



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2010 г.



Марков М.Б., Паротькин С.В.

О вычислении
радиационной проводимости
газа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марков М.Б., Паротькин С.В. О вычислении радиационной проводимости газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 53. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-53>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

им. М.В. КЕЛДЫША

М.Б. Марков, С.В. Паротькин

О ВЫЧИСЛЕНИИ РАДИАЦИОННОЙ ПРОВОДИМОСТИ ГАЗА

МОСКВА 2010

М.Б. Марков, С.В. Паротькин

О ВЫЧИСЛЕНИИ РАДИАЦИОННОЙ ПРОВОДИМОСТИ ГАЗА

Аннотация

Рассмотрено кинетическое уравнение для медленных электронов, образующихся в газе под воздействием ионизирующего излучения. В кинетическом уравнении учтены упругие, неупругие и ионизационные столкновения электронов с молекулами газа, а также взаимодействие с внешним электрическим полем. Рассмотрен процесс образования тока проводимости. Выявлен малый параметр, представляющий собой отношение энергии, набираемой электроном между столкновениями, к тепловой энергии. Построено приближенное решение кинетического уравнения для концентрации и потока электронов. Результатом являются квадратурные формулы для вычисления электронной проводимости ионизированного газа в модели электромагнитного поля радиационного происхождения.

M.B. Markov, S.V. Parot'kin

ON THE GAS RADIATION CONDUCTIVITY CALCULATION

The kinetic equation for low energy electrons, which appear in the gas under the impact of ionizing radiation, is considered. The elastic, inelastic and ionization collisions between electrons and gas molecules and the interaction with the external electric field are taken into account in the kinetic equation. The process of the conduction current is considered. Small parameter is revealed which is the ratio of energy, accumulated by the electron between collisions, and thermal energy. The approximate solution of the kinetic equation for electron's concentration and flux is obtained. The result is the quadrature formulae for electronic conductivity calculation in the model of radiation electromagnetic field.

Введение

Диэлектрические вещества под действием проникающих ионизирующих излучений, например, внешнего потока электронов или фотонов с высокой энергией, приобретают радиационную электропроводность (проводимость). Вторичные электроны проводимости образуются при ионизационных столкновениях первичных электронов потока с молекулами диэлектрика. При столкновении молекулярным электронам передается энергия, достаточная для перехода в непрерывный спектр. Возбуждение радиационной проводимости диэлектрика фотонами происходит в два этапа. Сначала происходит первичная ионизация. В результате рассеяния фотонов генерируется поток первичных электронов с высокой энергией, который, в результате вторичной ионизации диэлектрика, образует вторичные электроны. При ионизационных столкновениях наиболее вероятно малая передача энергии, поэтому вторичные электроны являются медленными, но образуются в количестве, существенно превышающем быстрые. В электрическом поле вторичные электроны приобретают направленную скорость дрейфа. Возникает ток проводимости (электропроводности), которая называется радиационной.

Вторичная ионизация материалов электронных компонентов является основным механизмом непосредственного воздействия проникающей радиации [1,2] на радиоэлектронную аппаратуру. Вторичная ионизация газовой среды внутри приборных комплексов существенно влияет на параметры радиационного электромагнитного поля [3,4], генерируемого быстрыми электронами. Посредством этого поля проникающая радиация оказывает дополнительное электромагнитное воздействие на радиоэлектронную аппаратуру. Таким образом, исследование вторичной ионизации необходимо для обеспечения радиационной стойкости радиоэлектронного оборудования. В частности, исследование радиационной проводимости газов необходимо для исследования электромагнитного воздействия проникающих излучений.

В данной работе вторичная ионизация рассматривается применительно к проблеме математического моделирования радиационного электромагнитного поля, которое генерируется током быстрых электронов в газовой среде внутри электронных приборов. Эта проблема является комплексной, а математическое моделирование плотности тока проводимости, возникающего в результате вторичной ионизации газа, является ее составной частью. В целом математическое моделирование радиационного электромагнитного поля в трехмерной постановке требует [5] огромного объема вычислений. Кроме вычисления плотности тока проводимости, предполагается [6] численное решение уравнений Максвелла и определение плотности тока первичных электронов методом частиц. Такие вычисления сами по себе находятся на пределе возможностей доступных параллельных суперкомпьютеров. Поэтому плотность тока вторичных электронов должна вычисляться быстро, несмотря на то что процессы столкновений при малых энергиях очень сложны. Вычисление плотности тока первичных электронов базируется [6] на решении кинетического уравнения. Необходи-

мость применения такого подхода обусловлена сравнимостью характерных времен физических процессов, определяющих динамику потока первичных электронов и электромагнитного поля. Вторичные электроны также естественно описывать кинетическим уравнением. Но временные масштабы процессов, происходящих с вторичными электронами, существенно различаются, что дает возможность использовать физические приближения. Это позволяет построить модель, требующую небольших, по сравнению с уравнениями Максвелла и кинетическим уравнением для первичных электронов, объемов вычислений. Неизбежность приближений обусловлена также следующим обстоятельством. Для первичных электронов, обладающих энергией, существенно превышающей порог ионизации среды, данных о дифференциальных сечениях взаимодействия со средой достаточно для построения интегралов столкновений и точного кинетического описания. Эти данные проверены в экспериментах [7] и достаточно надежны. Данных о медленных электронах существенно меньше, для построения кинетического описания их недостаточно. Поэтому приближения необходимы не только для снижения объема вычислений, но и для возможности количественного описания физических эффектов, то есть собственно построения модели.

Традиционный подход к моделированию вторичных электронов основывается на уравнениях химической кинетики для концентрации электронов [8]. Этот подход хорошо зарекомендовал себя в областях, существенно превышающих по размеру длину пробега первичных электронов. В работе [6] описана модель вторичной ионизации, основанная на пространственно однородном гидродинамическом приближении для функции распределения вторичных электронов.

Данная работа предлагает метод вычисления радиационной проводимости для математической модели радиационного электромагнитного поля. Метод основан на приближенном решении кинетического уравнения для вторичных электронов. Кинетическое уравнение необходимо, поскольку длина пробега первичных электронов может быть сопоставима или превышать размеры заполненной газом полости прибора. Требуется рассматривать динамику неравновесных процессов, приводящих к установлению равновесия между электронами и газом. Будет рассмотрен подход к упрощению кинетического уравнения, не предполагающий, в отличие от [6], близости функции распределения вторичных электронов к распределению Максвелла.

Приближения в кинетическом уравнении для электронов обосновывались путем физических оценок и проверялись численным решением модельных задач. По соображениям объема изложения численные методы и подробное описание численного решения в данную работу не включены.

1. Физическая модель

Ионизационное столкновение приводит к образованию двух свободных электронов. Если энергия образовавшегося электрона превышает порог иониза-

ции, то он в дальнейшем также может ионизовать вещество. Разделить все электроны на первичные и вторичные (медленные) [6] можно по следующему формальному признаку. В паре, возникшей после ионизационного столкновения, вторичным считается электрон с меньшей энергией. Все электроны, возникающие после ионизационных столкновений вторичных электронов, также считаются вторичными. Остальные электроны считаются первичными.

Средняя энергия вторичных электронов мала по сравнению со средней энергией первичных электронов. Это обусловлено быстрым убыванием сечения ионизации с ростом переданной при столкновении энергии. Например, первичные электроны с энергией порядка 1 МэВ при ионизации молекулярного азота образуют вторичные электроны со средней энергией 40-50 эВ. При этом 95% медленных электронов находятся в интервале энергий до 100 эВ.

