



Аванесов Г.А., Красиков В.А.,
Никитин А.В., Сазонов В.В.

Оценка точности
определения параметров
ориентации осей системы
координат
астроизмерительного
прибора БОКЗ-М по
экспериментальным данным

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М по экспериментальным данным / Г.А.Аванесов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 74. 37 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-74>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Г.А. Аванесов, В.А. Красиков, А.В. Никитин, В.В. Сазонов

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ
ОСЕЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ АСТРОИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРИБОРА
БОКЗ-М ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ**

Москва – 2010

Аннотация

Звездный датчик БОКЗ-М (блок измерения координат звезд) предназначен для определения параметров ориентации осей собственной системы координат относительно осей инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. На точность такого определения влияет большое число факторов, и оценка вклада каждого из них в общую ошибку не всегда возможна. В общем случае приходится ограничиваться оценкой суммарной ошибки по результатам исследования продолжительных рядов определений параметров ориентации, полученных в наземных испытаниях и в условиях космического полета. В данной работе приводятся оценки точности прибора БОКЗ-М, сделанные по измерениям, которые были выполнены в процессе штатной эксплуатации прибора на спутнике «Метеор-М».

G.A.Avanesov, V.A.Krasikov, A.V.Nikitin, V.V.Sazonov. Accuracy estimation of determining attitude of coordinate systems of the star sensor BOKZ-M by experimental data. Star sensors of the BOKZ family allow to find parameters that define the attitude of their own coordinate systems with respect to an inertial coordinate system by observing regions in the star sky. The accuracy of definition of attitude parameters is influenced by a great number of factors and we don't estimate their individual contributions to the total error. On that reason, we analyze fluctuations of rather long series of definitions of attitude parameters received by BOKZ sensors in ground-based tests and in the conditions of a real space flight. This paper contains the accuracy estimations of the star sensor BOKZ-M that were obtained by processing the measurement data from the spacecraft Meteor-M.

ВВЕДЕНИЕ

Астроизмерительный прибор (звездный датчик) БОКЗ-М предназначен для определения параметров ориентации осей собственной системы координат относительно осей инерциальной системы по наблюдениям участков звездного неба. Поскольку на точность такого определения влияет большое число факторов, оценка вклада каждого из них в общую ошибку не всегда возможна. В общем случае приходится ограничиваться оценкой суммарной ошибки по результатам исследования продолжительных рядов определений параметров ориентации, полученных в наземных испытаниях и в условиях космического полета. В данной работе приводятся оценки точности прибора БОКЗ-М, сделанные по измерениям, которые были выполнены в процессе штатной эксплуатации прибора на спутнике «Метеор-М».

Методика оценки точности основывается на аппроксимации показаний БОКЗа с помощью модели вращательного движения спутника. Доверяя этой модели, ошибки аппроксимации можно связать с ошибками измерений БОКЗа. Используемая модель движения основана на уравнениях кинематики твердого тела и данных измерений угловой скорости спутника, выполненных тремя ГИВУСами (гироскопический измеритель вектора угловой скорости). При построении аппроксимации измерений БОКЗа осуществляется и проверка измерений ГИВУСов.

Аппроксимация измерений БОКЗа построена двумя способами. Первый способ состоял в формальном сглаживании этих измерений дискретными рядами Фурье и подборе параметров сглаживания из условия совпадения угловой скорости спутника, рассчитываемой с помощью рядов Фурье, с результатами низкочастотной фильтрации данных измерений ГИВУСов. Во втором способе данные измерений ГИВУСов использовались для задания угловой скорости в кинематических уравнениях движения твердого тела, решения которых аппроксимировали измерения БОКЗа. Оба способа, хотя и основаны на единой механической модели, значительно отличаются друг от друга. Первый способ в большей степени основывается на измерениях БОКЗа, второй способ существенно использует измерения ГИВУСов.

Получение искомых оценок точности в качестве побочного результата позволило реконструировать фактического вращательное движение спутника относительно инерциальной системы координат. На борту «Метеора-М» имеется аппаратура спутниковой навигации, которая выдает измерения положения и скорости аппарата относительно гринвичской системы координат. Эти измерения вместе с реконструкцией абсолютного вращательного движения позволили найти движение спутника относительно орбитальной системы координат, т.е. оценить качество реализации его рабочего движения.

Полученные результаты подтвердили оценки точности прибора БОКЗ-М, в наземных испытаниях, и продемонстрировали высокую точность поддержания орбитальной ориентации спутника. В сжатом виде эти результаты сформулированы в Заключение.

1. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБОРА БОКЗ-М ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

1.1. Принятые системы координат и связь между ними. Ниже используются три правые, декартовы системы координат, которые обозначим $x_1x_2x_3$, $X_1X_2X_3$ и $y_1y_2y_3$. Первая из этих систем – внутренняя система координат БОКЗа. Плоскость x_1x_2 параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось x_3 направлена от матрицы к объективу датчика. Система $X_1X_2X_3$ – вторая геоэквиаториальная система координат эпохи даты. Плоскость X_1X_2 совпадает с плоскостью среднего земного экватора этой эпохи, оси X_1 и X_3 направлены соответственно в точку среднего весеннего равноденствия и северный полюс мира. Эту систему считаем инерциальной. Система $y_1y_2y_3$ – строительная система координат спутника. В ней указываются компоненты его абсолютной угловой скорости, измеренные тремя ГИВУСами. Ниже рассматриваются измерения БОКЗа и ГИВУСов, выполненные во время полета спутника в орбитальной ориентации. В таком полете ось y_3 направлена по радиусу-вектору центра масс спутника относительно центра Земли, ось y_2 направлена вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника, ось y_1 направлена по трансверсали к орбите.

Системы $x_1x_2x_3$ и $y_1y_2y_3$ жестко связаны между собой. Формулы перехода от первой системы ко второй имеют вид

$$y_1 = -x_2, \quad y_2 = x_1 \sin \alpha - x_3 \cos \alpha, \quad y_3 = x_1 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha,$$

где $\alpha = 15^\circ$. Связь между системами координат $x_1x_2x_3$ и $X_1X_2X_3$ задается нормированным кватернионом $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$. Формулы перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ записываются в кватернионной форме следующим образом

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{q}^{-1}.$$

Абсолютную угловую скорость спутника обозначим $\boldsymbol{\omega}$. В строительной системе этот вектор имеет вид $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Вращательное движение спутника будем описывать, задавая кватернион \mathbf{q} в функции времени: $\mathbf{q} = \mathbf{q}_*(t)$. Формула

$$(0, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3) = 2\mathbf{q}_*^{-1} \circ \frac{d\mathbf{q}_*}{dt}$$

определяет компоненты $\hat{\omega}_i$ вектора $\boldsymbol{\omega}$ в системе $x_1x_2x_3$. В соответствии с приведенными выше формулами перехода имеем

$$\omega_1 = -\hat{\omega}_2, \quad \omega_2 = \hat{\omega}_1 \sin \alpha - \hat{\omega}_3 \cos \alpha, \quad \omega_3 = \hat{\omega}_1 \cos \alpha + \hat{\omega}_3 \sin \alpha.$$

1.2. Измерение параметров движения спутника в полете. Прибор БОКЗ выдает в дискретные моменты времени t_n ($n=1, 2, \dots$), $t_{n+1} - t_n = 3$ с, приближенные значения $\mathbf{q}_n \approx \mathbf{q}^*(t_n)$ кватерниона \mathbf{q} . ГИВУСы в моменты времени t'_k ($k=1, 2, \dots$), $t'_{k+1} - t'_k = 0.1$ с, выдают два комплекта приближенных значений компонент вектора угловой скорости $\omega_i^{(k)} \approx \omega_i(t'_k)$ ($i=1, 2, 3$). Узлы временной сетки $\{t_n\}$ в общем случае не входят в число узлов сетки $\{t'_k\}$.

На некоторых отрезках времени длиной до 20 мин все эти данные измерений записываются в память бортового компьютера и затем передаются на Землю. Задача состоит в том, чтобы по этим данным реконструировать реальное движение спутника и на основе этой реконструкции оценить точность измерений БОКЗа. Пример решения такой задачи с использованием одних только измерений БОКЗа приведен в [1]. Привлечение измерений ГИВУСов позволяет решить поставленную задачу более надежно. Возможны несколько способов совместной обработки имеющихся данных. В данном разделе рассмотрим способ, представляющий собой модификацию способа, использованного при анализе упомянутого только что примера в [1].

В основе этого способа лежат аппроксимация данных измерений БОКЗа с помощью дискретных рядов Фурье и оценка точности измерений на основе статистического анализа ошибок аппроксимации. Правильность построения рядов, в частности, число учитываемых гармоник, контролируется с использованием данных измерений ГИВУСов.

1.3. Аппроксимация вращательного движения спутника. Пусть на некотором отрезке времени БОКЗ выдал измерения t_n, \mathbf{q}_n ($n=1, 2, \dots, N$). Если длина $t_N - t_1$ этого отрезка невелика – в случае «Метеора-М» меньше 20 мин, то полученные кватернионы \mathbf{q}_n лежат в достаточно малой окрестности их "среднего значения"

$$\mathbf{q}_c = \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n.$$

Сглаживающую функцию будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{\text{sm}}(t) &= \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t), \quad \mathbf{s}(t) = (s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t)), \\ s_0(t) &= \frac{1 - z_1^2(t) - z_2^2(t) - z_3^2(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)}, \\ s_i(t) &= \frac{2z_i(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)} \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned}$$

где $z_i(t)$ задаются выражениями

$$z_i(t) = a_{i, M+1} + a_{i, M+2}(t - t_1) + \sum_{m=1}^M a_{i, m} \sin \frac{\pi m(t - t_1)}{(N - 1)h}.$$

Здесь $a_{i,k}$ – коэффициенты, $M \leq N - 2$, $h = 3$ с. Коэффициенты выберем из условия минимума функционала

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t_n)\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - \mathbf{s}(t_n)\|^2. \quad (1)$$

Использованные для параметризации $\mathbf{s}(t)$ величины z_i называются параметрами Родрига [1]. При такой параметризации $\|\mathbf{s}(t)\| \equiv 1$.

Заметим, что кватернион \mathbf{q}_c является решением задачи

$$\sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q}} \quad \text{при условии} \quad \|\mathbf{q}\| = 1,$$

поэтому при малой длине $t_N - t_1$ выполнены соотношения $\|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - 1\| \ll 1$ и, следовательно, $|z_i(t)| \ll 1$ ($i = 1, 2, 3$).

Пусть кватернионы $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ нормированы и параметризованы параметрами Родрига u_i и v_i соответственно. В таком случае $u_i = p_i / (1 + p_0)$, $v_i = q_i / (1 + q_0)$ ($i = 1, 2, 3$). При $|u_i| \ll 1$, $|v_i| \ll 1$ справедливо соотношение

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 \approx 4 \sum_{i=1}^3 (u_i - v_i)^2$$

с ошибкой четвертого порядка малости относительно величин u_i и v_i . Указанный факт позволяет упростить задачу отыскания функций $z_i(t)$.

Выразим кватернионы $\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n$ через параметры Родрига $z_i^{(n)}$ и представим формулу (1) в виде

$$\Phi \approx 4 \sum_{i=1}^3 \Phi_i, \quad \Phi_i = \sum_{n=1}^N [z_i^{(n)} - z_i(t)]^2.$$

Минимизация правой части последней формулы для Φ по коэффициентам выражений $z_i(t)$ сводится к независимой минимизации слагаемых Φ_i . Получаем три независимые линейные задачи наименьших квадратов, решения которых находятся по формулам теории дискретных рядов Фурье [2]. При наличии пропусков в измерениях используется общий метод наименьших квадратов. Если построенные функции $z_i(t)$ обеспечивают приемлемую точность аппроксимации величин $z_i^{(n)}$, то можно ожидать, что кватернионная функция $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t)$ будет достаточно точной аппроксимацией вращательного движения системы координат $x_1 x_2 x_3$.

Если движение системы $x_1 x_2 x_3$ выражено через параметры Родрига $z_i(t)$, то ее угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ также можно выразить через эти параметры. Введем вектор $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$. Тогда [3]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{4}{(1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^2} \left[(1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - 2 \left(\mathbf{z} \times \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) + 2 \left(\mathbf{z} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) \mathbf{z} \right].$$

Компоненты вектора \mathbf{z} и определяемого последней формулой вектора $\boldsymbol{\omega}$ относятся к системе $x_1 x_2 x_3$. Пересчет компонент $\boldsymbol{\omega}$ в строительную систему координат выполняется по формулам п. 1.1.

1.4. Результаты обработки данных измерений. Примеры аппроксимации величин $z_i^{(n)}$ выражениями $z_i(t)$ приведены на рис. 1а и 1б (рисунки сгруппированы по файлам – источникам данных). Здесь сплошными кривыми изображены графики аппроксимирующих выражений, маркерами обозначены величины $z_i^{(n)}$ при $n = 1, 11, 21, \dots$. В подписях к рисункам указаны число N включенных в обработку данных, число M гармоник в аппроксимирующих выражениях и параметры σ_i – увеличенные в 4 раза стандартные отклонения соответствующих ошибок аппроксимации. Коэффициент 4 появляется при пересчете ошибок в параметрах Родрига в ошибки определения углов поворота датчика вокруг осей x_i (бесконечно малому повороту системы $x_1 x_2 x_3$, задаваемому вектором $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, отвечают параметры Родрига $z_i = \theta_i / 4$). На рис. 1б и 1бб приведены графики остатков

$$e_i^{(n)} = 4[z_i^{(n)} - z(t_n)] \quad (n = 1, 2, \dots, N; i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

На фоне этих графиков изображены горизонтальные прямые $e_i = \pm \sigma_i$.

На рис. 2а и 7а приведены графики компонент угловой скорости $\omega_i(t)$, построенные по аппроксимирующим выражениям $z_i(t)$. Эти графики интересно сравнить с аналогичными графиками, построенными по измерениям ГИВУСов. Однако прямое сравнение неинформативно. Измерения ГИВУСов содержат достаточно большие по амплитуде колебания с частотой 0.4 Гц, обусловленные вращающимся на спутнике зеркалом. Перед сравнением эти колебания следует отфильтровать. Вращение зеркала вызывает малые колебания спутника, которые в рамках рассматриваемого способа оценивания точности БОКЗа, вносят некоторый вклад в оценку погрешности прибора. В результате оценка погрешности получается несколько завышенной.

Низкочастотная фильтрация данных измерений ГИВУСов выполнялась с помощью дискретных рядов Фурье. Измерения $t'_k, \omega_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) каждой компоненты угловой скорости, охватывающие достаточно большой (более нескольких минут) отрезок времени сглаживались выражением вида

$$a_{M+1} + a_{M+2}(t - t_1) + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{\pi m(t - t_1)}{(N-1)h'}.$$

Здесь $h' = 0.1$ с, $M \ll N$, коэффициенты a_{im} находились по формулам теории дискретных рядов Фурье [2]. При наличии пропусков в данных использовался общий метод наименьших квадратов. Графики сглаживающих выражений представлены на рис. 2б и 7б вместе с повторениями графиков компонент угловой скорости, перенесенных с рис. 2а и 7а. Графики-повторения снабжены маркерами, в подписях к рис. 2б, 7б приведены использованные значения числа гармоник M в сглаживающих выражениях и стандартные отклонения ошибок сглаживания. Для данных, представленных на рис. 2б, стандартные отклонения ошибок сглаживания величин $\omega_1^{(k)}$, $\omega_2^{(k)}$ и $\omega_3^{(k)}$ составляют соответственно 4.2"/с, 2.6"/с и 5.0"/с. Для данных на рис. 7б эти стандартные отклонения составляют 4.4"/с, 3.3"/с, 5.4"/с. Измерения ГИВУСов содержат постоянные смещения в измерениях. Графики на рис. 2б и 7б получены после того, как эти смещения были устранены. А именно, средние значения сглаживающих выражений были изменены таким образом, чтобы совпадать со средними значениями соответствующих функций $\omega_i(t)$, рассчитанных по выражениям $z_i(t)$.

1.5. Спектральный анализ данных измерений. Числа гармоник в выражениях $z_i(t)$ и выражениях, сглаживающих измерения ГИВУСов, выбирались по результатам спектрального анализа соответствующих данных измерений. Приведем основные соотношения, лежащие в основе этого анализа и некоторые его результаты.

Пусть x_n ($n = 1, 2, \dots, N$) – исследуемые данные измерений. Значение x_n отвечает моменту времени $t_n = t_0 + nh$, где $h > 0$ – шаг дискретизации. Периодограммой называется функция $I(f)$, рассматриваемая на отрезке $0 \leq f \leq F$, $F = (2h)^{-1}$, и определенная соотношениями [4]

$$I(f) = \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \cos\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \sin\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

Здесь f – пробная частота, F – частота Найквиста. Если моменты времени t_n выражены в секундах, то f и F измеряются в герцах. Для измерений ГИВУСов $h = 0.1$ с, $F = 5$ Гц. Для значений угловой скорости, рассчитанных по измерениям БОКЗа, шаг h зависел от длины интервала обработки и лежал в пределах $0.07 \div 0.1$ с.

Практическое использование периодограммы основано на следующем ее свойстве. Предположим, что исследуемые данные суть значения функции

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k \cos 2\pi \lambda_k t + \beta_k \sin 2\pi \lambda_k t),$$

где α_k , β_k и λ_k – параметры, причем все $\lambda_k \in (0, F)$ и среди них нет одинаковых. Тогда $\bar{x} \approx \alpha_0$, периодограмма имеет максимумы в точках $f = f_k \approx \lambda_k$ и

$\alpha_k^2 + \beta_k^2 \approx 4I(f_k)/N^2$. В общем случае точность выписанных приближенных соотношений увеличивается с ростом N . Таким образом, поиск гармонических составляющих – циклических трендов – в данных измерений сводится к поиску максимумов функции $I(f)$.

Ниже вместо графиков периодограммы будем рассматривать графики функции $A(f) = 2\sqrt{I(f)}/N$, называемой амплитудным спектром. Амплитудный спектр удобен тем, что его максимальные значения являются оценками амплитуд соответствующих циклических трендов. Однако значимые максимумы функции $A(f)$ выражены менее наглядно значимых максимумов периодограммы.

