



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Брюно А.Д., Батхин А.Б.,  
Варин В.П.**

**Множество устойчивости  
одной гироскопической  
задачи**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Брюно А.Д., Батхин А.Б., Варин В.П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 4. 30 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-4>

***Публикации по материалам препринта***

Батхин А.Б., Брюно А.Д. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. 4. часть 2. С. 57-58. ISSN 1993-1778.

Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80-133. ISSN 0032-8235.

Batkhin A.B., Bruno A.D., Varin V.P. Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, no. 1. Pp. 56-92. ISSN 0021-8928.

DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006)

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892812000329>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин, В. П. Варин

МНОЖЕСТВО УСТОЙЧИВОСТИ  
ОДНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Москва, 2010 г.

УДК 512.77+531.36

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин, В. П. Варин. Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Рассматривается линейная система Гамильтона с четырьмя степенями свободы и с постоянными коэффициентами, зависящими от трех параметров. Эта система описывает динамику в одной гироскопической задаче. С помощью теории исключения и компьютерной алгебры выделено и изучено множество устойчивости, т. е. множество тех значений параметров, при которых устойчива неподвижная точка исходной гамильтоновой системы. Это множество имеет весьма сложную структуру. Его граница является частью линейчатой поверхности. Изучено строение этой границы вблизи особенностей и вблизи бесконечности. Оказалось, что физические значения параметров, принадлежащие множеству устойчивости, образуют две односвязные области. Ранее был известен лишь маленький кусочек одной из этих двух областей устойчивости.

A. D. Bruno, A. B. Batkhin, V. P. Varin. The stability set of a gyroscopic problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We consider a linear Hamiltonian system with four degrees of freedom and with constant coefficients depending on three parameters. The system describes the dynamics in a gyroscopic problem. A set of stability is the set of the values of parameters for which the stationary point of the initial Hamiltonian system is stable. The set of stability of a rather complicated structure is isolated, and its structure is investigated with the help of elimination theory and computer algebra. The boundary of this set is a part of a ruled surface. The structure of the set of stability is investigated at the singularities and at infinity. It turns out that physical values of parameters which belong to the set of stability form two simply connected domains. Earlier, only a small part of one of these domains of stability was known.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010 г.

E-mails: [abruno@keldysh.ru](mailto:abruno@keldysh.ru), [batkhin@gmail.com](mailto:batkhin@gmail.com), [varin@keldysh.ru](mailto:varin@keldysh.ru)  
сайт: [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru)

## 4. Большой пример

Этот препринт написан как продолжение препринта [1]. Поэтому все ссылки на формулы с номерами  $(a.b)$  и на теоремы  $a.b$ , где  $a < 4$ , относятся к препринту [1]. Изложение здесь следует подходу, описанному в [1, § 3].

**4.1. Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему в поле силы тяжести, состоящую из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано–Гука. Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длины  $2l$  посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний стержень длины  $l$  жестко прикреплен к центру плоского диска массы  $m$  и радиуса  $2l$  перпендикулярно его поверхности. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Такие механические системы, являющиеся статически неуравновешенными, ранее рассматривались в [2], а анализ устойчивости вращения такой системы относительно вертикальной оси был проведен численно в [3, п. 6] и в [4, гл. 3, п. 3.5.2]. Рассматриваемая система имеет шесть степеней свободы, однако ее уравнения движения могут быть расщеплены на две подсистемы, одна из которых тривиально исследуется. Вторая подсистема после определенных преобразований сводится к системе гироскопического движения с четырьмя степенями свободы.

$$M\ddot{Y} + G\dot{Y} + RY = 0, \quad (4.1)$$

где  $Y \in \mathbb{R}^m$  — вектор обобщенных координат,  $M$  — симметричная положительно определенная матрица масс,  $R$  — симметричная матрица потенциальных сил,  $G$  — кососимметричная матрица гироскопических сил,  $\dot{Y} = dY/dt$ .

Если ввести фазовый вектор  $X = (Y, \dot{Y})$ , то функция Гамильтона имеет вид

$$H(X) = \frac{1}{2}X^T A X, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} R - GM^{-1}G/4 & GM^{-1}/2 \\ -M^{-1}G/2 & M^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

а канонические уравнения суть

$$\dot{X} = JAX \quad (4.3)$$

с постоянной матрицей  $A$ , где  $J$  — симплектическая единица.

В рассматриваемой системе (4.2) число степеней свободы  $m = 4$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$R = \frac{1}{\tilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 + 2 & 0 & -c_2 \\ -c_2 & 0 & c_2 - 1 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $c_1, c_2, \tilde{\Omega}$  — параметры. Область физических значений параметров — это положительный октант

$$\Phi = \{c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \tilde{\Omega} > 0\}. \quad (4.5)$$

Выполним следующую замену параметров:

$$p = c_1/\tilde{\Omega}^2, \quad q = c_2/\tilde{\Omega}^2, \quad r = 1/\tilde{\Omega}^2 \quad (4.6)$$

Таким образом, вектор параметров  $P = (p, q, r)$ . Физические значения параметров образуют область  $\Phi : P > 0$ .

Характеристический многочлен (3.3) теперь имеет следующие коэффициенты:

$$f_0 = \frac{1}{16} (2r^2 - rp - 3rq + pq + 4r - 8q - 4)^2,$$

$$f_1 = -2r^3 + \frac{3}{2}r^2p + \frac{11}{2}r^2q - \frac{1}{4}rp^2 - 3rpq - \frac{15}{4}rq^2 + \frac{1}{4}p^2q + \frac{5}{4}pq^2 +$$

$$+ 5r^2 - 2rp - 14rq + \frac{1}{4}p^2 + \frac{5}{2}pq + \frac{41}{4}q^2 - 8r + p + 13q + 4, \quad (4.7)$$

$$f_2 = 5r^2 - \frac{5}{2}rp - \frac{23}{2}rq + \frac{1}{4}p^2 + 3pq + \frac{25}{4}q^2 - 10r + 2p + 14q + 6,$$

$$f_3 = -4r + p + 5q + 4.$$

В дальнейшем все вычисления с многочленами делаются с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE. Системы алгебраических уравнений решаются с помощью базиса Грёбнера.

**4.2. Введение удобных параметров.** Поскольку свободный член  $f_0$  является полным квадратом, то удобно ввести и исследовать многочлен

$$f_{00} = \sqrt{f_0} = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}rp - \frac{3}{4}rq + \frac{1}{4}pq + r - 2q - 1. \quad (4.8)$$

Ноль этого квадратичного многочлена определяет коническую поверхность в пространстве параметров  $P$  с особой точкой  $P_0 = (2, -2, -2)$ .

Полином третьей степени  $f_1(P)$  обладает двумя особыми точками  $P_0$  и  $P_0^* = (2/3, -26/3, 10/3)$ . Следовательно, чтобы упростить формулы для коэффициентов, надо сделать параллельный перенос начала координат пространства параметров в точку  $P_0$ . Будем обозначать эти координаты буквами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно, а знак тильда над  $f_i$  будет означать, что коэффициент записывается в новых координатах  $Q = (x, y, z)$ , т. е.  $P = P_0 + Q$ .

В новых координатах  $Q$  коэффициенты характеристического многочлена (3.3) имеют вид:

$$\tilde{f}_{00} = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}zx - \frac{3}{4}zy + \frac{1}{4}xy, \quad \tilde{f}_0 = \tilde{f}_{00}^2, \quad (4.9)$$

$$\tilde{f}_1 = (\tilde{f}_3 - 4) \tilde{f}_0 + \tilde{f}_4^2, \quad (4.10)$$

$$\tilde{f}_2 = 5z^2 - \frac{5}{2}zx - \frac{23}{2}zy + \frac{1}{4}x^2 + 3xy + \frac{25}{4}y^2 - 12z + 2x + 18y, \quad (4.11)$$

$$\tilde{f}_3 = -4z + x + 5y + 4, \quad (4.12)$$

где

$$\tilde{f}_4 = 3z - \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y. \quad (4.13)$$

В новых координатах уравнение  $\tilde{f}_{00} = 0$  определяет конус  $\mathcal{C}$  с центром в начале координат  $Q_0 = 0$ .

**Замечание 4.1.** В рассматриваемой задаче анализ устойчивости на конусе  $\mathcal{C} : \tilde{f}_{00}(Q) = 0$  не имеет самостоятельного значения, ибо  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_{00}^2$  и  $\tilde{f}_0 > 0$  вблизи поверхности  $\tilde{f}_{00} = 0$ . Поэтому никакая часть этой поверхности не является границей области устойчивости.

**4.3. Исключительная плоскость.** Дискриминант характеристического многочлена (3.2) имеет вид

$$D(f) = l^4(Q) \cdot g(Q)/256, \quad (4.14)$$

где

$$l(Q) = 2z - x - 3y, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
g(Q) = & 512z^6 - 4352z^5y - 768z^5x + 14848z^4y^2 + 5376z^4yx + \\
& + 512z^4x^2 - 25408z^3y^3 - 14656z^3y^2x - 2752z^3yx^2 - \\
& - 192z^3x^3 + 21800z^2y^4 + 19168z^2y^3x + 5360z^2y^2x^2 + \\
& + 736z^2yx^3 + 40z^2x^4 - 7500zy^5 - \\
& - 11700zy^4x - 4376zy^3x^2 - 904zy^2x^3 - 92zyx^4 - 4zx^5 + \\
& + 2500y^5x + 1200y^4x^2 + 344y^3x^3 + 48y^2x^4 + 4yx^5 - 256z^5 + \\
& + 2880z^4y + 1344z^4x - 14976z^3y^2 - 6720z^3yx - 1344z^3x^2 + \\
& + 37928z^2y^3 + 13816z^2y^2x + 5144z^2yx^2 + 456z^2x^3 - \\
& - 45120zy^4 - 14464zy^3x - 6784zy^2x^2 - 1152zyx^3 - 64zx^4 + \\
& + 20250y^5 + 6490y^4x + 3156y^3x^2 + 740y^2x^3 + 82yx^4 + 2x^5 + \\
& + 1872z^4 + 2016z^3y - 5088z^3x - 35496z^2y^2 + 15888z^2yx + \\
& + 2200z^2x^2 + 67608zy^3 - 12936zy^2x - 5176zyx^2 - 344zx^3 - \\
& - 37827y^4 + 828y^3x + 2782y^2x^2 + 412yx^3 + 13x^4 - 13824z^3 + \\
& + 62208z^2y + 6912z^2x - 93312zy^2 - 20736zyx - 1152zx^2 + \\
& + 46656y^3 + 15552y^2x + 1728yx^2 + 64x^3.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Обозначим множества

$$\mathcal{G} = \{Q : g(Q) = 0\}, \quad \mathcal{L} = \{Q : l(Q) = 0\}. \tag{4.17}$$

Сначала рассмотрим нашу задачу об устойчивости на плоскости

$$\mathcal{L} : l \equiv 2z - x - 3y = 0. \tag{4.18}$$

На поверхности  $D(f) = 0$  характеристический многочлен (3.3) с  $m = 4$  имеет вид

$$f(\mu) = (\mu^2 + a\mu + b)(\mu + c)^2, \tag{4.19}$$

где  $a, b, c$  — рациональные функции от  $Q$ , т. е. отношения многочленов. В частности, это справедливо на плоскости (4.18). Действительно, на этой плоскости  $x = 2z - 3y$ , и

$$a = 4 - y, \quad b = y^2/4, \quad c = -(2z - 3y)/2.$$

Следовательно,

$$\mu_{1,2} = (2z - 3y)/2, \tag{4.20}$$

а  $\mu_3$  и  $\mu_4$  удовлетворяют уравнению

$$e(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^2 + (4 - y)\mu + y^2/4 = 0, \tag{4.21}$$

т. е.  $\mu_{3,4} = (y - 4)/2 \pm \sqrt{4 - 2y}$ . Согласно (4.20) и теореме 3.1 для  $m = 2$  множество устойчивости выделяется неравенствами

$$2z - 3y \leq 0, \quad 4 - y \geq 0 \text{ и } 4 - 2y \geq 0,$$

т. е.

$$z \leq 3y/2, \quad 4 \geq y \text{ и } 2 \geq y.$$

Последнее неравенство сильнее предыдущего, следовательно, множество устойчивости  $S_{\mathcal{L}}$  на плоскости  $\mathcal{L}$  выделяется двумя условиями

$$z \leq 3y/2 \text{ и } y \leq 2. \quad (4.22)$$

Граница множества устойчивости  $S_{\mathcal{L}}$  выделена жирной сплошной линией на рис. 1.