Значительная разница в энергиях и количествах позволяет рассматривать первичные и вторичные электроны в рамках отдельных моделей. В данной работе функция распределения первичных электронов считается известной. Она используется для вычисления правой части кинетического уравнения для медленных электронов.

1.1 Столкновения электронов

Вторичные электроны испытывают упругие и неупругие столкновения с молекулами газа.

При упругих столкновениях кинетическая энергия сталкивающихся частиц не переходит в их внутреннюю энергию, а перераспределяется между ними. При неупругих столкновениях часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию частиц. При неупругих столкновениях электронов с молекулами кинетическая энергия электронов может перейти в энергию вращательного или колебательного движения молекулы или потенциальную энергию молекулярных электронов, переместившихся на более высокий уровень. Если молекулярному электрону передается энергия, большая энергии ионизации, электрон удаляется из молекулы. В этом случае столкновение называется ионизационным.

При упругом столкновении с отклонением на угол θ электрон теряет энергию $\Delta\varepsilon^{el} = \delta(1 - \cos\theta)$, где $\delta = 2m/M$ m – масса электрона, M – масса молекулы. Для описания упругих столкновений потребуется, как будет показано ниже, транспортное сечение $\sigma_{tr}^{el}(\varepsilon)$, связанное с дифференциальным по полярному углу сечением упругих столкновений $\sigma^{el}(\varepsilon, \theta)$ следующим образом:

$$\sigma_{tr}^{el}(\varepsilon) = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta (1 - \cos\theta) \sigma^{el}(\varepsilon, \theta).$$

В данной работе использованы значения транспортного сечения упругого рассеяния $\sigma_{tr}^{el}(\varepsilon)$ из работ [9-12]. Зависимости транспортного сечения в азоте и кислороде от энергии представлены графиками на рисунке 1.

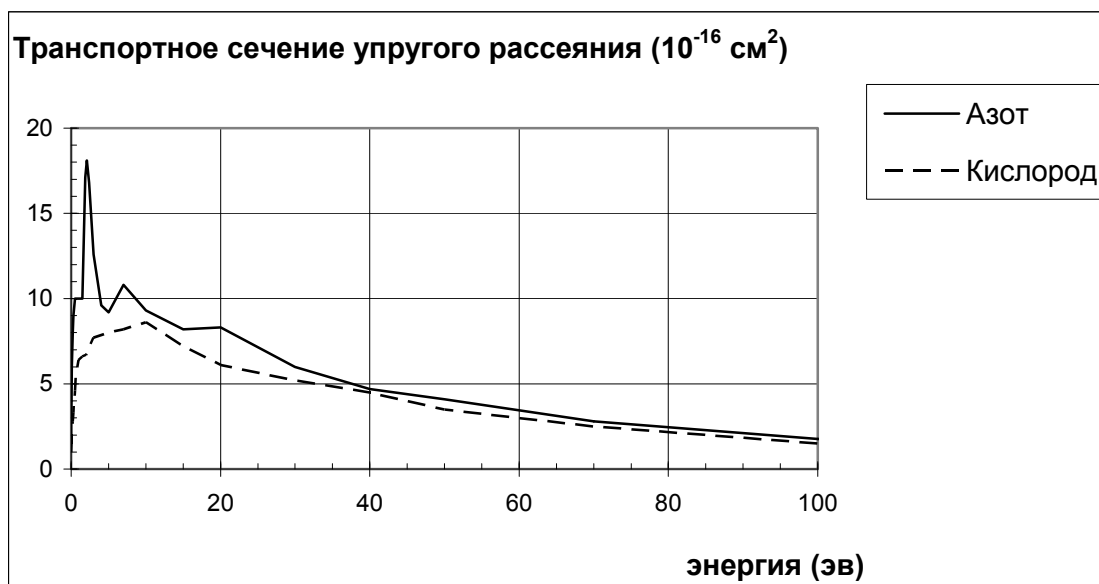


Рис. 1

Сечение любых неупругих столкновений много меньше сечения упругих столкновений. Однако в перераспределении энергии между электронами и молекулами газа они играют основную роль из-за существенно большей, по сравнению с упругими столкновениями, передачи энергии.

Исключение составляет возбуждение вращательных уровней. Передача энергии при возбуждении вращательных уровней сопоставима по порядку величины с упругими столкновениями и существенно меньше, чем при остальных неупругих [10, 11] столкновениях. Поэтому возбуждение вращательных уровней молекул не учитывается.

Энергия, передаваемая молекуле при возбуждении колебательного уровня с номером i , равна $\Delta\varepsilon_i^v = w(i + 1/2) + xw(i + 1/2)^2$, где w — энергия колебательного кванта, равная для азота 0.293 эВ, для кислорода 0.196 эВ, xw — постоянная ангармонизма, равная для азота $1.8 \cdot 10^{-3}$ эВ, для кислорода $1.5 \cdot 10^{-3}$ эВ.

При расчетах учитывались возбуждения 1 – 8 колебательных уровней азота [10, 11, 13-17]. На рисунке 2 приведены графики зависимости суммарного по всем колебательным уровням сечения от энергии. Для кислорода нет таких же детальных данных о сечениях возбуждения колебательных уровней; известно только, что эти сечения малы по сравнению с азотом — порядка 10^{-19} см^2 . Поэтому неупругие столкновения с молекулами кислорода с возбуждением колебательных уровней не рассматривались.

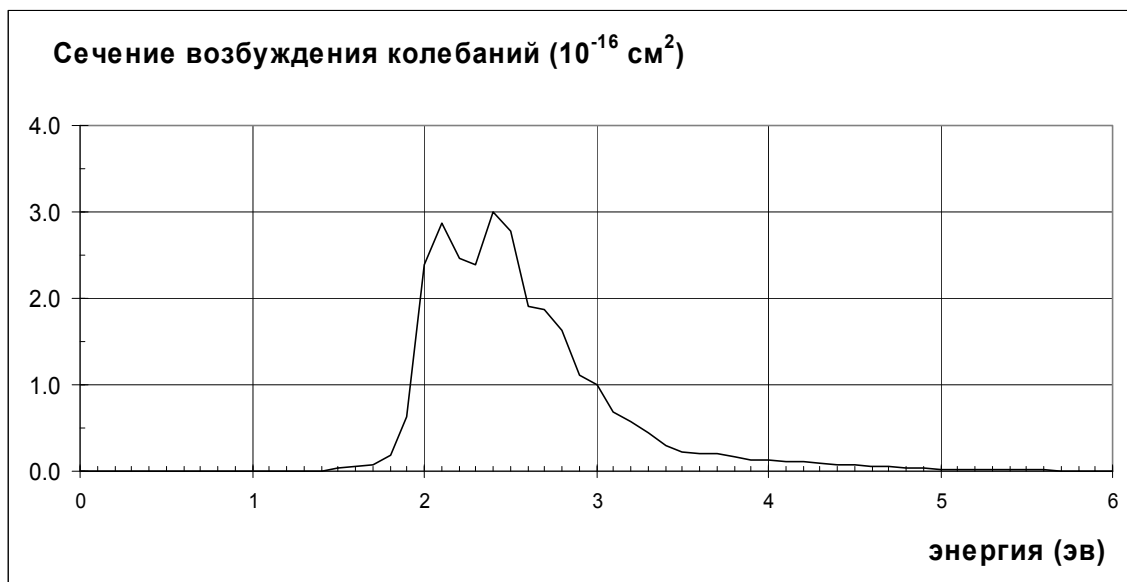


Рис. 2

Энергии, передаваемые молекулам азота и кислорода, и сечения возбуждения электронных уровней взяты из [10 - 12, 18 - 20]. На рисунке 3 приведены графики зависимости суммарного по всем электронным уровням сечения от энергии.

