



Абрашкин В.И., Пузин Ю.Я.,  
Сазонов В.В.

Электромагнитная система  
управления вращательным  
движением спутника,  
обеспечивающая малый  
уровень микроускорений на  
его борту

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Абрашкин В.И., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В. Электромагнитная система управления вращательным движением спутника, обеспечивающая малый уровень микроускорений на его борту // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 22. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-22>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**В.И.Абрашкин, Ю.Я.Пузин, В.В.Сазонов**

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ  
ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА,  
ОБЕСПЕЧИВАЮЩАЯ МАЛЫЙ УРОВЕНЬ  
МИКРОУСКОРЕНИЙ НА ЕГО БОРТУ**

Москва - 2010

## Аннотация

Рассматривается электромагнитная система управления вращательным движением спутника *Фотон* с исполнительными органами в виде трех токонесущих катушек. Катушки содержат по несколько витков, которые уложены вдоль окружностей большого круга сферы, являющейся внешней оболочкой спускаемого аппарата. Катушки размещены в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, точка пересечения которых находится в центре сферы. Одна из линий пересечения плоскостей совпадает с продольной осью спутника. При пропускании электрического тока через катушки возникает магнитный момент, взаимодействие которого с магнитным полем Земли создает механический момент, действующий на спутник. Управление вращательным движением осуществляется за счет изменения токов в катушках. Исследованы два закона управления, предназначенные для гашения угловой скорости спутника и стабилизации режима гравитационной ориентации. Чтобы сформировать эти законы, достаточно иметь показания трехосного магнитометра. Энергопотребление при реализации каждого закона не превышает нескольких ватт. Эффективность законов проверена посредством математического моделирования. Показано, что применение на спутниках *Фотон* описанной системы управления позволит более чем в 10 раз снизить уровень квазистатических микроускорений на их борту.

**V.I.Abrashkin, Yu.Ya.Puzin, V.V.Sazonov. Electromagnetic attitude control system providing small residual accelerations on board the spacecraft.** We investigate the electromagnetic attitude control system of the spacecraft *Foton* that uses three current-carrying coils as its actuators. Each coil has a few turns lying along a great circle of the sphere that is outer shell of the landing capsule. The coils are in three mutually perpendicular planes. The center of the sphere is the point of intersection of the planes. One of the lines of intersection coincides with the spacecraft longitudinal axis. Electric currents in the coils produce the magnetic moment, which interacts with the Earth magnetic field and makes a torque acting upon the spacecraft. The spacecraft attitude control is implemented by change of the currents in the coils. We investigate two control laws that reduce the spacecraft angular rate and stabilize the spacecraft gravity gradient orientation. Measurements of a triaxial magnetometer need only to form these laws. Realization of the laws requires a few watts of electric power. We test the laws by the mathematical modeling and show that their use in the spacecraft *Foton* provides decrease of residual accelerations on its board up to ten times.

**1. Введение.** Возникновение квазистатических микроускорений на спутниках *Фотон* в неуправляемом полете обусловлено тремя причинами: движением спутника относительно центра масс, градиентом гравитационного поля и аэродинамическим торможением. Как показала обработка данных измерений различных датчиков, установленных на спутниках *Фотон-11*, *Фотон-12* и *Фотон М-2* [1 — 4], первая из этих причин является определяющей. Приняв меры к уменьшению угловой скорости спутника можно существенно снизить квазистатические микроускорения на его борту. Вообще, целесообразно выбрать такой режим вращательного движения, в котором угловая скорость спутника была бы малой.

Для массивных низкоорбитальных спутников с вытянутым эллипсоидом инерции, как у *Фотонов*, таким режимом мог бы стать режим гравитационной ориентации. В этом режиме спутник совершает колебания или медленное вращение вокруг своей главной центральной оси минимального момента инерции, составляющей малый угол с местной вертикалью. Однако *Фотонам* этот режим не подходит из-за действия на них механического момента, имеющего постоянные компоненты в связанной со спутником системе координат [4]. Такой момент очень мал, но он делает режим гравитационной ориентации неустойчивым. Более того, именно этот момент вызывает раскрутку *Фотонов* до угловой скорости  $\sim 1^\circ/\text{с}$ , что приводит к существенному увеличению квазистатических микроускорений.