При  $y = 2$  корни  $\mu_3$  и  $\mu_4$  совпадают и равны  $-1$ . Т. е. на этой прямой имеются две пары одинаковых корней  $\mu_{1,2}$  и  $\mu_{3,4}$ . Они совпадают в точке  $Q_1 = (-2, 2, 2)$ . Наконец, корни  $\mu_{1,2}$  совпадают с одним из корней уравнения (4.21) на параболе

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 : (z - 2y)^2 + 2(2z - 3y) = 0. \quad (4.23)$$

Ее график показан на рис. 1. Она полностью лежит в множестве устойчивости, касаясь его границ в двух точках  $Q_0$  и  $Q_1$ .

**Замечание 4.2.** Поскольку множитель  $l(Q)$  входит в дискриминант (4.14) в четвертой степени, то на плоскости  $\mathcal{L}$  множество устойчивости является автономным и не влияет на строение множества устойчивости вне этой плоскости. Однако, как увидим ниже, на плоскости  $\mathcal{L}$  множество устойчивости (4.22) лежит в множестве устойчивости, соответствующем множителю  $g(Q)$  дискриминанта (4.14).

Область устойчивости  $S_{\mathcal{L}}$  лежит вне области  $\Phi$  физических значений параметров.

**4.4. Особые точки множества  $\mathcal{G}$ .** Рассмотрим особые точки множества  $\mathcal{G}$  из (4.16), (4.17). Особенности первого порядка удовлетворяют системе уравнений

$$g(Q) = 0, \quad \partial g / \partial x = 0, \quad \partial g / \partial y = 0, \quad \partial g / \partial z = 0. \quad (4.24)$$

Особенности второго порядка множества  $\mathcal{G}$  должны удовлетворять системе (4.24), к которой добавлено условие, что все вторые частные производные равны нулю. Этой системе удовлетворяют следующие четыре точки:

$$Q_0, \quad Q_1 = (-2, 2, 2), \quad Q_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 6\right), \quad Q_3 = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right). \quad (4.25)$$



В этих точках  $\mu_{1,2,3,4}(Q_{1,2,3}) = -1/4$ ,  $\mu_{1,2,3}(Q_0) = 0$ ,  $\mu_4(Q_0) = -4$ .

Особенностей третьего порядка у множества  $\mathcal{G}$  нет.

С помощью базиса Грёбнера удалось найти все решения системы (4.24). Они расположены на трех однопараметрических семействах  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$ .

Семейство  $\mathcal{P}_1$  определяется нулями следующих многочленов

$$x + 3y - 2z, \quad z^2 - 4zy + 4z + 4y^2 - 6y. \quad (4.26)$$

Это семейство представляет собой параболу

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = -2t^2, \\ y = -2t^2 - 4t, \\ z = -4t^2 - 6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.27)$$

Первый из многочленов (4.26) совпадает с линейной функцией, определяющей исключительную плоскость (4.15), а второй — с уравнением параболы  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  из (4.23). Вдоль этой параболы корни характеристического многочлена принимают значения

$$\mu_{1,2,3} = -t^2, \quad \mu_4 = -(t+2)^2, \quad (4.28)$$

т. е. всем точкам параболы  $\mathcal{P}_1$  соответствует устойчивость. Парабола  $\mathcal{P}_1$  соединяет критические точки  $Q_1$  и  $Q_0$ , которые разбивают ее на три части  $\mathcal{P}_1^-$ ,  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_1^+$ :

$$\mathcal{P}_1^- \text{ при } t < -1, \quad \mathcal{P}_1^0 \text{ при } -1 \leq t \leq 0, \quad \mathcal{P}_1^+ \text{ при } t > 1.$$

Вершина параболы находится в точке  $Q_4 = (-1/2, 3/2, 2)$ . Вся парабола  $\mathcal{P}_1$  лежит в плоскости  $\mathcal{L}$  (см. (4.18) и рис. 1).

Семейство  $\mathcal{P}_2$  определяется нулями следующих многочленов

$$-z + 2y - 1, \quad x^2 + 8x + 28 - 2xy - 16y + y^2. \quad (4.29)$$

Семейство  $\mathcal{P}_2$  представляет собой параболу

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = 3v + \frac{1}{2}v^2, \\ y = 2 + v + \frac{1}{2}v^2, \\ z = 3 + 2v + v^2, \end{cases} \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.30)$$

На ней корни характеристического многочлена суть

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2}, \\ \mu_{3,4} &= \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Корни (4.31) вещественны и неположительны при условии  $-1 \leq v \leq 1$  и принимают значения из интервала  $[-1; 0]$ . Таким образом, семейство  $\mathcal{P}_2$  разбивается на три части  $\mathcal{P}_2^-$ ,  $\mathcal{P}_2^0$ ,  $\mathcal{P}_2^+$ :

$$\mathcal{P}_2^- \text{ при } v < -1, \quad \mathcal{P}_2^0 \text{ при } -1 \leq v \leq 1, \quad \mathcal{P}_2^+ \text{ при } v > 1.$$

Согласно (4.31) только часть  $\mathcal{P}_2^0$  попадает в область устойчивости. Семейство  $\mathcal{P}_2$  соединяет критические точки  $Q_2$  и  $Q_3$ , а ее вершина совпадает с точкой  $Q_5 = (0, 2, 3)$ . Парабола  $\mathcal{P}_2$  лежит в плоскости  $\mathcal{M} = \{Q : 2y = z + 1\}$  и показана на рис. 2.

Семейство  $\mathcal{F}$  определяется нулями любой пары из следующих трех полиномов базиса Грёбнера, которые задают неявно проекции этого семейства на соответствующие координатные плоскости:

$$\begin{aligned} \Xi_1(x, z) = & 2560 z^6 - 7680 z^5 x + 11520 z^4 x^2 - 10240 z^3 x^3 + 5760 z^2 x^4 - 1920 z x^5 + \\ & + 320 x^6 - 22176 z^5 + 56256 z^4 x - 100560 z^3 x^2 + 91344 z^2 x^3 - 40128 z x^4 + \\ & + 7296 x^5 + 63909 z^4 - 132984 z^3 x + 380784 z^2 x^2 - 297120 z x^3 + 71520 x^4 - \\ & - 61344 z^3 + 99684 z^2 x - 753552 z x^2 + 337568 x^3 + 621108 x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_2(x, y) = & 8000 y^6 - 9600 y^5 x + 8640 y^4 x^2 - 4352 y^3 x^3 + 1728 y^2 x^4 - 384 y x^5 + \\ & + 64 x^6 - 50832 y^5 + 56784 y^4 x - 72672 y^3 x^2 + 32352 y^2 x^3 - 10128 y x^4 + 1488 x^5 + \\ & + 111321 y^4 - 108612 y^3 x + 241494 y^2 x^2 - 89412 y x^3 + 16473 x^4 - 84672 y^3 + \\ & + 63504 y^2 x - 389088 y x^2 + 89488 x^3 + 254016 x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_3(y, z) = & -9072 z y + 3024 z^2 + 6804 y^2 - 3736 z^3 + 3813 z^4 + 10068 z^2 y - \\ & - 4944 z y^2 - 17880 y z^3 + 34032 y^2 z^2 - 2656 y^3 + 13920 y^4 - 32928 y^3 z - 15168 y z^4 + \\ & + 48720 y^2 z^3 - 77424 y^3 z^2 + 62016 y^4 z + 1824 z^5 - 20352 y^5 - 4608 y z^5 + 17664 y^2 z^4 - \\ & - 36864 y^3 z^3 + 44160 y^4 z^2 - 28800 y^5 z + 512 z^6 + 8000 y^6. \end{aligned}$$

Оно представляет собой криволинейный четырехугольник, проходящий через особые точки  $Q_0$ ,  $Q_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ . Его параметрическое представление имеет вид

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = 2 \sin^4 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) - 3 \sin^3 2\varphi, \\ y = 2 + 6 \cos^4 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - \sin^3 2\varphi, \\ z = 2 + 6 \cos^2 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - 2 \sin^3 2\varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < \pi. \quad (4.32)$$

На семействе (4.32) корни характеристического многочлена (3.3) суть

$$\mu_{1,2,3} = -\sin^4 \varphi, \quad \mu_4 = -(3 \sin^2 \varphi - 2)^2, \quad (4.33)$$

т. е. на этом семействе имеется устойчивость.

Таким образом, особенности множества  $\mathcal{G}$  сосредоточены на семействах  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$ , которые своими сегментами  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_2^0$  и  $\mathcal{F}$  формируют «каркас» поверхности в форме криволинейного тетраэдра (см. рис. 3). Детальный анализ (см. п. 4.10) показывает, что множество  $\mathcal{G}$  состоит из нескольких компонент размерностей 1 и 2. Четыре компоненты размерности 1 представляют собой части  $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$  парабол  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ . При этом плоскости  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , в которых лежат семейства  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , пересекаются по прямой, проходящей через точки  $Q_4$  и  $Q_5$  — вершины этих парабол. Проекция описанных семейств и особых точек на плоскость  $\mathcal{N} = \{Q : x + y + 2z = 8\}$ , нормальную прямой  $[Q_4, Q_5]$ , показана на рис. 4.

**4.5. О степенной геометрии.** Локальный анализ множества  $\mathcal{G}$  вблизи особой точки  $X^0$  проведем методами степенной геометрии, изложенными в главах 1 и 2 книги [5] (см. также [6]). Для удобства читателя напомним основные моменты этого анализа. Пусть задана конечная сумма (например, многочлен)

$$g(X) = \sum g_R X^R \text{ по } R \in \mathbf{S}, \quad (4.34)$$

где  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$  и  $X^R = x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3}$ ,  $g_R = \text{const} \in \mathbb{R}$ . Каждому слагаемому суммы (4.34) ставится в соответствие его векторный показатель степени  $R$ , а всей сумме (4.34) — множество  $\mathbf{S}$  всех векторных показателей ее слагаемых, которое называется *носителем* суммы (4.34) или многочлена  $g(X)$  и обозначается  $\mathbf{S}(g)$ . Выпуклая оболочка носителя  $\mathbf{S}(g)$  называется *многогранник Ньютона* суммы  $g(X)$  и обозначается  $\Gamma(g)$ . Граница  $\partial\Gamma$  многогранника  $\Gamma(g)$  состоит из *обобщенных граней*  $\Gamma_j^{(d)}$  разных размерностей  $d = 0, 1, 2$ . Здесь  $j$  — номер грани. Каждой обобщенной грани  $\Gamma_j^{(d)}$  ставится в соответствие *укороченная сумма*

$$\hat{g}_j^{(d)}(X) = \sum g_R X^R \text{ по } R \in \Gamma_j^{(d)} \cap \mathbf{S}(g). \quad (4.35)$$

Обобщенная грань  $\Gamma_j^{(d)}$  имеет  $3 - d$  линейно независимых нормальных векторов  $N_k = (n_{1k}, n_{2k}, n_{3k})$ , направленных наружу многогранника  $\Gamma(g)$ . Если все точки  $R$  носителя  $\mathbf{S}(g)$  рациональны, то все нормальные векторы  $N_k$  можно взять целочисленными. Каждая укороченная сумма  $\hat{g}_j^{(d)}(X)$  является квазиоднородной, и число ее разных квазиоднородностей равно  $3 - d$ . Для вершины  $\Gamma_j^{(0)}$  укороченная сумма  $\hat{g}_j^{(0)}$  состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие ребрам  $\Gamma_j^{(1)}$  и граням  $\Gamma_j^{(2)}$ .