На рис. 3 – 5 и 8 – 10 приведены графики амплитудных спектров рядов измерений $\omega_i^{(k)}$ и функций $\omega_i(t)$, рассчитанных по выражениям $z_i(t)$. На рисунках с индексом «а» приведены спектры рядов измерений: вверху изображен спектр на отрезке $0 \leq f \leq 0.5$ Гц (отрезок $0.5 \leq f \leq F = 5$ Гц для всех рядов данных содержит лишь несколько гармоник с весьма малыми амплитудами), внизу начальный отрезок верхнего графика повторен в увеличенном масштабе по оси абсцисс. В нижней части рисунков с индексом «б» приведены графики амплитудного спектра функций $\omega_i(t)$. Спектры локализованы внутри отрезка $0 \leq f \leq 0.025$ Гц для функций, изображенных на рис. 2а, и внутри отрезка $0 \leq f \leq 0.03$ Гц для функций на рис. 7а. В верхней части рис. 3 – 5 и 8 – 10 с индексом «б» в одной системе координат приведены два графика: повторен нижний график данного рисунка и нижний график того же рисунка с индексом «а». Иными словами, в верхней части рисунков с индексом «б» дано непосредственное сравнение начальных отрезков спектров данных измерений и спектров функций $\omega_i(t)$. Как видим, они весьма точно совпадают. Кроме того, рассматривая нижние части рис. 3 – 5 и 8 – 10 можно провести сравнение тех же графиков без наложения их друг на друга. Здесь также налицо хорошее совпадение.

Поскольку начальные отрезки спектров данных измерений $\omega_i^{(k)}$ и спектры соответствующих функций $\omega_i(t)$ совпадают, сделанный выбор числа гармоник в аппроксимирующих выражениях можно считать удачным, а близость графиков на рис. 2б и 7б не является удивительной. Полученные результаты свидетельствуют о правильной аппроксимации вращательного движения спутника в низкочастотной области. Следовательно, стандартные отклонения $\sigma_1 = 2.47''$, $\sigma_2 = 5.05''$, $\sigma_3 = 13.1''$ для движения на рис. 1, $\sigma_1 = 2.15''$, $\sigma_2 = 7.01''$, $\sigma_3 = 19.0''$ для движения на рис. 6 дают адекватные оценки погрешности определения ориентации спутника по данным измерений БОКЗ.

На самом деле эти оценки несколько завышены. Как уже говорилось, измерения ГИВУСов содержат достаточно большие циклические тренды с частотой 0.4 Гц. Этим трендам отвечают резкие пики на указанной частоте в спек-

трах на рис. 3 – 5 и 8 – 10 с индексом «а». Пиковые значения функции $A(f)$ являются оценками амплитуд трендов. Согласно графикам спектров на рис. 3 – 5 в измерениях компонент угловой скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 имеются тренды с частотой 0.4 Гц и амплитудами 5.19"/с, 3.52"/с и 6.44"/с соответственно. Малым колебаниям в компонентах угловой скорости отвечают колебания соответствующих компонент вектора бесконечно малого поворота. Амплитуды последних колебаний получаются из амплитуд для угловых скоростей делением на круговую частоту $2\pi \cdot 0.4 \text{ Гц} = 2.513 \text{ с}^{-1}$. Таким образом, амплитуды малых колебаний спутника вокруг осей y_1 , y_2 и y_3 составляют 2.07", 1.40" и 2.56". Упрощая ситуацию, примем, что формулы перехода от системы $y_1 y_2 y_3$ к системе $x_1 x_2 x_3$ имеют вид: $x_1 = y_3$, $x_2 = -y_1$, $x_3 = -y_2$. Учтем также, что среднеквадратичное значение гармонических колебаний с амплитудой A равно $A/\sqrt{2}$. Следовательно, вклад указанных колебаний в ошибки определения ориентации спутника по углам поворота вокруг осей x_1 , x_2 и x_3 составляют 1.81", 1.46" и 0.99". Сравним эти значения со значениями $\sigma_1 = 2.47"$, $\sigma_2 = 5.05"$, $\sigma_3 = 13.1"$. Возможно, ошибки по углам поворота вокруг осей x_1 и x_2 в определенной степени определяются указанными колебаниями.

Приведенные оценки относились к движению спутника, представленному на рис. 1 – 5. Для движения на рис. 6 – 10 аналогичным образом получаем: амплитуды циклических трендов с частотой 0.4 Гц в измерениях компонент угловой скорости ω_1 , ω_2 и ω_3 равны соответственно 4.95"/с, 4.03"/с и 6.77"/с; амплитуды малых колебаний спутника вокруг осей y_1 , y_2 и y_3 составляют 1.97", 1.60" и 2.69"; вклад этих колебаний в ошибки определения ориентации спутника по углам поворота вокруг осей x_1 , x_2 и x_3 – 1.90", 1.39" и 1.13". Последние значения надо сравнить со значениями $\sigma_1 = 2.15"$, $\sigma_2 = 7.01"$, $\sigma_3 = 19.0"$.

1.6. Расчет ориентации спутника относительно орбитальной системы координат. На борту «Метеора-М» имеется аппаратура спутниковой навигации, которая выдает измерения положения и скорости аппарата относительно гринвичской системы координат с шагом 0.1 с. Эти измерения вместе с измерениями БОКЗ позволяют найти ориентацию спутника относительно орбитальной системы координат. Расчет орбитальной ориентации спутника выполняется в три этапа. На первом этапе вычисляется матрица перехода от строительной системы координат спутника $y_1 y_2 y_3$ ко второй геоэквиаториальной системе координат эпохи даты $X_1 X_2 X_3$. Этот этап по существу описан в п. 1.3. Там не упоминается требуемая матрица перехода, но она очевидным образом рассчитывается по кватернионной функции $\mathbf{q}_{sm}(t)$ и матрице перехода от системы координат БОКЗа $x_1 x_2 x_3$ к системе $y_1 y_2 y_3$.

На втором этапе находится матрица перехода от системы $X_1 X_2 X_3$ к гринвичской системе координат. Этот переход представляет собой поворот системы $X_1 X_2 X_3$ вокруг оси X_3 на угол, называемый гринвичским звездным вре-

менем S , $S(t) = S_0 + \omega_e t$. Здесь S_0 – гринвичское звездное время в гринвичскую полночь соответствующей даты, t – время, отсчитываемое от этой гринвичской полночи, ω_e – угловая скорость вращения Земли. Для расчета S_0 имеются простые формулы (см., например, [5]).

На третьем этапе находится матрица перехода от гринвичской системы координат к орбитальной системе. В последней ось 3 направлена по радиусу-вектору центра масс спутника относительно центра Земли, ось 2 направлена вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника, ось 1 дополняет систему до правой (направлена по трансверсали к орбите). Вычисление выполняется по данным измерений аппаратуры спутниковой навигации. Координаты и компоненты скорости центра масс спутника в гринвичской системе координат аппроксимируются дискретными рядами Фурье. Аппроксимация строится на всем представляющем интерес отрезке времени. Во всех выполненных вариантах обработки данных длина интервала аппроксимации не превышала 20 мин, среднеквадратичные ошибки аппроксимации координат и компонент скорости не превосходили соответственно 1 м и 1 мм/с. Использование аппроксимации позволяет вычислить матрицу перехода от гринвичской системы координат к орбитальной системе в любой точке рассматриваемого временного отрезка.

Знание трех перечисленных выше матриц позволяет найти матрицу перехода от орбитальной системы к системе $y_1 y_2 y_3$. Эту матрицу удобно параметризовать самолетными углами: α (тангаж), β (рысканье) и γ (крен). Напомним их определение. Орбитальная система переводится в систему $y_1 y_2 y_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол α вокруг оси 2, 2) на угол β вокруг новой оси 3, 3) на угол γ вокруг оси 1, получившейся после первых двух поворотов и совпадающей с осью y_1 . Примеры расчета углов α , β и γ описанным способом приведены на рис. 11. Из этого рисунка следует, что на приведенных временных отрезках углы α и γ не превосходили по модулю 0.4° , угол β совершает колебания с амплитудой менее 0.3° относительно среднего положения $1.0 - 1.4^\circ$.

Вращательное движение спутника на соседних витках было примерно одинаковым. С учетом этого обстоятельства попытаемся скомпоновать движение на «виртуальном» витке, рисуя в единой системе координат графики одноименных величин на разных временных отрезках; при этом за начало отсчета времени для каждого такого графика примем момент прохождения спутником ближайшего предшествующего восходящего узла орбиты. Пример движения на виртуальном витке приведен на рис. 12. К сожалению, на полный виток данных не хватило, но сходство движения на соседних витках заметно.

Указанное сходство и числовые оценки стандартных отклонений σ_i свидетельствует также о том, примеры определения движения спутника, рассмотренные в пп. 1.4 и 1.5, являются типичными. Типичными являются и приведенные там оценки точности показаний БОКЗа.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ КВАТЕРНИОНА ОРИЕНТАЦИИ И ВЕКТОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

2.1. Определение движения спутника по данным измерений с помощью кинематической модели движения. Оценку точности показаний БОКЗа и ГИВУСов можно выполнить по более жесткой схеме, чем это было описано в предыдущем разделе. Эта более жесткая схема также основывается на кинематических уравнениях вращательного движения спутника, но измерения угловой скорости играют в ней более важную роль, а измерения звездного датчика рассматриваются в рамках математической модели с прозрачным механическим смыслом. Новая схема приспособлена для случая достаточно частой временной сетки со значениями вектора $\boldsymbol{\omega}$ и произвольной (в частности, редкой или сильно неравномерной) временной сетки со значениями кватерниона \mathbf{q} . Здесь и ниже без дополнительных оговорок используются обозначения раздела 1. В рамках этой схемы сначала по измерениям угловой скорости

$$t'_k, \quad \boldsymbol{\omega}_k = (\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \omega_3^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

строится их аппроксимация

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ap}}(t) = (\omega_{\text{ap},1}(t), \omega_{\text{ap},2}(t), \omega_{\text{ap},3}(t)), \quad t_a \leq t \leq t_b. \quad (4)$$

Для построения аппроксимации можно использовать дискретные ряды Фурье или другие методы. Используя функцию $\boldsymbol{\omega}_{\text{ap}}(t)$, на отрезке $t_a \leq t \leq t_b$ определим систему уравнений

$$\begin{aligned} 2 \frac{dp_0}{dt} &= -\omega'_1 p_1 - \omega'_2 p_2 - \omega'_3 p_3, & 2 \frac{dp_1}{dt} &= \omega'_1 p_0 + \omega'_3 p_2 - \omega'_2 p_3, \\ 2 \frac{dp_2}{dt} &= \omega'_2 p_0 + \omega'_1 p_3 - \omega'_3 p_1, & 2 \frac{dp_3}{dt} &= \omega'_3 p_0 + \omega'_2 p_1 - \omega'_1 p_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\omega'_i = \omega_{\text{ap},i}(t) + \Delta_i$ ($i = 1, 2, 3$), Δ_i – постоянные величины, которые рассматриваем как возможные смещения в телеметрических данных (3) и функциях (4). Неизвестные функции этой системы будем рассматривать как компоненты нормированного кватерниона $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $\|\mathbf{p}\| = 1$, задающего связь между системами координат $y_1 y_2 y_3$ и $X_1 X_2 X_3$. Формулы перехода от системы $y_1 y_2 y_3$ к системе $X_1 X_2 X_3$ записываются в кватернионной форме следующим образом

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{p} \circ (0, y_1, y_2, y_3) \circ \mathbf{p}^{-1}.$$

Условие нормированности \mathbf{p} корректно, поскольку система (5) допускает интегральное соотношение

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1.$$

Обозначим через $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$ не зависящий от времени нормированный кватернион, задающий связь между системами координат $x_1x_2x_3$ и $y_1y_2y_3$:

$$(0, y_1, y_2, y_3) = \mathbf{Q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{Q}^{-1}, \quad \|\mathbf{Q}\| = 1.$$

Тогда введенный в разделе 1 кватернион \mathbf{q} перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ можно представить в виде $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \mathbf{Q}$. Функцию $\mathbf{q}_*(t)$, аппроксимирующую измерения БОКЗа, т. е. наилучшим образом уравнивающую соотношения $\mathbf{q}_n \approx \mathbf{q}_*(t_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$), будем искать в виде $\mathbf{q}_*(t) = \mathbf{p}(t) \circ \mathbf{Q}$, где $\mathbf{p}(t)$ – решение системы (5). Здесь предполагается, что $t_a < t_1 < t_2 < \dots < t_N < t_b$. Выполнение строгих неравенств $t_a < t_0$ и $t_N < t_b$ вместо допустимых нестрогих неравенств $t_a \leq t_0$ и $t_N \leq t_b$ желательно для исключения разного рода краевых эффектов, возможных при построении функции $\omega_{\text{ap}}(t)$. Под наилучшим уравниванием будем понимать уравнивание методом наименьших квадратов. Рассогласование кватернионов \mathbf{q}_n и $\mathbf{q}_*(t_n)$ естественно оценивать величиной

$$\|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_*(t_n)\| = \|1 - \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{q}_*(t_n)\| = \|1 - \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}\|$$

и решение $\mathbf{p}(t)$ выбирать из условия минимума выражения

$$\sum_{n=1}^N \|1 - \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{p}_*(t_n) \circ \mathbf{Q}\|^2.$$

Такой вид минимизируемого функционала обеспечивает приемлемую точность аппроксимации измерений, однако известные свойства ошибок БОКЗа [1] позволяют выбрать функционал наименьших квадратов более подходящим способом.

Обозначим $1 - \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q} = (a_{0,n}, a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n})$. Поскольку последний кватернион для искомого решения $\mathbf{p}(t)$ весьма мал по модулю, с высокой точностью имеем $a_{1,n}^2 + a_{2,n}^2 + a_{3,n}^2 \approx -2a_{0,n}$ и $\|1 - \mathbf{q}_n^{-1} \circ \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}\|^2 \approx a_{1,n}^2 + a_{2,n}^2 + a_{3,n}^2$. Величины $a_{i,n}$ ($i = 1, 2, 3$) имеют прозрачный механический смысл. Введем вектор $\delta\theta_n = 2(a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n})$, отнеся его компоненты к системе $x_1x_2x_3$. Тогда $2[\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_*(t_n)] \approx \mathbf{q}_*(t_n) \circ \delta\theta_n$. При умножении кватерниона на вектор последний считается чисто мнимым кватернионом. Из полученной формулы следует, что $\delta\theta_n$ – вектор бесконечно малого поворота КА из положения $\mathbf{q}_*(t_n)$ в положение \mathbf{q}_n . Величины $a_{i,n}$ ($i = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, N$) можно рассматривать как ошибки измерений. Их статистические свойства были исследованы в [1]. Эти ошибки почти некоррелированы, их средние значения равны нулю, стандартное откло-

нение ошибок $a_{3,n}$ существенно (в 5 – 10 раз) превосходит примерно одинаковые стандартные отклонения ошибок $a_{1,n}$ и $a_{2,n}$. С учетом указанных свойств функционал наименьших квадратов возьмем в виде

$$\Phi = \sum_{n=1}^N w_1 a_{1,n}^2 + w_2 a_{2,n}^2 + w_3 a_{3,n}^2. \quad (6)$$

Здесь w_i ($i=1,2,3$) – положительные постоянные – веса. Решение системы (5), доставляющее минимум функционалу (6), будем считать аппроксимацией движения КА.

Построение такой аппроксимации важно само по себе, но если ее построить, то можно затем исследовать статистические свойства величин $a_{i,n}$ ($i=1,2,3$) и получить оценки ошибок измерений БОКЗ. Описанная схема исследования ошибок является альтернативой подхода примененного в [1] и предыдущем разделе. Она – более жесткая, так как требует использования достаточно точных измерений угловой скорости. По существу эта схема позволяет выполнить комплексную проверку измерений БОКЗа и ГИВУСов.

2.2. Реализация схемы п. 2.1. Поскольку решение $\mathbf{p}(t)$ системы (5) должно быть нормированным, его начальные условия в точке t_0 (обычно $t_a < t_0 \leq t_1$) будем выражать через параметры Родрига z_1 , z_2 и z_3 (см. п. 1.3):

$$p_0(t_0) = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad p_i(t_0) = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i=1,2,3).$$

Функционал (6) будем минимизировать по 6 величинам – параметрам Родрига z_i , и смещениям Δ_i ($i=1,2,3$). Для удобства записи объединим все эти параметры в один вектор $x = (x_1, \dots, x_6)^T$ и будем рассматривать (6) как функцию x : $\Phi = \Phi(x)$. Искомая аппроксимация движения КА задается вектором параметров $x_* = (x_1^*, \dots, x_6^*)^T = \arg \min \Phi$.

Минимизация $\Phi(x)$ выполняется методом Гаусса-Ньютона [6]. На каждой итерации этого метода поправка Δx , уточняющая имеющуюся оценку $x \approx x_*$, определяется так называемой системой нормальных уравнений

$$C(x)\Delta x = d(x),$$

$$d(x) = (d_1, d_2, \dots, d_6)^T, \quad d_k = -\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 w_i a_{i,n} \frac{\partial a_{i,n}}{\partial x_k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k},$$

$$C(x) = \|c_{kj}\|_{k,j=1}^6, \quad c_{kj} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial a_{i,n}}{\partial x_k} \frac{\partial a_{i,n}}{\partial x_j} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Здесь производные $\partial a_{i,n} / \partial x_k$ суть компоненты мнимой части кватерниона $-\mathbf{q}_n^{-1} \circ \partial \mathbf{p}(t_n) / \partial x_k \circ \mathbf{Q}$,

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t_n)}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \mathbf{p}(t_n) \circ \frac{\partial \Psi(t_n)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_k}, \frac{\partial \psi_3}{\partial x_k} \right),$$

векторы $\partial \Psi(t) / \partial x_k$ – псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных $\partial \mathbf{p}(t) / \partial x_k$. Псевдопроизводная – это не частная производная некоторой векторной функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами: в обозначении $\partial \psi_m / \partial x_k$ индекс m указывает векторную компоненту, индекс k – номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Псевдопроизводная – это аналог угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная – для расчета производных по параметру; ср. последнее выражение для $\partial \mathbf{p} / \partial x_k$ и уравнения (5), которые можно записать как

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \circ \boldsymbol{\omega}', \quad \boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3). \quad (3')$$

В рассматриваемой задаче псевдопроизводные находятся посредством интегрирования уравнений в вариациях (\mathbf{e}_k – орт оси y_k , $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ и т. д.)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial z_k} + \boldsymbol{\omega}' \times \frac{\partial \Psi}{\partial z_k} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_k} + \boldsymbol{\omega}' \times \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta_k} = \mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

совместно с уравнениями (3'). Начальные условия для псевдопроизводных в точке t_0 следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} &= s(z_1 p_1 + p_0), & \frac{\partial \psi_2}{\partial z_1} &= s(z_1 p_2 - p_3), & \frac{\partial \psi_3}{\partial z_1} &= s(z_1 p_3 + p_2), \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} &= s(z_2 p_1 + p_3), & \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} &= s(z_2 p_2 + p_0), & \frac{\partial \psi_3}{\partial z_2} &= s(z_2 p_3 - p_1), \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial z_3} &= s(z_3 p_1 - p_2), & \frac{\partial \psi_2}{\partial z_3} &= s(z_3 p_2 + p_1), & \frac{\partial \psi_3}{\partial z_3} &= s(z_3 p_3 + p_0), \\ s &= \frac{4}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, & \frac{\partial \psi_k}{\partial \Delta_m} &= \delta_{km} \text{ (символ Кронекера)}, & k, m &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь $p_k = p_k(t_0)$ выражаются через параметры Родрига z_i по формулам, указанным выше.