Поскольку указанный дестабилизирующий момент мал, его можно компенсировать малым управлением — механическим моментом, создаваемым при взаимодействии специальных токонесущих катушек [5] с магнитным полем Земли (МПЗ). Ниже исследуется возможность такой компенсации. Рассматривается электромагнитная система управления вращательным движением спутника *Фотон*, исполнительными органами которой служат три одинаковые катушки. Они содержат сравнительно небольшое число витков, уложенных вдоль окружностей большого круга сферы, которая является внешней оболочкой спускаемого аппарата. Катушки размещены в трех взаимно ортогональных плоскостях. Точка пересечения плоскостей находится в центре сферы, одна из линий пересечения плоскостей совпадает с продольной осью спутника. Электрический ток в катушках формирует магнитный диполь, взаимодействие которого с МПЗ создает приложенный к спутнику механический момент. Управляя токами в катушках, можно в известных пределах управлять вращательным движением спутника.

При отсутствии жестких временных ограничений электромагнитная система управления обладает широкими возможностями, но чтобы использовать их в полной мере, необходимо располагать информацией о движении спутника. Ниже рассматриваются два сравнительно простых закона управления, предназначенных для гашения угловой скорости спутника и стабилизации режима гравитационной ориентации. Реализация этих законов не

требует проведения сложных измерений. Достаточно иметь показания трехосного магнитометра и аппаратуру для их обработки. Энергопотребление при реализации каждого закона не превышает нескольких ватт (не считая затрат на обработку измерительной информации).

Проверка эффективности законов проводится посредством математического моделирования движения спутника относительно центра масс под действием гравитационного, аэродинамического и управляющего моментов, а также момента, постоянного в связанной со спутником системе координат. Показано, что применение на спутниках *Фотон* электромагнитной системы управления позволит существенно — более чем в 10 раз — уменьшить квазистатические микроускорения на их борту.

## 2. Математическая модель вращательного движения спутника.

Спутник считаем твердым телом. Для описания его движения введем три правые декартовы системы координат.

$Ox_1x_2x_3$  — система координат, образованная главными центральными осями инерции спутника. Точка  $O$  — центр масс спутника, оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  отвечают минимальному и максимальному моментам инерции. Ось  $Ox_1$  направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку.

$CY_1Y_2Y_3$  — гринвичская система координат. Точка  $C$  — центр Земли, плоскость  $CY_1Y_2$  совпадает с плоскостью экватора, ось  $CY_1$  пересекает гринвичский меридиан, ось  $CY_3$  направлена к Северному полюсу.

$OX_1X_2X_3$  — орбитальная система координат. Оси  $OX_3$  и  $OX_2$  направлены соответственно вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки  $O$  и вектора кинетического момента орбитального движения спутника.

Матрицу перехода от системы  $OX_1X_2X_3$  к системе  $CY_1Y_2Y_3$  обозначим  $\|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$ , где  $c_{ij}$  — косинус угла между осями  $CY_i$  и  $OX_j$ . Элементы этой матрицы выражаются через координаты и компоненты скорости точки  $O$  в гринвичской системе координат. Матрицы перехода от системы  $Ox_1x_2x_3$  к системам  $OX_1X_2X_3$  и  $CY_1Y_2Y_3$  обозначим соответственно  $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$  и  $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ . Здесь  $a_{ij}$  — косинус угла между осями  $OX_i$  и  $Ox_j$ ,  $b_{ij}$  — косинус угла между осями  $CY_i$  и  $Ox_j$ . Элементы матрицы  $\|a_{ij}\|$  выразим в функции углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые введем так, чтобы система  $Ox_1x_2x_3$  получалась из системы  $OX_1X_2X_3$  тремя последовательными поворотами: 1) на угол  $\delta + \pi/2$  вокруг оси  $OX_2$ , 2) на угол  $\beta$  вокруг новой оси  $OX_3$ , 3) на угол  $\gamma$  вокруг новой оси  $OX_1$ , совпадающей с осью  $Ox_1$ . Справедливы формулы

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\ a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\ a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma; \end{aligned}$$

$$b_{ij} = c_{i1}a_{1j} + c_{i2}a_{2j} + c_{i3}a_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек указываются в системе  $Ox_1x_2x_3$ .