Введем *степенные преобразования*

$$\ln X = A \ln Y, \quad (4.36)$$

где  $\ln X = (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3)^T$ ,  $A$  — невырожденная квадратная  $3 \times 3$  матрица  $(a_{ij})$  с рациональными элементами  $a_{ij}$  (зачастую они будут целыми).

**Теорема 4.1.** *Для грани  $\Gamma_j^{(d)}$  существует степенное преобразование (4.36), которое переводит укороченную сумму  $\hat{g}_j^{(d)}$  к сумме от  $d$  координат, т. е.*

$$\hat{g}_j^{(d)}(X) = Y^R h(Y),$$

где  $h(Y) = h(y_1)$ , если  $d = 1$ , и  $h(Y) = h(y_1, y_2)$ , если  $d = 2$ . Здесь  $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Теперь опишем процедуру локального анализа особенности множества  $g(X) = 0$ .

Пусть известна особая точка  $X^0$  или кривая  $\mathcal{F}$ , состоящая из особых точек, или поверхность  $\Sigma$ , состоящая из особых точек.

1. Делаем замену координат  $X \rightarrow Y$ , переводящую множество особенностей в координатное подпространство. То есть особая точка переводится в начало координат, особая кривая — в координатную ось, а особая поверхность — в координатную плоскость.
2. Записываем многочлен  $g$  в координатах  $Y$ , вычисляем его носитель  $\mathbf{S}(g)$ , многогранник  $\Gamma(g)$ , его двумерные грани  $\Gamma_j^{(2)}$  и их внешние нормали  $N_j$ . Для анализа особой точки в начале координат  $Y = 0$  отбираем все те грани  $\Gamma_j^{(2)}$ , у которых отрицательны внешние нормали  $N_j < 0$ .
3. Для каждой отобранной грани  $\Gamma_j^{(2)}$  делаем степенное преобразование  $Y \rightarrow Z$ , описанное теоремой 4.1.
4. Находим нули  $(z_1^0, z_2^0)$  суммы  $h(z_1, z_2)$ . Их разделяем на простые точки и особые. Простые точки после обратных преобразований  $Z \rightarrow Y \rightarrow X$  дадут приближение поверхности  $g(X) = 0$ . Особые точки надо снова подвергнуть локальному анализу. Для этого степенное преобразование теоремы 4.1 надо сделать во всем многочлене  $g(Y)$  и затем выполнить шаги 1–4 и так далее.

На каждом таком цикле будет происходить упрощение особенности, и через их конечное число ее удастся разрешить.

Отметим некоторые специфичные моменты этой процедуры.

- а) Если укорочение  $\hat{g}_j^{(2)}(Y)$  является степенью некоторой суммы  $\varphi(Y)$ , то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную  $z = \varphi(Y)$ . Аналогично, если укорочение  $\hat{g}_k^{(1)}(Y)$ , соответствующее ребру  $\Gamma_k^{(1)}$  грани  $\Gamma_j^{(2)}$ , является степенью некоторой суммы  $\psi(Y)$ , то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную  $z = \psi(Y)$ .

- б) Если укороченный многочлен  $\hat{g}_j^{(2)}(Y)$  факторизуется, то аналогично факторизуется и многочлен  $h(z_1, z_2)$ , полученный с помощью степенного преобразования теоремы 4.1. В этом случае решение уравнения  $h(z_1, z_2) = 0$  упрощается.
- в) Для асимптотического анализа множества  $\{X : g(X) = 0\}$  при  $X \rightarrow \infty$  делаются шаги 2 и т. д. Только в этом случае отбираются все те грани  $\Gamma_j^{(2)}$  многогранника  $\Gamma(g)$ , у которых положительны внешние нормали:  $N_j > 0$ .

**4.6. Локальный анализ множества  $\mathcal{G}$  вблизи семейств  $\mathcal{P}_{1,2}$ .** Рассмотрим структуру множества  $\mathcal{G}$  в окрестности параболы  $\mathcal{P}_1$ . Для этого выполним следующую замену переменных:

$$y = Y + 2, \quad z = Y + 2Z - 2.$$

В новых переменных уравнение параболы (4.23) принимает вид  $Y = -Z^2/2$ , а уравнение плоскости (4.18):  $x = Y + 2Z - 2$ . Введем локальные координаты  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  в окрестности параболы  $\mathcal{P}_1$ , выполняя подстановку

$$x = Z^2/2 + 2Z - 2 + \tilde{X}, \quad Y = -Z^2/2 + \tilde{Y}.$$

В многочлене  $g(Q)$ , выделим слагаемые с наименьшей степенью по локальным переменным  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$ . В данном случае это квадратичная по  $\tilde{X}$  и  $\tilde{Y}$  форма

$$\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 16 Z^2 (Z - 2)^2 \left( Z^2 \tilde{X}^2 + Z^2 \tilde{Y}^2 - 2 Z^2 \tilde{Y} \tilde{X} - 2 Z \tilde{X}^2 - 2 Z \tilde{Y}^2 + 4 Z \tilde{Y} \tilde{X} + 9 \tilde{Y}^2 - 6 \tilde{Y} \tilde{X} + \tilde{X}^2 \right). \quad (4.37)$$

Ее дискриминант имеет вид  $4096Z^5(Z - 2)^5$ , т. е. при  $0 < Z < 2$  он принимает отрицательные значения, а значит при фиксированном  $Z$  кривая  $\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$  устроена как пара пересекающихся прямых. При  $Z < 0$  или  $Z > 2$  указанная выше кривая представляет собой действительную точку пересечения мнимых прямых. Значению  $Z = 0$  соответствует точка  $Q_1$ , а значению  $Z = 2$  — точка  $Q_0$  — особые точки второго порядка. Таким образом, только вдоль части  $\mathcal{P}_1^0$  переменная  $\tilde{Y}$  может быть выражена как вещественная функция от двух других переменных. Такое представление в первом приближении задается следующими формулами:

$$\tilde{Y}_1 = \frac{(Z - 1)^2 + 2 + 2\sqrt{Z(2 - Z)}}{(Z - 1)^2 + 8} \tilde{X}, \quad \tilde{Y}_2 = \frac{(Z - 1)^2 + 2 - 2\sqrt{Z(2 - Z)}}{(Z - 1)^2 + 8} \tilde{X}.$$

Другими словами, часть  $\mathcal{P}_1^0$  представляет собой кривую самопересечения двумерной компоненты множества  $\mathcal{G}$ . Части  $\mathcal{P}_1^-$  и  $\mathcal{P}_1^+$  представляют собой изолированные компоненты размерности 1 множества  $\mathcal{G}$ .

Аналогичные вычисления были проделаны для семейства  $\mathcal{P}_2$ . Они показали, что части  $\mathcal{P}_2^-$  и  $\mathcal{P}_2^+$  представляют собой изолированные компоненты размерности 1 множества  $\mathcal{G}$ , а часть  $\mathcal{P}_2^0$  представляет собой кривую, на которой происходит самопересечение двумерной компоненты множества  $\mathcal{G}$ .

**4.7. Локальный анализ вблизи семейства  $\mathcal{F}$ .** Для локального анализа в окрестности семейства  $\mathcal{F}$  выполним замену

$$x = X + \mathcal{F}_1(\varphi), \quad y = Y + \mathcal{F}_2(\varphi), \quad z = Z + \mathcal{F}_3(\varphi), \quad (4.38)$$

где  $X, Y, Z$  — локальные переменные, а  $\mathcal{F}_i(\varphi)$  — координатное представление семейства  $\mathcal{F}$ , задаваемое параметризацией (4.32). В новых переменных выражение  $g(Q)$  представлено суммой форм, наименьшая степень которых будет равна 2. Эта квадратичная форма определяет поведение множества  $\mathcal{G}$  в окрестности семейства  $\mathcal{F}$ . Анализ этой формы показывает, что она тождественно равна нулю при  $\varphi = n\pi/4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то есть в особых точках второго порядка, а при других значениях  $\varphi$  эта форма представляет собой полный квадрат линейной формы от локальных переменных  $a(\varphi)X + b(\varphi)Y + c(\varphi)Z$ . Вводя новую переменную  $U$ , выражаемую через эту линейную форму, и подставляя ее в многочлен  $g(Q)$  получим, что поведение множества  $\mathcal{G}$  в окрестности кривой  $\mathcal{F}$  определяется неявной функцией вида  $d(\varphi)U^2 + G_3(\varphi, X, Y) = 0$ , где  $G_3(\varphi, X, Y)$  — кубическая по переменным  $X$  и  $Y$  форма. Следовательно, множество  $\mathcal{G}$  в окрестности точек кривой  $\mathcal{F}$  устроена как поверхность возврата с ребром  $\mathcal{F}$  за исключением особых точек второго порядка (4.25).

Рассмотрим подробнее локальное поведение множества  $\mathcal{G}$  вблизи точки  $Q_6 = (-9\sqrt{3}/8, (18 - 3\sqrt{3})/8, (27 - 6\sqrt{3})/8) \approx (-1,9486, 1,6005, 2,0760)$  семейства  $\mathcal{F}$ , соответствующей параметру  $\varphi = \pi/3$  в (4.32). Выполняя замену переменных согласно (4.38), переходим к локальным переменным  $X, Y, Z$ . Многогранник Ньютона многочлена  $g(Q)$  имеет одну грань  $\Gamma_1^{(2)}$  с отрицательным внешним нормальным вектором  $N_1 = (-1, -1, -1)$ . Укорочение этого многочлена на грань  $\Gamma_1^{(2)}$  приводит к полному квадрату

$$\hat{g}_1^{(2)}(X, Y, Z) = \frac{243}{64} \left(4\sqrt{3} - 7\right) \left(2Z\sqrt{3} + 6Z - 3Y - X\right)^2.$$

Следовательно, необходимо выполнить подстановку  $X = 2Z\sqrt{3} + 6Z - 3Y + U$ , найти носитель полученного многочлена и рассмотреть новый многогранник показателей переменных  $U, Y, Z$ . После выполнения указанных действий находим грань с нормалью  $N_2 = (-3, -2, -2)$ , которой соответствует

укорочение

$$\hat{g}_2^{(2)}(U, Y, Z) = 8 \left( -3Y + (3 + \sqrt{3})Z \right)^3 + \left( \frac{243}{16} \sqrt{3} - \frac{1701}{64} \right) U^2.$$