Точность аппроксимации данных измерений БОКЗа и разброс в определении компонент x_* будем характеризовать, следуя методу наименьших квад-

ратов, соответствующими стандартными отклонениями. Средняя квадратичная ошибка единицы веса находится по формуле

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{\Phi(x_*)}{3(N-2)}}.$$

Ковариационная матрица оценки x_* равна $\sigma_w^2 C^{-1}(x_*)$, стандартные отклонения величин x_k^* равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов этой матрицы. Стандартные отклонения величин z_i^* и Δ_i^* будем обозначать σ_{z_i} и σ_{Δ_i} .

2.3. Численное интегрирование дифференциальных уравнений, используемых в модели движения спутника. Описанную схему в ряде случаев целесообразно реализовать без построения аппроксимирующей функции $\omega_{\text{ap}}(t)$. Эта функция вводится для того, чтобы, во-первых, задать уравнения (5), т.е. модель движения КА, и, во-вторых, применить для их численного интегрирования подходящую стандартную процедуру. При построении функции $\omega_{\text{ap}}(t)$ происходит предварительное сглаживание (низкочастотная фильтрация) измерений угловой скорости, что позволяет интегрировать уравнения (5), (7) на достаточно крупной временной сетке. Но с помощью специальных процедур уравнения (5) и (7) можно численно интегрировать на сетке $\{t'_k\}$, используя в качестве значений $\omega'_i(t'_k)$ величины $\omega_i^{(k)} + \Delta_i$. Иными словами, можно интегрировать уравнения (5), (7), подставляя в них непосредственно данные измерений. В ряде случаев такой подход может оказаться более точным. Рассмотрим две его возможные реализации.

Разностную схему для интегрирования уравнений (5) построим так. Проинтегрируем левую и правую части уравнения (5') по времени на отрезке $[t'_k, t'_{k+1}]$, считая его решение известным. Получим (ради удобства ниже везде пишем ω вместо ω')

$$\mathbf{p}(t'_{k+1}) - \mathbf{p}(t'_k) = \frac{1}{2} \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \mathbf{p}(t) \circ \omega(t) dt.$$

Для гладких решений уравнения (5') имеем (ср. формулу трапеций)

$$\int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \mathbf{p}(t) \circ \omega(t) dt = \frac{t'_{k+1} - t'_k}{2} [\mathbf{p}(t'_{k+1}) \circ \omega(t'_{k+1}) + \mathbf{p}(t'_k) \circ \omega(t'_k)] + O[(t'_{k+1} - t'_k)^3],$$

поэтому с погрешностью $O[(t'_{k+1} - t'_k)^3]$ можно записать

$$\mathbf{p}(t'_{k+1}) - \mathbf{p}(t'_k) = \frac{t'_{k+1} - t'_k}{4} [\mathbf{p}(t'_{k+1}) \circ \omega(t'_{k+1}) + \mathbf{p}(t'_k) \circ \omega(t'_k)].$$

Отсюда находим

$$\mathbf{p}(t'_{k+1}) = \mathbf{p}(t'_k) \circ \boldsymbol{\kappa}_k, \quad \boldsymbol{\kappa}_k = \left(1, \frac{(t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\omega}(t'_k)}{4} \right) \circ \left(1, -\frac{(t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1})}{4} \right)^{-1}.$$

Обозначим $\tau_k = (t'_{k+1} - t'_k)/4$. Простые преобразования дают

$$\boldsymbol{\kappa}_k = \frac{1}{1 + \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_{k+1})|^2} \left(1 - \tau_k^2 \boldsymbol{\omega}(t'_k) \cdot \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1}), \tau_k [\boldsymbol{\omega}(t'_k) + \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1})] + \tau_k^2 \boldsymbol{\omega}(t'_k) \times \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1}) \right).$$

Последние соотношения задают разностную схему для численного интегрирования уравнения (5'). Компонентами векторов $\boldsymbol{\omega}(t'_k)$ в ней служат величины $\omega_i^{(k)} + \Delta_i$ ($i=1,2,3$). Такая схема не сохраняет норму кватерниона:

$$\|\mathbf{p}(t'_{k+1})\| = \|\mathbf{p}(t'_k)\| \sqrt{\frac{1 + \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_k)|^2}{1 + \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_{k+1})|^2}}.$$

Однако если τ_k не зависит от k и угловая скорость КА примерно постоянна по модулю, то изменение нормы в процессе интегрирования будет незначительным. В приводимых ниже примерах коррекция нормы не потребовалась.

Аналогичным образом строится разностная схема для интегрирования уравнений (7). Построим ее на примере второго из этих уравнений. Введя обозначения $\boldsymbol{\xi} = \partial \boldsymbol{\Psi} / \partial \Delta_k$, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_k$, запишем второе уравнение (7) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}.$$

Интегрируя его на отрезке $[t'_k, t'_{k+1}]$, получим (напомним $\boldsymbol{\eta} = \text{const}$)

$$\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) - \boldsymbol{\xi}(t'_k) = \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \boldsymbol{\xi}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t) dt + (t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\eta}.$$

Интеграл в правой части вычислим приближенно по формуле трапеций. Будем иметь

$$\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) - \boldsymbol{\xi}(t'_k) = \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} [\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) \times \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1}) + \boldsymbol{\xi}(t'_k) \times \boldsymbol{\omega}(t'_k)] + (t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\eta}.$$

Погрешность последней формулы $O[(t'_{k+1} - t'_k)^3]$. Эту формулу, переписав ее в виде

$$\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) + \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1}) \times \boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) = \boldsymbol{\xi}(t'_k) - \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} \boldsymbol{\omega}(t'_k) \times \boldsymbol{\xi}(t'_k) + (t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\eta},$$

будем рассматривать как уравнение относительно $\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1})$ при известных остальных входящих в нее величинах. Решение этого уравнение можно представить векторной формулой, но проще записать это уравнение в виде скалярной сис-

темы третьего порядка и решить ее по правилу Крамера. Такое решение лежит в основе разностной схемы для численного интегрирования второго уравнения (7). Положив в этой схеме $\boldsymbol{\eta} = 0$, получим разностную схему для первого уравнения (7).

Приведем еще одну разностную схему интегрирования кинематических уравнений. Она не требует коррекции нормы кватерниона, но использует измерения угловой скорости в точках сетки $\{t'_{k+0.5}\}$, где $t'_{k+0.5} = (t'_k + t'_{k+1})/2$. Некоторые ГИВУСы выдают измерения именно на такой сетке; в случае ГИВУСов «Метеора-М» можно взять $\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}) = [\boldsymbol{\omega}(t'_k) + \boldsymbol{\omega}(t'_{k+1})]/2$. Несколько модифицируем вид соотношений, лежащих в основе схемы для интегрирования уравнения (5')

$$\int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \mathbf{p}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t) dt = \frac{t'_{k+1} - t'_k}{2} [\mathbf{p}(t'_{k+1}) + \mathbf{p}(t'_k)] \circ \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}) + O[(t'_{k+1} - t'_k)^3],$$

$$\mathbf{p}(t'_{k+1}) - \mathbf{p}(t'_k) = \frac{t'_{k+1} - t'_k}{4} [\mathbf{p}(t'_{k+1}) + \mathbf{p}(t'_k)] \circ \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}),$$

$$\mathbf{p}(t'_{k+1}) = \mathbf{p}(t'_k) \circ \boldsymbol{\kappa}_k,$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_k &= \left(1, \frac{(t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{4} \right) \circ \left(1, -\frac{(t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{4} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{1 - \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})|^2}{1 + \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})|^2}, \frac{2\tau_k \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{1 + \tau_k^2 |\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})|^2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку здесь $|\boldsymbol{\kappa}_k| = 1$, новая разностная схема сохраняет нормировку кватерниона. Аналогичным образом модифицируются соотношения, дающие разностную схему для интегрирования второго уравнения (7):

$$\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) - \boldsymbol{\xi}(t'_k) = \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} [\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) + \boldsymbol{\xi}(t'_k)] \times \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}) + (t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\eta},$$

$$\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) + \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}) \times \boldsymbol{\xi}(t'_{k+1}) = \boldsymbol{\xi}(t'_k) - \frac{(t'_{k+1} - t'_k)}{2} \boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5}) \times \boldsymbol{\xi}(t'_k) + (t'_{k+1} - t'_k) \boldsymbol{\eta}.$$

Последнее соотношение рассматривается как уравнение относительно $\boldsymbol{\xi}(t'_{k+1})$, которое решается с помощью правила Крамера.

2.4. Примеры определения движения спутника. Обработаем описанным способом данные, изучавшиеся в разделе 1. Если главной задачей определения движения является оценка точности показаний БОКЗа, то описанную выше схему целесообразно несколько модифицировать. Вследствие специфической роли, которую играет в БОКЗе ось x_3 , более интересно определять движение системы координат $x_1 x_2 x_3$ чем системы $y_1 y_2 y_3$. Чтобы наиболее просто

реализовать этот подход, надо измерения угловой скорости перевести в систему $x_1x_2x_3$ по формуле $\mathbf{\Omega} = \mathbf{Q}^{-1} \circ \boldsymbol{\omega} \circ \mathbf{Q}$ и заменить (3') уравнением $d\mathbf{q}/dt = (\mathbf{q} \circ \mathbf{\Omega})/2$ для кватерниона $\mathbf{q} = \mathbf{p} \circ \mathbf{Q}$. Решение этого уравнения дает непосредственно функцию $\mathbf{q}_*(t)$. Все утверждения и формулы предыдущих пунктов остаются в силе, надо только положить в них $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega}$, $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, $\mathbf{Q} = 1$. Поскольку минимизация функционала (6) выполняется итерациями, сделанная замена переменных обеспечивает даже некоторую экономию вычислений. Ниже вычисления проделаны в рамках описанной модификации, но обсуждение результатов ведется в терминах уравнений (5), (7).

Результаты, представленные на рис. 13, 14, получены при использовании весов $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 0.2$. На рис. 13а и 14а приведены графики функций $\omega_{\text{ap},i}(t)$ ($i=1,2,3$); векторные компоненты указаны в системе $y_1y_2y_3$. Это те же функции, которые представлены графиками без маркеров на рис. 2б и 7б в разделе 1, но заданные на несколько иных отрезках времени, и у них не корректировались средние значения. В аппроксимациях $\omega_{\text{ap},i}(t)$ использованы те же числа гармоник, что и в разделе 1. На рис. 13б и 14б приведены графики ошибок аппроксимации данных измерений БОКЗа решениями уравнений (5). Эти графики представляют собой ломаные $e_i(t)$ с ординатами вершин $e_i(t_n) = -2a_{i,n}$. Среднеквадратичные значения величин $e_i(t_n)$ ($n=1,2,\dots,N$) для $i=1, 2$ и 3 на рис. 13б составляют соответственно 13.4", 19.1" и 46.9". Здесь $N=357$. Аналогичные среднеквадратичные значения на рис. 14б составляют 13.4", 14.2", 31.0". В данном случае $N=416$.

Рис. 13в, 14в аналогичны рис. 13б, 14б, но получены с непосредственным использованием в уравнениях (5), (7) данных измерений угловой скорости. Среднеквадратичные значения величин $e_i(t_n)$ ($n=1,2,\dots,N$) на рис. 13в составляют 4.5", 6.4", 20.2"; на рис. 14в они равны 13.7", 14.6", 30.1". Как видим, непосредственное использование данных измерений угловой скорости при интегрировании уравнений (5) и (7) в случае примера на рис. 13 дает заметно меньшие значения среднеквадратичных ошибок аппроксимации данных измерений БОКЗа. Причина, по-видимому, в каком-то локальном сбое измерений ГИВУ-Сов примерно на 530с рассматриваемого отрезка времени. Некоторое увеличение числа гармоник в функциях $\omega_{\text{ap},i}(t)$ ($i=1,2,3$) не приводит к повышению точности аппроксимации данных БОКЗ.

Графики на рис. 13в и 14в испытывают малые сравнительно высокочастотные колебания, отсутствующие на рис. 13б, 14б. По-видимому, эти колебания связаны с вращением зеркала на спутнике. Это вращение дает циклический тренд с частотой 0.4 Гц в измерениях угловой скорости (см. п. 1.5) и влияет на показания БОКЗа. Шаг дискретизации измерений БОКЗа составляет 3с, и указанный тренд не может проявиться в этих измерениях с частотой 0.4 Гц. Из-за наложения частот он проявляется с частотой 0.06667 Гц, которой соответствует период 15с. Колебания с этим периодом хорошо заметны на верхних графиках,

приведенных на рис. 13в, 14в. Еще более наглядно эти колебания проявляются на рис. 15б и 16б (см. ниже). В аппроксимирующих выражениях угловой скорости тренд с частотой 0.4 Гц отсутствует, поэтому колебания с периодом 15с на рис. 13б и 14б (а также на рис. 15а и 16а) не заметны.

При обработке телеметрических данных с «Метеора-М» уравнения (5), (7) интегрировались также посредством разностных схем, в которых измерения угловой скорости задавались на сетке $\{t'_{k+0.5}\}$. В качестве таких измерений использовались величины, полученные из настоящих измерений по формуле $\omega(t'_{k+0.5}) = [\omega(t'_k) + \omega(t'_{k+1})]/2$. В рассматриваемых примерах во всех числовых результатах, полученных с помощью разностных схем обоих типов, совпали первые 3 – 4 цифры.

Приведем полученные оценки точности и найденные смещения в данных измерений угловой скорости. Описанная выше модификация была сделана для упрощения расчета этих величин в системе $x_1x_2x_3$. В примере на рис. 13в имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{z_1} &= 0.24'', & \sigma_{z_2} &= 0.32'', & \sigma_{z_3} &= 0.42''/с, \\ \sigma_{\Delta_1} &= 0.0012''/с, & \sigma_{\Delta_2} &= 0.0012''/с, & \sigma_{\Delta_3} &= 0.0027''/с, \\ \Delta_1^* &= -1.84''/с, & \Delta_2^* &= 4.52''/с, & \Delta_3^* &= 0.55''/с;\end{aligned}$$

в примере на рис. 14в

$$\begin{aligned}\sigma_{z_1} &= 0.79'', & \sigma_{z_2} &= 0.64'', & \sigma_{z_3} &= 0.92''/с, \\ \sigma_{\Delta_1} &= 0.0019''/с, & \sigma_{\Delta_2} &= 0.0019''/с, & \sigma_{\Delta_3} &= 0.0043''/с, \\ \Delta_1^* &= -1.81''/с, & \Delta_2^* &= 4.64''/с, & \Delta_3^* &= 0.38''/с.\end{aligned}$$

Худшую точность аппроксимации измерений БОКЗа в примерах данного пункта по сравнению с разделом 1 можно объяснить несколькими причинами, прежде всего, ошибками ГИВУСов. При обработке все ошибки, так или иначе связанные с ГИВУСами, устранить весьма трудно. Однако есть две ошибки, которые, в принципе, устранить достаточно просто. Первая из них – ошибка знания взаимной ориентации систем координат $x_1x_2x_3$ и $y_1y_2y_3$, т. е. кватерниона \mathbf{Q} . Попытки уточнения этого кватерниона были сделаны, но в случае рассматриваемых данных они не привели к сколько-нибудь заметному уменьшению функционала (6) и дали явно неверные оценки \mathbf{Q} . По-видимому, обработанные отрезки имели недостаточную длину. Описание уточнения \mathbf{Q} достаточно громоздко и здесь приводиться не будет.

Вторая ошибка состоит в предположении о постоянстве смещений Δ_i в измерениях угловой скорости на всем отрезке определения движения. На самом деле эти смещения медленно меняются со временем. Рис. 15, 16 иллюстрируют ошибки аппроксимации данных измерений БОКЗа на первой половине и первой четверти отрезка, представленного на рис. 14. Рис. 15а и 16а построены с использованием аппроксимирующих выражений компонент угловой скорости в уравнениях движения, причем была использована та же аппроксимация, что и при построении рис. 14б. Рис. 15б и 16б построены с использованием в уравне-

ниях движения данных измерений ГИВУСов. Как видим, ошибки аппроксимации показаний БОКЗа уменьшаются при уменьшении длины обрабатываемого временного отрезка. Особенно заметна разница при переходе от отрезка длиной 1252с к отрезку длиной 622с. Приведем числовые оценки. В примере на рис. 15б (в скобках указаны стандартные отклонения σ_{Δ_i})

$$\Delta_1^* = -1.76(0.0046)"/с, \quad \Delta_2^* = 4.71(0.0046)"/с, \quad \Delta_3^* = 0.30(0.010)"/с;$$

в примере на рис. 16б

$$\Delta_1^* = -1.61(0.011)"/с, \quad \Delta_2^* = 4.77(0.011)"/с, \quad \Delta_3^* = 0.39(0.024)"/с.$$

Изменение смещений на трех отрезках заметно.

Полученные результаты позволяют заключить, что ошибки аппроксимации измерений БОКЗа в приведенных примерах вызваны в основном ошибками ГИВУСов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

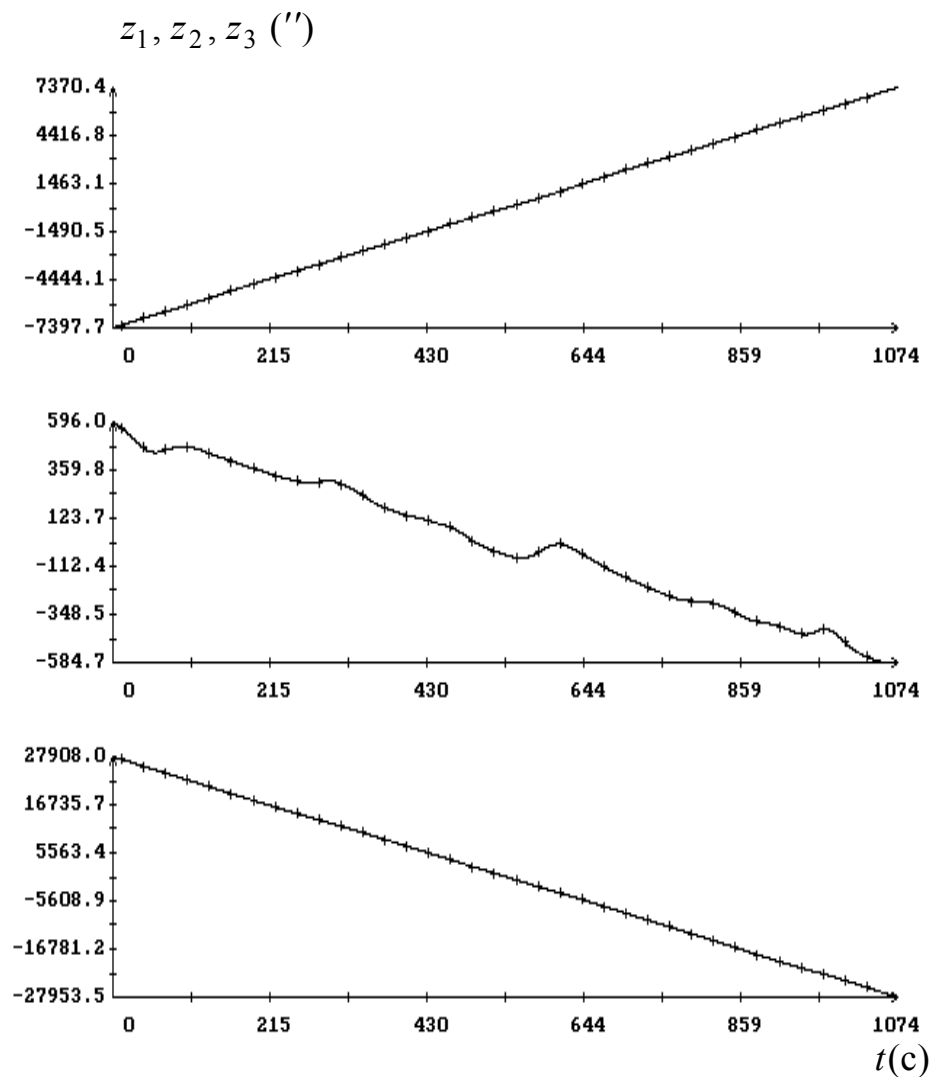
Проведенное исследование показало, что ошибки показаний прибора БОКЗ-М, полученных в условиях космического полета на спутнике «Метеор-М», составляют около 3" по углу поворота датчика вокруг оси x_1 , примерно 7" вокруг оси x_2 и около 15 ÷ 20" по углу его поворота вокруг оси x_3 . Эти результаты хорошо согласуются с оценками [1].

