной траектории решениями системы (1). Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов по значениям фазового вектора КА и вектора тяги ЭРДУ на рассматриваемом отрезке траектории. Этот отрезок соответствует отрезку времени $t_0 \leq t \leq t_1$. Построение выполнялось в два этапа. На первом этапе по значениям величин $w = a_0(1 - \beta t)/r^\alpha$ и r , заданным (в размерной форме) вдоль номинальной траектории, были определены параметры a_0 и β . Из них в дальнейшем использовался только β . На втором этапе с помощью решений системы (1) аппроксимировались номинальные функции $\mathbf{r}_*(t)$, $\mathbf{v}_*(t)$ и $\mathbf{e}_*(t)$. При этом некоторые начальные условия системы (1) были фиксированы: $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_*(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_*(t_0)$, $\xi(t_0) = 1$, $p_\xi(t_0) = 1$, а начальные условия $\mathbf{p}_r(t_0)$, $\mathbf{p}_v(t_0)$ и параметры a_0 , q служили параметрами согласования. Исходные данные использовались с равными весами. Совпадение построенной аппроксимации и номинальной траектории оказалось весьма точным, практически идеальным. Стандартное отклонение ошибок аппроксимации составило $\sigma = 3 \cdot 10^{-5}$. Построенная аппроксимация показана на рис. 1, 2.

На рис. 1 маркеры указывают номинальную траекторию, сплошные кривые – построенную аппроксимацию. Здесь приведены графики зависимости от времени координат КА, компонент его скорости и компонент орта направления тяги \mathbf{e} . Указано и стандартное отклонение ошибок аппроксимации. На рис. 2

приведен вид проекции траектории на плоскость эклиптики и графики некоторых функций, иллюстрирующих оптимальное решение. Левый верхний график описывает изменение массы КА, средний график служит для проверки одного из необходимых условий оптимальности – значение представляемой им функции в правой граничной точке временного отрезка должно быть неотрицательным. В нашем случае это условие выполняется автоматически. Слева внизу приведен график функции переключения

$$K = \frac{p_v}{\xi} - qp_\xi.$$

Эта функция положительна, следовательно, отключений ЭРДУ на рассматриваемом отрезке быть не должно.

3. Упрощенная оптимизация траекторий. Подчеркнем, при построении аппроксимации не решалась краевая задача принципа максимума, определяющая оптимальную траекторию. Построение сводилось к минимизации стандартного функционала МНК, причем правый конец траектории не был стеснен какими-либо условиями. Однако настоящие оптимальные траектории получатся из решения специальной краевой задачи. Краевые условия, которые использовали разработчики номинальной траектории, не подходят для проводимого в данной работе моделирования. Во-первых, левый конец в данном исследовании должен быть произвольной заданной точкой в фазовом пространстве, лежащей в окрестности номинальной траектории. Во-вторых, оригинальные краевые условия на правом конце соответствуют функционалу в задаче Майера, который учитывает затраты химического топлива на торможение КА в сфере действия Юпитера. В описываемом моделировании учитывать эти затраты представляется нецелесообразным, поэтому ниже минимизируется функционал

$$F = 1 - \xi(T) + \frac{|\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_J(\tau + T)|^2}{2V^2}, \quad V = 0.377 \text{ (11.2 км/с)}. \quad (2)$$

Он также является функционалом Майера, но имеет более простой вид. Здесь $\mathbf{v}_J(t)$ – гелиоцентрическая скорость Юпитера, τ – параметр, служащий для согласования используемых шкал времени – для удобства оптимальные траектории перелета к Юпитеру всегда рассматриваются на отрезке $0 \leq t \leq T$.

Физический смысл функционала (2) очевиден: первые два члена – масса расходуемого топлива для ЭРДУ, последний член – штраф за несовпадение подлетной скорости КА со скоростью Юпитера.

Пусть начальная точка перелета $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ и его время T заданы. Тогда краевые условия, определяющие оптимальный перелет, имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(0) = p_\xi(0) = 1, \quad p_\xi(T) \geq 0, \quad \mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_J(\tau + T), \\ \mathbf{p}_v(T) + \frac{a_0}{V^2} p_\xi(T) [\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_J(\tau + T)] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Если время перелета T варьируется, то выписанные условия следует дополнить условием

$$\mathbf{p}_r(T) \cdot [\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_J(\tau + T)] + \frac{a_0}{r^\alpha(T)} \left(\frac{p_v(T)}{\xi(T)} - qp_\xi(T) \right) = 0. \quad (4)$$

Значение весового параметра V в (2) найдено из условия согласования краевых условий (3) с номинальной траекторией. В результате краевая задача (1), (3) оказалась очень близка краевой задаче, решаемой разработчиками номинальной траектории.

Моделирование показало, что реализовать перелет по описанной выше схеме в случае фиксированной даты прилета не удастся. Вследствие разного рода ошибок дата прилета «плывет». По этой причине при моделировании использовали краевые условия для оптимальной траектории с варьируемым временем прилета. Оптимизация времени прилета требует введения дополнительного краевого условия (4).

В качестве примера приведем некоторые результаты решения краевой задачи (1), (3) для начальной точки на номинальной траектории в случае $t_0 = 0.02$ (1.167 сут) и фиксированного $t_1 = 17.72$ (1030 сут):

$$\begin{aligned} \xi(t_1) = 0.9078, \quad |\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}_J(\tau + t_1)| = 0.1628 (4.85 \text{ км/с}), \quad F = 0.1855, \\ \tau + t_1 \leftrightarrow 03.01.2022, \quad \sigma = 9.6 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Это повторение построения отрезка номинальной траектории после пертурбационного маневра. Поскольку такое повторение можно рассматривать как аппроксимацию исходной номинальной траектории, здесь приведено соответствующее стандартное отклонение ошибок аппроксимации. Оно достаточно мало (графики обоих решений в масштабе рис. 1, 2 практически неотличимы), но, все же, примерно в 30 раз больше, чем значение, полученное при аппроксимации методом наименьших квадратов. Причина – в использовании иного, чем у разработчиков номинальной траектории, представления движения Юпитера. В частности, время достижения Юпитера в данном примере – 3 января 2022 г., тогда как у разработчиков – 1 января. В данной работе движение Юпитера представлялось решением задачи Кеплера, подогнанным к отрезку времени длиной несколько лет с центром 1 января 2022 г.

Теперь приведем аналогичные результаты расчета оптимальной траектории в случае свободного времени прилета

$$\begin{aligned} \xi(t_1) = 0.9085, \quad |\mathbf{v}(t_1) - \mathbf{v}_J(\tau + t_1)| = 0.1631 (4.86 \text{ км/с}), \quad F = 0.1852, \\ t_1 = 17.47 (1016 \text{ сут}), \quad \tau + t_1 \rightarrow 20.12.2021. \end{aligned}$$

Начальная точка этой траектории взята та же, что и в предыдущем примере. Теперь дата прилета сместилась на 20 декабря 2021 г. Хотя основные параметры второй траектории примерно такие же, что и у первой, различие между ними достаточно заметно. Вид второй траектории показан на рис. 3, 4, аналогичных рис. 1, 2. На рис. 3 маркеры указывают номинальную траекторию, сплош-

ные кривые – решение краевой задачи (1), (3), (4). На рис. 3 заметно отличие в графиках компонент орта направления тяги, а на рис. 4 бросается в глаза иной вид графика функции переключения. На части траектории эта функция отрицательна! Ясно, что вторую траекторию можно было бы улучшить, вводя пассивные (без функционирования ЭРДУ) участки. В описываемом моделировании такие участки не вводились, хотя на некоторых отрезках оптимальных траекторий они возникали. Как показали расчеты, введение этих участков практически не сказывается на расходе рабочего тела и величине минимизируемого функционала.

4. Пролет Юпитера. Краевые условия в конечной точке перелета и у разработчиков номинальной траектории, и в (3) записаны как условия попадания в Юпитер, который считается точкой. В действительности КА должен прилететь в нужную точку на границе сферы действия Юпитера. Краевые условия такого прилета получаются из (3) заменой условия для $\mathbf{r}(T)$ условием

$$\mathbf{r}(T) = \mathbf{r}_j(\tau + T) + \rho(Z\boldsymbol{\tau} + X\mathbf{n} + Y\mathbf{b}),$$

а последнее условие (3) следует заменить условием

$$\mathbf{p}_r(T) \cdot [\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_j(t_0 + T) - \Omega\rho(Z\mathbf{n} - X\boldsymbol{\tau})] + \frac{a_0}{r^\alpha(T)} \left(\frac{p_v(T)}{\xi(T)} - qp_\xi(T) \right) = 0.$$

Здесь $\rho = 0.322$ – радиус сферы действия Юпитера, $Z = \sqrt{1 - X^2 - Y^2}$, $X^2 + Y^2 < 1$, величины

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}_j}{|\mathbf{v}_j|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j}{|\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \Omega = \frac{|\mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j|}{|\mathbf{r}_j|^3 \cdot |\mathbf{v}_j|^2}$$

вычисляются в точке $\tau + T$.