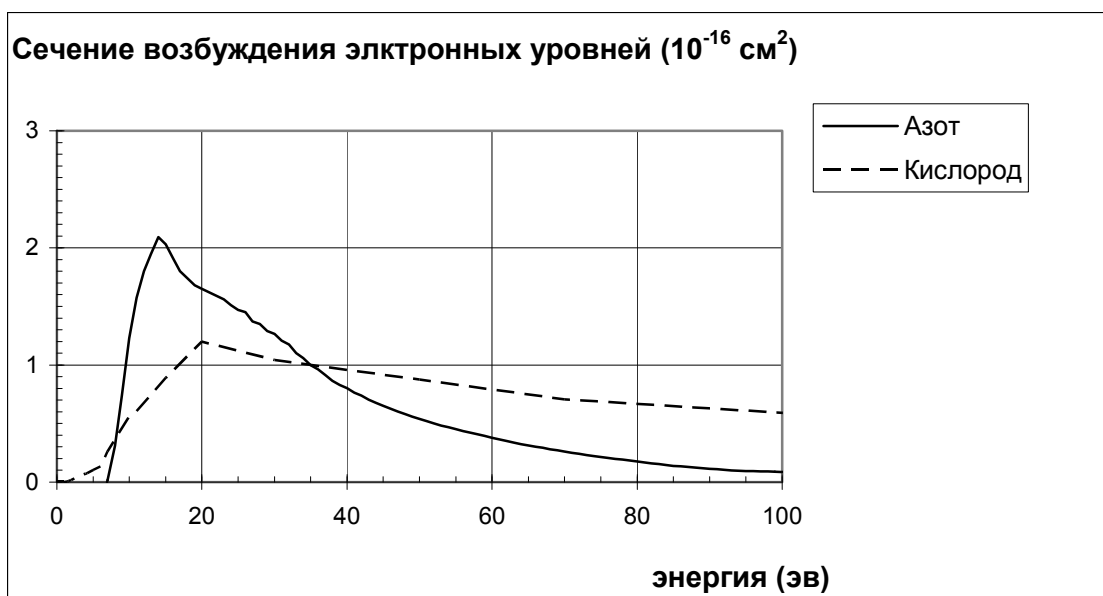


Рис. 3

Далее используются следующие обозначения: ε – энергия падающего электрона, ε' – энергия рассеянного электрона, $\cos \theta$ – косинус угла рассеяния; $\sigma_i^v(\varepsilon, \cos \theta)$ и $\sigma_i^v(\varepsilon)$ – дифференциальное и полное сечение возбуждения i -го колебательного уровня молекулы; $\sigma_i^e(\varepsilon, \cos \theta)$, $\sigma_i^e(\varepsilon)$ – дифференциальное и полное сечение возбуждения молекулярного электрона на i -ый электронный уро-

вень; $\sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon', \cos \theta)$, $\sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon')$ и $\sigma_i^{ion}(\varepsilon)$ – дважды дифференциальное, дифференциальное и полное сечение ионизации соответствующей оболочки. Отсутствие нижнего индекса означает, что по нему выполнено суммирование.

Полное и дифференциальное по энергии вторичного электрона сечения ионизационного рассеяния приведены в работах [22] и [23] для отдельных электронных оболочек. В интеграле столкновений достаточно нерелятивистского приближения, так как скорости вторичных электронов малы. В правой части кинетического уравнения использованы релятивистские формулы.

В [22] предложены нерелятивистские формулы для дифференциального и полного сечений ионизации i -й оболочки:

$$\sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i + \nu_i} \left[\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^2} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} - \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')} \right) + \Delta\varepsilon_i \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i} \right) \left(\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^3} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^3} \right) \right]; \quad (1)$$

$$\sigma_i^{ion}(\varepsilon) = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i + \nu_i} \frac{1}{\Delta\varepsilon_i} \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon} \right)^2 \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i} + \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon} - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i} \right) \right] \quad (2)$$

В [23] приведено релятивистское дифференциальное сечение:

$$\sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\beta_\varepsilon^2 m c^2 / 2 + \Delta\varepsilon_i + \nu_i} \left[\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^2} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} + \frac{1}{(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i)} \times \right. \\ \left. \times \frac{4m c^2 (2\varepsilon + m c^2)}{(\varepsilon + 2m c^2)^2 (\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i) (\varepsilon - \varepsilon')} + \frac{4}{(\varepsilon + 2m c^2)^2} + \right. \\ \left. + \Delta\varepsilon_i \left[\ln \left(\frac{\varepsilon (\varepsilon + 2m c^2)}{2\Delta\varepsilon_i m c^2} \right) - \beta_\varepsilon^2 \right] \cdot \left(\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^3} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^3} \right) \right]. \quad (3)$$

Здесь ε' – энергия вторичного электрона (эВ), m – масса электрона, e – заряд электрона, a_0 – радиус Бора, R – постоянная Ридберга (эВ), $\beta_\varepsilon^2 = \varepsilon(\varepsilon + 2m c^2) / (\varepsilon + m c^2)^2$, ν_i – средняя энергия электрона в молекуле на i -й оболочке (эВ), $\Delta\varepsilon_i$ – энергия связи электрона на i -й оболочке (эВ). Сечения ионизации с учетом всех оболочек равны $\sigma^{ion}(\varepsilon, \varepsilon') = \sum_i N_i \sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon')$, $\sigma^{ion}(\varepsilon) = \sum_i N_i \sigma_i^{ion}(\varepsilon)$, где N_i – заселенность оболочки.

Числа N_i , $\Delta\varepsilon_i$, ν_i [7] для молекул азота и кислорода приведены в таблице.

Азот				Кислород			
Номер оболочки	N_i	$\Delta\varepsilon_i$ (эВ)	ν_i (эВ)	Номер оболочки	N_i	$\Delta\varepsilon_i$ (эВ)	ν_i (эВ)
1	2	15.58	54.91	1	2	12.07	84.88
2	4	17.07	44.3	2	2	19.64	59.89
3	2	21	63.18	3	4	19.79	71.84
4	2	41.72	71.13	4	2	29.82	90.92
				5	2	46.19	79.73

1.2 Генерация тока проводимости

Электрическое поле E ускоряет вторичные электроны в промежутках между столкновениями с молекулами. Появляется ненулевая дрейфовая скорость u порядка $eE\tau_1/m$, где $\tau_1 = [N\nu(\varepsilon)(\sigma_{tr}^{el} + \sigma^v + \sigma^e + \sigma^{ion})]^{-1}$ – время жизни между столкновениями, N – концентрация молекул газа.

И скорость, и полное сечение зависят от энергии вторичного электрона, что дает зависимость времени пробега от энергии, показанную на рисунке 4. Можно видеть, что время пробега и, соответственно, ток проводимости могут отличаться на порядок в зависимости от энергии. Поэтому необходимо рассмотреть процессы, изменяющие энергию электронов.