Поскольку первое слагаемое укороченного многочлена является полным кубом, то выполняем еще одну замену переменных  $Y = (1 + \sqrt{3}/3)Z + V$  и повторяем описанные выше действия. В итоге получаем многочлен от переменных  $U, V, Z$ , укорочение которого на грань с нормалью  $N_3 = (-3, -2, -1)$  дает квазиоднородную функцию

$$\begin{aligned} \hat{g}_3^{(2)}(U, V, Z) = & \left( -64 - \frac{112}{3} \sqrt{3} \right) Z^3 U + \left( 192 \sqrt{3} + 336 \right) Z^2 V^2 + \\ & + 27 \sqrt{3} Z V U - 216 V^3 + \left( \frac{243}{16} \sqrt{3} - \frac{1701}{64} \right) U^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Выполняем степенное преобразование  $U = \xi Z^3$ ,  $V = \eta Z^2$  с унимодулярной матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Это преобразование совместно с сокращением на моном  $Z^6/192$  превращает многочлен (4.39) от трех переменных  $U, V, Z$  в многочлен от двух переменных  $\xi, \eta$

$$\begin{aligned} \hat{h}_3(\xi, \eta) = & -41472 \eta^3 + 64512 \eta^2 + 36864 \sqrt{3} \eta^2 + 5184 \sqrt{3} \eta \xi + \\ & + 2916 \sqrt{3} \xi^2 - 5103 \xi^2 - 12288 \xi - 7168 \sqrt{3} \xi, \end{aligned} \quad (4.40)$$

нуль которого определяет плоскую алгебраическую кривую рода 0. Эта кривая имеет единственную особую точку с координатами

$$\xi_0 = (43008 + 24832\sqrt{3})/729 \approx 117,9949, \quad \eta_0 = (56 + 32\sqrt{3})/27 \approx 4,12688,$$

которая является точкой возврата и определяет разложение семейства  $\mathcal{F}$  вблизи точки  $Q_6$ . Разложение ветвей кривой  $h(\xi, \eta) = 0$  легко определяется с использованием шагов 1–4 п. 4.5:

$$\eta(\xi) = \eta_0 + \alpha_1(\xi - \xi_0) \pm \alpha_2(\xi_0 - \xi)^{3/2}, \quad \xi \leq \xi_0$$

где  $\alpha_1 \approx 0,01166$ ,  $\alpha_2 \approx 0,000413$ , и с учетом указанных выше замен дает приближение поверхности  $\mathcal{G}$  вблизи семейства  $\mathcal{F}$ . В локальных координатах оно имеет вид

$$\begin{aligned} X &= (3 - \sqrt{3})Z - 3\eta(\xi)Z^2 + \xi Z^3, \\ Y &= (1\sqrt{3}/3)Z + \eta(\xi)Z^2. \end{aligned}$$

На рис. 5 показано сечение множества  $\mathcal{G}$  плоскостью  $\mathcal{K} = \{Q : x - y = -2\}$ , проходящей через точки  $Q_4, Q_5$  и  $Q_7 = (-(1+2\sqrt{2})/4, (7-2\sqrt{2})/4, (10-3\sqrt{2})/4) \approx (-0,9571, 1,0429, 1,4393)$ . На рис. 4 показана проекция этой плоскости  $\mathcal{K}$ , на плоскость  $\mathcal{N}$ , ортогональную прямой  $[Q_4, Q_5]$ .

**4.8. Строение множества  $\mathcal{G}$  вблизи особых точек второго порядка.** Через каждую особую точку второго порядка (4.25) проходит семейство  $\mathcal{F}$  и одна из ветвей семейств  $\mathcal{P}_{1,2}$ , т. е. локально множество  $\mathcal{G}$  вблизи каждой из этих точек устроено одинаково, и достаточно провести его локальный анализ вблизи одной из точек, например вблизи точки  $Q_0 = 0$ .

Носитель многочлена (4.16) и его многогранник Ньютона показаны на рис. 6а). Укорочение многочлена  $g(Q)$ , соответствующее грани  $\Gamma_0^{(2)}$ , имеет вид

$$\hat{g}_0^{(2)} = 64(x + 9y - 6z)^3.$$

Следовательно, следуя замечанию а) п. 4.5, выполним замену переменной  $x = 6z - 9y + x_1$ . В новом многограннике имеется лишь одна грань  $\Gamma_1^{(2)}$  с отрицательным нормальным вектором  $N_1 = (-4, -3, -3)$ , которой соответствует укорочение

$$\hat{g}_1^{(2)} = 64x_1^3 - 432(3y - 2z)^4.$$

Вновь выполняя подстановку  $z = 3y/2 + z_1$  и повторяя действия шагов 1–3 п. 4.5, получим многогранник с единственной подходящей гранью  $\Gamma_2^{(2)}$ , которой соответствует укорочение многочлен

$$\hat{g}_2^{(2)} = 32z_1^2y^3 - 6912z_1^4 - 1152z_1^2yx_1 + 4x_1(4x_1 - y^2)^2.$$

Еще одна подстановка  $x_1 = y^2/4 + x_2$  приводит к многочлену, у которого многогранник Ньютона и носитель показаны на рис. 6б). У этого многогранника выделяются две грани:  $\Gamma_{31}^{(2)}$  и  $\Gamma_{32}^{(2)}$ .

Рассмотрим подробнее укорочение многочлена (4.16)

$$\hat{g}_{32}^{(2)} = -256y^3z_1^2 + 16x_2^2y^2 - 1152x_2yz_1^2 - 6912z_1^4 + 64x_2^3, \quad (4.41)$$

соответствующее грани  $\Gamma_{32}^{(2)}$  с внешней нормалью  $N_{32} = (-4, -2, -3)$ . Степенное преобразование

$$x_2 = \xi t^4, \quad y = \eta t^2, \quad z_1 = t^3 \quad (4.42)$$

после факторизации позволяет превратить многочлен (4.41) в плоскую кривую, изображенную на рис. 7

$$\hat{h}_{32}^{(2)}(\xi, \eta) = -\eta^2\xi^2 + 16\eta^3 - 4\xi^3 + 72\eta\xi + 432 = 0. \quad (4.43)$$

У этой кривой есть особая точка первого порядка  $\xi_0 = -6\sqrt[3]{2}$ ,  $\eta_0 = 3\sqrt[3]{4}$ , которой соответствует пространственная кривая

$$x = 6t^3 - 3t^4/\sqrt[3]{4}, \quad y = 3\sqrt[3]{4}t^2, \quad z = 9t^2/\sqrt[3]{2} + t^3. \quad (4.44)$$



Эта кривая дает первое приближение семейства  $\mathcal{F}$ , проходящего через точку  $Q_0$ . Локальный анализ кривой (4.43) в этой особой точке показывает, что это точка возврата, а кривые, выходящие из нее описываются функциями

$$\eta_{1,2} = \eta_0 - 2^{-2/3}(\xi + \xi_0) \pm 2^{-1/3} \cdot 3^{-3/2}(-\xi - \xi_0)^{3/2}, \quad \xi \geq -\xi_0. \quad (4.45)$$

В исходных переменных кривые (4.45) дают приближение множества  $\mathcal{G}$  вблизи семейства  $\mathcal{F}$ .

Теперь рассмотрим укорочение многочлена (4.16), соответствующее грани  $\Gamma_{31}^{(2)}$ . Это укорочение имеет вид

$$\hat{g}_{31}^{(2)} = - (y^5 + 32 y^3 z_1 + 256 y z_1^2 - 16 x_2^2) y^2.$$

Первые три слагаемых этого укорочения вновь нетривиально факторизуются и, следовательно, можно применить соответствующую замену переменных. Однако это не приводит к дальнейшему упрощению, а вновь дает укороченный многочлен с нетривиальной факторизацией одного ребра. При этом нормаль грани, на которую проводится укорочение, несколько поворачивается. Можно высказать предположение, что дальнейшие подстановки будут сохранять общую структуру выпуклого многогранника, но грань, обозначенная на рис. 6б) как  $\Gamma_{31}^{(2)}$  в пределе станет параллельной оси  $P_y$ , и, следовательно, достаточно будет рассмотреть укорочение многочлена (4.16), соответствующее ребру  $\Gamma_{31}^{(1)}$  многогранника. Это укорочение имеет вид

$$\hat{g}_{31}^{(1)} = 16 y z_1^2 - x_2^2$$

и представляет собой квадратичную форму относительно переменных  $x_2$  и  $z_1$ . Сигнатура этой формы зависит от знака  $y$ . При  $y < 0$  форма становится знакопостоянной и описывает в первом приближении ветвь параболы  $\mathcal{P}_1^-$ , выходящую из точки  $Q_0$ . При  $y > 0$  форма знакопеременная и описывает в первом приближении сегмент  $\mathcal{P}_1^0$ , на котором происходит пересечение поверхностей. Эти поверхности задаются следующими формулами:

$$x = 6z - 9y \pm \sqrt{y}(4z - 6y) + y^2/4, \quad y \geq 0.$$

#### 4.9. Асимптотический анализ множества $\mathcal{G}$ вблизи бесконечности.

Многогранник Ньютона  $\Gamma(g)$  многочлена (4.16) показан на рис. 8а). Его грани  $\Gamma_1^{(2)}$  с нормалью  $(1,1,1)$  соответствует укороченный многочлен

$$\hat{g}_1^{(2)}(Q) = 4 (-zx + 2z^2 + xy - 3zy) (x^2 + 6xy + 25y^2 - 4zx - 28zy + 8z^2)^2.$$

Нуль первой формы определяет коническую поверхность с центром в начале координат. Эта поверхность аппроксимирует в первом приближении поведение на бесконечности двумерной компоненты множества  $\mathcal{G}$ .

Нуль второй квадратичной формы определяет действительную прямую  $\mathcal{B}$  с направляющим вектором  $\tau_{\mathcal{B}} = (1,1,2)$ , которая лежит на пересечении двух комплексных плоскостей. Эта прямая задает в первом приближении асимптотическое направление ветвей парабол  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ . Найдем следующее приближение разложения множества  $\mathcal{G}$  вблизи этой прямой. Для этого выполним такую замену переменных, чтобы прямая  $\mathcal{B}$  перешла в одну из координатных прямых:

$$x = u + w, \quad y = v + w, \quad z = 2w. \quad (4.46)$$

Многогранник Ньютона преобразованного многочлена (4.16) показан на рис. 8б). Укорочения, соответствующие двум граням  $\Gamma_2^{(2)}$  и  $\Gamma_3^{(2)}$ , имеют вид

$$\hat{g}_2^{(2)} = 4 (u^2 + 6vu + 25v^2)^2 (-wu + vu + w^2 - 5wv), \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_3^{(3)} = & 4w^2(625v^4 + 300v^3u + 86v^2u^2 + 12vu^3 + u^4 + 112wv^2 - \\ & - 96wvu - 16wu^2 + 64w^2). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Укорочение  $\hat{g}_2^{(2)}$  не дает ничего нового, по прежнему определяя две ранее описанные квадратичные формы, но уже в новых переменных. Укорочение (4.48) соответствует грани  $\Gamma_3^{(2)}$  с нормалью  $(1,1,2)$ .