В новых краевых условиях точка входа КА в сферу действия Юпитера задается параметрами X и Y , подбирая которые можно обеспечить подходящие условия пролета. Геометрический смысл этих параметров можно понять из приведенных формул – вместе с параметром Z они отображают сферу действия на сферу единичного радиуса.

Ниже даны четыре примера пролетных траекторий:

$$1) X = 0.0984113, Y = 0.0060593, T = 15.996 \text{ (929.8 сут)},$$

$$F = 0.1841, \xi(T) = 0.9109, |\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_j(\tau + T)| = 0.1643 \text{ (4.89 км/с)},$$

$$r_\pi = 72004 \text{ км}, e = 1.01062, i = 0.358^\circ;$$

$$2) X = 0.0961, Y = 0.019, T = 16.004 \text{ (930.3 сут)},$$

$$F = 0.1840, \xi(T) = 0.9109, |\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_j(\tau + T)| = 0.1643 \text{ (4.89 км/с)},$$

$$r_\pi = 100730 \text{ км}, e = 1.01485, i = 40.934^\circ;$$

$$3) X = 0.0890, Y = 0.0256, T = 15.989 \text{ (929.5 сут)}, \\ F = 0.1842, \xi(T) = 0.9109, |\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_J(\tau + T)| = 0.1645 \text{ (4.90 км/с)}, \\ r_\pi = 100800 \text{ км}, e = 1.01491, i = 76.697^\circ;$$

$$4) X = 0.15, Y = 0, T = 16.14 \text{ (936.3 сут)}, \\ F = 0.1824, \xi(T) = 0.9105, |\mathbf{v}(T) - \mathbf{v}_J(\tau + T)| = 0.1625 \text{ (4.84 км/с)}, \\ r_\pi = 2.07 \cdot 10^6 \text{ км}, e = 1.2967, i = 18.664^\circ.$$

Здесь r_π – радиус перицентра, e – эксцентриситет, i – наклонение к эклиптике пролетной йовицентрической орбиты.

5. Моделирование определения орбиты. Определение параметров движения КА с целью управления его полетом будет выполняться методом наименьших квадратов [3]. Применение этого метода в случае КА с ЭРДУ имеет свою специфику, поскольку рассогласование между реальной тягой, создаваемой ЭРДУ, и номинальной тягой, предписываемой законом управления, представляет собой случайную функцию времени. Модель движения КА с ЭРДУ содержит шумовую составляющую, которую необходимо учитывать при определении параметров движения.

Рассмотрим два варианта состава траекторных измерений, на основе которых будет выполняться определение параметров движения КА с ЭРДУ:

- только наземные траекторные измерения радиальной скорости и наклонной дальности,
- наземные траекторные измерения и измерения бортового акселерометра.

Измерения бортового акселерометра будут использованы при определении ускорений, создаваемых ЭРДУ. В этом случае шумовая составляющая в уравнениях движения КА определяется ошибками измерений акселерометра.

При обработке одних лишь наземных траекторных измерений нужна модель средних рассогласований номинального и фактического векторов ускорений КА. Параметры этой модели должны уточняться наряду с фазовым вектором КА при решении задачи определения параметров движения. Ниже рассогласования между номинальным и фактическим ускорениями КА аппроксимируются разрывными кусочно-линейными функциями времени. Интервал времени с траекторными измерениями, по которым определяются параметры движения КА, – мерная база – разбивается на более мелкие интервалы одинаковой длительности. На каждом таком подынтервале каждая компонента невязок вектора ускорений представляется линейной функцией. В этом случае функционал метода наименьших квадратов наряду с суммой взвешенных квадратов рассогласований между данными измерений и их расчетными аналогами должен содержать квадраты коэффициентов линейных функций, умноженные на соответствующие веса. Шумовая составляющая модели движения КА с ЭРДУ определяется разбросами мгновенных значений ошибок ЭРДУ относительно средних значений, полученных методом линейного сглаживания.

Оцениваемыми параметрами являются фазовый вектор КА на конец мерной базы и коэффициенты линейных функций времени для каждого подынтервала мерного интервала. Для учета шумовой составляющей ошибок ЭРДУ делаются предположения об ее среднеквадратичном отклонении (СКО) и интервале корреляции. По известным значениям указанных параметров строится формирующий фильтр, обеспечивающий генерацию шума с заданными характеристиками из белого шума. В результате получаем расширенную систему, описывающую движение КА с ЭРДУ. Возмущения в этой системе представлены в виде белого шума. Алгоритм определения вектора состояния для систем такого типа рассмотрен в [4]. Вектор состояния определяется итерациями из условия минимизации функционала, содержащего квадраты взвешенных невязок измеренных и расчетных значений, взвешенных возмущений, а также квадрат взвешенного отклонения априорно заданного вектора состояния от его расчетного значения. Для определения поправки на каждом шаге итерационного процесса используется фильтр Калмана для линейной системы, получаемой в результате линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности решения, найденного на предыдущей итерации.

Описанная выше модель определения параметров движения только по траекторным измерениям формально применима и в случае, когда имеются измерения бортового акселерометра. Разбиение мерной базы на подынтервалы при этом определяется частотой передачи результатов измерений акселерометра с борта КА в наземный центр обработки. Функционал метода наименьших квадратов дополняется суммой квадратов взвешенных невязок измеренных и расчетных значений приращений характеристической скорости.

6. Модель ошибок ЭРДУ. Программа ускорения, создаваемого ЭРДУ, задается в виде зависимости от времени его модуля $a(t) = a_0(1 - \beta t)r^{-\alpha}$ и двух углов $A = A(t)$ и $B = B(t)$, $0 \leq A(t) \leq 2\pi$, $|B(t)| \leq \pi/2$, которые определяют орт ускорения в эклиптической системе координат

$$\mathbf{e} = (\cos A \cos B, \sin A \cos B, \sin B).$$

Отклонение создаваемого ЭРДУ реального ускорения \mathbf{a}_{real} от программного значения $\mathbf{a}_{\text{prog}} = a(t)\mathbf{e}$ будем рассматривать в правой декартовой системе координат XYZ , связанной с ЭРДУ. Ось X этой системы направлена по \mathbf{e} , ось Y лежит в плоскости эклиптики и составляет угол A с осью y , причем направление отсчета этого угла согласовано с направлением оси z . Матрица перехода из системы координат ЭРДУ в эклиптическую систему имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos B \cos A & -\sin A & -\sin B \cos A \\ \cos B \sin A & \cos A & -\sin B \sin A \\ \sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix}.$$

Отличие реального ускорения от программного разобьем на ошибку модуля и ошибку направления: $\mathbf{a}_{\text{real}} - \mathbf{a}_{\text{prog}} = \mathbf{e}\delta a + a\delta\mathbf{e}$ (рис. 5). Имеют место оценки

$|\delta a| < 0.06a$, $|\delta e| < 0.0173$. Иными словами, ошибка модуля не превосходит 6% его значения, ошибка направления лежит в конусе с углом полураствора 1° . Ошибки ориентации КА будем считать пренебрежимо малыми по сравнению с ошибками формирования вектора ускорения, создаваемого ЭРДУ.

Пример зависимости от времени ошибки модуля вектора тяги показан на рис. 6. При проведении расчетов предполагалось, что каждая из ошибок δa и δe содержит систематическую и флуктуационную составляющие с интервалами корреляции 5 и 0.5 сут. Величина флуктуационной составляющей ошибки – 30% от суммарной ошибки.

Рассмотрим интервалы корреляции систематических ошибок и примем, что на этих интервалах систематическую составляющую можно представить в виде линейной функции времени, коэффициенты которой будем уточнять (см. п. 5). Разобьем интервал работы ЭРДУ на подынтервалы, длительность которых Δt_L равна интервалу корреляции систематической составляющей ошибки ($\Delta t_L = 5$ сут). На каждом таком подынтервале вектор $\delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{real}} - \mathbf{a}_{\text{prog}}$ представим в виде (компоненты указаны в системе XYZ):

$$\delta \mathbf{a} = (\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3), \quad \delta a_i = p_i + q_i(t - t_L) + u_i \quad (i=1,2,3).$$

Здесь p_i и q_i – уточняемые коэффициенты зависимости, аппроксимирующей систематическую составляющую отклонения вектора ускорений от его программного значения; t_{Li} – начальная точка подынтервала; u_{ij} – случайные (высокочастотные) составляющие ошибок.