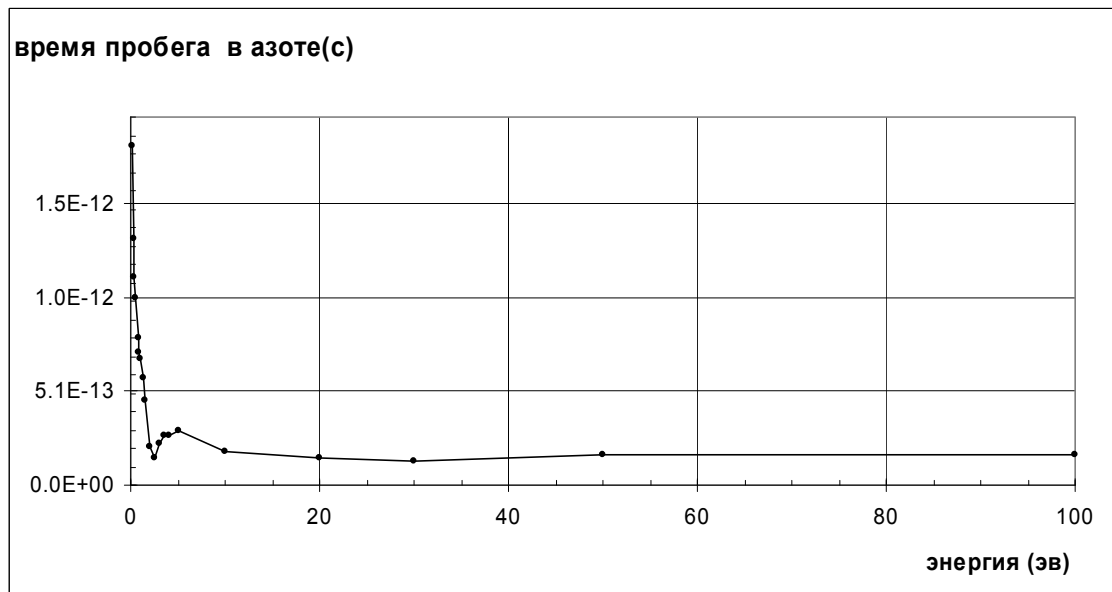


Рис.4

Начальная энергия деградирует за счет ионизационных и неупругих столкновений до значения порядка 1 эВ. После этого устанавливается квазиравновесное состояние, в котором скорость набора энергии в электрическом поле и потери за счет упругих столкновений с молекулами становятся одинаковыми по порядку величин. Численное решение соответствующего кинетического уравнения показывает, что при нормальных условиях равновесие достигает-

ся за время порядка 0.3 нс. В течение этого времени электрическое поле мало влияет на энергию электронов по сравнению со столкновениями.

При достижении вторичным электроном энергии порядка 1 эВ сечения неупругих столкновений становятся равными нулю. После этого энергию электрона уменьшает упругими столкновениями и увеличивается электрическим полем. Эти процессы на порядки медленнее деградации энергии за счет неупругих столкновений.

Рассмотрим процессы перераспределения энергии при ускорении деградировавших электронов электрическим полем. За время свободного пробега электрон с тепловой энергией ε набирает в поле энергию направленного движения $\Delta\varepsilon_+ \approx e^2 E^2 \tau_1^2(\varepsilon)/2m$. Упругое столкновение с молекулой переводит энергию направленного движения в тепловую. Одновременно теряется энергия $\Delta\varepsilon_- = \delta \cdot \varepsilon$, $\delta = 2m/M$, где M – масса молекулы.

В зависимости от соотношения $\Delta\varepsilon_+$ и $\Delta\varepsilon_-$ тепловая энергия электронов увеличивается или уменьшается. Равновесное состояние наступает при выполнении равенства $e^2 E^2 \tau_1^2(\varepsilon)/2m = \delta\varepsilon$. Например, в электрическом поле $E=1$ СГС равновесная энергия равна примерно 0.7 эВ. Условие равновесия $mu^2/2 = \delta\varepsilon$ связывает дрейфовую скорость $u = \sqrt{\delta} \sqrt{2\varepsilon/m}$ и тепловую. В равновесии между электрическим полем и упругими столкновениями дрейфовая скорость много меньше тепловой.

Отметим, что приближение мгновенной деградации означает, что начальная энергия полагается равной 1 эВ вместо 30-40 эВ. Это приводит к завышению тока проводимости в 3-4 раза. Поэтому необходимо рассматривать процесс деградации энергии.

2. Постановка задачи для определения тока проводимости

Рассмотрим кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = I(f) + Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (4)$$

где $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – функция распределения электронов в фазовом пространстве координат \mathbf{r} и скоростей \mathbf{v} , $E(t, \mathbf{r})$ – напряженность электрического поля, $I(f)$ – интеграл столкновений, $Q(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ – источник вторичных электронов, t – время.

Электрическое поле, вообще говоря, зависит от функции распределения, поскольку плотность тока вторичных электронов входит в правую часть уравнений Максвелла в общей модели радиационного электромагнитного поля. Эта зависимость является квазилинейной, поэтому при построении решения уравнения (4) электрическое поле можно считать заданной функцией.

Интеграл столкновений можно представить в виде суммы $I = I^{el} + I^{unl} + I^{ion}$. Величину $I^{el}(f)$ запишем в виде [24]:

$$I^{el}(f) = \iint d\mathbf{v}_1 d\Omega \sigma^{el}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \vartheta) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| [f(\mathbf{v}) f_1(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}') f_1(\mathbf{v}')], \quad (5)$$

где \mathbf{v}_1 – скорость молекулы, с которой сталкивается электрон, \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 – скорости электрона и молекулы до столкновения, f_1 – максвелловская функция распределения молекул по скоростям. Интегрирование проводится по скоростям молекул и по углам рассеивания $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, где ϑ – угол между векторами $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$. Скорости электрона и молекулы до столкновения \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 определяются, при данном угле рассеяния ϑ , через \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 с помощью законов сохранения импульса и энергии.

Скорости электронов, при которых возможны столкновения с возбуждением и ионизация, существенно превосходят скорости молекул газа. Поэтому такие столкновения можно рассматривать как рассеяние на неподвижных центрах [25]:

$$I^{unl,ion}(f) = \sum_i \int d\mathbf{v}' N \sigma_i^{unl,ion}(\mathbf{v}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}' f(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}') - N \sigma_i^{unl,ion}(\mathbf{v}) \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (6)$$

где N – концентрация молекул, i – номер возбуждаемого уровня.

При возбуждении колебательных и электронных уровней молекулы ей передается фиксированное количество энергии. Учитывая это, из (6) можно получить [26]:

$$I^{unl}(f) = \sum_i \int d\boldsymbol{\Omega}' \left(\frac{\mathbf{v}'}{v} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{v}} \right| N \sigma_i^{unl}(\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}' f(\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}') - N \sigma_i^{unl}(\mathbf{v}) \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\Omega}'$ и $\mathbf{v}' = \sqrt{v + 2\Delta\varepsilon_i/m}$ – направление и величина скорости электрона до столкновения, $\Delta\varepsilon_i$ – передача энергии.

Источник вторичных электронов имеет вид:

$$Q(t, \mathbf{v}) = \sum_i \int_{\varepsilon' > 2\varepsilon + \Delta\varepsilon} d\mathbf{v}' N \sigma_i^{ion}(\mathbf{v}', \mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{v}' q(\mathbf{v}', \boldsymbol{\Omega}'), \quad (8)$$

где q – функция распределения быстрых электронов.

3. Приближенное решение кинетического уравнения

Пусть плотность и температура газа постоянны по всему объему и градиент f может возникать только за счет неоднородности источника. Тогда функция распределения существенно меняется только на длине порядка cT , где T – характерное время изменения функции распределения первичных электронов, c – их скорость.