Поэтому делаем степенное преобразование

$$v = \eta u, \quad w = \zeta u^2, \quad (4.49)$$

которое позволяет в укорочении (4.48) выделить после факторизации многочлен от двух переменных  $\eta$  и  $\zeta$

$$\hat{h}_3(\eta, \zeta) = 625\eta^4 + 112\zeta\eta^2 + 300\eta^3 + 64\zeta^2 - 96\zeta\eta + 86\eta^2 - 16\zeta + 12\eta + 1, \quad (4.50)$$

нули которого являются его изолированными особыми точками первого порядка с координатами

$$H_1 = (-1/3, -2/9), \quad H_2 = (0, 1/8).$$

Точке  $H_1$  в исходных переменных соответствует приближение семейства  $\mathcal{P}_1$

$$x = u - 2u^2/9, \quad y = -u/3 - 2u^2/9, \quad z = -4u^2/9,$$

а точке  $H_2$  в исходных переменных соответствует приближение семейства  $\mathcal{P}_2$

$$x = u + u^2/8, \quad y = u^2/8, \quad z = u^2/4.$$

**4.10. Глобальное строение множества  $\tilde{\mathcal{G}}$ .** В множестве  $\mathcal{G}$  была найдена пара прямых. Это позволило выдвинуть гипотезу о линейчатой структуре данного множества, которая была подтверждена средствами базиса Грёбнера.

Компонента  $\tilde{\mathcal{G}}$  размерности 2 множества  $\mathcal{G}$  является развертывающейся линейчатой поверхностью (см., например, [7, гл. VII, §5] или [8, гл. 4]) и состоит из касательных семейства  $\mathcal{F}$ . Каждая из касательных проходит через две точки, которые лежат на частях  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$ , соответственно. Положения точек на указанных выше семействах задаются через параметры  $t$  и  $v$  следующим образом

$$t = -\sin^2 \varphi, \quad v = -\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (4.51)$$

Подставляя  $t$  и  $v$  из (4.51) в формулы (4.27) и (4.30), соответственно, получим координаты пары точек, определяющих прямую линейчатой поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Параметрическое представление последней задается следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= 3(u-1)\sin 2\varphi - 2u\sin^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi, \\ y &= (u-1)\sin 2\varphi - 2u\cos^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi + 2, \\ z &= 2(u-1)\sin 2\varphi - u(1+2\cos^2 \varphi) + \sin^2 2\varphi + 3, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < \pi, \\ u \in \mathbb{R}. \end{array} \quad (4.52)$$

Итак, множество  $\mathcal{G}$  состоит из двух одномерных «рогов»  $\mathcal{P}_2^\pm$ , двух одномерных «копыт»  $\mathcal{P}_1^\pm$  и двумерной поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$ , самопересекающейся по двум сегментам  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$ . Поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  является линейчатой с параметризацией (4.52).

С помощью параметризации (4.52) легко исследовать поведение корней характеристического многочлена (3.3) на границе области устойчивости. Для этого рассмотрим матрицу  $B$ , возникающую при исключении переменной  $\mu$  из системы двух уравнений  $f(\mu) = 0$  и  $f'(\mu) = 0$ . Эта матрица имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \\ 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3f_3 & 2f_2 & f_1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

и является матрицей однородной системы линейных уравнений относительно переменных  $\mu^k$ ,  $k = 0, \dots, 6$ . Исключая из системы линейных уравнений первое уравнение, получим неоднородную систему относительно переменных

$\mu^k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , в которой нас интересует решение только для  $k = 1$ . Это значение кратного корня  $\mu$  имеет вид

$$\mu_{mul} = \frac{-32 f_3 f_0 f_2 + 48 f_0 f_1 + 9 f_3^3 f_0 - f_1 f_2 f_3^2 - 3 f_3 f_1^2 + 4 f_1 f_2^2}{28 f_3 f_2 f_1 - 36 f_1^2 - 6 f_1 f_3^3 + 2 f_3^2 f_2^2 + 32 f_2 f_0 - 8 f_2^3 - 12 f_3^2 f_0}. \quad (4.54)$$

При параметризации (4.52) кратный корень на поверхности нуля дискриминанта равен

$$\mu_{mul} = -\sin^4 \varphi \leq 0, \quad (4.55)$$

а квадратичный множитель, определяющий другую пару корней характеристического многочлена имеет вид

$$\mu^2 + 2(u + \cos^4 \varphi) \mu + (u - \cos^4 \varphi)^2. \quad (4.56)$$

Дискриминант многочлена (4.56) имеет вид

$$\tilde{D} = 16u \cos^4 \varphi. \quad (4.57)$$

Согласно теореме 3.1 условия вещественности и неположительности корней многочлена (4.56) выполнены либо при  $u \geq 0$ , либо при  $\cos \varphi = 0$ . Последнее условие приводит к прямой  $x = 0$ ,  $y = 2z/3$ , на которой устойчивость достигается при  $u \geq 0$ . Следовательно, уравнения (4.52) при  $u \geq 0$  определяют границу области устойчивости.

Таким образом, множество устойчивости  $S$  состоит из двух частей  $S_1$  и  $S_2$ . Первая часть  $S_1$  представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_2^0$  и  $\mathcal{F}$ . Его поверхности  $\partial S_1$  соответствуют значения параметра  $0 \leq u \leq 1$  в параметризации (4.52). Вторая часть  $S_2$  ограничена частью линейчатой поверхности, соответствующей значениям параметра  $u \geq 1$  в параметризации (4.52). Первое  $S_1$  и второе  $S_2$  множества пересекаются по сегменту  $\mathcal{P}_1^0$ . На рис. 5 показано сечение множества устойчивости  $S$  плоскостью  $\mathcal{K} = \{Q : x - y + 2 = 0\}$ , проходящей через прямую  $[Q_4, Q_5]$ , а на рис. 1 и 2 — еще двумя плоскостями  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , проходящими через прямую  $[Q_4, Q_5]$ . На рис. 4 показаны проекции этих плоскостей на плоскость  $\mathcal{N}$ . Границы множества устойчивости показаны на рис. 9.

**4.11. Физические значения.** Множество устойчивости  $S \cap \Phi$  для физических значений параметров  $Q$  получается отсечением плоскостями  $x = -2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ . Эти плоскости выделяют две области устойчивости. Первая область  $\Phi_1$  представляет собой часть криволинейного тетраэдра от его вершины  $Q_2$  до плоскости  $y = 2$ , которая проходит через точки  $Q_1$  и  $Q_5$ . Эта область ограничена и представляет собой трехгранный клин. Вторая область  $\Phi_2$  ограничена сверху участком линейчатой поверхности (4.52) при  $u \geq 1$ , а снизу — плоскостью  $z = 2$ . Две области имеют общую точку  $Q_1$ . Границы областей устойчивости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  показаны на рис. 10.

**4.12. Сравнение результатов.** В диссертации [4, стр. 181–185] было проведено аналитическое исследование устойчивости в двух точках области устойчивости, одна из которых  $Q_2$ , а другая была взята на сегменте  $\mathcal{P}_2^0$ , с координатами  $(1/4 + 3\sqrt{2}/2, 9/4 + \sqrt{2}/2, 7/2 + \sqrt{2}/2)$ . Вблизи этих точек область устойчивости приблизительно выделялась посредством вычисления корней характеристического многочлена (3.3) по сетке в пространстве параметров. Также был выполнен численный анализ небольшой области в диапазоне изменения исходных параметров задачи:  $1,36 \leq c_1 \leq 1,56$ ,  $0,3 \leq c_2 \leq 0,38$ ,  $0,5 \leq \tilde{\Omega} \leq 0,7$ , что соответствует интервалам  $0,78 \leq x \leq 4,24$ ,  $2,61 \leq y \leq 3,52$ ,  $4,04 \leq z \leq 6,00$  в переменных  $Q$ . На стр. 185 автор диссертации [4] отмечает, что «... область устойчивости является очень узкой в направлении  $c_1$  и  $c_2$ , что требует тонкой настройки коэффициентов жесткости в шарнирах.» На самом деле, второе множество устойчивости  $\Phi_2$  обладает достаточной «мощностью», позволяя выбирать параметры в широком диапазоне значений. Еще раз отметим, что представленные выше формулы (4.27), (4.30), (4.32), (4.52) дают точное и исчерпывающее описание границы множества устойчивости движения гироскопической системы (4.1).

### Список литературы

- [1] Брюно А. Д. Множества устойчивости многопараметрических задач. Препринт № 3. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 14 с.
- [2] Барняк М. А., Стороженко В. А. К исследованию устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы шарнирно-связанных осесимметричных тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1988. — № 4. — С. 51–58.
- [3] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Об областях устойчивости гамильтоновых систем // *ПММ.* — 1999. — Т. 63, № 4. — С. 568–579.
- [4] Майлыбаев А. А. Многопараметрические задачи теории устойчивости: Дис... докт. физ.-мат. наук: 01.02.01. — СПб., 2008. — 296 с.
- [5] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с.
- [6] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 252 с.
- [7] Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — 6-е изд. — М.: «Наука», 1974. — 176 с.
- [8] Фиников С. П. Теория поверхностей. — М.: ГТТИ, 1934. — 203 с.

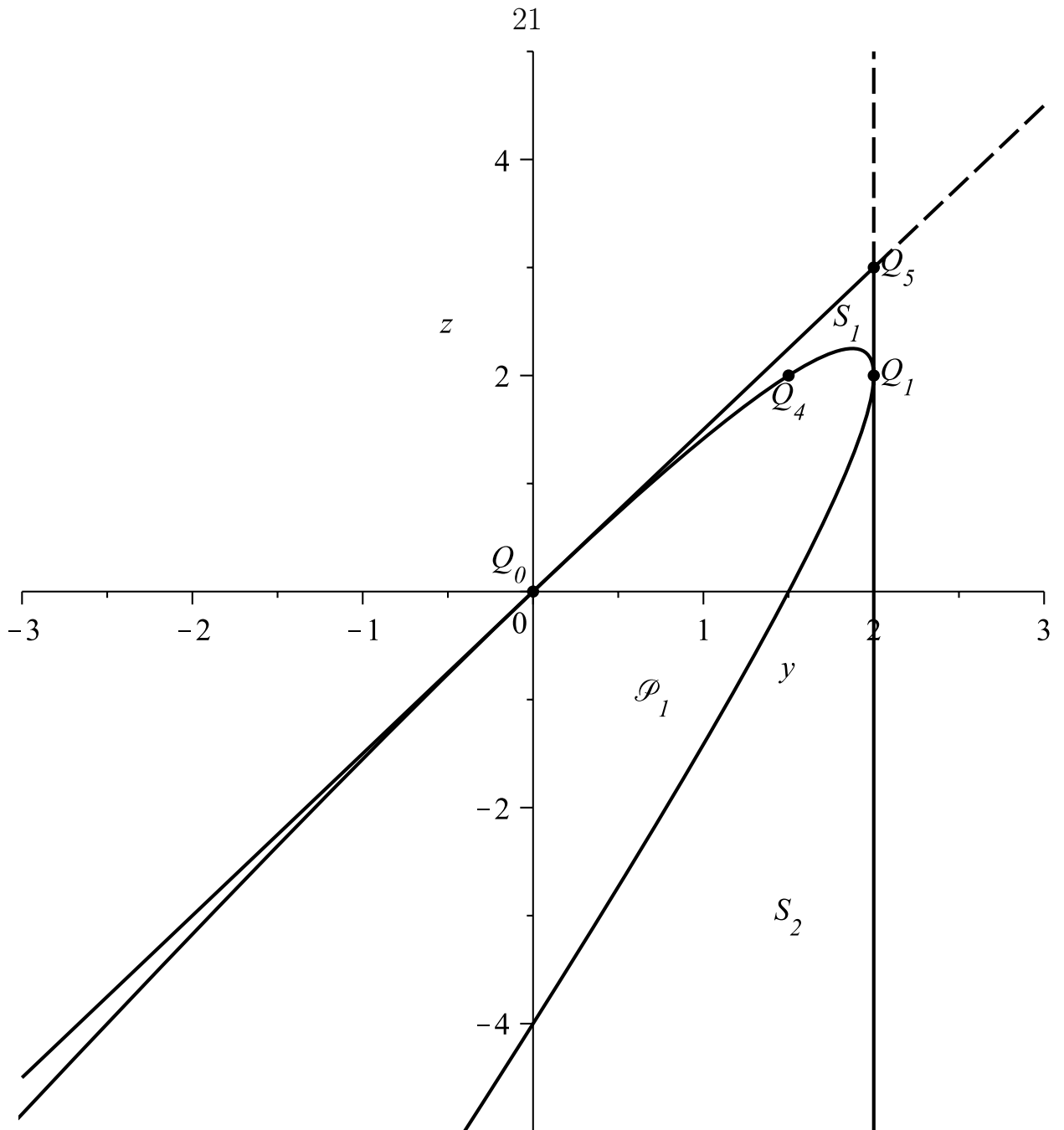


Рис. 1: Сечение множества  $\mathcal{G}$  исключительной плоскостью  $\mathcal{L}$ . Здесь и далее граница области устойчивости показана жирной линией.