В системе XYZ $\mathbf{a}_{\text{prog}} = (a, 0, 0)$, поэтому указанные выше оценки ошибок принимают вид $|\delta a_{i1}| \leq 0.06a_{\text{max}}$, $\sqrt{(\delta a_{i2})^2 + (\delta a_{i3})^2} \leq 0.0173a_{\text{max}}$. Положим, что случайные величины δa_1 , δa_2 , δa_3 имеют нормальное распределение с нулевыми средними значениями и стандартными отклонениями

$$\sigma_1 = 0.02a_{\text{max}}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{0.0173}{3\sqrt{2}}a_{\text{max}}.$$

Средние значения ошибок u_i примем равными нулю, их стандартные отклонения обозначим σ_{u_i} . Интервал корреляции этих ошибок обозначим Δt_N .

Рассмотрим модель флуктуационных составляющих ошибок. Для этого введем коэффициенты: k_1 – отношение длины интервалов корреляции систематической (низкочастотной) и флуктуационной (высокочастотной) составляющих ошибок ускорений, создаваемых ЭРДУ; k_2 – отношение стандартного отклонения высокочастотной составляющей ошибки к соответствующему значению стандартного отклонения ускорения от заданного значения.

Известно [5], что ошибка с нулевым средним и заданными значениями интервала корреляции $\Delta \tau$ и стандартного отклонения σ_y описывается стохастическим дифференциальным уравнением (формирующим фильтром) следующего вида:

$$\dot{y} = -\frac{1}{\Delta\tau}y + \sqrt{\frac{2}{\Delta\tau}}\sigma_y\xi,$$

где ξ – единичный белый шум. Используя этот факт, случайные составляющие ошибок u_i представляются в виде решения следующих стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{u}_i = -\frac{1}{\Delta\tau_N}u_i + \sqrt{\frac{2}{\Delta\tau_N}}\sigma_{ui}\xi_i \quad (i=1,2,3),$$

где ξ_i – три независимых единичных белых шума, σ_{ui} и $\Delta\tau_N$ вычисляются по формулам

$$\sigma_{u1} = k_2\sigma_1, \quad \sigma_{u2} = \sigma_{u3} = k_2\sigma_2, \quad \Delta\tau_N = \frac{\Delta\tau_L}{k_1}.$$

7. Расширенная система. Рассмотрим расширенную систему уравнений движения КА. Вектор состояния этой системы включает координаты и скорости КА в эклиптической системе координат и величины p_i, q_i, u_i ($i=1,2,3$). Расширенную систему можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{z} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{z}} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{\Delta t_L}\mathbf{u} + \sqrt{\frac{2k_1}{\Delta t_L}}\mathbf{G}\xi.$$

Здесь $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\mathbf{z} = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, причем эти векторы считаются векторами-столбцами (матрицами размеров 6×1 и 3×1),

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \left(\mathbf{v}, -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} + \frac{a}{\xi}\mathbf{e} + \mathbf{w} \right), \quad \mathbf{G} = \text{diag}(\sigma_{u1}^2, \sigma_{u2}^2, \sigma_{u3}^2),$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{C} & (t-t_L)\mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ e \frac{k_1(t-t_L)}{\Delta t_L} \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

\mathbf{w} – возмущающие ускорения, обусловленные гравитационными полями планет Солнечной системы, $\mathbf{0}_3$ – нулевая квадратная матрица порядка 3.

8. Переходная матрица. При $t_1, t_2 \in [t_L, t_L + \Delta t_L]$ переходная матрица уравнений в вариациях для расширенной системы (матрица частных производных компонент вектора состояния на момент времени t_2 по компонентам вектора состояния на момент времени t_1) имеет вид:

$$\Psi(t_2, t_1) = \frac{\partial [\mathbf{x}(t_2), \mathbf{z}(t_2), \mathbf{u}(t_2)]}{\partial [\mathbf{x}(t_1), \mathbf{z}(t_1), \mathbf{u}(t_1)]} = \begin{pmatrix} \Phi(t_2, t_1) & \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s)\mathbf{B}(s)ds & \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s)\mathbf{D}(s)ds \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{E}_6 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & e \frac{k_1(t_2-t_1)}{\Delta t_L} \mathbf{E}_3 \end{pmatrix},$$

где $\Phi(t_2, t_1) = \partial \mathbf{x}(t_2) / \partial \mathbf{x}(t_1)$ – переходная матрица уравнений в вариациях для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, E_3 и E_6 – единичные матрицы порядков 3 и 6, 0_6 – нулевая квадратная матрица порядка 6. Входящие в выражение для $\Psi(t_2, t_1)$ однотипные интегралы вычисляются с помощью соотношений вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, s) \mathbf{B}(s) ds = \int_{t_L}^{t_2} \Phi(t_2, s) \mathbf{B}(s) ds - \Phi(t_2, t_1) \int_{t_L}^{t_1} \Phi(t_1, s) \mathbf{B}(s) ds,$$

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_L) \Phi^{-1}(s, t_L).$$

Если t_1 и t_2 принадлежат разным отрезкам (интервалам корреляции) $[t_L, t_L + \Delta t_L]$, то вычисление $\Psi(t_2, t_1)$ сводится к произведению матриц, отвечающих отдельным отрезкам. Пусть между точками t_1 и t_2 лежат граничные точки отрезков $t_{L,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $t_{L,i+1} = t_{L,i} + \Delta t_L$, $t_1 < t_{L,1}$, $t_{L,n} < t_2$. Тогда

$$\Psi(t_2, t_1) = \Psi(t_2, t_{L,n} + 0) \Psi(t_{L,n} - 0, t_{L,n-1} + 0) \dots \Psi(t_{L,1} - 0, t_1).$$

9. Оценка ошибок определения вектора состояния и параметров линейных функций. При расчете ошибок оцениваемых параметров принималось, что обработка траекторных измерений выполняется методом наименьших квадратов по следующей схеме. Параметры определяются на конец каждого подынтервала $[t_L, t_L + \Delta t_L]$. Определение параметров текущего подынтервала происходит с использованием в качестве априорной информации вектора состояния КА, полученного на предыдущем подынтервале. Весовая матрица априорной информации формируется на начало подынтервала по ковариационной матрице ошибок определения вектора состояния, полученного на предыдущем подынтервале. Параметры линейных функций, описывающих ошибку ускорений, создаваемых ЭРДУ, определяются на каждом подынтервале независимо от значений параметров, полученных на предыдущих подынтервалах. Ковариационная матрица на начало каждого подынтервала представляется блочной матрицей вида

$$\mathbf{C}_{0,j} = \text{diag}(\mathbf{C}_{x,j-1}, \mathbf{C}_{z0}, \mathbf{C}_{u0}),$$

где $\mathbf{C}_{x,j-1}$ – ковариационная матрица ошибок определения компонент вектора состояния, полученная на предыдущем интервале $j-1$, для самого первого интервала – это ковариационная матрица ошибок определения на пассивном участке полета; \mathbf{C}_{z0} – ковариационная матрица возможных значений коэффициентов линейных функций,

$$\mathbf{C}_{z0} = (1 - k_2^2) \text{diag} \left(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \frac{\sigma_1^2}{\Delta t_L^2}, \frac{\sigma_2^2}{\Delta t_L^2}, \frac{\sigma_3^2}{\Delta t_L^2} \right);$$

$\mathbf{C}_{u0} = \text{diag}(\sigma_{u1}^2, \sigma_{u2}^2, \sigma_{u3}^2)$ – ковариационная матрица начальных значений высокочастотного шума.

10. Траекторные измерения. Оценка точности определения и прогнозирования параметров движения выполнялась в предположении, что траекторные измерения выполняются двумя российскими станциями слежения в Медвежьих Озерах и Уссурийске. Используется X-диапазон частот. Выполняются запросные измерения радиальной скорости и наклонной дальности. Предельные ошибки измерений составляют 20 м по наклонной дальности и 0.2 мм/с по радиальной скорости. Предполагалось, что каждая станция может проводить до двух сеансов в сутки при наличии видимости. Такая схема обеспечивает три сеанса траекторных измерений в сутки: либо один из Медвежьих Озер и два из Уссурийска, либо два из Медвежьих Озер и один из Уссурийска.