Средняя скорость первого поколения вторичных электронов для первичных электронов с энергией порядка 1 МэВ, составляет $4 \cdot 10^8$ см/с $\ll c$. Деградация энергии вторичных электронов снижает среднюю скорость до $6 \cdot 10^7$ см/с. Отсюда следует оценка:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \approx v_{cp} \frac{f}{cT} \approx \frac{v_{cp}}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \ll \frac{\partial f}{\partial t}.$$

На основании этой оценки слагаемым с пространственными производными в (4) пренебрегается.

Смещение вторичного электрона за характерное время мало по сравнению с масштабом пространственной неоднородности источника. Дифференциальное сечение образования вторичных электронов практически изотропно. Поэтому функция распределения, подчиняющаяся уравнению (4), имеет одно физически выделенное направление – направление электрического поля. Поэтому локально в каждой точке пространства функция распределения зависит только от модуля скорости v и угла между скоростью и направлением электрического поля θ , то есть $f = f(v, \cos \theta)$.

Решение (4) в приближении локальной пространственной однородности и локальной азимутальной симметрии разлагается в ряд по полиномам Лежандра переменной $\cos \theta$. Система уравнений для первых трех коэффициентов разложения имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 f_1 &= I_0^{el} + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE}{m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{2}{5v^3} \frac{\partial}{\partial v} v^3 f_2 \right) &= I_1^{el} + I_1^{unl} + I_1^{ion} + Q_1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{eE}{m} \left(\frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial v} \frac{f_1}{v} + \frac{3}{7v^4} \frac{\partial}{\partial v} v^4 f_3 \right) &= I_2^{el} + I_2^{unl} + I_2^{ion} + Q_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где $I_k = \frac{2k+1}{4\pi} \int d\Omega P_k(\cos \theta) I$, $Q_k = \frac{2k+1}{4\pi} \int d\Omega P_k(\cos \theta) Q$. Согласно [24], из (5) можно получить:

$$I_0^{el} = N\delta \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sigma_{tr}^{el}(v) v^4 f_0 + \sigma_{tr}^{el}(v) v^3 \frac{2\varepsilon_g}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right], \quad I_1^{el} = -N\sigma_{tr}^{el}(v) v f_1.$$

Из (6,7) получаем

$$\begin{aligned} I_0^{unl} &= \frac{N}{v} \sum_i \left[\sigma_i^{unl}(v') v'^2 f_0(v') - \sigma_i^{unl}(v) v^2 f_0(v) \right], \\ I_0^{ion} &= N \sum_i \left[\int_{\varepsilon' > \varepsilon + \Delta\varepsilon} dv' v'^3 \sigma_i^{ion}(v', v) f_0(v') - \sigma_i^{ion}(v) v f_0(v) \right]. \end{aligned}$$

Предполагая сечения всех неупругих столкновений изотропными, из (6,7) получим

$$I_k^{unl} = N \sum_i \sigma_i^{unl}(v) v f_k(v), \quad I_k^{ion} = N \sum_i \sigma_i^{ion}(v) v f_k(v), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$Q_0(t, v) = N \sum_i \int_{\varepsilon' > 2\varepsilon + \Delta\varepsilon} dv' v'^3 \sigma_i^{ion}(v', v) q_0(v'), \quad Q_k(t, v) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q_0(v) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega q(v, \Omega)$.

Следуя [27], рассмотрим параметр $\xi = eE\bar{v}\tau_1(\bar{\varepsilon})/2\bar{\varepsilon}$, где \bar{v} и $\bar{\varepsilon}$ – характерные значения скорости и энергии вторичных электронов. Заменяя в (9)

производные по скорости отношениями и учитывая неравенство $\tau \ll T$, можно показать, что $f_1 \approx \xi f_0$, $f_2 \approx \xi^2 f_0, \dots$. Ограничимся линейным по ξ приближением и пренебрежем всеми членами, начиная с f_2 . Тогда система первых двух уравнений для f_0 и f_1 станет замкнутой и примет вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 f_1 = \frac{N\delta}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\sigma_{tr}^{el}(v) v^4 f_0 + \sigma_{tr}^{el}(v) v^3 \frac{2\varepsilon_g}{3m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] + I_0^{unl} + I_0^{ion} + Q_0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -N \left(\sigma_{tr}^{el}(v) + \sigma^{unl}(v) + \sigma^{ion}(v) \right) v f_1. \quad (11)$$

Заменим в (10-11) переменную v на безразмерную энергию $\varepsilon = mv^2/2\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = 1$ эВ, функции $f_{0,1}(v)$ на $\tilde{f}_{0,1}(\varepsilon)$ по следующему правилу: $dv v^2 f(v) = d\varepsilon \tilde{f}(\varepsilon)$, и нормируем все сечения на величину $\sigma_0 = 10^{-15} \text{ см}^2$.

$$\frac{\partial \tilde{f}_0}{\partial t} = \frac{\xi E}{3\tau_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \tilde{f}_1 + \frac{\delta p}{\tau_0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\sigma_{tr}^{el} \varepsilon^{3/2} \tilde{f}_0 + \frac{2\varepsilon_g}{3\varepsilon_0} \sigma_{tr}^{el} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\tilde{f}_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \tilde{I}_0^{unl} + \tilde{I}_0^{ion} + \tilde{Q}_0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial t} + \frac{p}{\tau_0} \sigma_{tr}^{el}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \tilde{f}_1(\varepsilon) = \frac{\xi E}{\tau_0} \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\tilde{f}_0}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (13)$$

где:

$$\tilde{I}_0^{unl} = \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\sigma_i^{unl}(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} \tilde{f}_0(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^{unl}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \tilde{f}_0(\varepsilon) \right];$$

$$\tilde{I}_0^{ion} = \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\int_{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i}^{\infty} d\varepsilon' \sigma_i^{ion}(\varepsilon', \varepsilon) \sqrt{\varepsilon'} \tilde{f}_0(\varepsilon') - \sigma_i^{ion}(\varepsilon) \varepsilon \tilde{f}_0(\varepsilon) \right];$$

$$\tilde{Q}_0 = \frac{p}{\tau_0} \sum_i \int_{2\varepsilon + \Delta\varepsilon_i}^{\infty} d\varepsilon' \sigma_i^{ion}(\varepsilon', \varepsilon) \sqrt{\varepsilon'} \tilde{q}_0(\varepsilon').$$

Константы p , τ_0 , ξ имеют следующий физический смысл: p – давление газа в атмосферах, $v_0 = \sqrt{2\varepsilon_0/m} = 6.5 \cdot 10^7 \text{ см/с}$, $\tau_0 = (N_L \sigma_0 v_0)^{-1} = 6.3 \cdot 10^{-13} \text{ с}$ – время между столкновениями, $\xi = eE_0 v_0 \tau_0 / \varepsilon_0 = 1.08 \cdot 10^{-2}$ – отношение энергии, набираемой электроном при ускорении в поле $E_0 = 1 \text{ СГСЭ}$ на средней длине пробега между упругими столкновениями $v_0 \tau_0$, к энергии ε_0 ; $N_L = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ – число Лошмидта.