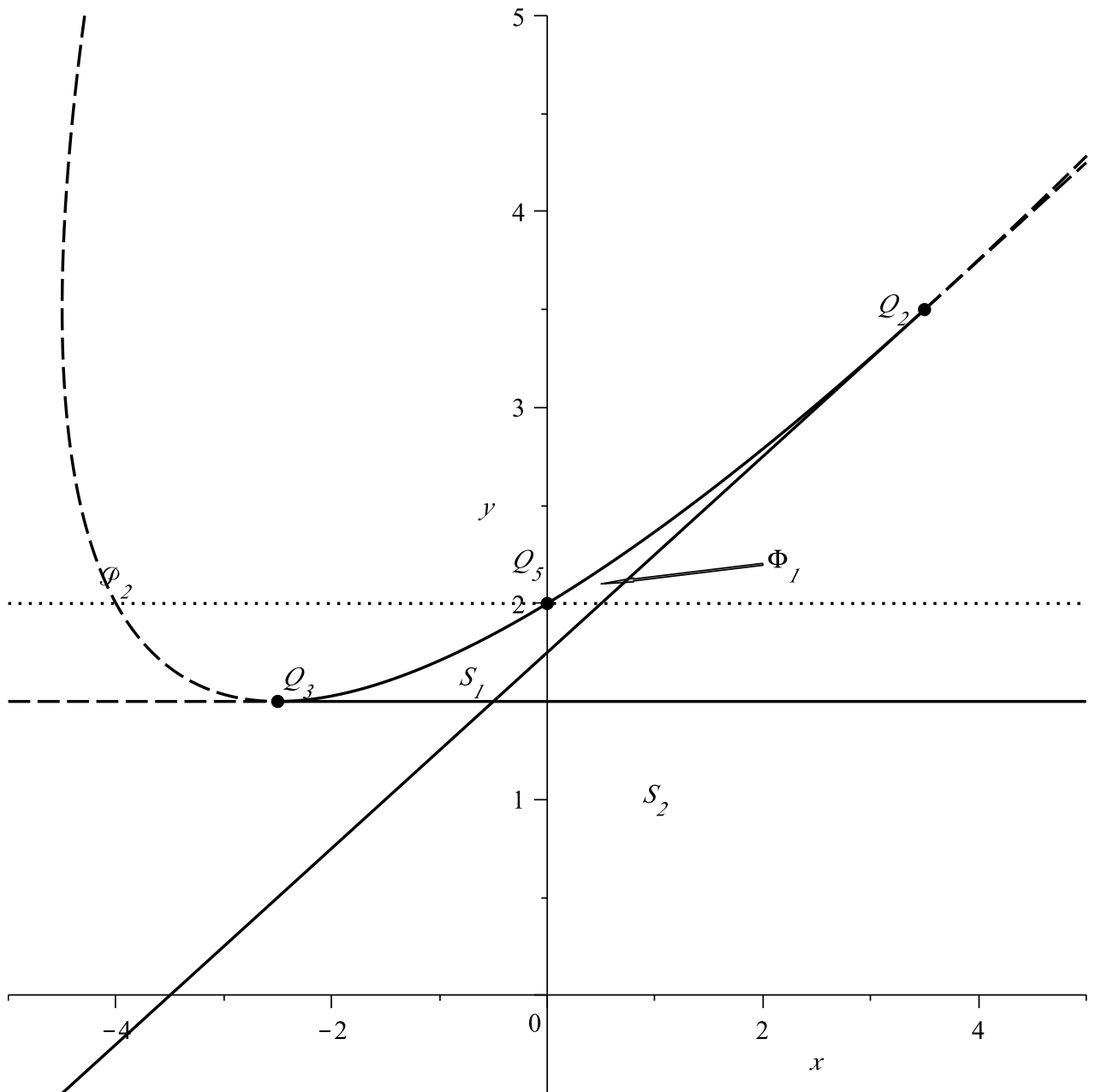


Рис. 2: Сечение множества  $\mathcal{G}$  плоскостью  $\mathcal{M}$ , содержащей семейство  $\mathcal{P}_2$ . Здесь и далее граница области физических значений показана точечной линией.

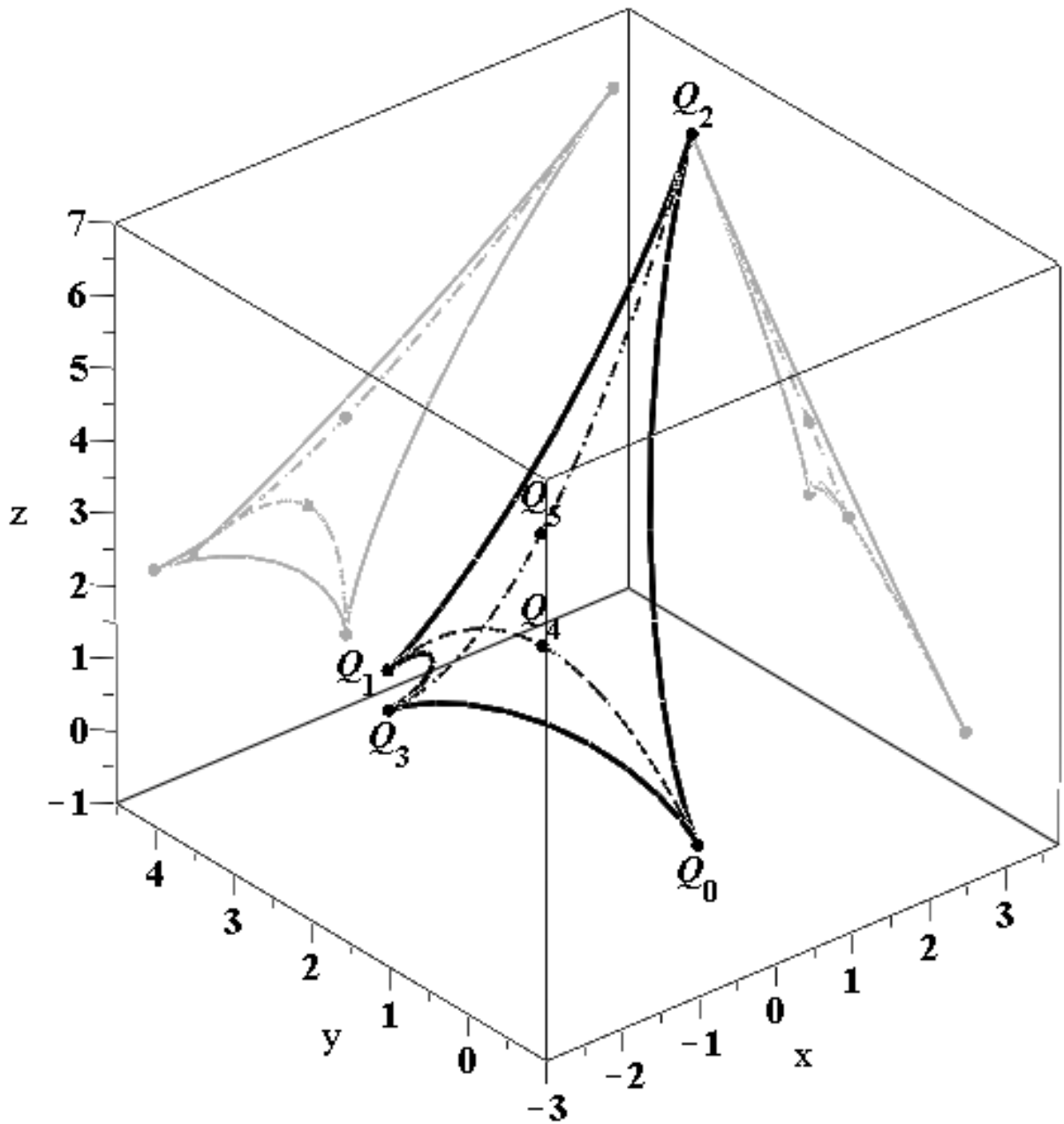


Рис. 3: Каркас криволинейного тетраэдра  $S_1$ , образованный сегментами  $\mathcal{P}_1^0$  (пунктирная линия),  $\mathcal{P}_2^0$  (точечно-пунктирная линия) и семейством  $\mathcal{F}$  (сплошная линия). Показаны его проекции на две координатные плоскости.