Также предполагалось, что для определения орбиты может быть использован высокоточный акселерометр, установленный на борту КА в составе бесплатформенного инерциального блока (БИБ). Измерения, получаемые от БИБ, обрабатываются на борту. В результате получаются приращения характеристической скорости в направлении номинального вектора тяги и в направлениях, ортогональных ему. Результаты каждые 6 часов передаются на Землю и используются при определении орбиты.

11. Результаты расчетов ошибок определения параметров движения. На рис. 7 – 10 представлены предельные ошибки определения компонент вектора состояния КА в радиальном, трансверсальном и ортогональном плоскости орбиты направлениях. Предельные ошибки определения параметров движения для случая использования только наземных траекторных измерений приведены на рис. 7 и 8. Оценка ошибок определения параметров движения КА при совместном использовании наземных траекторных измерений и измерений бортового акселерометра выполнялась для трех значений точности измерений акселерометра: 10^{-6} , $5 \cdot 10^{-7}$ и 10^{-7} м/с². На рис. 9 и 10 приведены предельные ошибки определения параметров движения для случая совместного использования наземных траекторных измерений и измерений акселерометра с точностью 10^{-7} м/с².

12. Технология управления КА на участке перелета. При проведении анализа предполагалось, что будет использована следующая технология управления КА. Управление тягой ЭРДУ выполняется бортовым компьютером по программе, передаваемой из наземного центра управления полетом. В центре управления полетом определяются параметры движения КА по данным наземных и бортовых траекторных измерений. По результатам определения параметров движения рассчитывается программа работы ЭРДУ на оставшийся участок полета. Каждые 10 суток, при необходимости, программа работы ЭРДУ может быть изменена на борту КА.

13. Расчет ошибок приведения КА к Юпитеру и оценки дополнительного расхода топлива. Расчет оценки приведения КА к Юпитеру и оценки дополнительного расхода топлива выполнялся методом статистических испытаний. В начале рассчитывается номинальная траектория перелета. В течение первых 10 суток полета моделируется движение КА по номинальной программе. При моделировании используется некоторая реализация ошибок работы ЭРДУ. В результате на 10-е сутки КА приводится в заданную точку простран-

ства с ошибками по положению и скорости. Полученный вектор состояния КА используется для расчета программы работы ЭРДУ на оставшемся участке. Однако, в реальном полете вектор состояния КА будет известен не точно, а с ошибками навигации. Поэтому в ходе моделирования при расчете программы работы ЭРДУ вектор состояния КА искажается навигационными ошибками. Далее моделируются следующие 10 суток полета. Цикл продолжается до приведения КА на сферу действия Юпитера. В результате оценивается ошибка приведения и дополнительные затраты ксенона. Расчеты повторяются для нескольких реализаций ошибок тяги ЭРДУ.

Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2. Предельные ошибки приведения в заданную точку сферы влияния составляют 1410 км по положению и 2.3 м/с по скорости в случае, когда используются только траекторные измерения. Вклад ошибок прогноза параметров движения составляет 74% в ошибки по положению и 87% в ошибки по скорости. В случае использования акселерометра предельные ошибки приведения составляют ~1000 км по положению и 1.2 м/с по скорости. В этом случае вклад ошибок прогноза составляет ~35% по положению и 40% по скорости.

Таблица 1. Предельные ошибки приведения в заданную точку сферы влияния Юпитера

Вариант	Предельная ошибка по положению, км	Предельная ошибка по скорости, м/с
Используются только наземные траекторные измерения	1410	2.3
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО 10^{-7} м/с ²	990	1.2
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра, с СКО $5 \cdot 10^{-7}$ м/с ²	1000	1.2
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО 10^{-6} м/с ²	1010	1.2

14. Выводы. Описанная схема управления позволяет привести КА в сферу действия Юпитера с предельными ошибками, которые не превосходят 1410 км по положению и 2.3 м/с по скорости. Программа управления работой ЭРДУ должна обновляться каждые 10 суток.

Управление КА на участке перелета обеспечивают две станции в Медвежьих Озерах и Уссурийске. Должен использоваться X-диапазон частот. Предельные ошибки траекторных измерений не должны превышать 0.2 мм/с по радиальной скорости и 20 м по наклонной дальности.

Бортовые акселерометры позволяют повысить точность определения параметров движения и уменьшить ошибки приведения КА в сферу действия Юпитера.

Управление КА в сфере действия Юпитера должно строиться на основе химических двигателей.

Таблица 2. Вклад навигационных ошибок в ошибки приведения в заданную точку небесной сферы

Вариант	Вклад в ошибку (предельную) по положению, км	Вклад в ошибку (предельную) по скорости, м/с
Используются только наземные траекторные измерения	1045	2.0
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО 10^{-7} м/с ²	290	0.38
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометра с СКО $5 \cdot 10^{-7}$ м/с ²	320	0.43
Используются наземные траекторные измерения и измерения акселерометров с СКО 10^{-6} м/с ²	340	0.47

Литература

1. Константинов М.С., Попов Г.А., Федотов Г.Г. Оценка использования солнечной электрореактивной установки для выведения спутника Юпитера. Космические исследования, 2002, т. 40, № 2, с. 201-208.
2. Федотов Г.Г. Оптимизация перелетов между орбитами искусственных спутников двух планет при использовании комбинации большой и малой тяги. Космические исследования, 2002, т. 40, № 6, с. 616-625.
3. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. Космические исследования, 1963, т. 1, № 1, с. 5-50.
4. Тучин А.Г. Определение параметров движения КА по результатам измерений при наличии шума в динамической системе. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2004, № 2.
5. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1967.

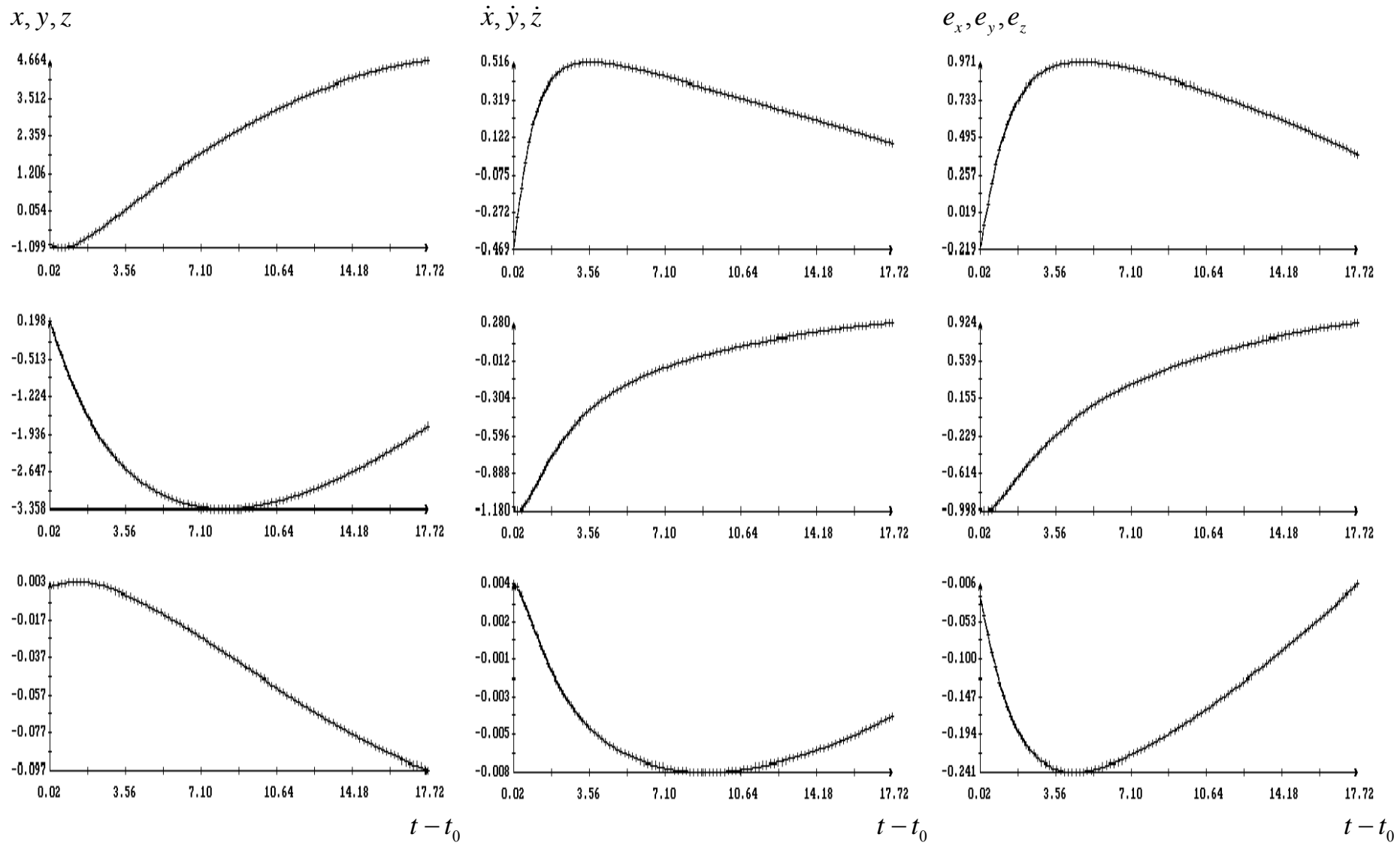


Рис.1. Аппроксимация дуги номинальной оптимальной траектории после пертурбационного маневра. Использовался метод наименьших квадратов с равными весами, $\sigma = 3 \cdot 10^{-5}$.