Положим далее $f_{0,1}(\varepsilon) \equiv \tilde{f}_{0,1}(\varepsilon)$, $I_0(\varepsilon) \equiv \tilde{I}_0(\varepsilon)$, $Q_0(\varepsilon) \equiv \tilde{Q}_0(\varepsilon)$. Функция f_1 определяет поток вторичных электронов:

$$j(t) = \frac{4\pi}{3} v_0 \int_0^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} f_1(t, \varepsilon).$$

Исключим f_1 , выразив его через f_0 :

$$f_1(t, \varepsilon) = \frac{\xi}{\tau_0} \int_0^t dt' E(t') \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{f_0(t', \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \exp \left\{ -\frac{t-t'}{\tau_1(\varepsilon)} \right\}, \quad \text{где}$$

$$\text{где } \tau_1(\varepsilon) = \tau_0 / \left(p \sigma_{tr}^{el}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \right).$$

Экспонента в подынтегральном выражении меняется быстро по сравнению с E и f_0 , так как $\tau_1(\varepsilon) < 10^{-9}$ с для любых энергий и любых давлений, больших 10^2 атм. Тогда:

$$f_1 = \frac{\xi}{\tau_0} E \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} \right) \varepsilon \tau_1(\varepsilon) (1 - \exp\{-t/\tau_1(\varepsilon)\}).$$

Подставляя f_1 в (10), получим уравнение для f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(k(t, \varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + r(t, \varepsilon) f_0 \right) + I_0^{unl}(f_0) + I_0^{ion}(f_0) + Q_0(t, \varepsilon), \quad (14)$$

$$\text{где } k = -\frac{\xi^2 E^2}{3p\tau_0} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma_{tr}^{el} + \sigma^{unl} + \sigma^{ion}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_1}\right\} \right) - \frac{\delta p}{\tau_0} \frac{2\varepsilon_g}{3\varepsilon_0} \sigma_{tr}^{el} \varepsilon^{3/2},$$

$$r = -\frac{\delta p}{\tau_0} \sigma_{tr}^{el} \sqrt{\varepsilon} \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_g}{3\varepsilon_0} \right) + \frac{\xi^2 E^2}{6p\tau_0} \frac{1 - \exp\{-t/\tau_1\}}{\sqrt{\varepsilon} \sigma_{tr}^{el}(\varepsilon)}.$$

Интегрируя (14) по энергии от ε_1 до ε_2 , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f_0 d\varepsilon + J(\varepsilon_2) - J(\varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (I_0^{unl}(f_0) + I_0^{ion}(f_0)) d\varepsilon + \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} Q_0(t, \varepsilon) d\varepsilon,$$

$$\text{где } J(\varepsilon) = k(t, \varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + r(t, \varepsilon) f_0.$$

Величина J имеет физический смысл потока вдоль оси энергии, а все уравнение имеет смысл уравнения непрерывности на оси энергии. Поскольку через точку $\varepsilon = 0$ поток невозможен, для (14) естественно поставить нулевое граничное условие при $\varepsilon = 0$.

$$\left[\frac{\xi^2 E^2 \varepsilon}{3p\sigma_{tr}^{el}(\varepsilon)} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon \sqrt{\varepsilon}} + \delta p \sigma_{tr}^{el}(\varepsilon) \varepsilon^{3/2} f_0 \right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Второе граничное условие $f_0|_{\varepsilon=\infty} = 0$ следует из определения вторичных электронов. Начальное условие однородно.

Выполним грубую оценку слагаемых в правой части (14) для $\varepsilon \sim 1$ и $E \sim 1$. Первое имеет порядок $\xi^2 f_0 / p\tau_0$, второе $-\delta p f_0 / \tau_0$, третье и четвертое $-p f_0 / \tau_0$. Таким образом, слагаемое с полем при $p^2 \gg \xi^2$ много меньше интегралов столкновений. Второе слагаемое описывает влияние упругих столкновений. По порядку величины оно равно первому слагаемому при нормальном давлении и много меньше него при низких давлениях. Эти оценки показывают, что существуют условия, при которых влияние поля и упругих столкновений на функцию распределения f_0 мало. Поэтому можно предположить, что решение уравнения (14) без потокового слагаемого можно использовать для вычисления в первом приближении тока вторичных электронов.

В этом приближении уравнение для f_0 имеет вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = I_0^{unl}(f_0) + I_0^{ion}(f_0) + Q_0. \quad (14a)$$

Численные расчеты показали, что решения уравнений (14) и (14а) действительно близки, особенно на этапе деградации энергии.

Линейность I_0^{unl} и I_0^{ion} позволяет выразить f_0 через функцию источника:

$$f_0 = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\varepsilon' \cdot Q_0(t', \varepsilon') g(t-t', \varepsilon, \varepsilon').$$

Функция источника $g(t-t', \varepsilon, \varepsilon')$ подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = I_0^{unl}(g) + I_0^{ion}(g) + \delta(t-t') \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (14б)$$

Решение (14б) существенно зависит от области энергий, в которую попадает энергия ε' . Таких областей четыре.

В первой области E_0 сечения всех неупругих столкновений равны нулю. Для азота $E_0 = [0, 1.4] \cup [6, 7]$ эВ. Здесь $g(t, \varepsilon, \varepsilon') = \delta(\varepsilon - \varepsilon')$. Энергия электронов не изменяется.

Во второй области E_v не равно нулю сечение возбуждения колебаний. Для азота $E_v = [1.4, 6]$ эВ. Функция источника при $\varepsilon' \in E_v$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\sigma_i^v(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} g(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^v(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) \right] + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon').$$

В силу дискретности потерь энергии при возбуждении колебаний решение этого уравнения представляется следующей суммой:

$$g(t, \varepsilon, \varepsilon') = \sum_k A_k(t, \varepsilon') \delta(\varepsilon - \varepsilon_k(\varepsilon')), \quad A_k(t, \varepsilon') \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a_k(\varepsilon').$$

Из-за большого числа колебательных уровней процесс потери энергии электроном является сильно разветвленным по различным каналам – уровням возбуждения колебаний. Поэтому непосредственное вычисление $A_k(t)$ и ε_k возможно, но весьма затруднительно. Здесь предлагается приближенное решение:

$$g(t, \varepsilon, \varepsilon') = \delta(\varepsilon - \varepsilon') \exp\{-t/\tau_2(\varepsilon')\} + f_s(\varepsilon, \varepsilon') (1 - \exp\{-t/\tau_2(\varepsilon')\}).$$

Оно получается решением уравнения с модельным интегралом столкновений:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{g - f_s(\varepsilon, \varepsilon')}{\tau_2(\varepsilon')} + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon'),$$

$$f_s(\varepsilon, \varepsilon') = \sum_k a_k(\varepsilon') \delta(\varepsilon - \varepsilon_k(\varepsilon')), \quad \sum_k a_k = 1.$$

Коэффициенты a_k и конечные энергии электронов ε_k находятся численным решением уравнения с исходным интегралом столкновений. Так определенный модельный интеграл сохраняет поведение решения при больших временах. Время релаксации $\tau_2(\varepsilon')$ подбирается так, чтобы приближенный ток проводимости, вычисленный по приближенной g , наилучшим образом согласо-

вывался с «точным» током, вычисленным численным решением уравнения с исходным интегралом столкновений.

В третьей области E_e не равно нулю сечение возбуждения электронных уровней, но еще не происходит ионизация. Для азота $E_e = [7, 15.6]$. Функция источника при $\varepsilon' \in E_e$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} = & \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\sigma_i^v(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} g(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^v(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) \right] + \\ & + \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\sigma_i^e(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} g(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^e(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) \right] + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \end{aligned}$$

Для него используется то же приближенное решение, что и в предыдущем случае.