Ошибки реализации орбитальной ориентации спутника по углам тангажа и крена (углы поворота вокруг нормали к плоскости орбиты и трансверсали к орбите) не превосходя 0.4°. Угол рысканья (угол поворота вокруг радиуса-вектора центра масс спутника) совершает колебания с амплитудой менее 0.3° относительно среднего положения 1.0 – 1.4°.

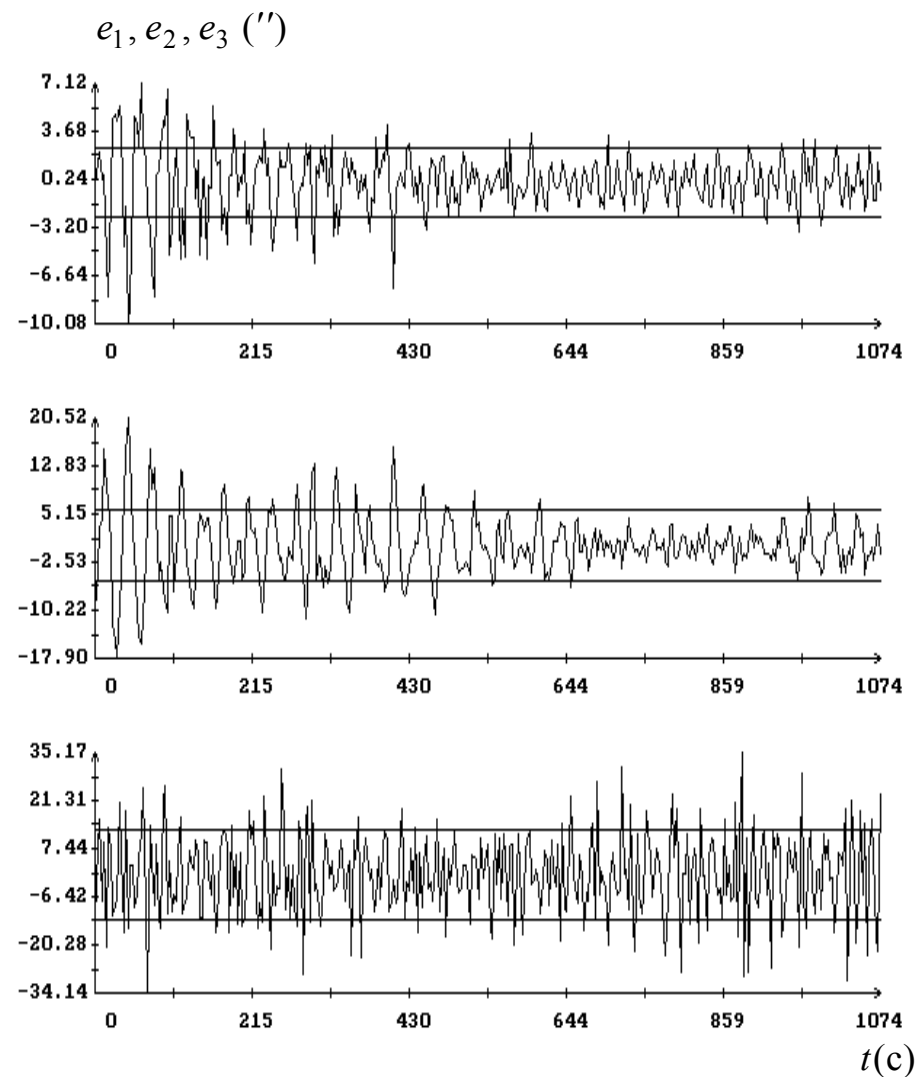
Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 08-01-00467). Авторы благодарят А.Д. Беленького за полезные обсуждения при выполнении работы.

Литература

1. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительных приборов семейства БОКЗ. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009, № 70.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
3. Shuster M.D. A survey of attitude representation. The Journal of the Astronautical Sciences, 1993, vol. 41, No. 4, pp. 439-517.
4. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М., Наука, 1992.
5. Абалакин В.К. Основы эфемеридной астрономии. М., Наука, 1979.
6. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М., Статистика, 1979.

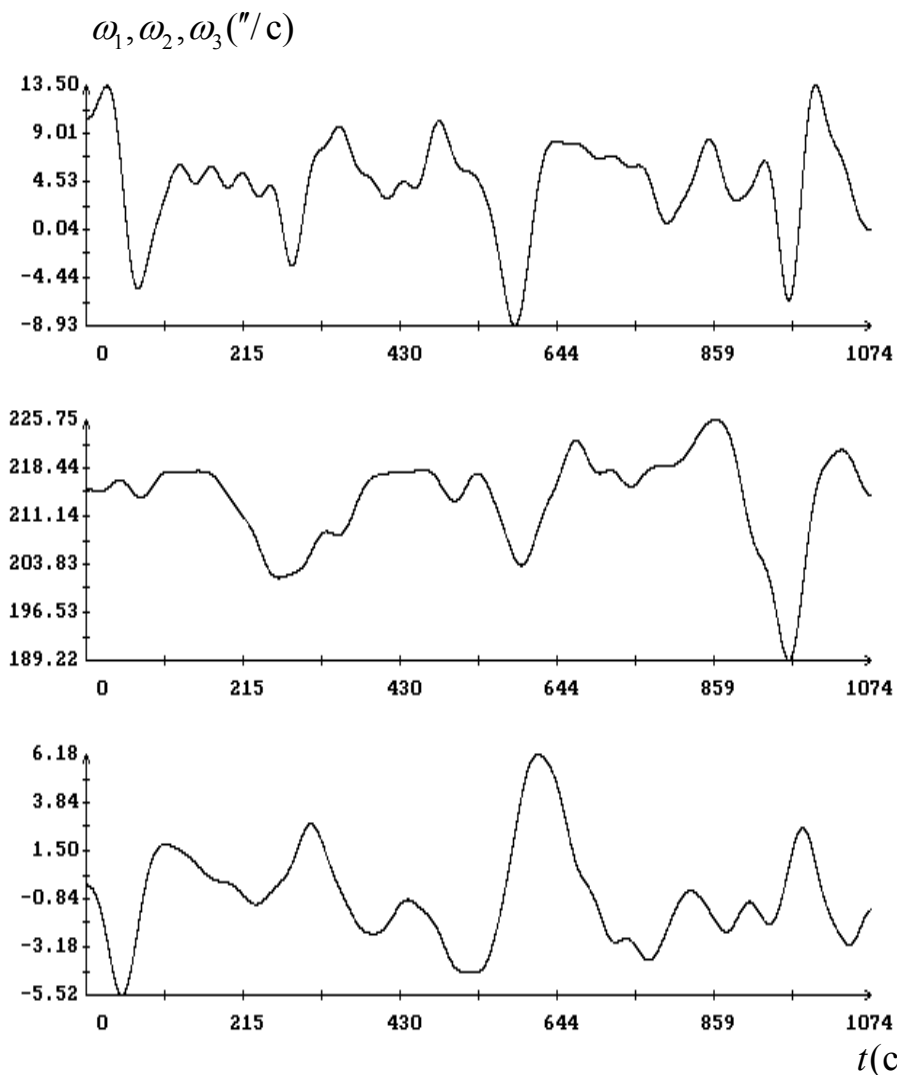


(a)

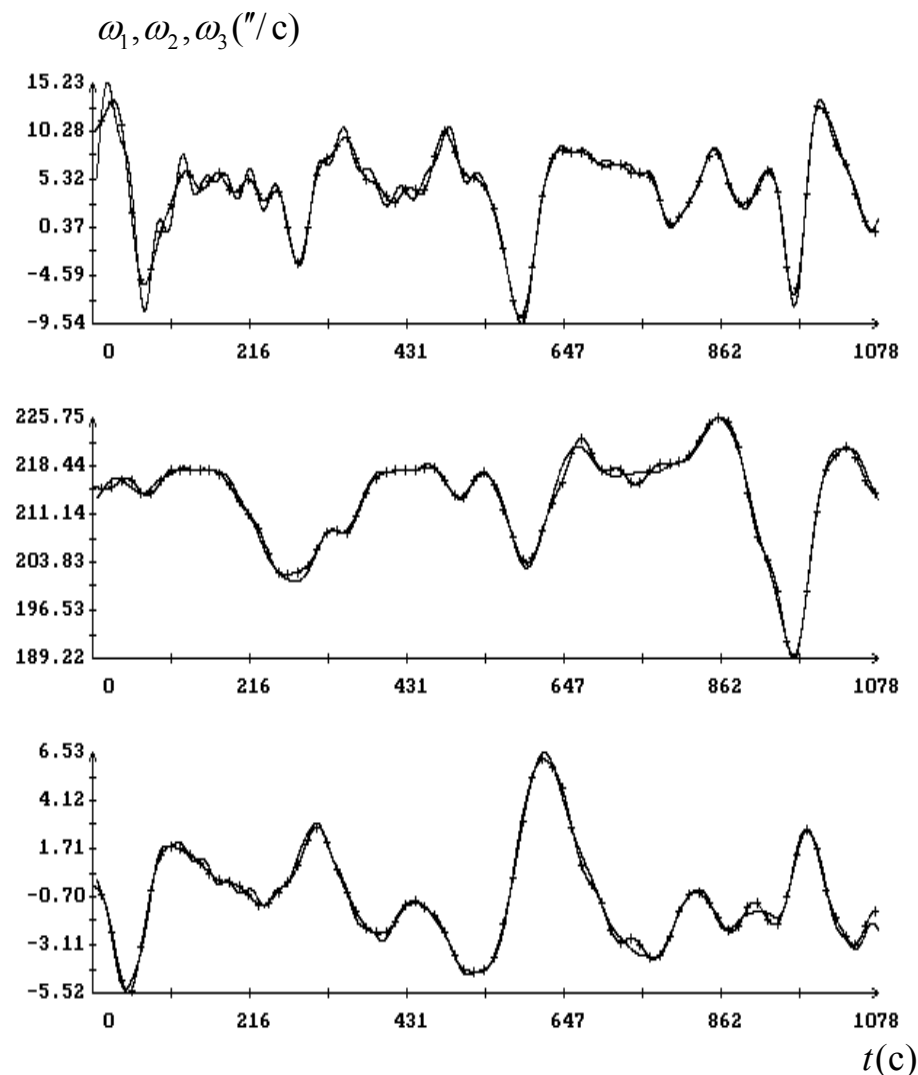


(б)

Рис. 1. Момент $t=0$ на графиках отвечает 13:22:04 UTC 27.04.2010; (а) аппроксимация параметров Родрига, $N = 359$, $M = 50$; (б) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающие ошибки аппроксимации, горизонтальные прямые: $e_i = \pm\sigma_i$ ($i=1, 2, 3$), $\sigma_1 = 2.47''$, $\sigma_2 = 5.05''$, $\sigma_3 = 13.1''$.

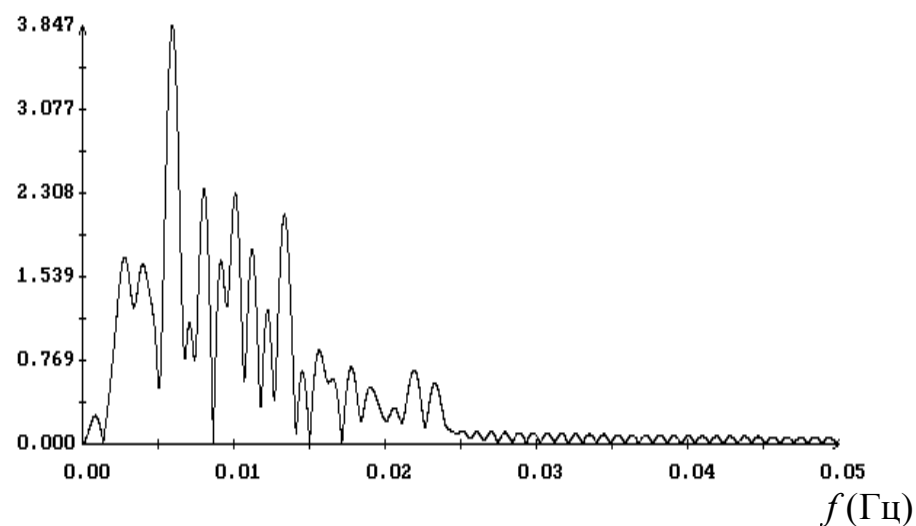
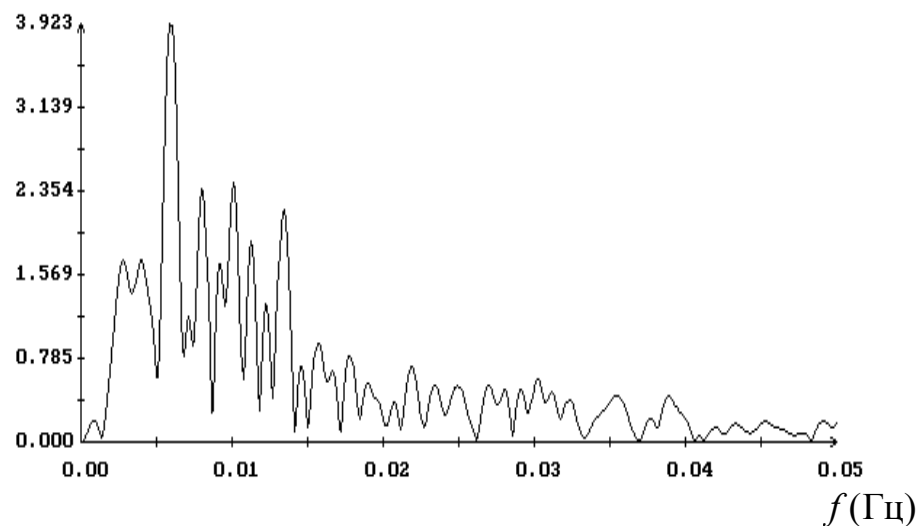
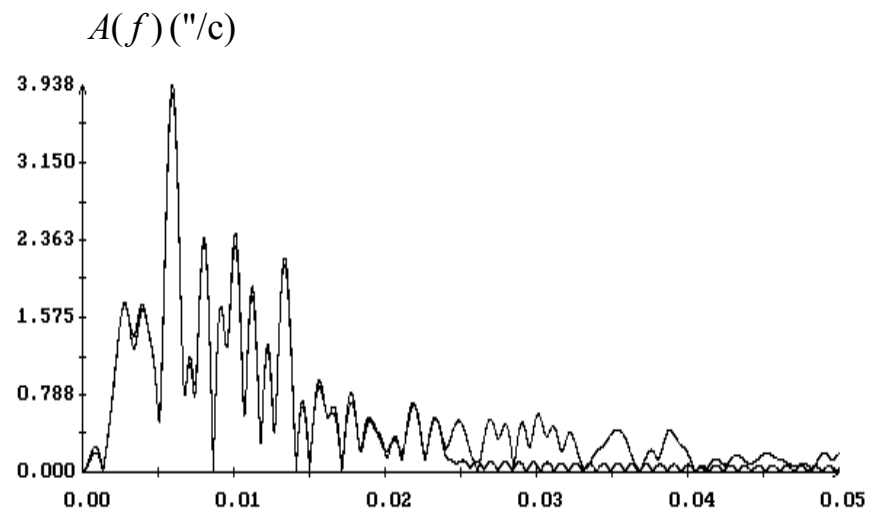
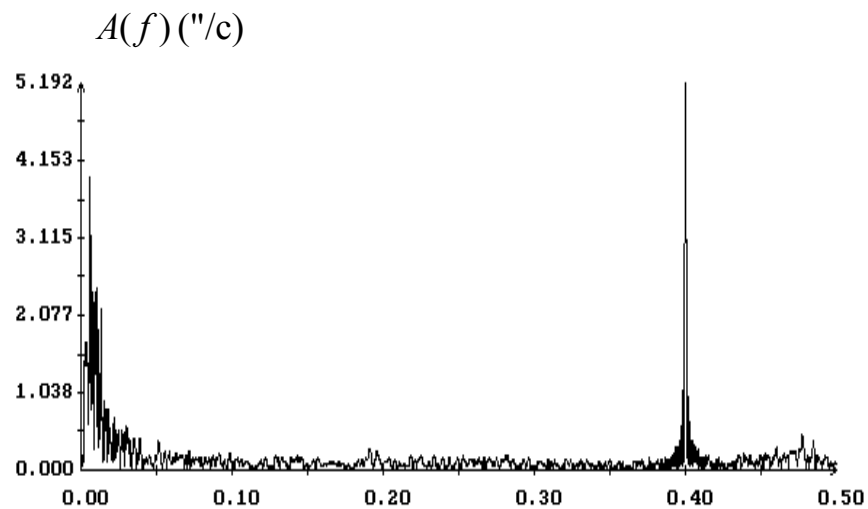


(a)



(б)