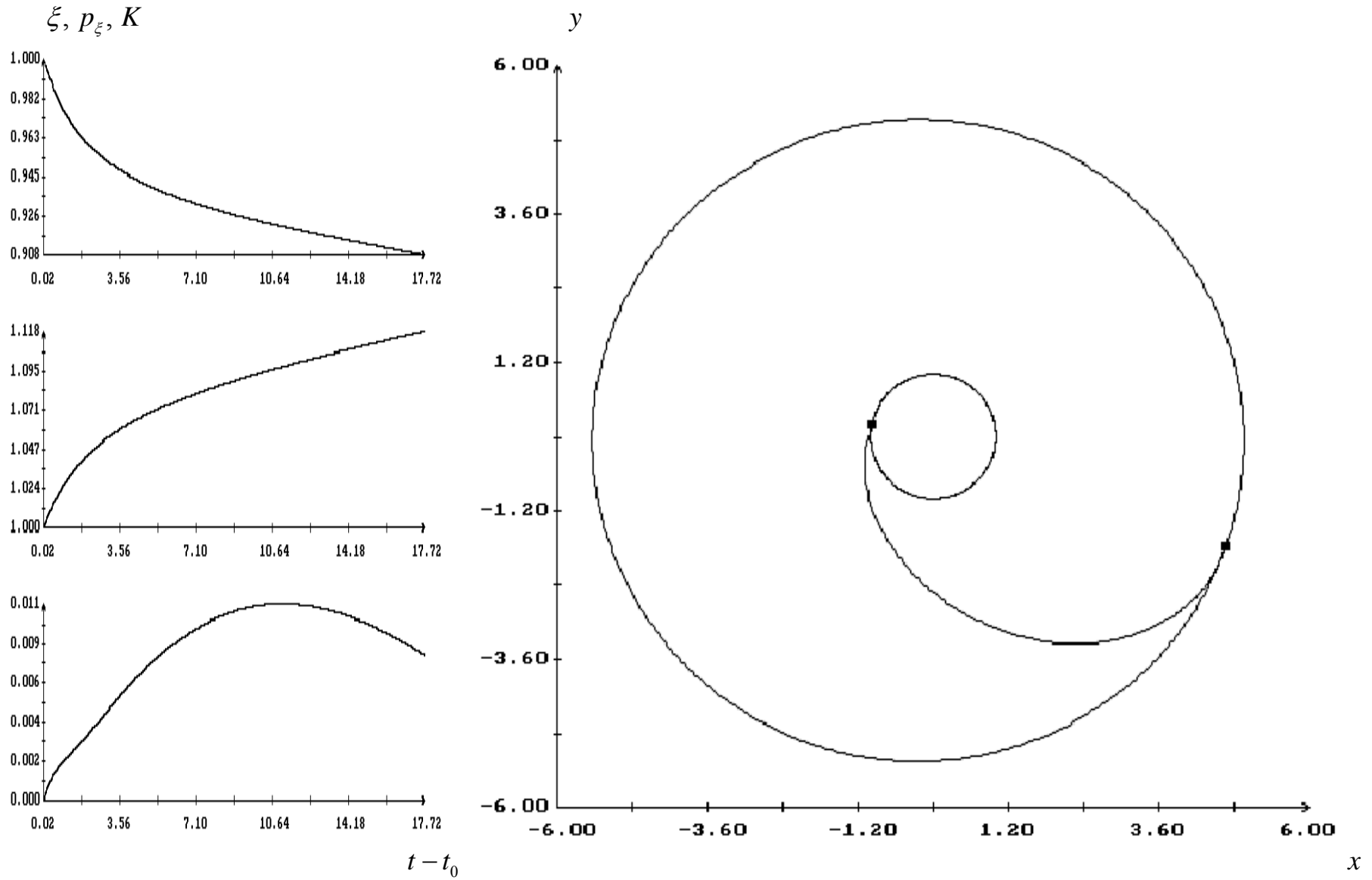


Рис.2. Аппроксимация дуги номинальной оптимальной траектории после пертурбационного маневра.

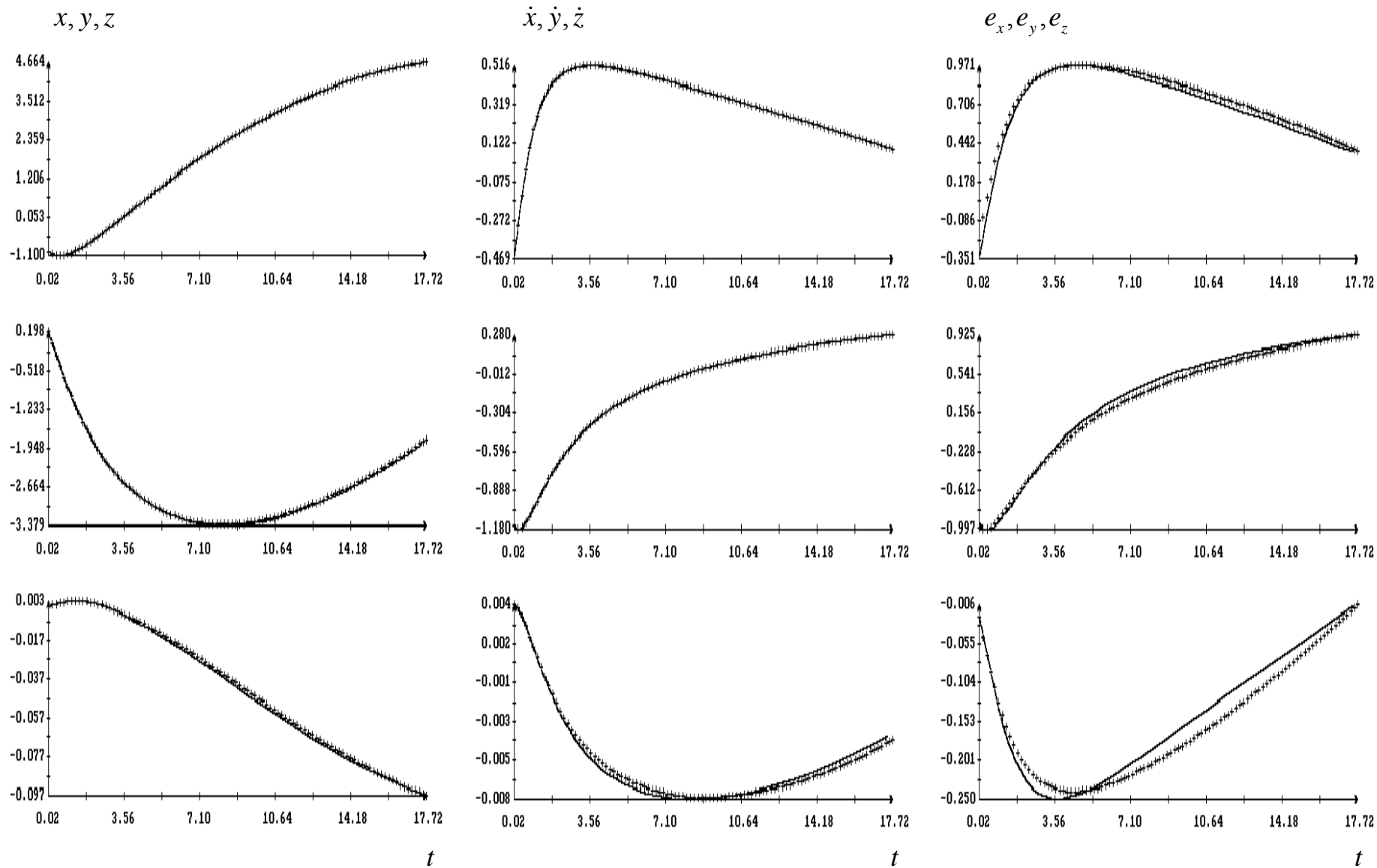


Рис.3. Оптимальная траектория с варьируемым временем перелета T .