В четвертой области E_i не равно нулю сечение ионизации столкновений и, возможно, сечение столкновений с возбуждением электронных уровней. Для азота $E_i = [15.6, \infty]$. Функция источника при $\varepsilon' \in E_i$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} = & \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\sigma_i^v(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} g(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^v(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) + \right. \\ & \left. + \sigma_i^e(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) \sqrt{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} g(\varepsilon + \Delta\varepsilon_i) - \sigma_i^e(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) \right] + \\ & + \frac{p}{\tau_0} \sum_i \left[\int_{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i}^{\infty} d\varepsilon' \sigma_i^{ion}(\varepsilon', \varepsilon) \sqrt{\varepsilon'} g(\varepsilon') - \sigma_i^{ion}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) \right] + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon'). \end{aligned}$$

Вместо этого уравнения будем решать уравнение с модельным интегралом столкновений, подобранным так, чтобы его решение соответствовало решению исходного уравнения при больших значениях времени, а скорость размножения электронов при ионизационных столкновениях сохранялась. Скорость размножения электронов равна

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon I_0(f_0) = \frac{p}{\tau_0} \sum_i \int_{\Delta\varepsilon_i}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma_i^{ion}(\varepsilon) f_0(t, \varepsilon). \quad (15)$$

Скорость размножения электронов (15) обеспечивает интеграл столкновений следующего вида:

$$B(f) = \frac{n(t) f_s(\varepsilon, \varepsilon') - f}{\tau_2(\varepsilon')} + \frac{p}{\tau_0} \frac{f}{n(t)} \sum_i \int_{\Delta\varepsilon_i}^{\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \sigma_i^{ion}(\varepsilon) f,$$

где $n(t) = \int_0^{\infty} f(t, \varepsilon) d\varepsilon$, $\int_0^{\infty} f_s(\varepsilon, \varepsilon') d\varepsilon = 1$.

Предельная функция распределения $n_{\infty}(\varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon')$ определяется численным решением исходной задачи. Проверим, что решение уравнения

$\partial g / \partial t = B(g) + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon')$ стремится к $n_\infty(\varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon')$ при $t \rightarrow \infty$. Будем искать решение в виде $g = n(t) F(t, \varepsilon)$, где $\int_0^\infty F(t, \varepsilon) d\varepsilon = 1$. Получим:

$$F(t, \varepsilon) = \delta(\varepsilon - \varepsilon') \exp\{-t/\tau_2\} + f_s(\varepsilon, \varepsilon')(1 - \exp\{-t/\tau_2\}),$$

$$n(t, \varepsilon') = \exp\left\{(\tau_2/\tau_0) p \sqrt{\varepsilon'} \sigma^{ion}(\varepsilon')(1 - \exp\{-t/\tau_2\})\right\}.$$

Время релаксации τ_2 можно определить, используя предельное значение $n_\infty(\varepsilon')$, полученное из численного решения задачи с исходным интегралом столкновений:

$$n_\infty(\varepsilon') = \exp\left(p \frac{\tau_2}{\tau_0} \sqrt{\varepsilon'} \sigma^{ion}(\varepsilon')\right); \quad \tau_2(\varepsilon') = \frac{\tau_0}{p} \frac{\ln n_\infty(\varepsilon')}{\sqrt{\varepsilon'} \sigma^{ion}(\varepsilon')}.$$

Модельный интеграл столкновений с таким временем релаксации обеспечивает такую же полную потерю энергии, как и исходный интеграл столкновений. Скорость потерь энергии в течение релаксации может отличаться от истинной. На рисунке 6 показана зависимость времени релаксации от начальной энергии для электронов в азоте.

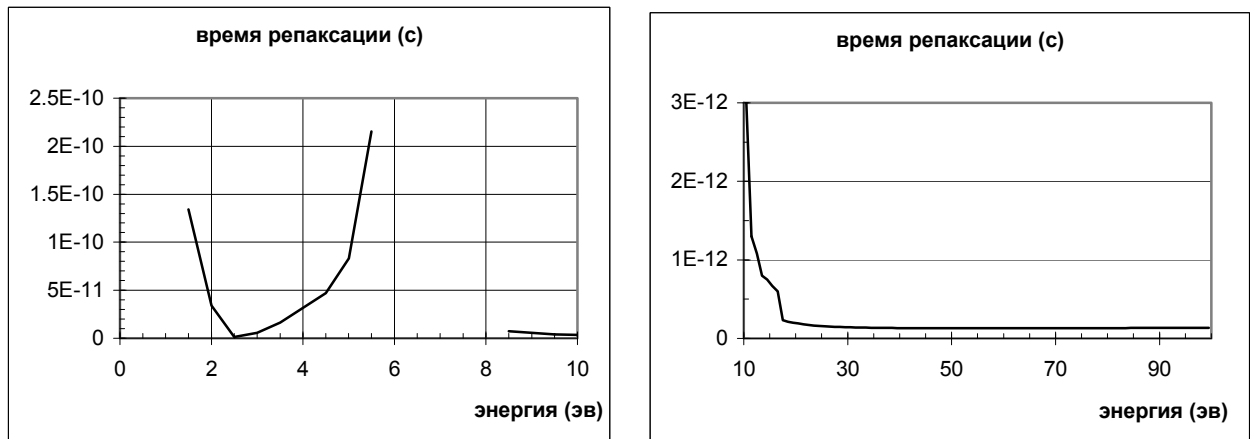


Рис. 6

Численные решения уравнения $\partial f / \partial t = I_0(f) + \delta(t) \delta(\varepsilon - \varepsilon')$ показали, что при $\varepsilon' > \Delta \varepsilon_{max}^{ion}$ ($\Delta \varepsilon_{max}^{ion}$ – максимальная энергия связи) предельная функция $f_s(\varepsilon, \varepsilon')$ перестает зависеть от ε' . Такая функция распределения называется деградационным спектром и определяется только свойствами рассеивающего газа.

Применим полученные формулы для вычисления f_0 :

$$f_0 = \frac{p}{\tau_0} \int_0^t dt' \left\{ \Theta_0(\varepsilon) Q_0(t', \varepsilon) + \Theta_{ion}(\varepsilon) Q_0(t', \varepsilon) \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon)}\right\} \times \right.$$

$$\left. \times n_\infty(\varepsilon) \left(1 - \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon)}\right\}\right) + \Theta_{ve}(\varepsilon) Q_0(t', \varepsilon) \exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon)}\right\} \right\} + \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{E_v \cup E_e} d\varepsilon' Q_0(t', \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon')} \right\} \right) + \\
& + \int_{E_i} d\varepsilon' Q_0(t', \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon')} \right\} \right) n_\infty(\varepsilon') \exp \left\{ -\frac{t-t'}{\tau_2(\varepsilon')} \right\},
\end{aligned}$$

где $\Theta_0(\varepsilon)$, $\Theta_{ve}(\varepsilon)$, $\Theta_{ion}(\varepsilon)$ – индикаторы множеств E_0 , $E_v \cup E_e$, E_i .

Выразим f_1 через f_0 и вычислим поток вторичных электронов и радиационную проводимость:

$$j(t) = E \frac{4\pi v_0 \xi}{3 \tau_0} \int_0^\infty d\varepsilon f_0(t, \varepsilon) \left[\frac{\tau_1' \varepsilon}{\tau_1^2} t \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_1} \right\} - \left(\frac{3\tau_1}{2} + \tau_1' \varepsilon \right) \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_1} \right\} \right) \right], \quad (17)$$

$$\sigma_{rad} = \frac{4\pi e \xi}{3 \tau_0} \int_0^\infty d\varepsilon f_0(t, \varepsilon) \left[\frac{\tau_1' \varepsilon}{\tau_1^2} t \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_1} \right\} - \left(\frac{3\tau_1}{2} + \tau_1' \varepsilon \right) \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_1} \right\} \right) \right], \quad (18)$$

где $\tau'(\varepsilon)$ есть производная функции $\tau(\varepsilon)$ по энергии.