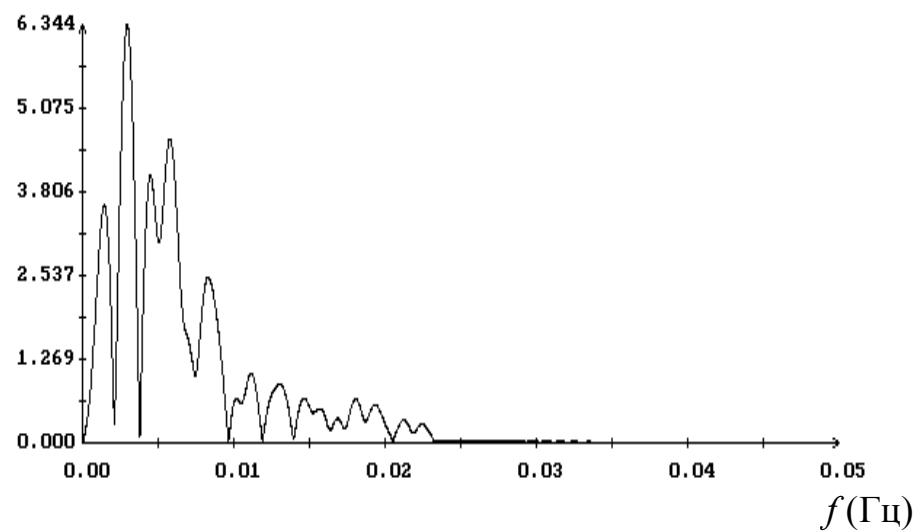
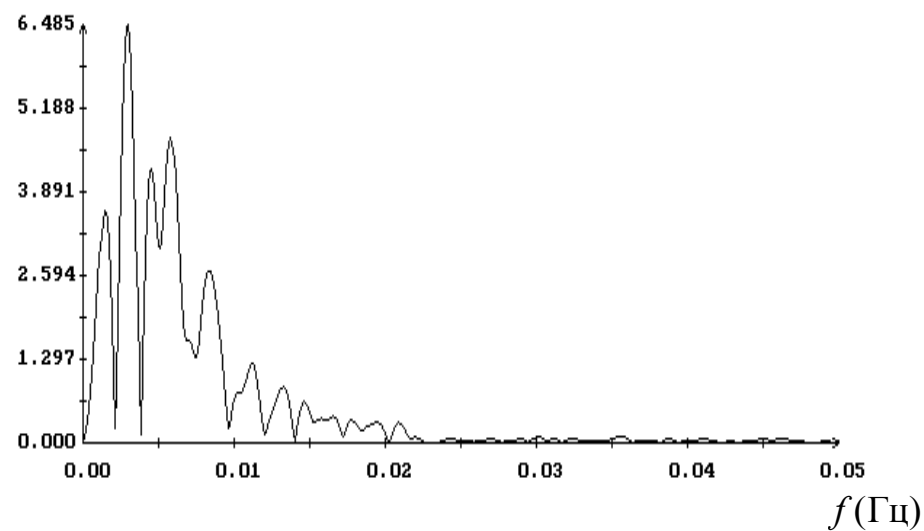
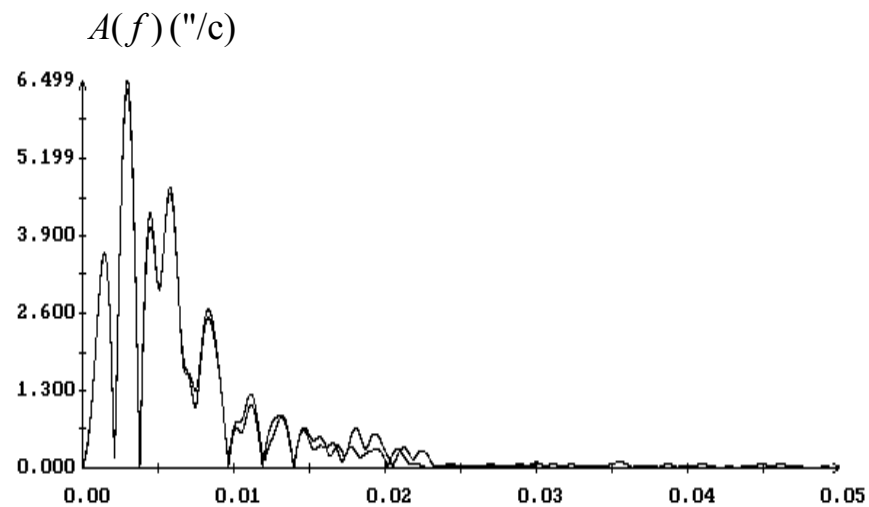
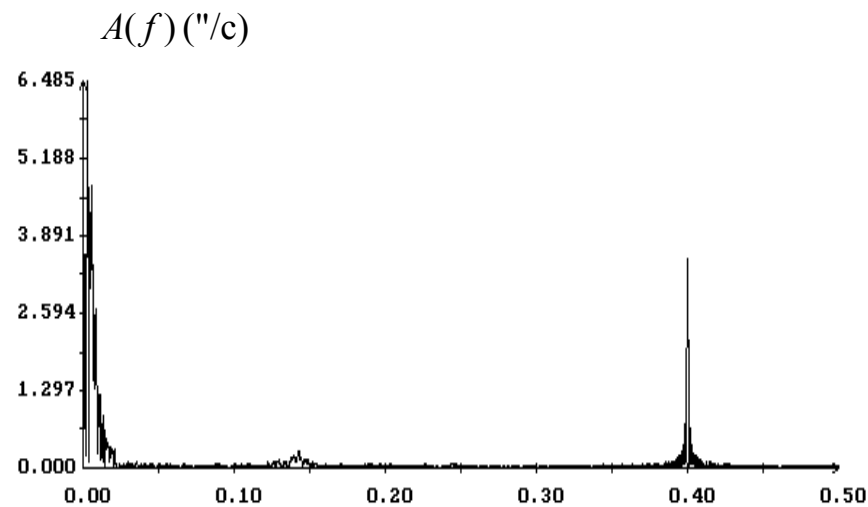
Рис. 2. Угловые скорости, момент $t = 0$ соответствует 13:22:04 UTC 27.04.2010; (а) расчет по аппроксимации параметров Родрига, (б) сглаживание измерений при $M = 70$ со стандартными отклонениями ошибок сглаживания $4.2''/с$, $2.6''/с$, $5.0''/с$ и расчет по аппроксимации параметров Родрига (отмечен маркерами).



(а)

(б)

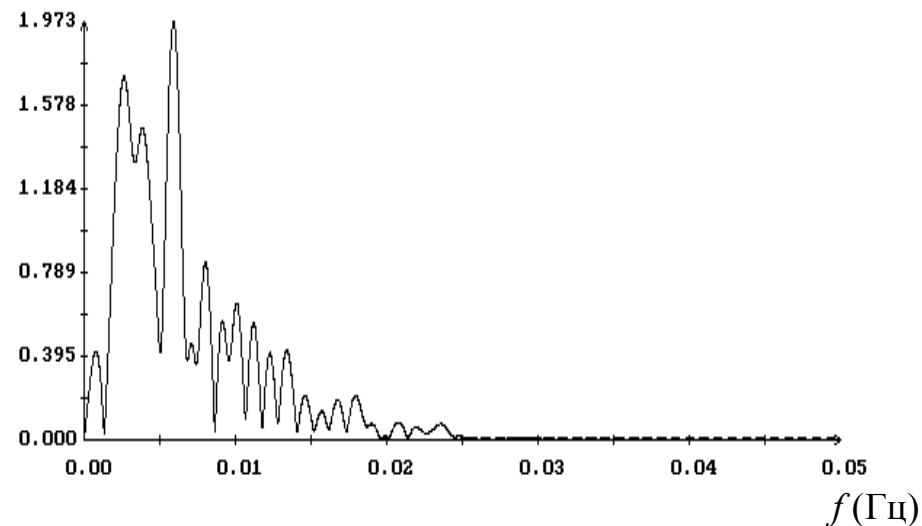
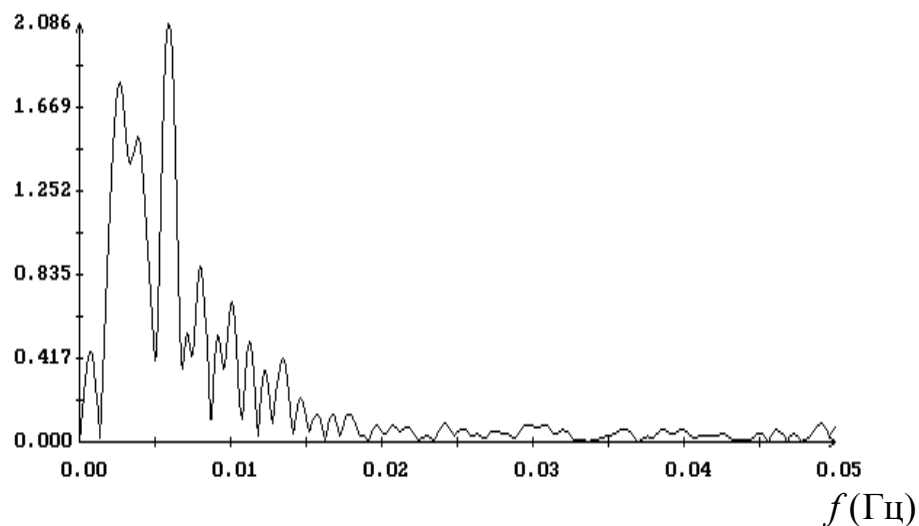
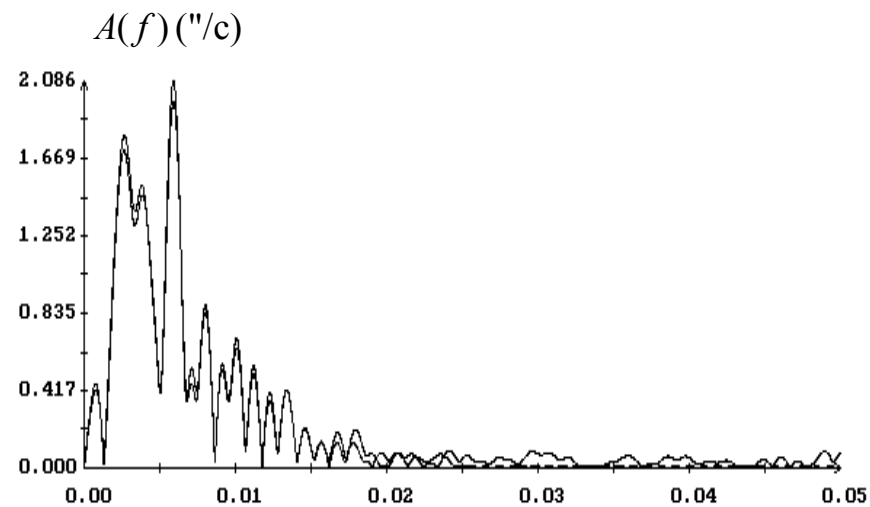
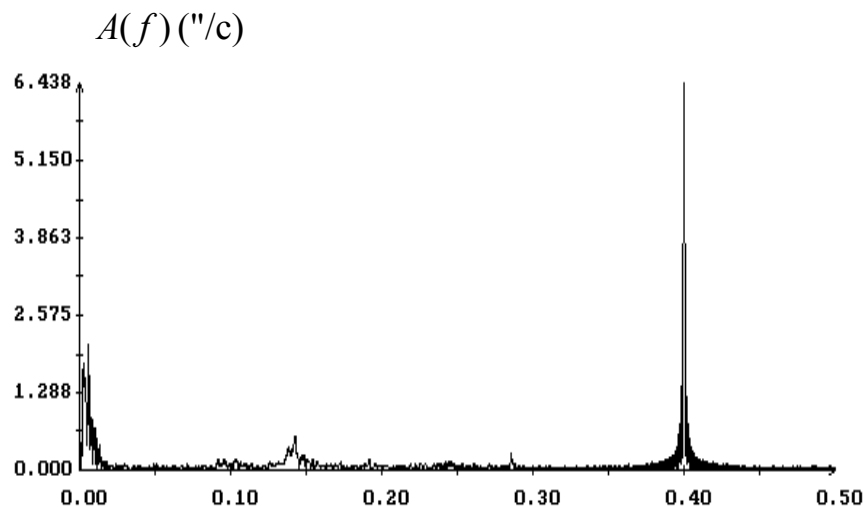
Рис. 3. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_1 (см. рис. 2): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига, вверху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.



(а)

(б)

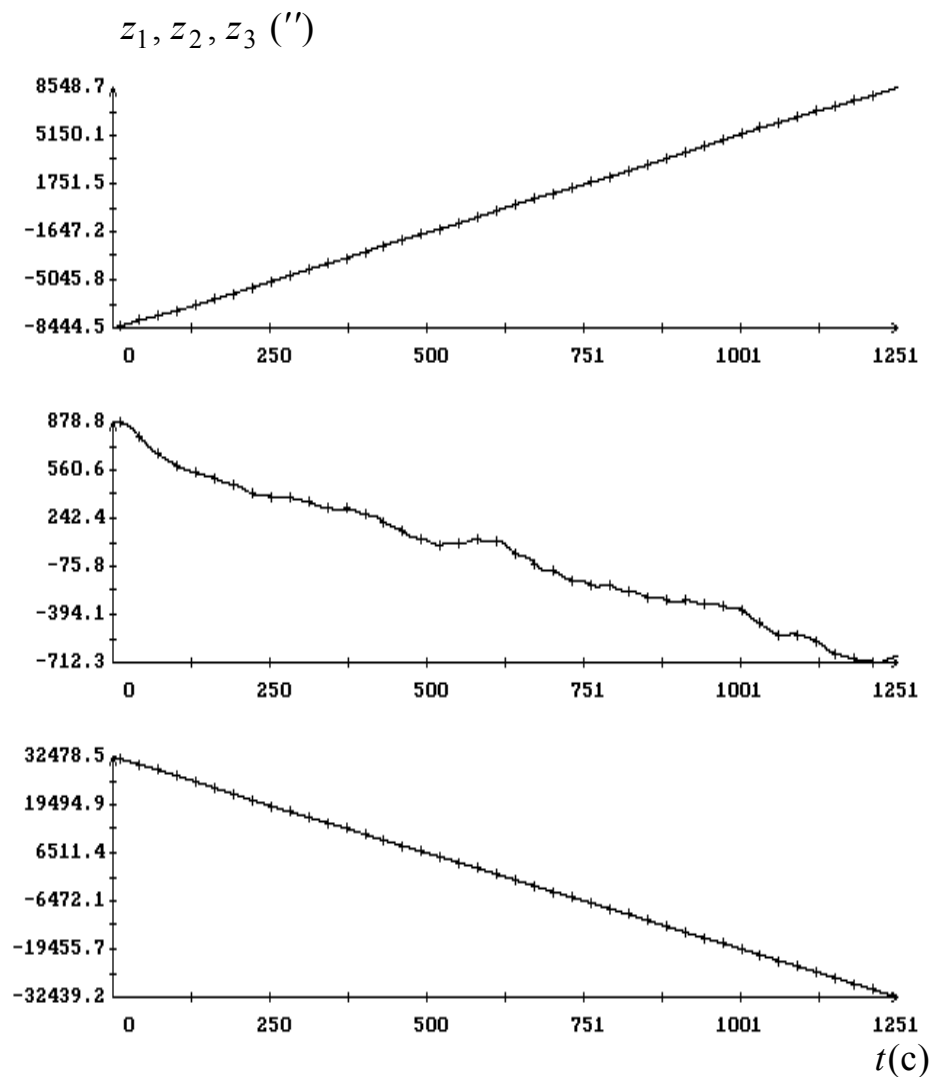
Рис. 4. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_2 (см. рис.2): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига, вверху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.



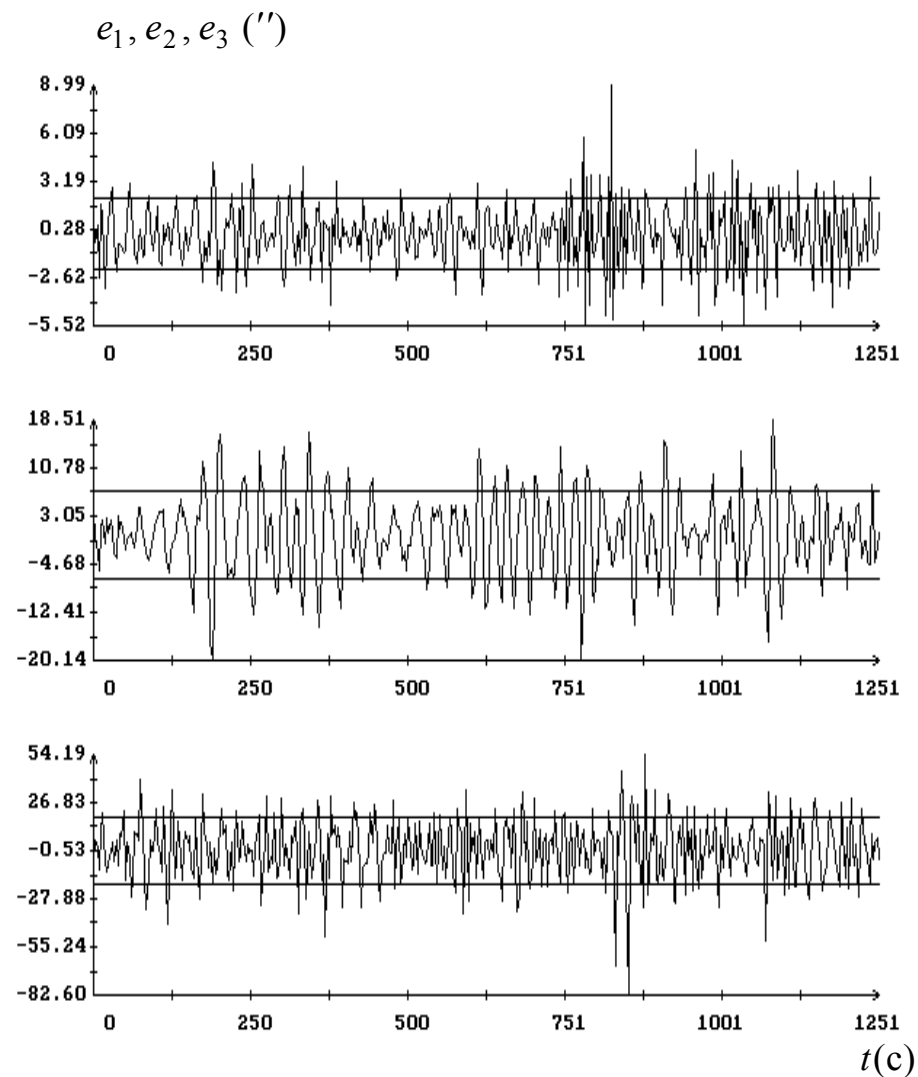
(а)

(б)

Рис. 5. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_3 (см. рис.2): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига,верху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.