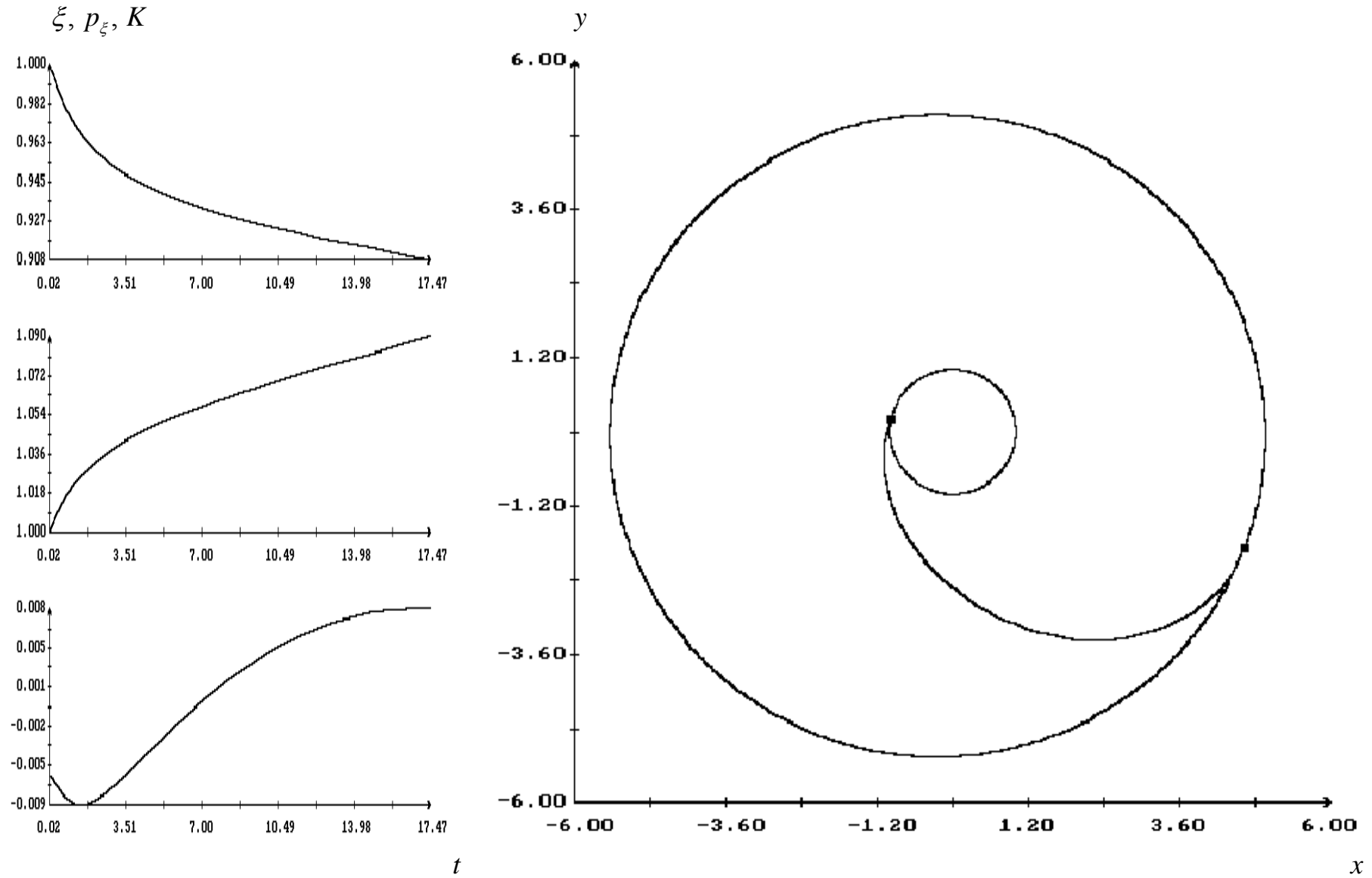


Рис.4. Оптимальная траектория с варьируемым временем перелета T .

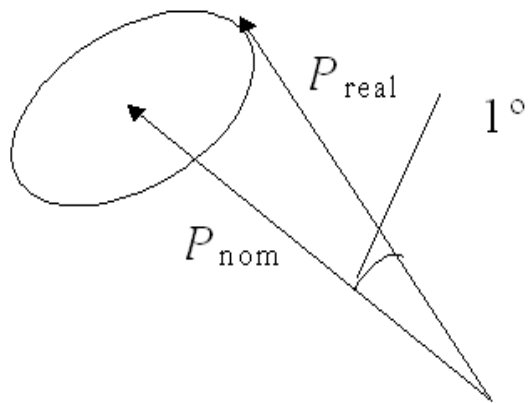


Рис. 5. Ошибки исполнения ЭРДУ.

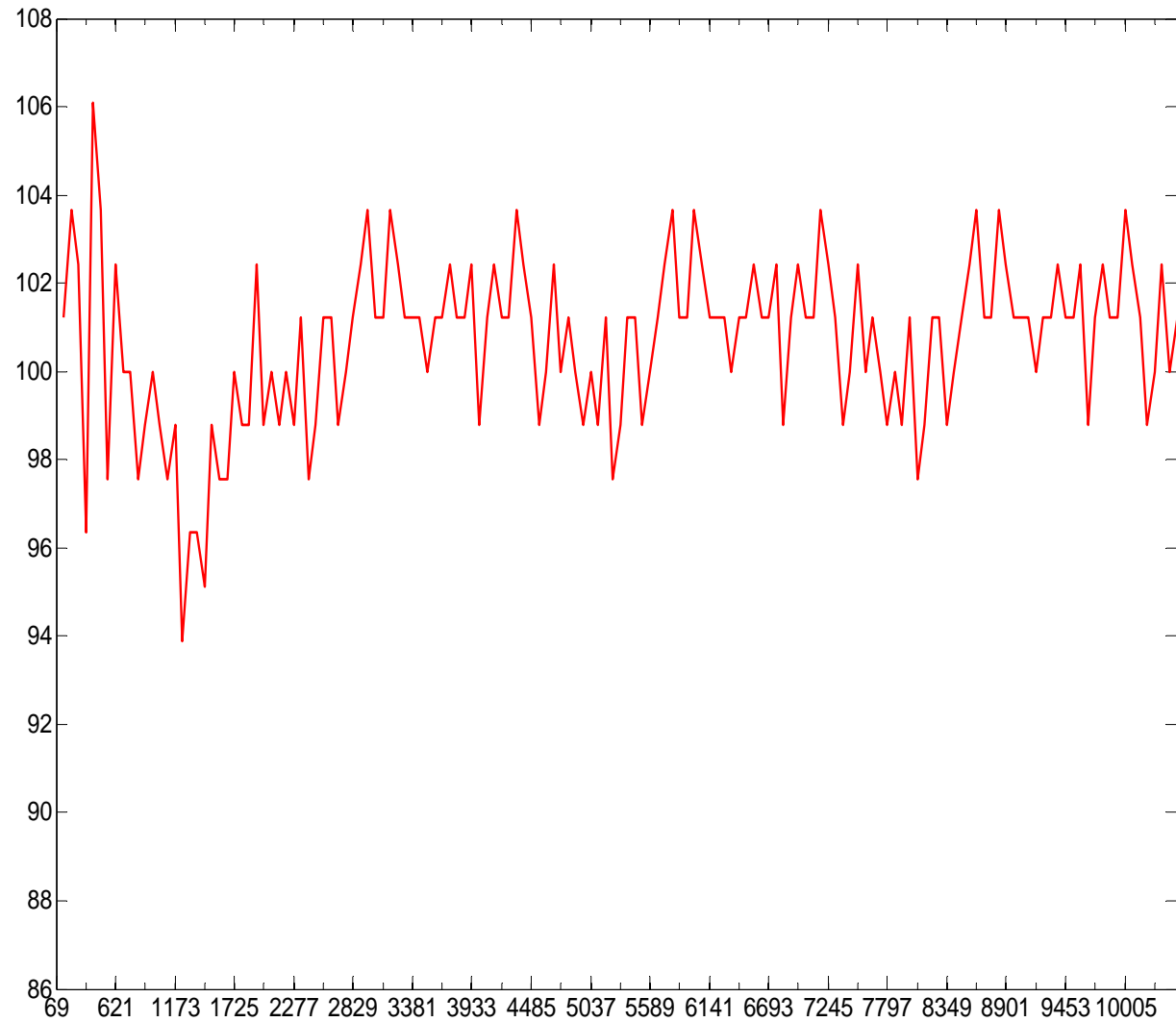


Рис. 6. Пример зависимости модуля вектора тяги от времени. По оси абсцисс отложено время в часах. По оси ординат тяга в процентах по отношению к номинальному значению.