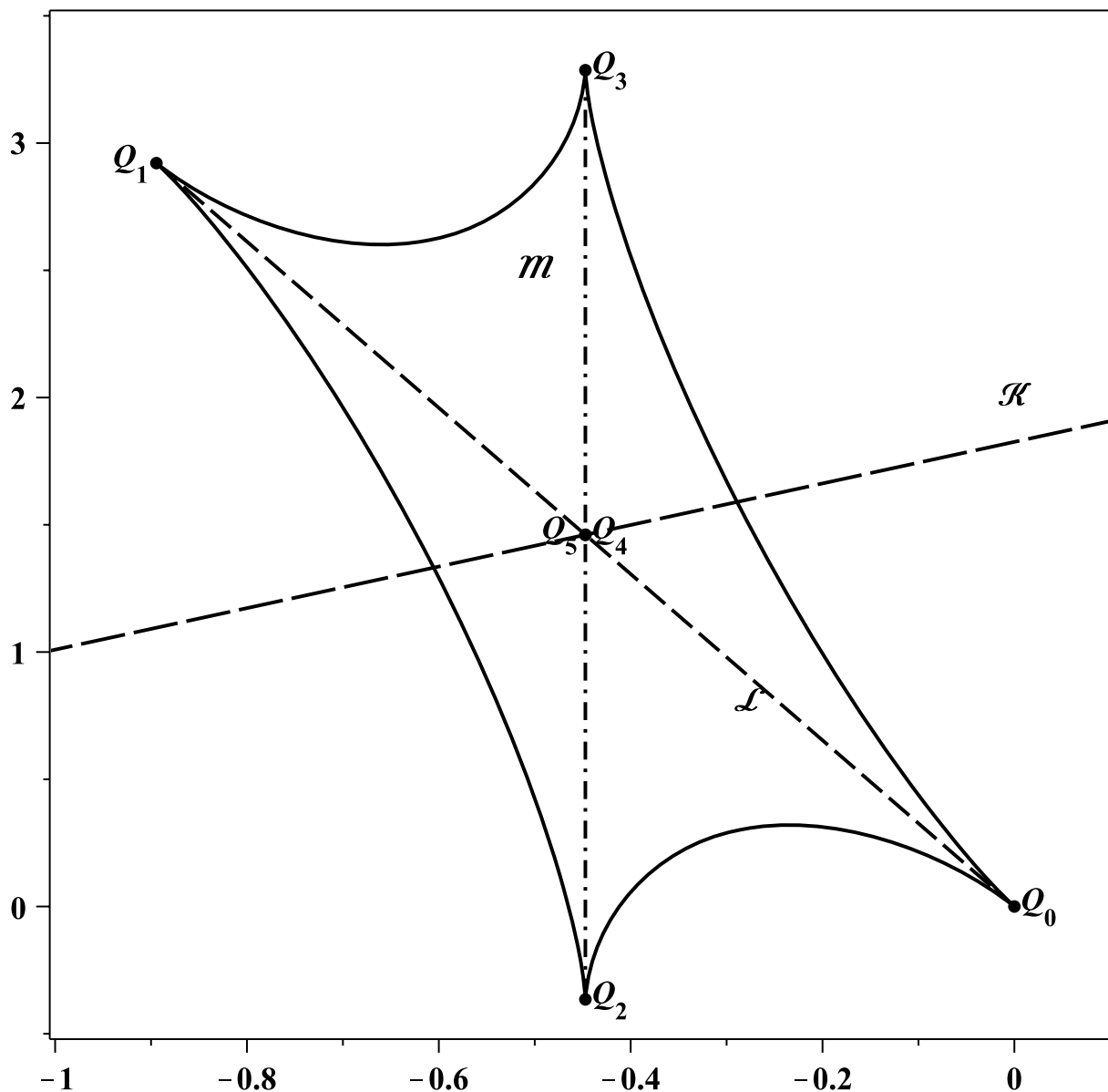


Рис. 4: Проекция каркаса криволинейного тетраэдра, образованного сегментами  $\mathcal{P}_1^0$  (пунктирная линия),  $\mathcal{P}_2^0$  (штрих-пунктирная линия) и семейством  $\mathcal{F}$  (сплошная линия), на плоскость  $\mathcal{N}$ , нормальную прямой  $[Q_4, Q_5]$ . Длинным штрихом показано пересечение с плоскостью  $\mathcal{K}$ . Абсцисса:  $-2y/\sqrt{5} + z/\sqrt{5}$ ; ордината:  $-\sqrt{5/6}x + y/\sqrt{30} + \sqrt{2/15}z$ .

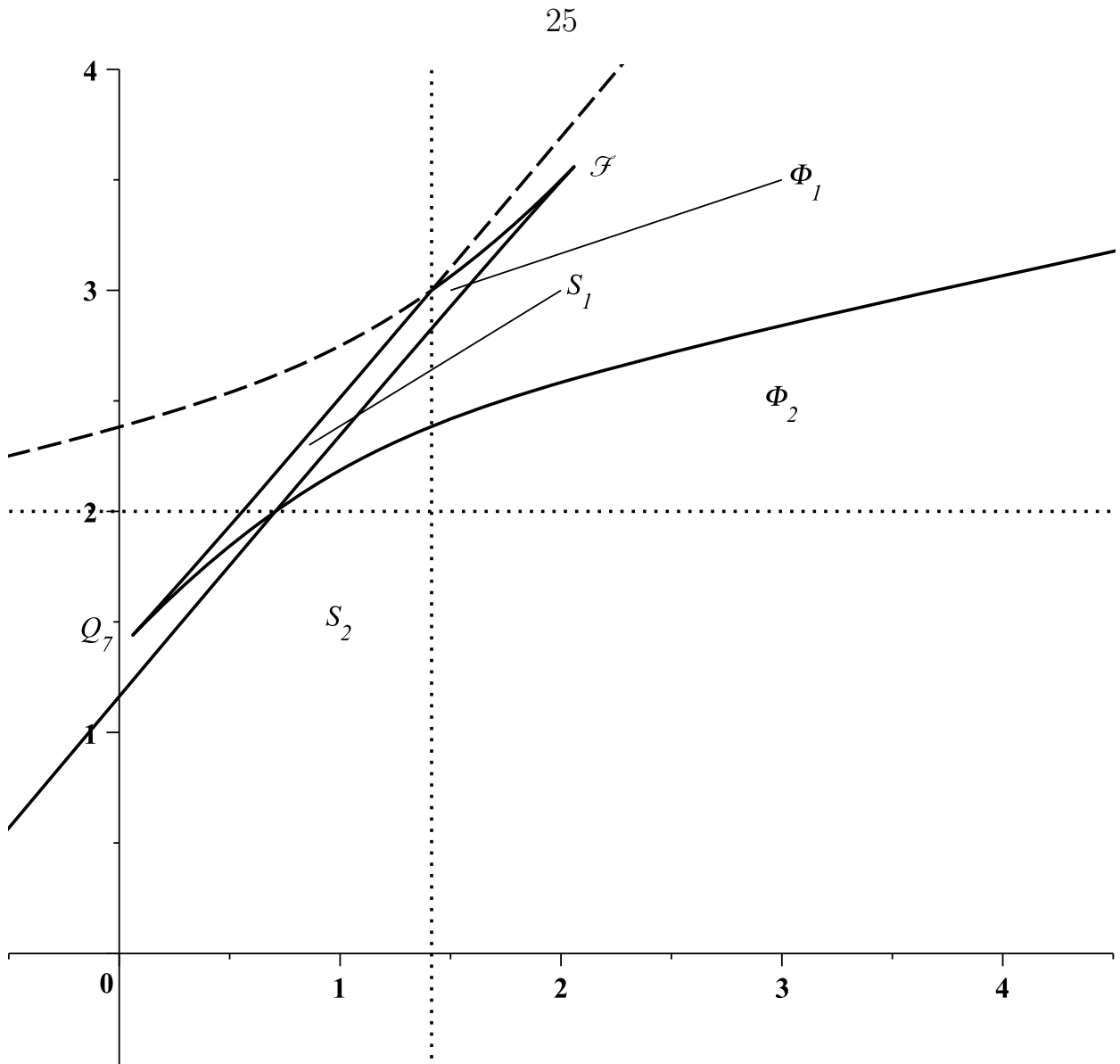
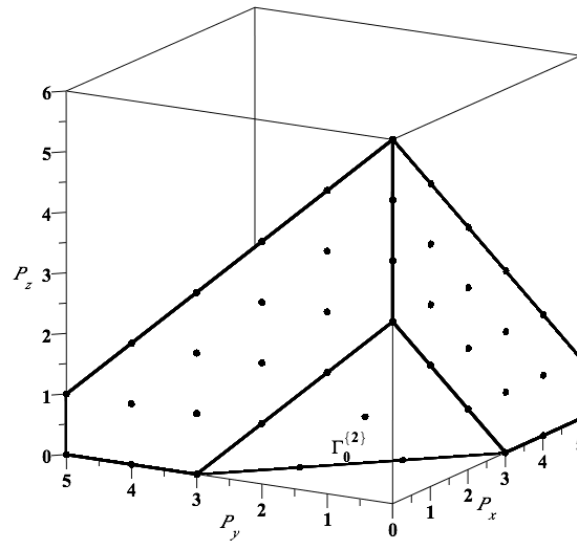
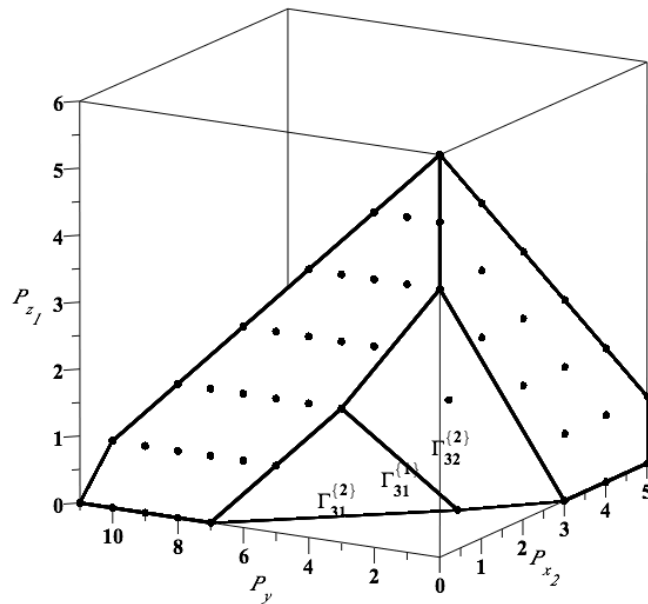


Рис. 5: Сечение множества  $\mathcal{G}$  плоскостью  $\mathcal{K} : \{Q : x - y + 2 = 0\}$ . Показаны сечения областей устойчивости  $S_1, S_2$ , пересечения с кривой  $\mathcal{F}$  и точка  $Q_7$ . Абсцисса:  $x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}$ ; ордината:  $z$ .



а) Многогранник в исходных переменных.



б) Многогранник показателей в переменных  $x_2, y, z_1$ .

Рис. 6: Многогранник Ньютона для многочлена  $g(Q)$ . Показаны грани с отрицательными внешними нормальными.