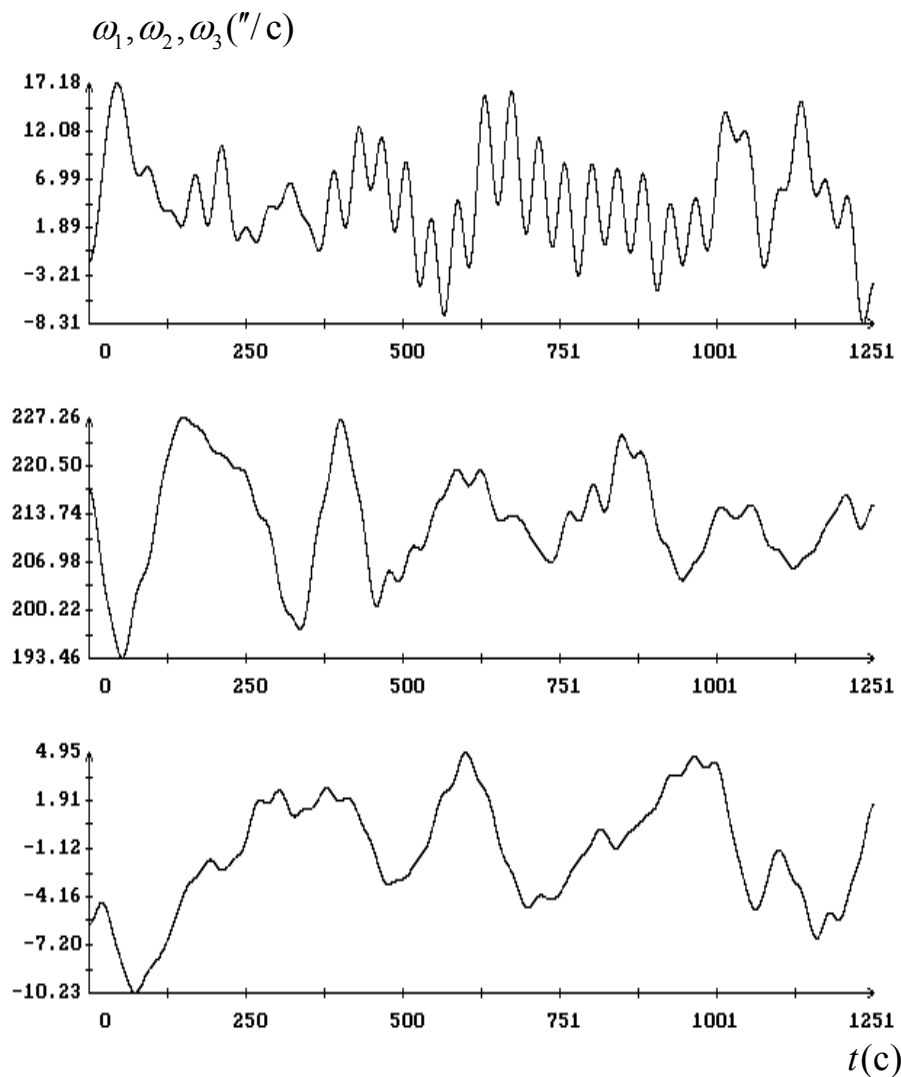


(a)

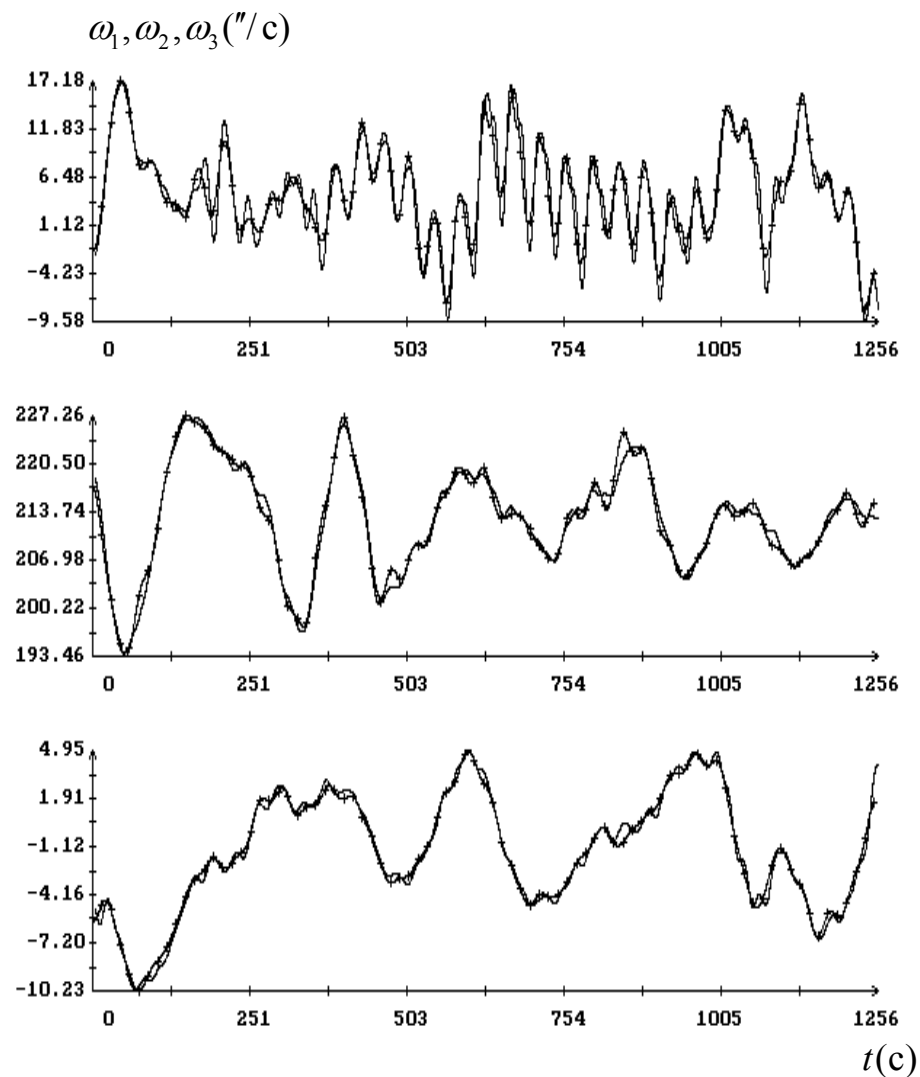


(б)

Рис. 6. Момент $t=0$ на графиках отвечает 14:43:26 UTC 27.04.2010; (а) аппроксимация параметров Родрига, $N = 418$, $M = 70$; (б) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающие ошибки аппроксимации, горизонтальные прямые: $e_i = \pm\sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\sigma_1 = 2.15''$, $\sigma_2 = 7.01''$, $\sigma_3 = 19.0''$.

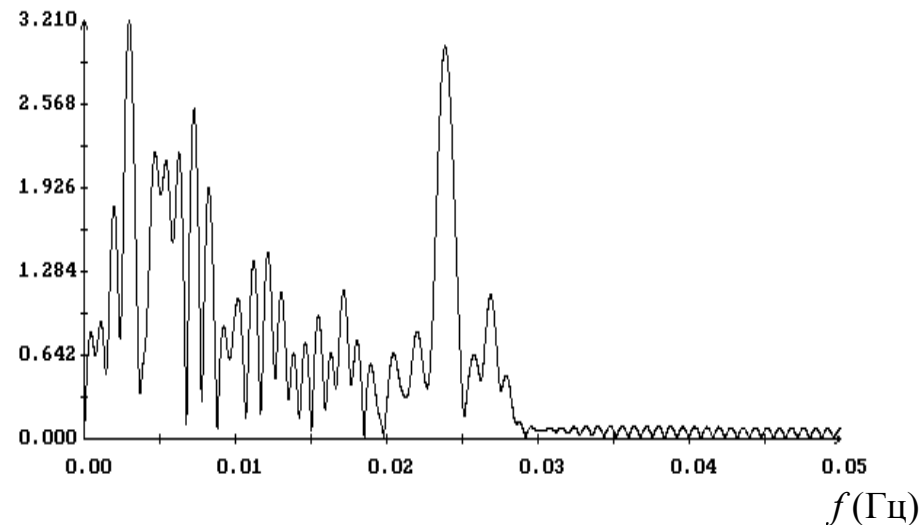
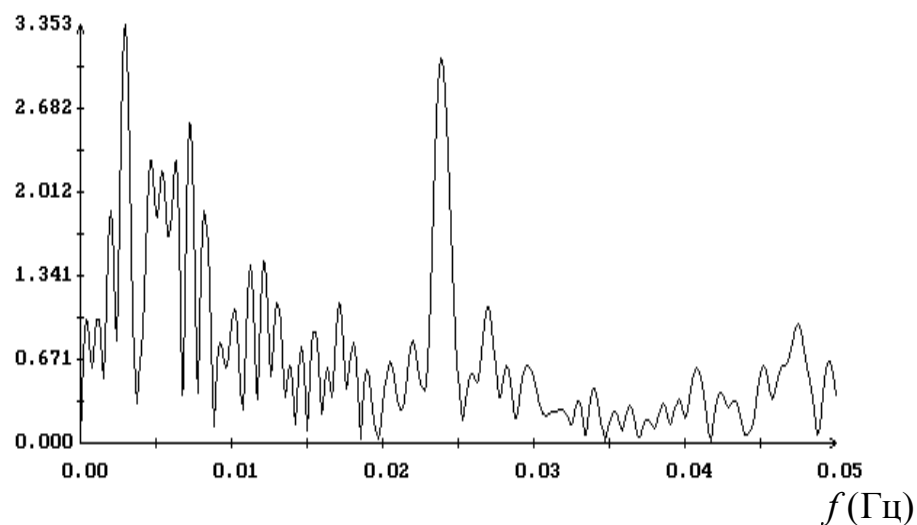
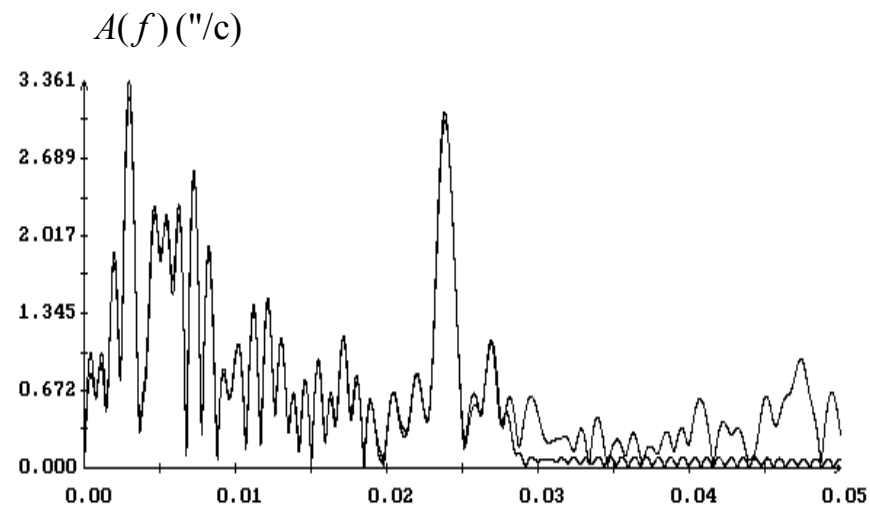
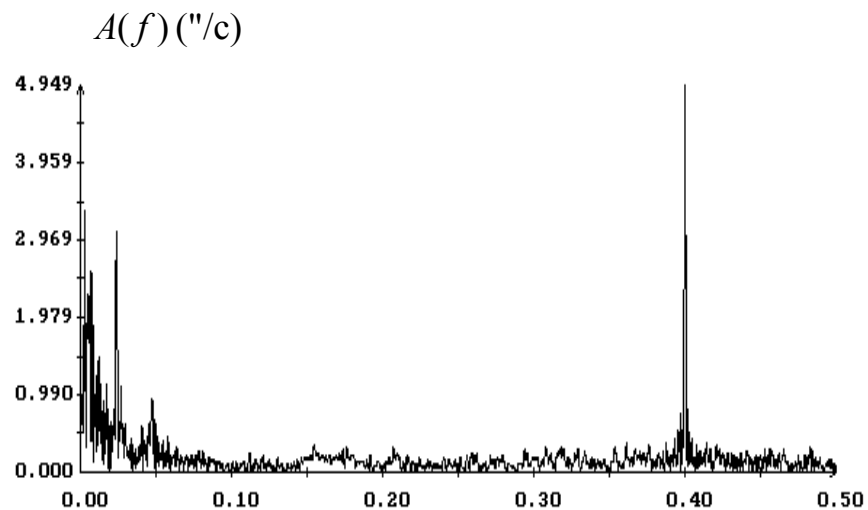


(а)



(б)

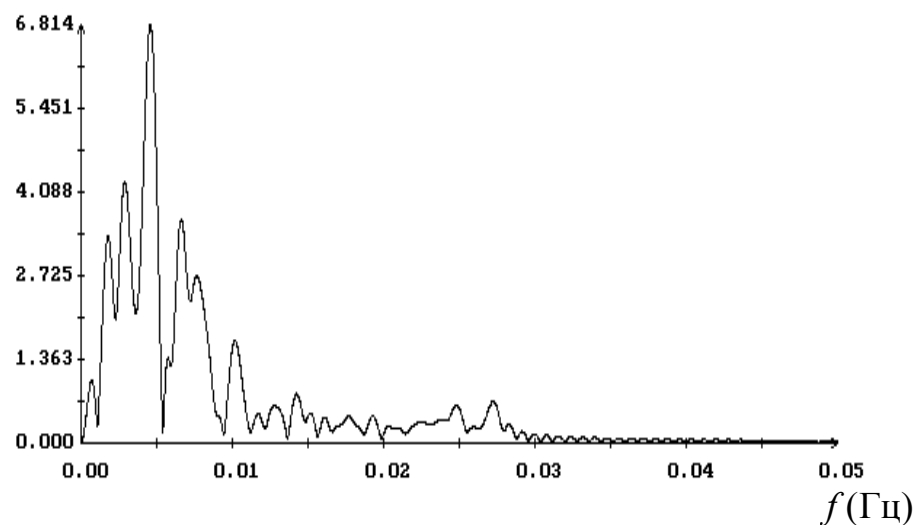
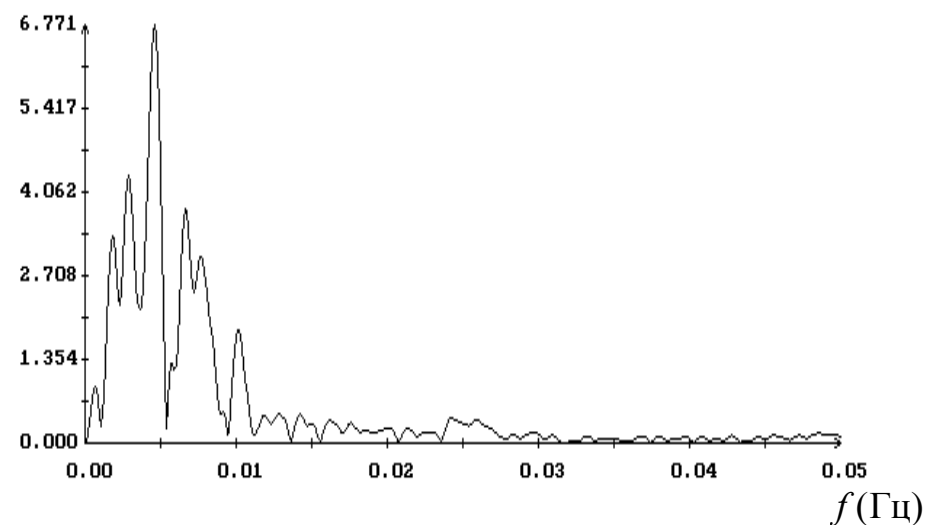
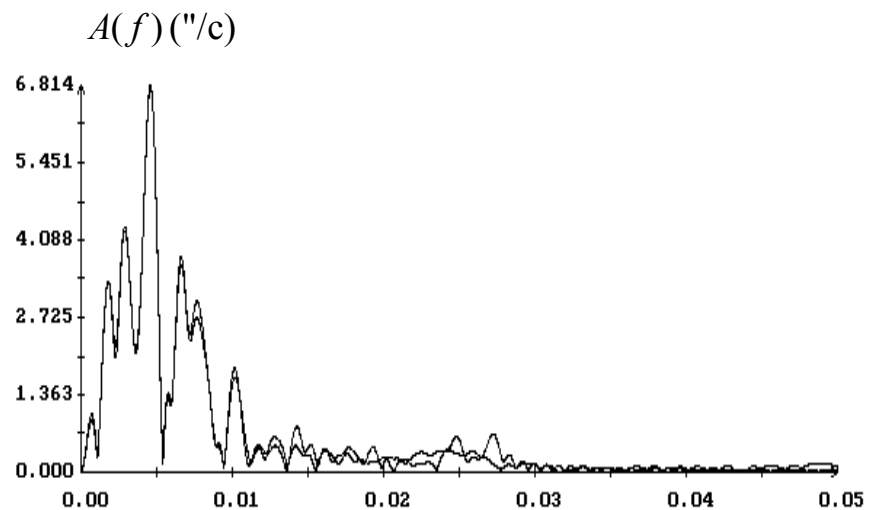
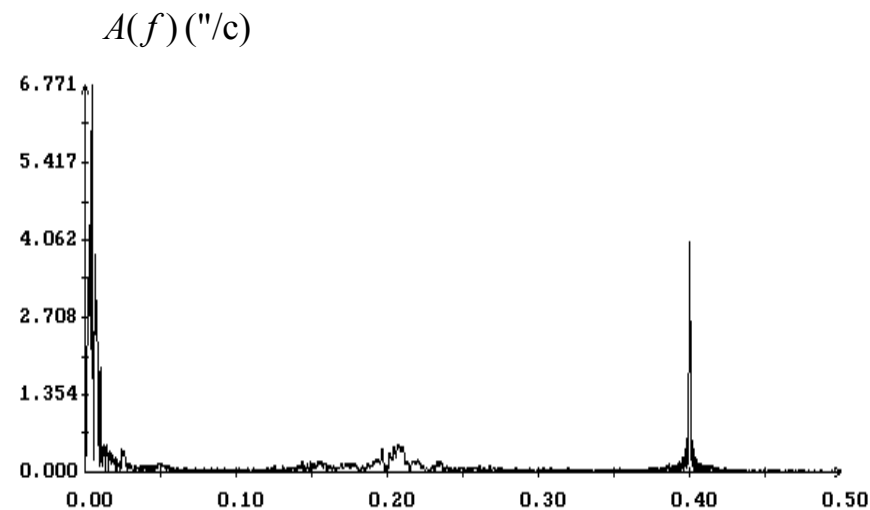
Рис. 7. Угловые скорости, момент $t = 0$ соответствует 14:43:26 UTC 27.04.2010; (а) расчет по аппроксимации параметров Родрига, (б) сглаживание измерений при $M = 120$ со стандартными отклонениями ошибок сглаживания $4.4''/с$, $3.3''/с$, $5.4''/с$ и расчет по аппроксимации параметров Родрига (отмечен маркерами).