Несмотря на то что по формулам (17,18) проводимость вычисляется в квадратурах, применение разработанной модели радиационной проводимости совместно с численным решением уравнений Максвелла и вычислением тока первичных электронов методом частиц остается проблематичным. Интеграл по времени в (16) вычисляется от произведения источника вторичных электронов на сомножители, зависящие от времени и энергии, по которой также проводится интегрирование. Из-за этого не удастся накапливать интеграл по времени от источника, проинтегрированного по энергии, и дополнительно хранить в оперативной памяти компьютера только одно число для каждой точки расчетной области. Необходимо сохранять в памяти значения источника вторичных электронов для каждой точки на сетке энергий и времени. Это вносит дополнительную размерность в общую задачу, что существенно увеличивает требуемый объем оперативной памяти.

Уменьшение объема вычислений возможно, если $\tau_2(\varepsilon) \ll T$ мало по сравнению с характерным временем изменения потока первичных электронов. Тогда $Q(t, \varepsilon)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с экспонентами в (16), и f_0 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
f_0 &= Q_0(t, \varepsilon) \tau_2 \left[\Theta_{ve} \left(1 - \exp \left\{ -t/\tau_2 \right\} \right) + \Theta_{ion} \left(n_\infty^{1-\exp\{-t/\tau_2\}} - 1 \right) / \ln n_\infty \right] + \\
& \int_0^t dt' \left\{ \Theta_0 Q_0(t', \varepsilon) + \int_{E_{ve}} d\varepsilon' Q_0(t', \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') + \int_{E_{ion}} d\varepsilon' Q_0(t', \varepsilon') n_\infty(\varepsilon') \right\} - \\
& - \int_{E_{ve}}^\infty d\varepsilon' Q_0(t, \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') \tau_2(\varepsilon') \left(1 - \exp \left\{ -t/\tau_2(\varepsilon') \right\} \right) -
\end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{E_{\text{ion}}}^{\infty} d\varepsilon' Q_0(t, \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') n_{\infty}(\varepsilon') \tau_2(\varepsilon') \left(G(t, \varepsilon') - \frac{t}{\tau_2(\varepsilon')} \right) - \\
& - \int_{E_{\text{ion}}}^{\infty} d\varepsilon' Q_0(t, \varepsilon') f_s(\varepsilon, \varepsilon') \tau_2(\varepsilon') \left(n_{\infty}(\varepsilon')^{1 - \exp\{-t/\tau_2(\varepsilon')\}} - 1 \right) / \ln n_{\infty}(\varepsilon'),
\end{aligned}$$

где $G(t, \varepsilon) = Ei(-\ln n_{\infty}(\varepsilon)) - Ei\left(-\ln n_{\infty}(\varepsilon) \cdot \exp\left\{-\frac{t}{\tau(\varepsilon)}\right\}\right)$.

Теперь, применяя (16а, 17) для вычисления проводимости, получаем, в том числе, три слагаемых с интегралом по времени только от источника вторичных электронов. Проведем сначала в этих слагаемых интегрирование по ε и ε' , а затем по t' , тогда при хранении промежуточных результатов потребуется всего три ячейки памяти для соответствующих интегралов по времени.

4. Заключение

Рассмотрена кинетическая модель вторичной ионизации газа электронами с высокой энергией – одного из процессов, определяющих электромагнитное поле, образуемое при рассеянии проникающего ионизирующего излучения. Построены формулы, позволяющие определять радиационную проводимость для каждой точки пространства путем вычисления интегралов.

Формулы получены с помощью приближенного решения кинетического уравнения для электронов проводимости. Обоснованы и использованы приближения локальной пространственной однородности и азимутальной симметрии функции распределения. Использовано приближение функции распределения двумя первыми членами разложения по полиномам Лежандра от угловой переменной. Выявлен малый параметр, представляющий собой отношение энергии, набираемой электроном между столкновениями, к тепловой энергии. При рассмотрении деградации начального спектра вторичных электронов введено приближение модельного интеграла столкновений. Оно сохраняет свойства точного интеграла столкновений, необходимые для правильного вычисления потока вторичных электронов.

Разработанная модель включена в общий численный алгоритм вычисления электромагнитного поля радиационного происхождения совместно с алгоритмом метода частиц для моделирования первичных электронов и разностной схемой для уравнений Максвелла. Модель подтвердила свою эффективность в ряде практически важных вычислительных экспериментов.

Литература

1. В.К.Федоров, Н.П.Сергеев, А.А.Кондрашин. Контроль и испытания в проектировании и производстве радиоэлектронных средств. М.: Техносфера, 2005.
2. Чумаков А.И. Действие космической радиации на интегральные схемы. – М.: Радио и связь, 2004.

3. Жуковский М.Е., Марков М.Б. Математическое моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения. – Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Серия Б, том VII–1, часть 2, с. 628-652.
4. Mikhail B. Markov, Mikhail E. Zhukovskiy. Modeling the radiative electromagnetic field. International Journal of Computing Science and Mathematics 2008 - Vol. 2, No.1/2 pp.110 – 131.
5. Андрианов А.Н., Березин А.В., Воронцов А.С., Ефимкин К.Н., Марков М.Б. Моделирование электромагнитных полей радиационного происхождения на многопроцессорных вычислительных системах. – Математическое моделирование, 2008, т. 20, №3, с. 98-114.
6. Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе. – Математическое моделирование, 2008, т. 20, №5, с. 35-54.
7. Официальный сайт National Institute of Standards and Technology <http://www.phys.nist.gov/>.
8. Лонгмайер К. Физика плазмы. Элементарный курс. М.: Атомиздат, 1966.
9. Л.Хаксли, Р.Кромптон. Диффузия и дрейф электронов в газах. М.: Мир, 1977.
10. Y.Itikawa J.Phys.Chem.Ref.Data.,V15,N3, 985, 1986.
11. Y.Itikawa J.Phys.Chem.Ref.Data.,V18,N1, 23, 1989.
12. S. Trajmar Phys.Rep. 97, 219, 1983.
13. G.J.Schulz Phys. Rev., 1964, A135, N4, p. 988.
14. G.J.Schulz Phys. Rev. Lett., 1968, 21, p. 1031.
15. G.J.Schulz Rev. Mod. Phys., 1973, 45, N3, p. 378.
16. D.Spence Chem. Phys., 1972, 57, p.516.
17. Биберман Л. М., Воробьев В. С., Якубов И. Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы, М., 1982.
18. D.C.Cartwright Phys. Rev. A16, 1041, 1977.
19. A.Chutjian Rev. A16, 1052, 1977.
20. Кочетов И.В. и др. Скорости процессов, инициируемых электронным ударом в неравновесной плазме. Молекулярный азот и двуокись углерода.- В кн.: Плазмохимические процессы. М.,1979, с. 4-43.
21. D.Rapp The Journal of Chemical Physics, V42, N12, p. 4081.
22. Yong-Ki Kim Phys. Rev. A, V50, N5, p.3954, 1994.
23. Yong-Ki Kim Phys. Rev. A, V62, N5,p.052710, 2000.
24. Гинзбург В.Л., Гуревич А.В. УФН т.LXX, вып.2, с.201, 1960
25. Кубо Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1967.
26. Месси Г., Бархоп Е., Электронные и ионные столкновения, М., 1958.
27. Александров Н.Л., Сон Э.Е. Химия плазмы. Вып. 5, с.35, М.: Атомиздат, 1978.