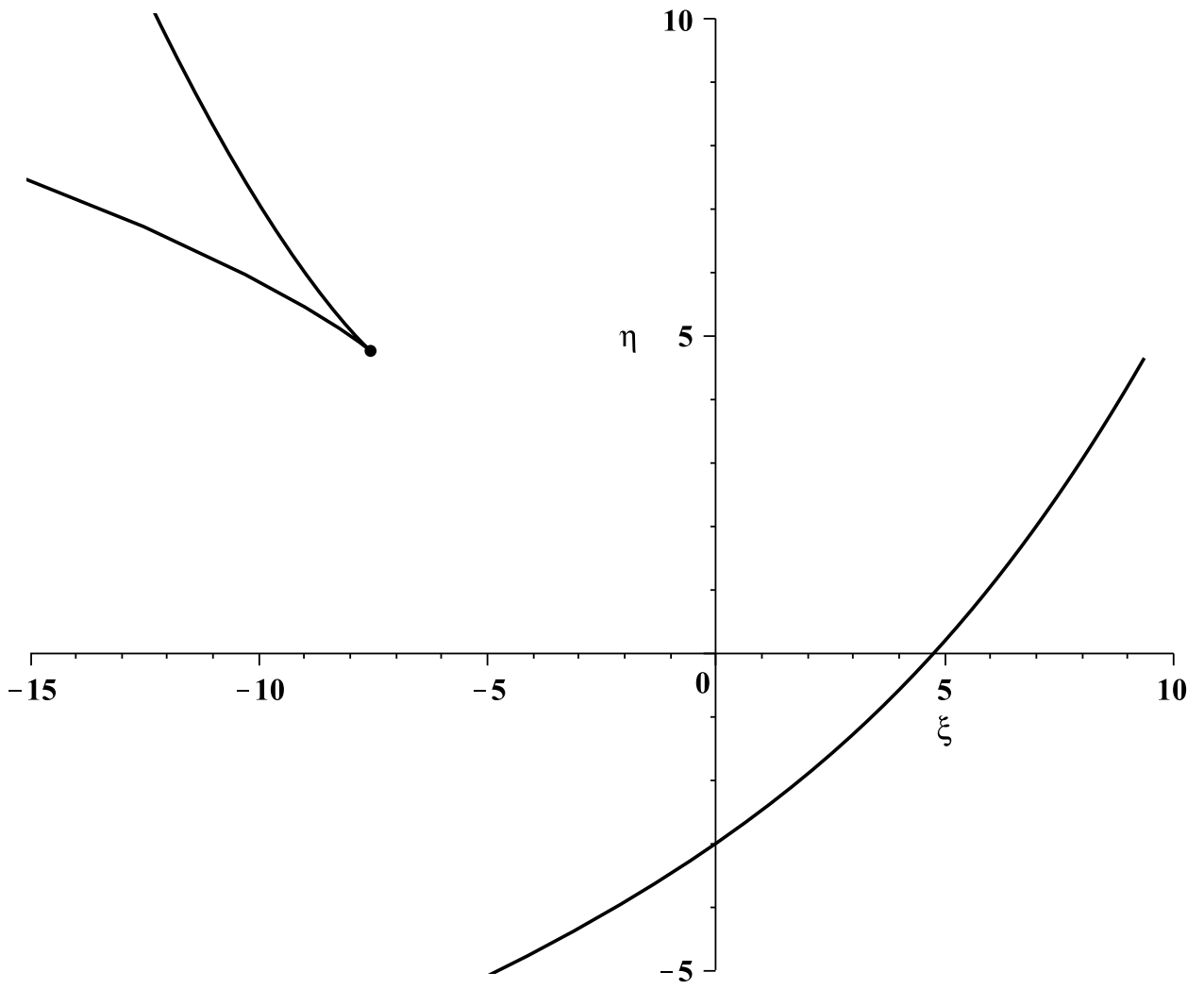
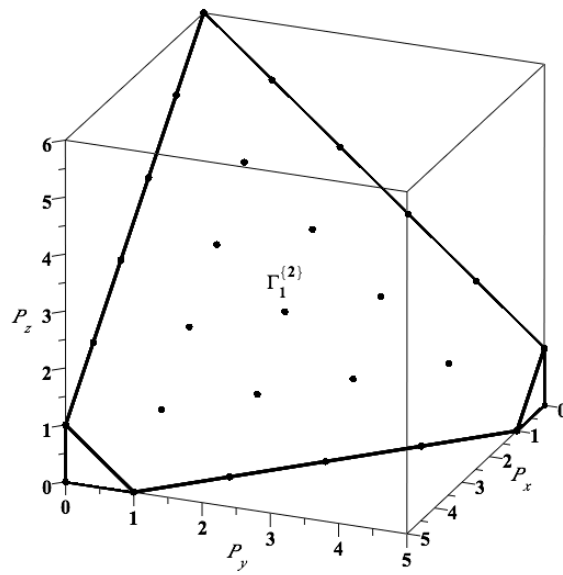
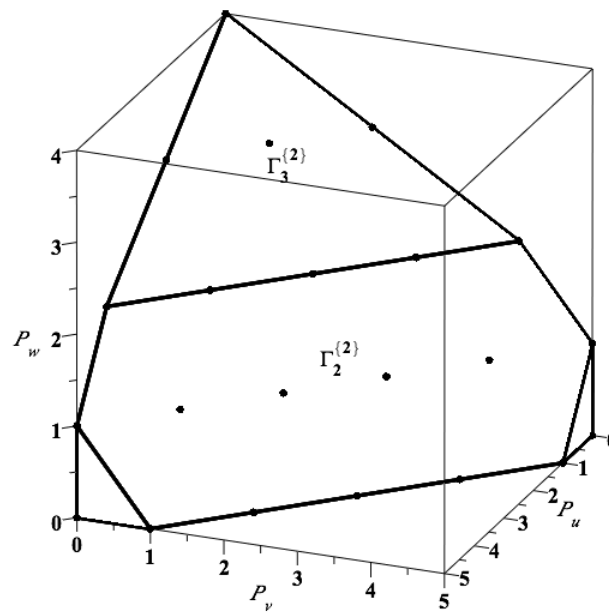


Рис. 7: Кривая  $\hat{h}_{32}^{(2)}(\eta, \zeta)$ , полученная с помощью степенного преобразования (4.42).



а) Многогранник в исходных переменных



б) Многогранник Ньютона после подстановки (4.46)

Рис. 8: Многогранник Ньютона для многочлена  $g(Q)$  в бесконечности. Показаны грани с положительными внешними нормальными.

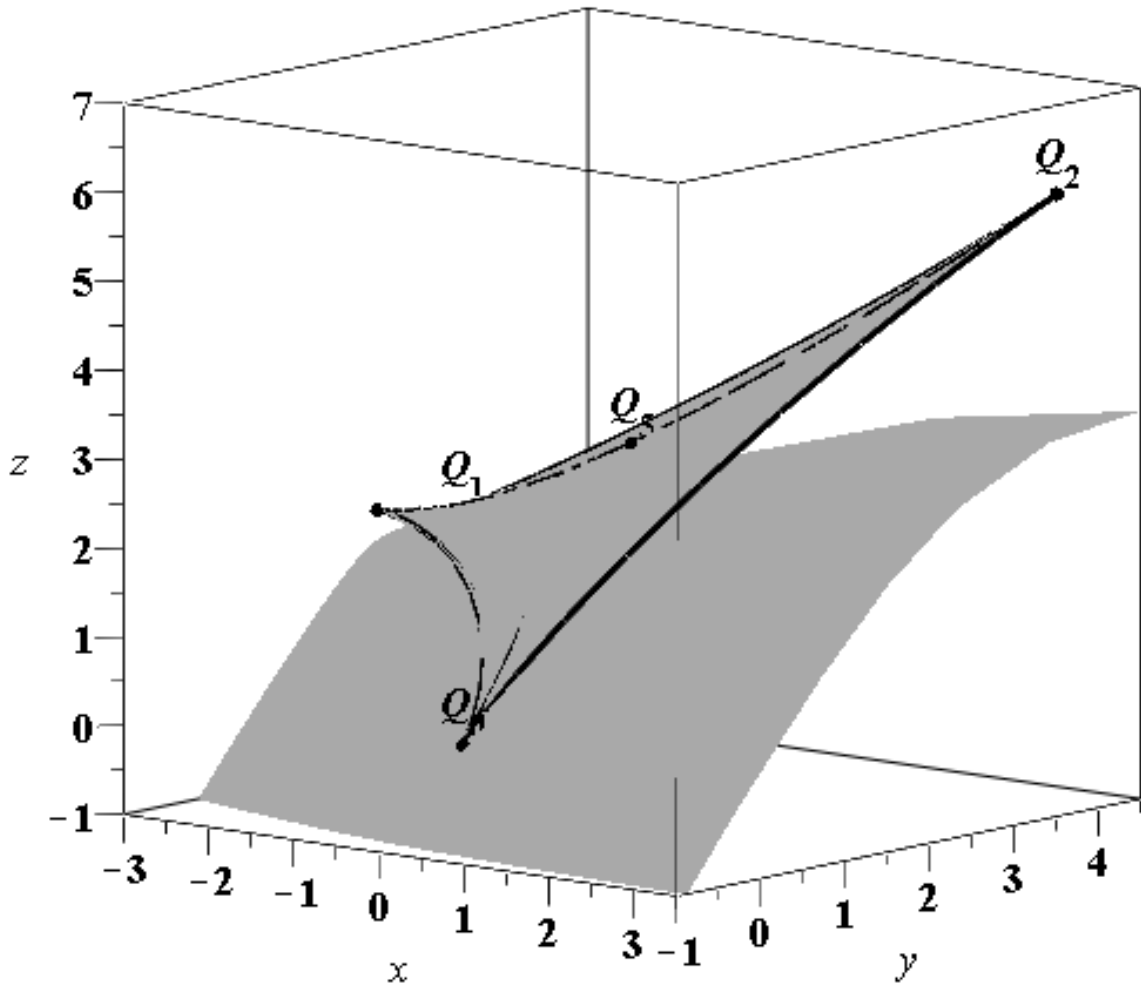


Рис. 9: Границы множества устойчивости  $S$ . Видны участки семейств  $\mathcal{P}_2^0$  и  $\mathcal{F}$ .

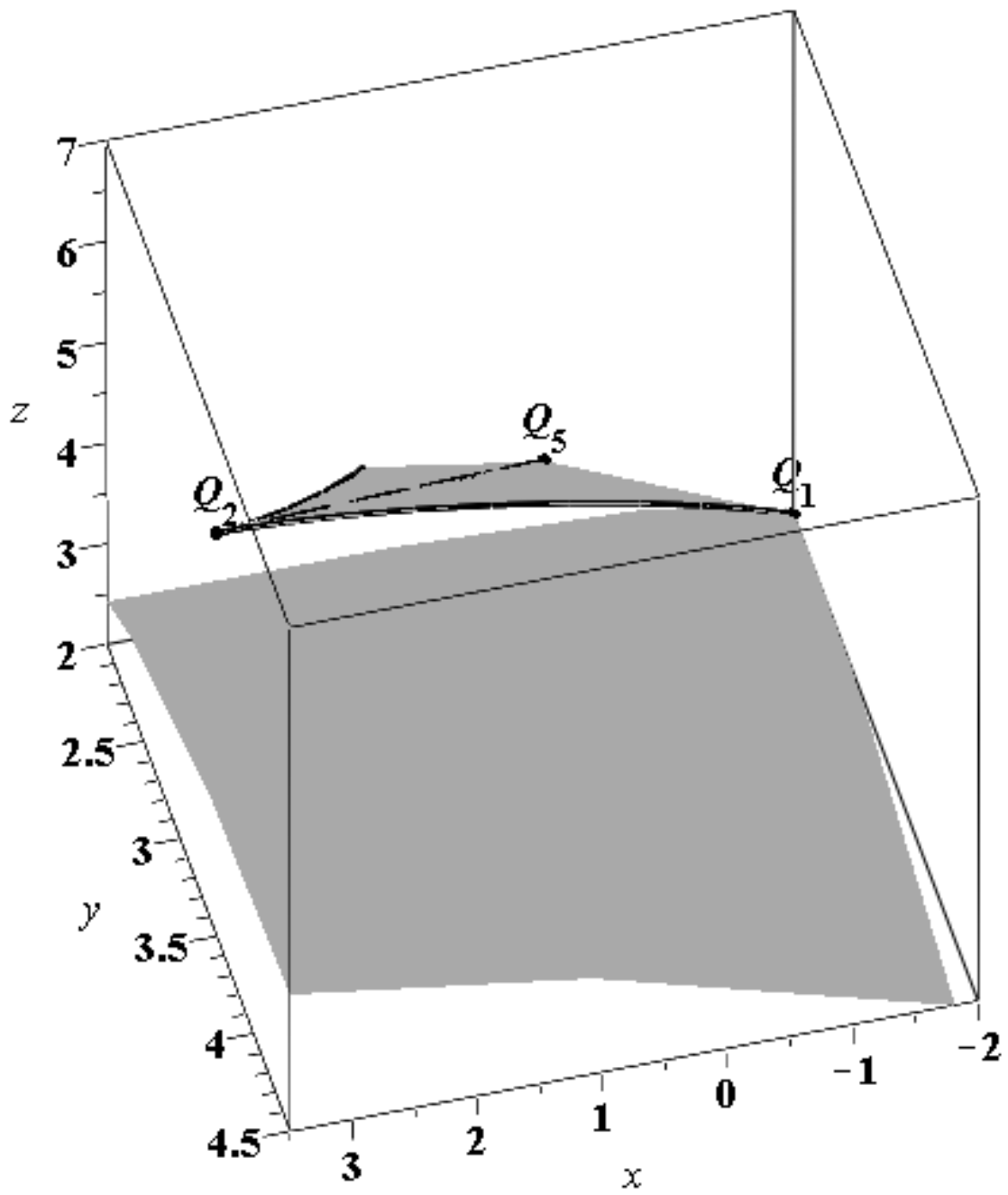


Рис. 10: Границы областей устойчивости при физических значениях параметров  $Q$ .