(a)

(б)

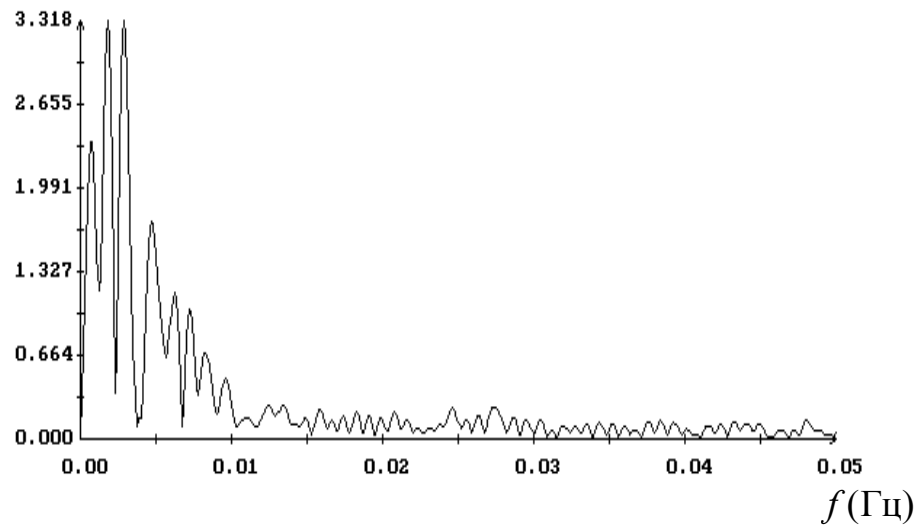
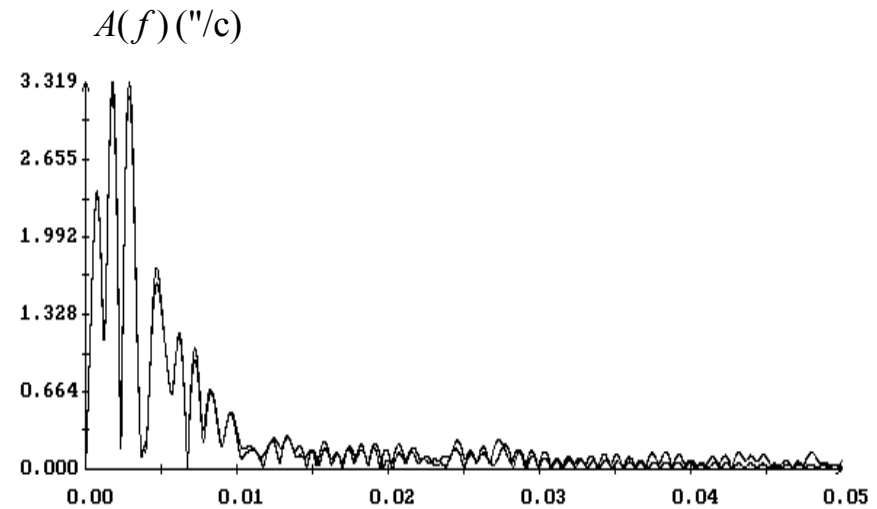
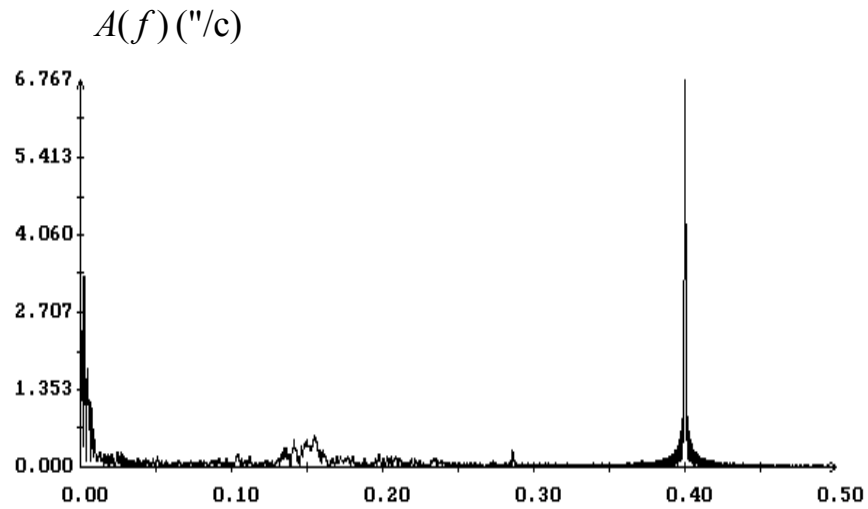
Рис. 8. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_1 (см. рис. 7): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига, вверху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.



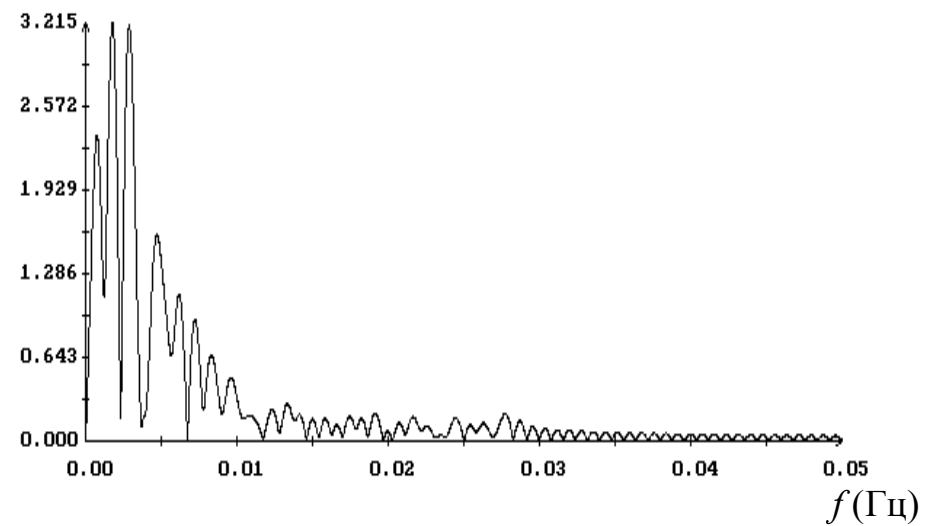
(а)

(б)

Рис. 9. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_2 (см. рис. 7): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига, вверху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.



(a)



(б)

Рис.10. Амплитудные спектры компоненты угловой скорости ω_3 (см. рис.7): (а) фрагменты спектра данных измерений, (б) внизу – спектр значений, рассчитанных по параметрам Родрига, вверху – сопоставление спектров, изображенных в нижней части данного рисунка.

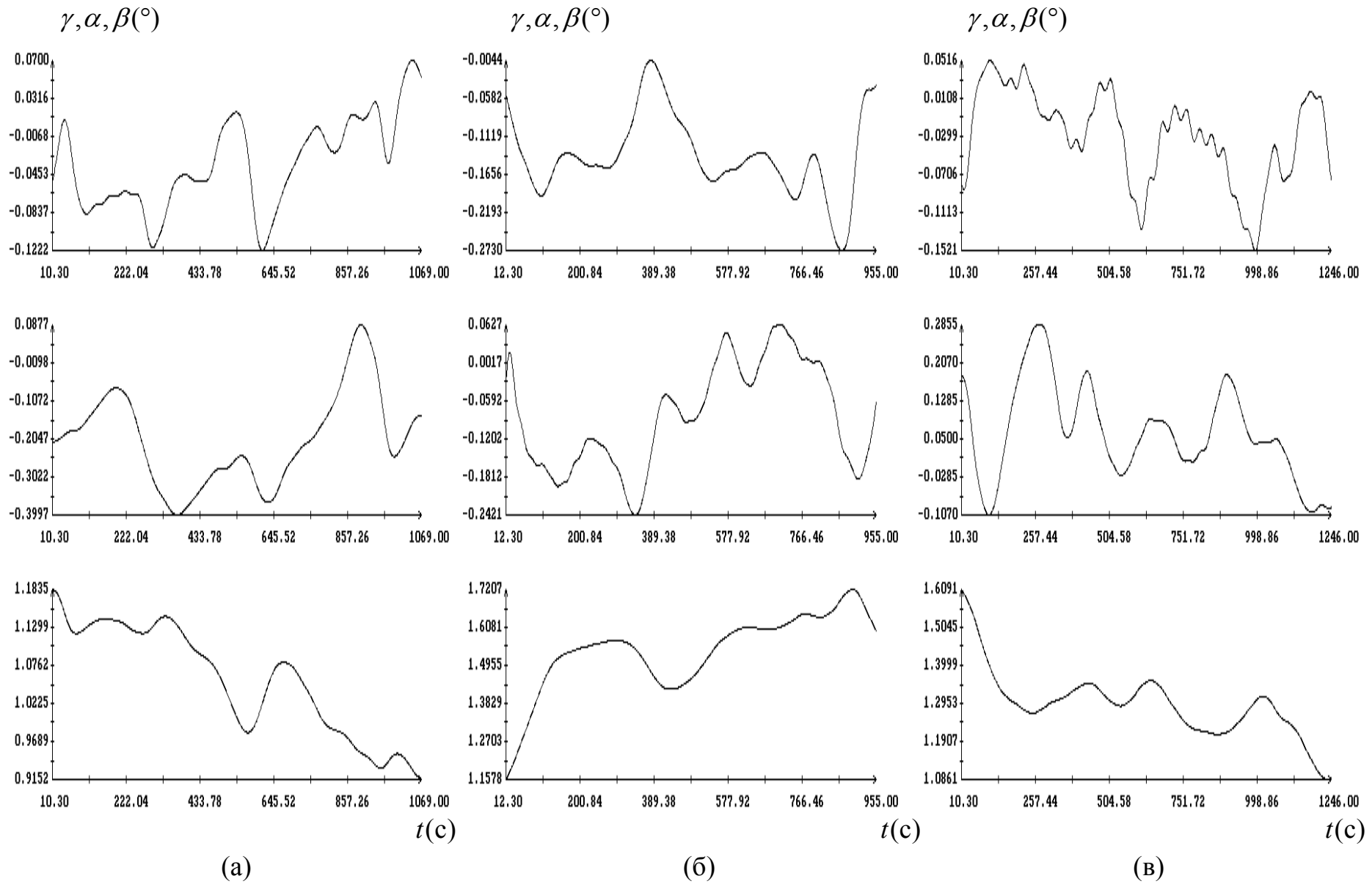
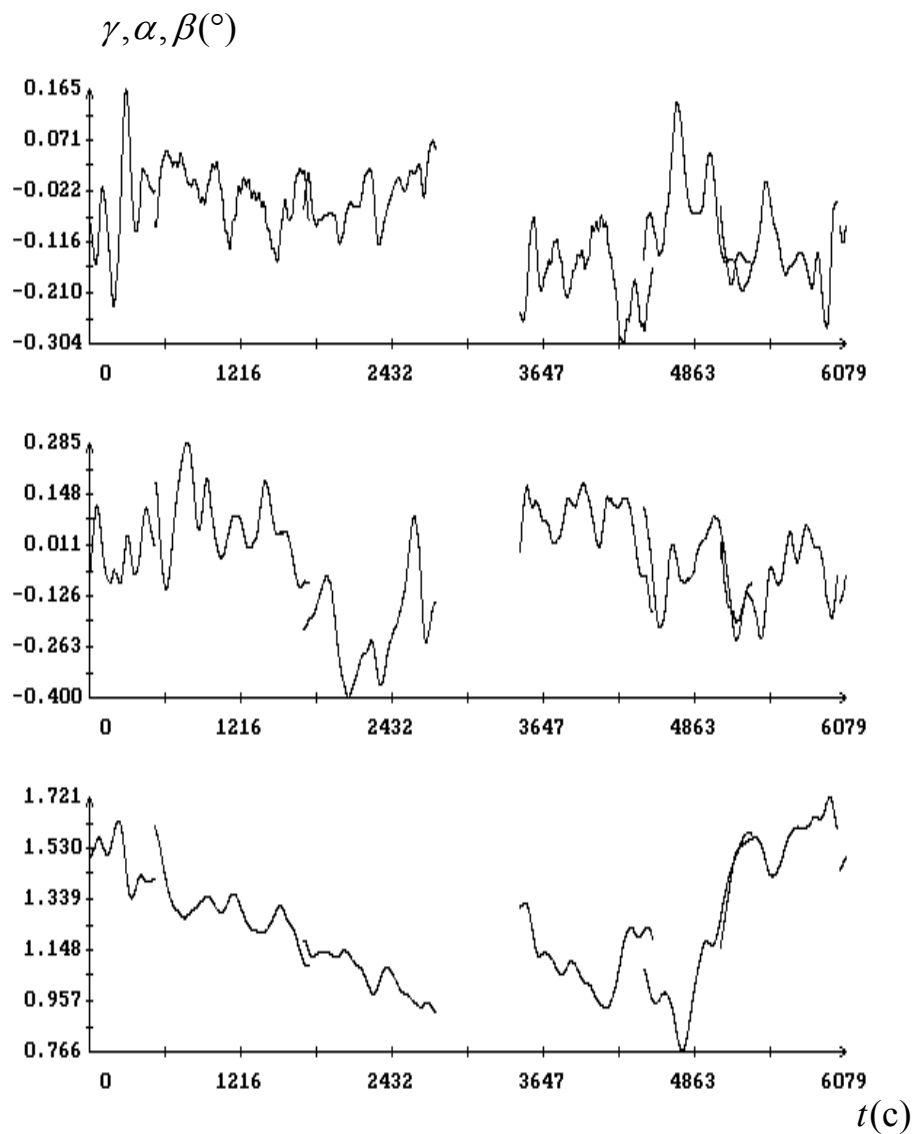
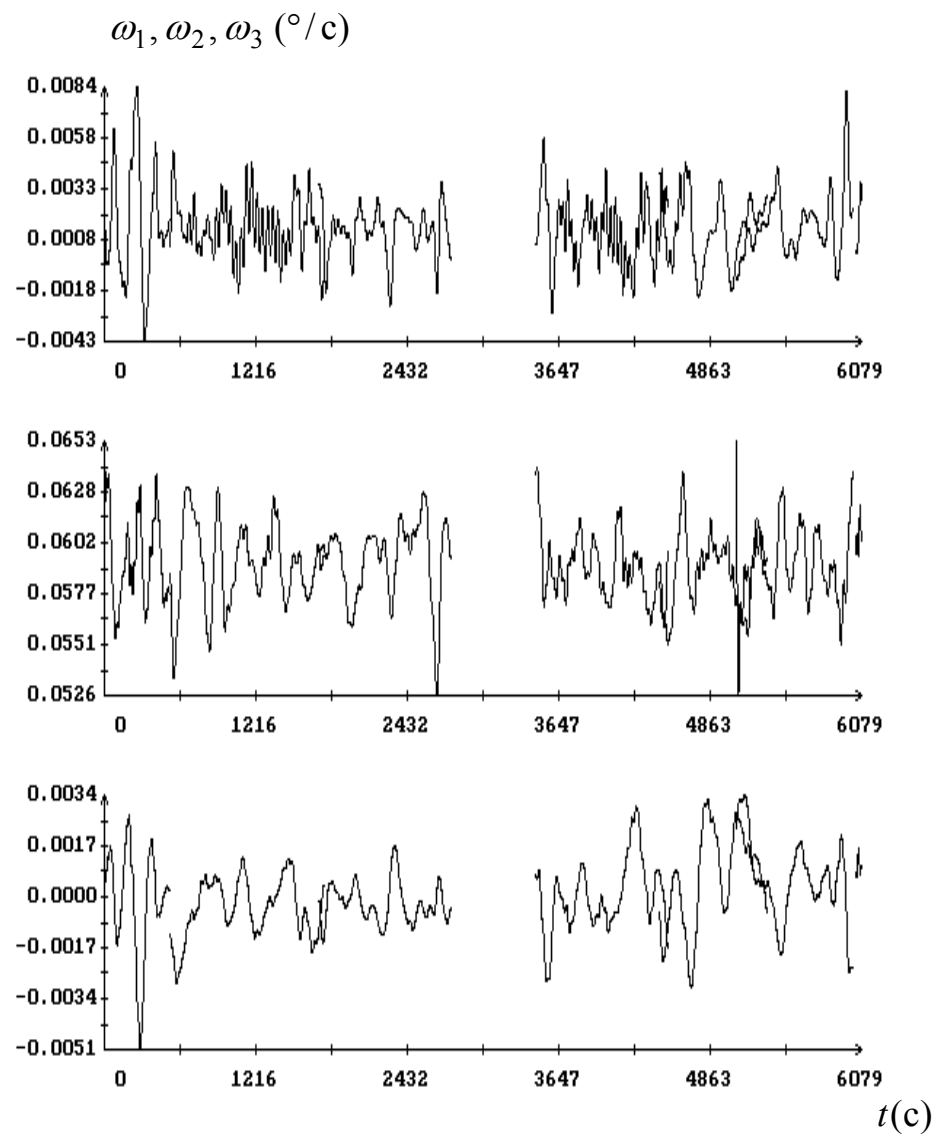


Рис. 11. Самолетные углы, задающие ориентацию строительной системы координат спутника относительно орбитальной системы, момент $t = 0$ соответствует: (а) 13:22:04 (б) 14:17:49, (в) 14:43:31 UTC 27.04.2010.



(а)



(б)

Рис. 12. Движение спутника на виртуальном витке; (а) углы ориентации: γ – крен, α – тангаж, β – рысканье; (б) компоненты угловой скорости в строительной системе координат.