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение спутника по орбите, другая — его вращательное движение. Подсистема уравнений орбитального движения записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (8,8) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости спутника и кинематическими уравнениями Пуассона для элементов первой и второй строк матрицы  $\| b_{ij} \|$ . В уравнениях Эйлера учитываются четыре внешних механических момента: гравитационный, восстанавливающий аэродинамический, момент с постоянными компонентами в системе  $Ox_1x_2x_3$  и управляющий момент, создаваемый при взаимодействии токовых катушек с МПЗ. Для гравитационного момента существует простое аналитическое выражение [6]. Компоненты восстанавливающего аэродинамического момента зададим выражениями

$$M_{a1} = 0, \quad M_{a2} = -\rho_a S d v_3, \quad M_{a3} = \rho_a S d v_2,$$

$$S = \frac{\pi A^2}{2} \sqrt{\frac{1}{4} v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Здесь  $\rho_a$  — плотность атмосферы в точке  $O$ ,  $v_i$  — компоненты скорости этой точки относительно поверхности Земли. Выписанные формулы получены в предположении, что внешняя оболочка спутника представляет собой эллипсоид  $(x_1 - d)^2 + 4(x_2^2 + x_3^2) = A^2$  и что молекулы воздуха при столкновении с ней испытывают абсолютно неупругий удар.

Компоненты момента, создаваемого токовыми катушками, имеют вид

$$M_{m1} = m_2 B_3 - m_3 B_2, \quad M_{m2} = m_3 B_1 - m_1 B_3, \quad M_{m3} = m_1 B_2 - m_2 B_1.$$

Здесь  $m_i$  — компоненты суммарного магнитного момента катушек,  $B_i$  — компоненты вектора магнитной индукции МПЗ в точке  $O$ .

Подсистема уравнений вращательного движения спутника имеет вид

$$\dot{\omega}_1 = \mu(\omega_2 \omega_3 - \nu x_2 x_3) + m'_2 B_3 - m'_3 B_2 + \varepsilon_1,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1x_3) + \frac{\lambda(m'_3B_1 - m'_1B_3 + \varepsilon_2 + p v_3)}{1 + \lambda\mu}, \\
\dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1x_2) + \lambda(m'_1B_2 - m'_2B_1 + \varepsilon_3 - p v_2), \\
\dot{b}_{11} &= b_{12}\omega_3 - b_{13}\omega_2 + \omega_E b_{21}, & \dot{b}_{21} &= b_{22}\omega_3 - b_{23}\omega_2 - \omega_E b_{11}, \\
\dot{b}_{12} &= b_{13}\omega_1 - b_{11}\omega_3 + \omega_E b_{22}, & \dot{b}_{22} &= b_{23}\omega_1 - b_{21}\omega_3 - \omega_E b_{12}, \\
\dot{b}_{13} &= b_{11}\omega_2 - b_{12}\omega_1 + \omega_E b_{23}, & \dot{b}_{23} &= b_{21}\omega_2 - b_{22}\omega_1 - \omega_E b_{13}, \\
\lambda &= \frac{I_1}{I_3}, & \mu &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}, & \nu &= \frac{3\mu_E}{r^5}, & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\
p &= E\kappa\rho_a\sqrt{\frac{1}{4}v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, & \kappa &= \frac{\pi dA^2}{2I_1}, & m'_i &= \frac{m_i}{I_1} \quad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по времени  $t$ ,  $\omega_i$  и  $x_i$  — компоненты абсолютной угловой скорости спутника и геоцентрического радиуса-вектора точки  $O$ ,  $I_i$  — моменты инерции спутника относительно осей  $Ox_i$ ,  $\varepsilon_i$  — отнесенные к  $I_1$  компоненты постоянного момента,  $\mu_E$  и  $\omega_E$  — гравитационный параметр и угловая скорость Земли,  $E$  — масштабирующий коэффициент. Величины  $m'_i$  — управления, их вид определен ниже. Плотность атмосферы  $\rho_a$  в уравнениях (2) задается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004, как в уравнениях орбитального движения. Компоненты вектора магнитной индукции МПЗ в точке  $O$  рассчитываются по формулам