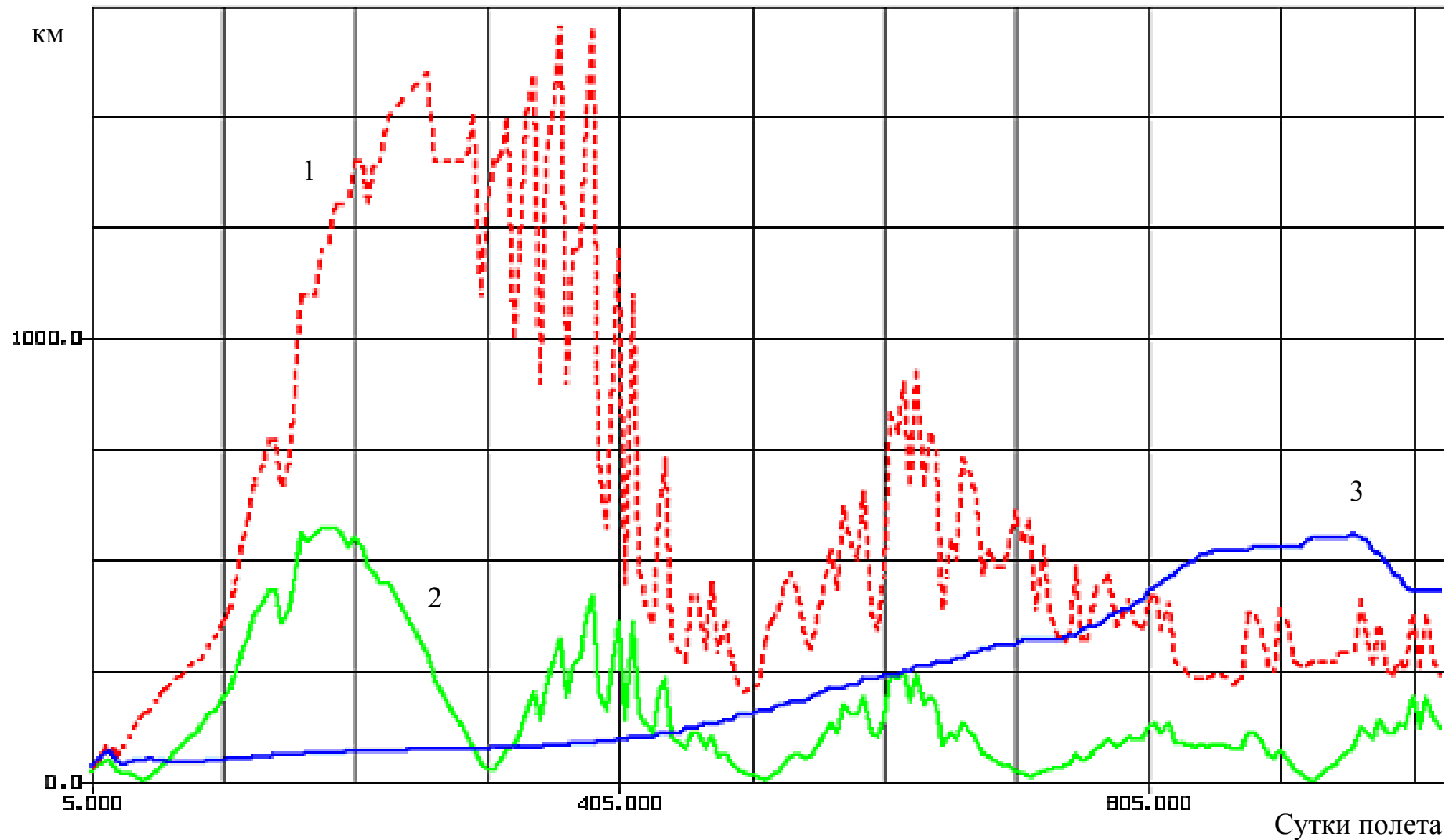


Рис. 7. Зависимость от времени предельных значений ошибок определения положения КА при использовании только траекторных измерений: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 570, 1700 и 560 км в направлениях R, T и В соответственно.

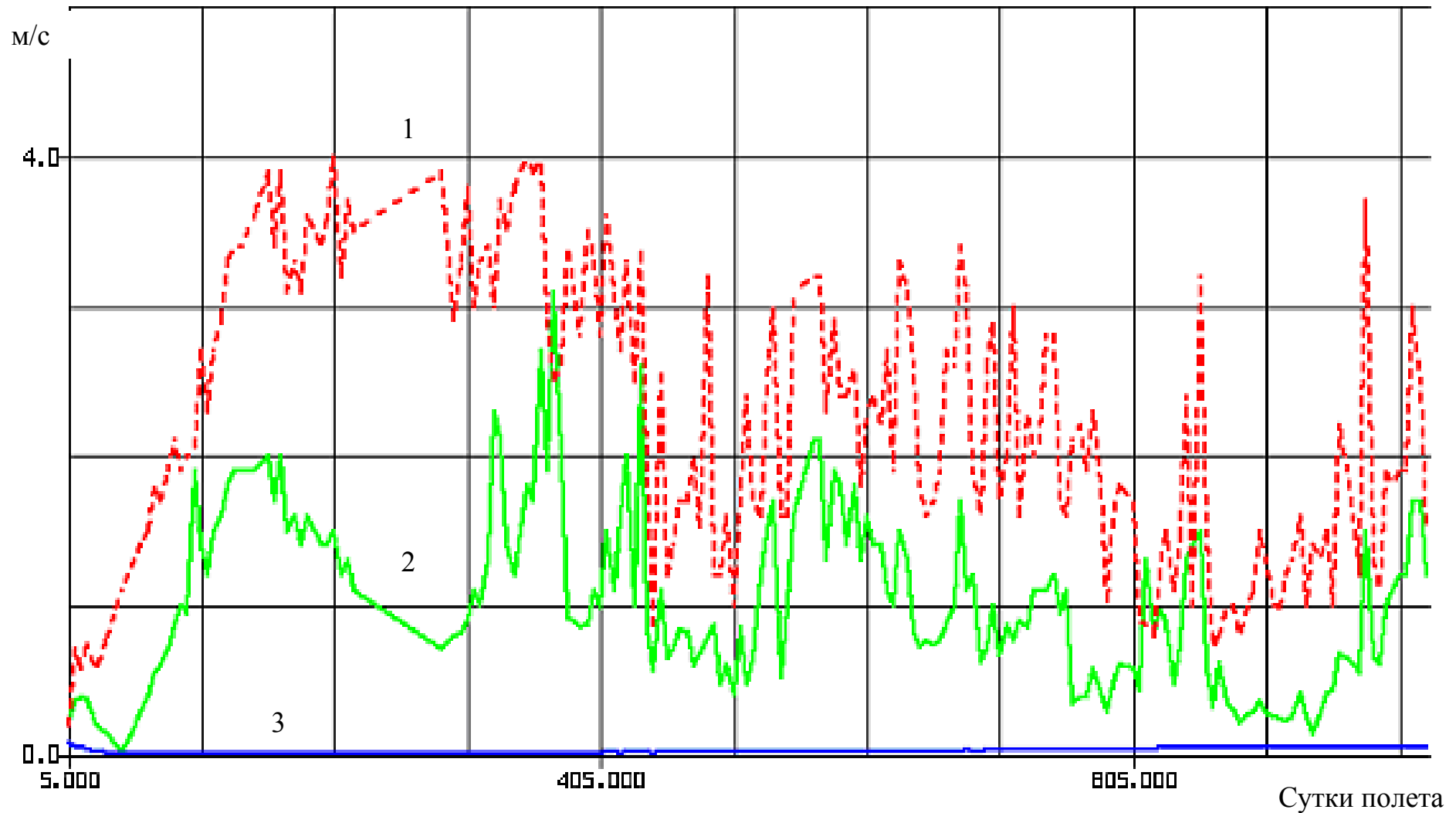


Рис. 8. Зависимость от времени предельных значений ошибок определения скорости КА при использовании только траекторных измерений: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 3.1, 4.1 и 0.1 м/с в направлениях R, Т и В соответственно.