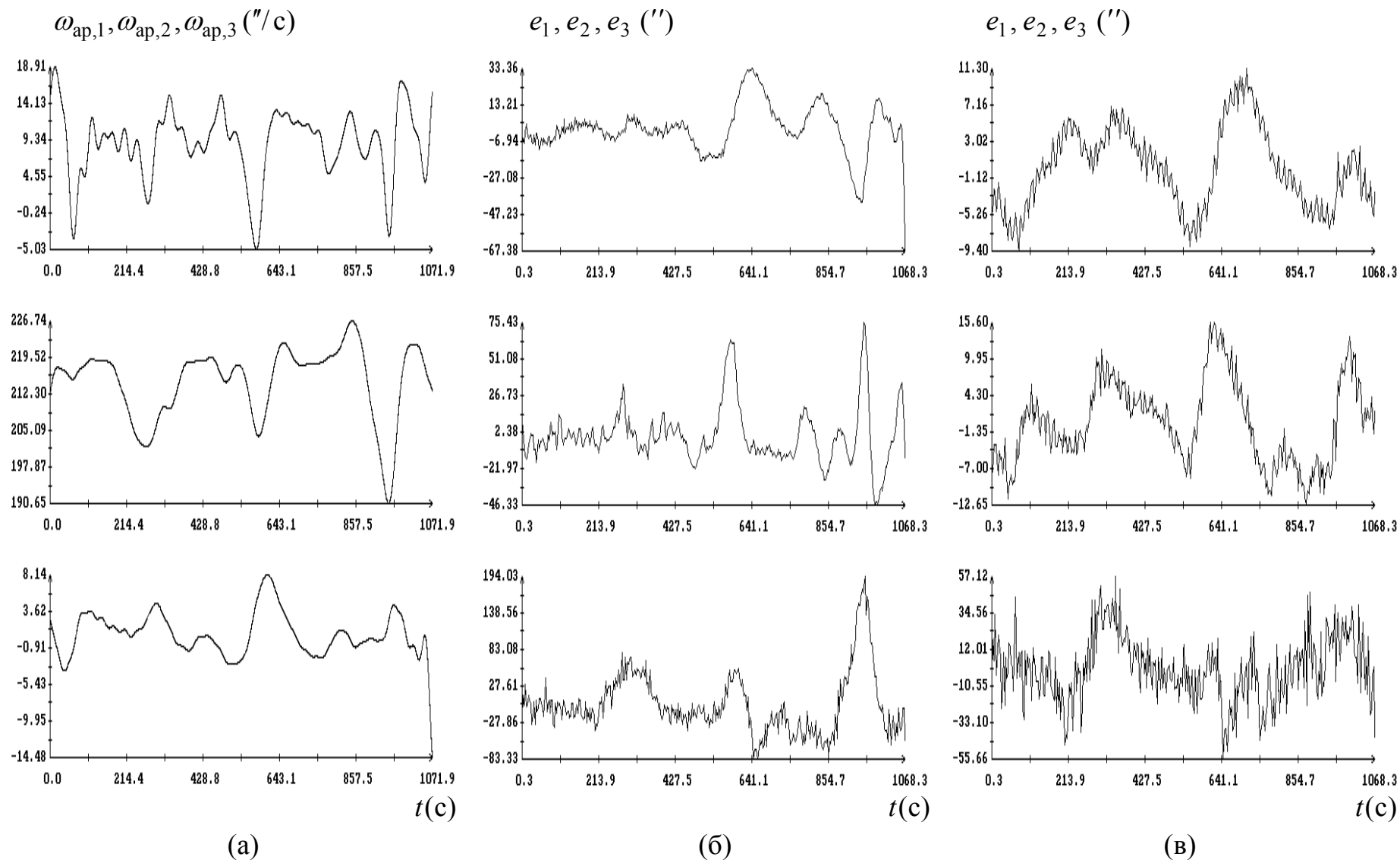


Рис. 13. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 13:22:09.7 UTC 27.04.2010; (а) аппроксимация измерений угловой скорости; (б) и (в) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающие ошибки аппроксимации, данных измерений БОКЗ.

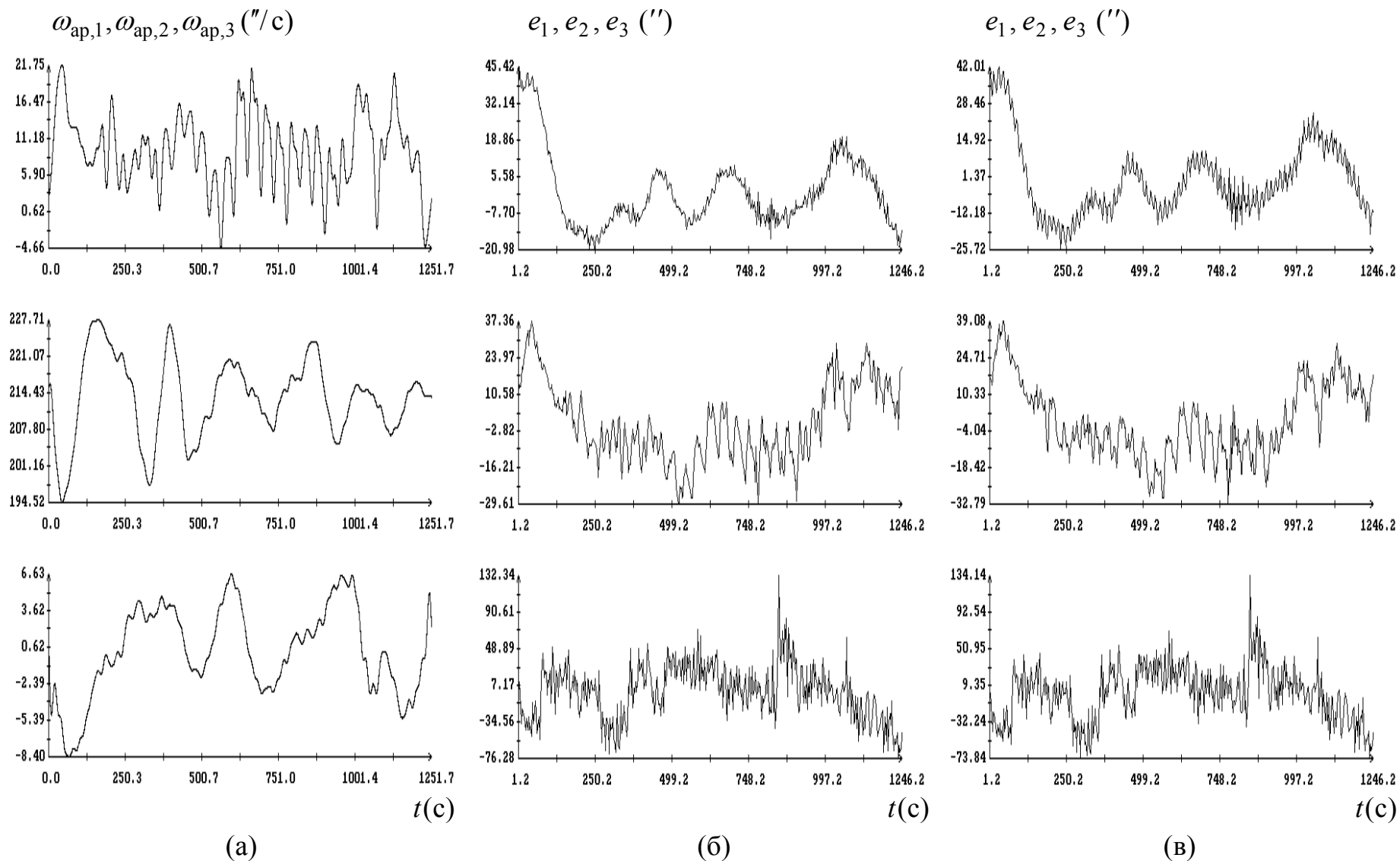
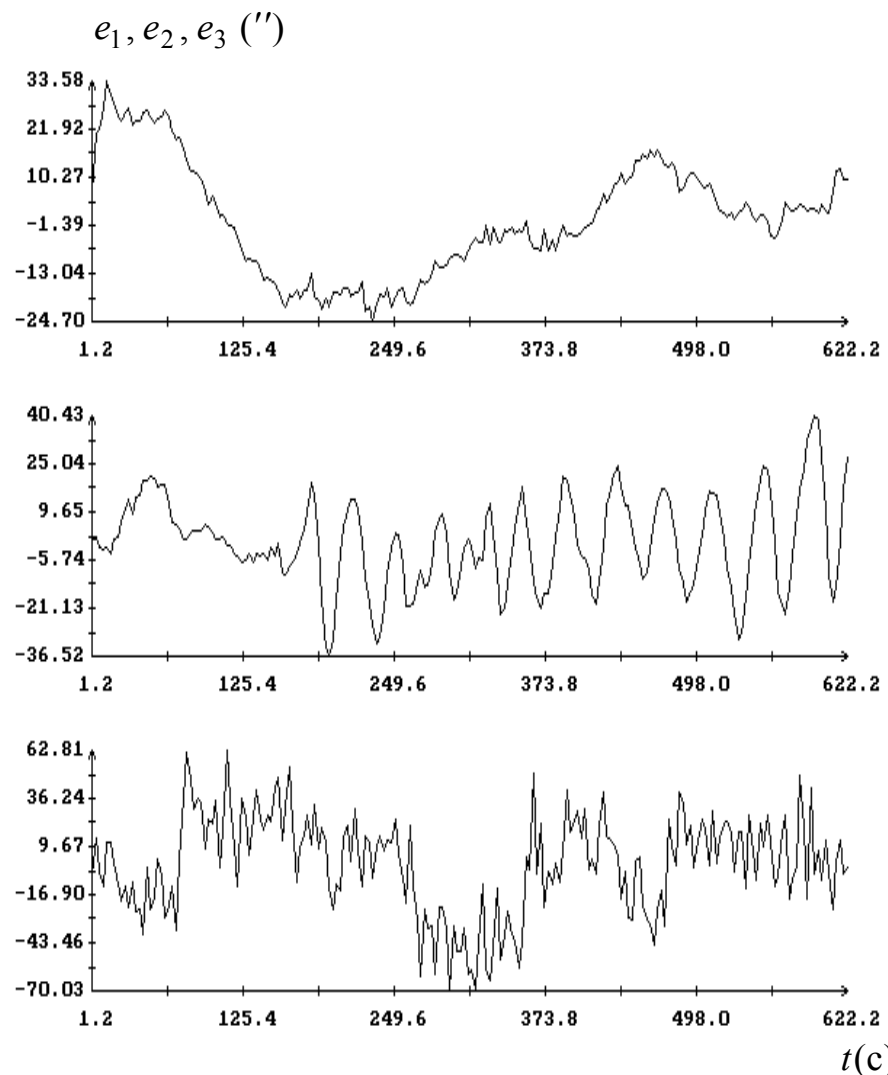
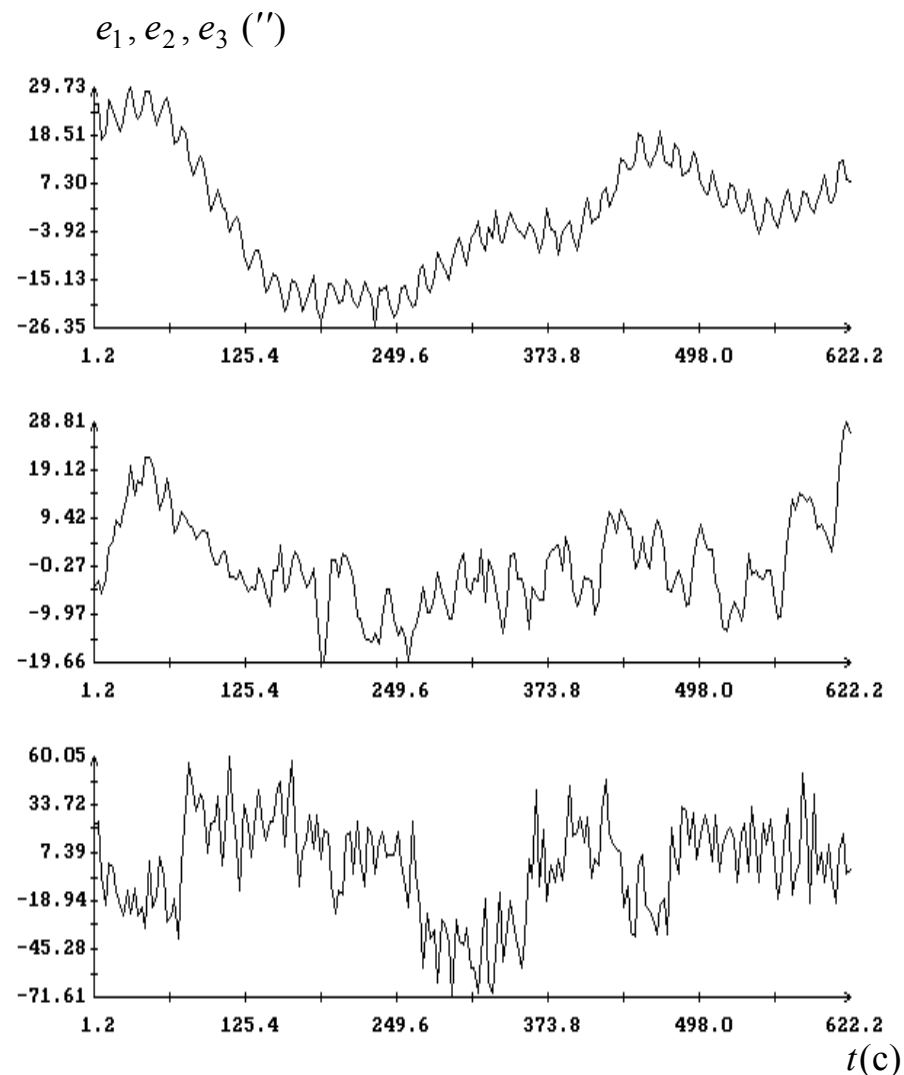


Рис. 14. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:30.8 UTC 27.04.2010; (а) аппроксимация измерений угловой скорости; (б) и (в) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающие ошибки аппроксимации, данных измерений БОКЗ.

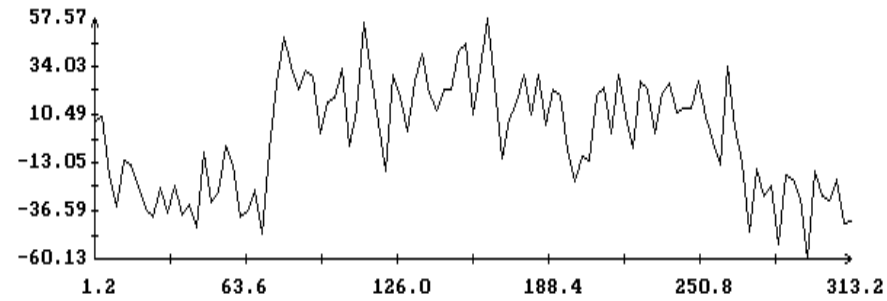
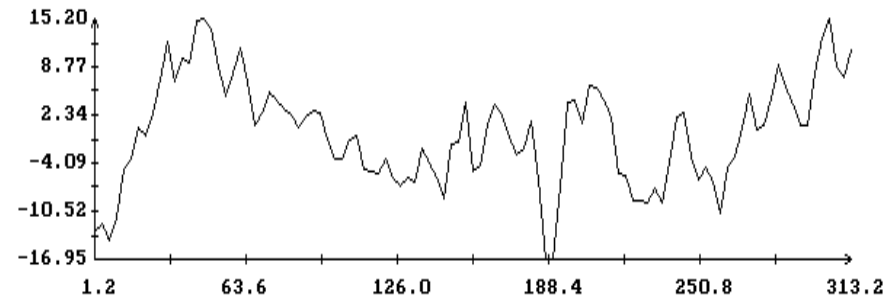
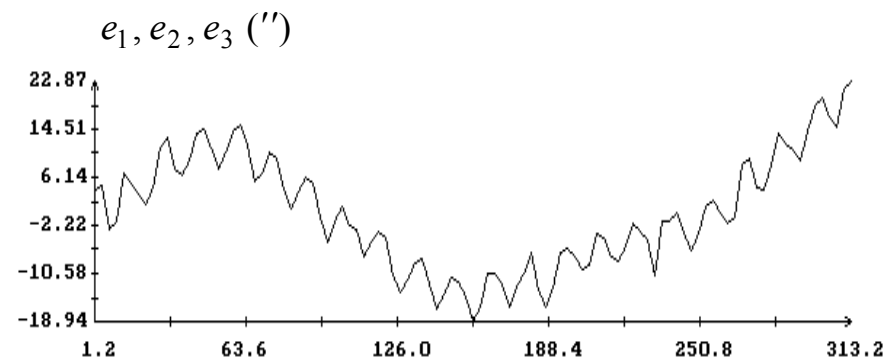
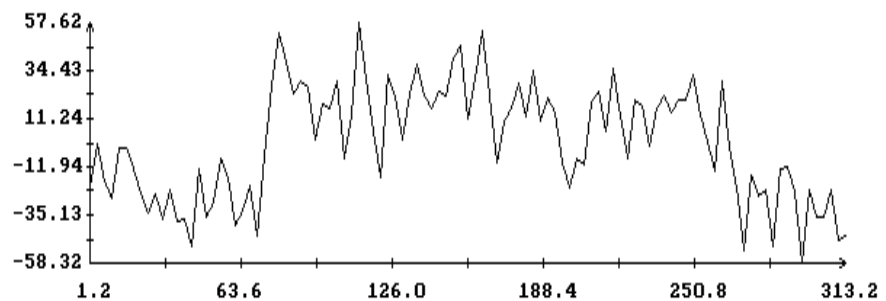
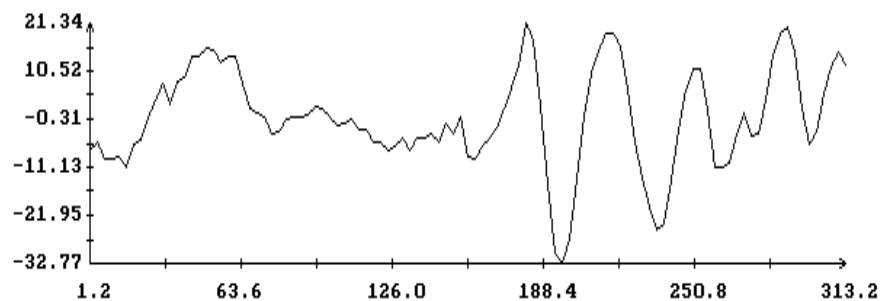
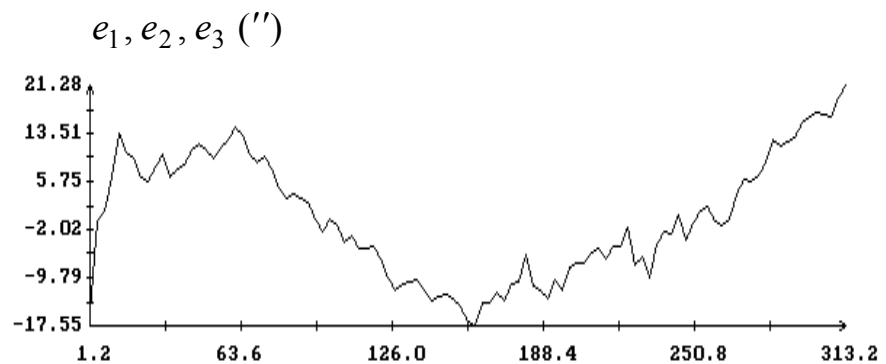


(a)



(б)

Рис. 15. Компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающие ошибки аппроксимации, данных измерений БОКЗ, момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:30.8 UTC 27.04.2010; (а) использована аппроксимация угловой скорости, (б) использованы измерения угловой скорости.



(a)

(б)

Рис. 16. Компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающего ошибки аппроксимации, данных измерений БОКЗ, момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:30.8 UTC 27.04.2010; (а) использована аппроксимация угловой скорости, (б) использованы измерения угловой скорости.