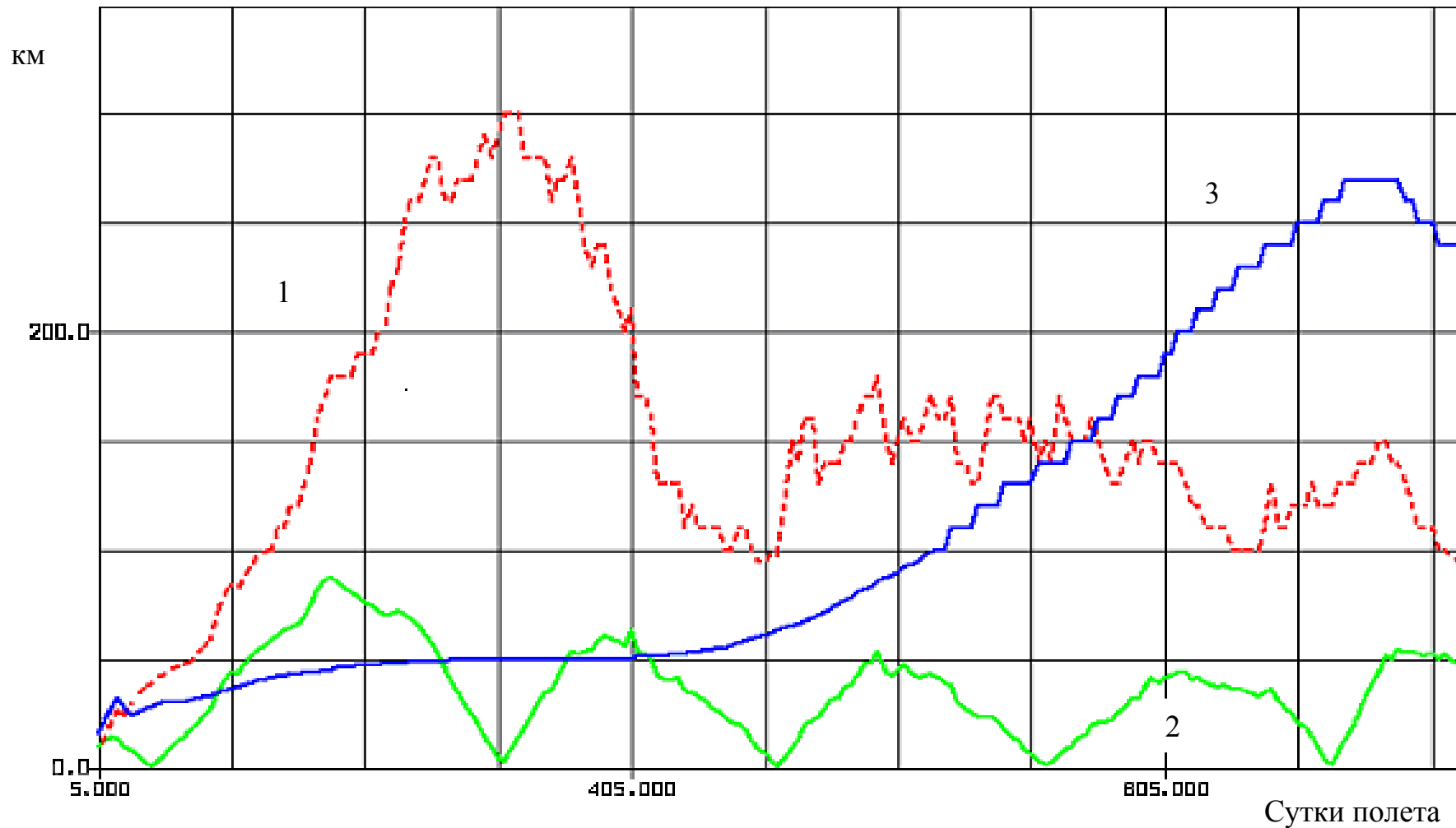


Рис. 9. Зависимость от времени предельных значений ошибок определения положения КА при использовании наземных траекторных измерений и измерений бортовых акселерометров с СКО 10^{-7} м/с^2 : 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 87, 300 и 270 км в направлениях R, T и В соответственно.

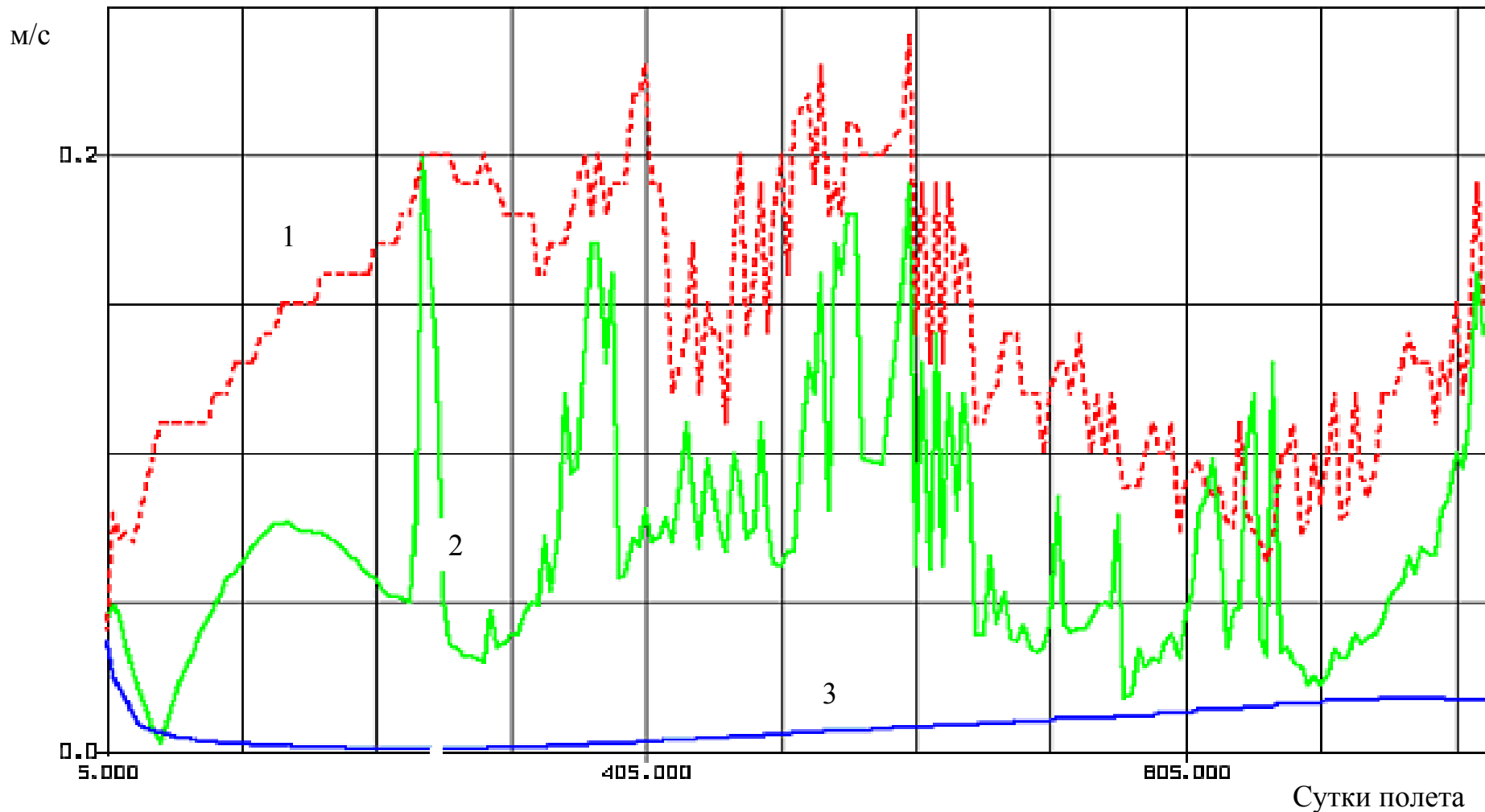


Рис. 10. Зависимость от времени предельных значений ошибок определения скорости КА при использовании наземных траекторных измерений и измерений бортовых акселерометров с СКО 10^{-7} м/с²: 1 – ошибка определения вдоль трансверсали орбиты (Т), 2 – радиальная составляющая ошибки (R), 3 – составляющая ошибки в направлении нормали к плоскости орбиты (В). Максимальные значения ошибок составляют: 0.2, 0.25, 0.04 м/с в направлениях R, T и В соответственно.