$$B_i = B_{Y1}b_{1i} + B_{Y2}b_{2i} + B_{Y3}b_{3i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $B_{Yk}$  — компоненты этого вектора в гринвичской системе координат. Эти компоненты определяются моделью IGRF2005. Для задания величин  $m'_i$  в одном из законов управления используются производные  $\dot{B}_i$ . Они вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\dot{B}_1 &= B_2(\omega_3 - \omega_E b_{33}) - B_3(\omega_2 - \omega_E b_{32}) + \dot{B}_{Y1}b_{11} + \dot{B}_{Y2}b_{21} + \dot{B}_{Y3}b_{31}, \\
\dot{B}_2 &= B_3(\omega_1 - \omega_E b_{31}) - B_1(\omega_3 - \omega_E b_{33}) + \dot{B}_{Y1}b_{12} + \dot{B}_{Y2}b_{22} + \dot{B}_{Y3}b_{32}, \\
\dot{B}_3 &= B_1(\omega_2 - \omega_E b_{32}) - B_2(\omega_1 - \omega_E b_{31}) + \dot{B}_{Y1}b_{13} + \dot{B}_{Y2}b_{23} + \dot{B}_{Y3}b_{33},
\end{aligned}$$

в которых производные  $\dot{B}_{Yk}$  находятся разностным способом вдоль решения подсистемы орбитального движения.

При численном интегрировании уравнений (2) третья строка матрицы  $\|b_{ij}\|$  вычислялась как векторное произведение первых двух ее строк, и использовались следующие единицы измерения переменных и параметров:  $[t] = 10^3$  с,  $[x_i] = 10^6$  км,  $[v_i] =$  км/с,  $[\omega_i] = 10^{-3}$  с $^{-1}$ ,  $[\rho_a] =$  кг/м $^3$ ,  $[B_i] =$  Гс =  $\Gamma^{1/2}$ см $^{-1/2}$ с $^{-1}$ ,  $[\kappa] =$  см/кг,  $[\varepsilon_i] = 10^{-6}$  с $^{-2}$ ,  $[m'_i] = 10^{-6}\Gamma^{-1/2}$ см $^{1/2}$ с $^{-1}$ ,  $E = 10^{10}$ .

Переменные  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы  $\|b_{ij}\|$ . По этой причине, а также из соображений удобства начальные условия для  $b_{1i}$  и  $b_{2i}$  вычислялись по формулам (1), в которых элементы

$a_{ij}$  выражались через значения введенных выше углов  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  в начальный момент времени, а элементы  $c_{ij}$  выражались через начальное значение фазового вектора точки  $O$ .

В расчетах использовались следующие значения параметров:  $\lambda = 0.27$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\kappa = -0.03$  см/кг,  $\varepsilon_1 = 6 \cdot 10^{-8}$  с<sup>-2</sup>,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 5 \cdot 10^{-8}$  с<sup>-2</sup>. Такие значения характеризуют *Фотон М-2* [4]. В некоторых особо оговариваемых случаях принималось  $\mu = 0.05$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ .

Начальные условия движения центра масс спутника отвечают реальной орбите *Фотона М-2*. Они задавались в восходящем узле, пройденном спутником в момент 17:51:39 ДМВ 31.05.2005, и совпадают с фазовым вектором его центра масс в этом узле. Параметры модели атмосферы во всех расчетах:  $F = 94.64$ ,  $F_{81} = 93.00$ ,  $A_p = 8.44$ . Эти параметры соответствуют первым нескольким суткам полета *Фотона М-2*. Начальные условия уравнений (2) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия принятой орбиты. Этот момент служил началом отсчета времени — точкой  $t = 0$ .

**3. Режимы вращательного движения спутника.** Уравнения (2) громоздки и неудобны для пояснения встречающихся ниже режимов вращательного движения спутника. Эти режимы целесообразно пояснить с помощью более простых уравнений, в которых учитываются только главные факторы. А именно, предположим, что орбита центра масс спутника — круговая и неизменна в абсолютном пространстве и что на спутник действует один лишь гравитационный момент. Вращательное движение такого спутника описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}), & \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}), & & (3) \\ \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} &= \frac{\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - \omega_0, & \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_0$  — среднее движение спутника (орбитальная частота), величины  $a_{3i}$  выражаются через углы  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $\beta$  по формулам п. 2. Встречающимся ниже установившимся режимам движения спутника отвечают простые частные решения уравнений (3).

*Трехосная гравитационная ориентация.* Уравнения (3) допускают четыре стационарных решения, которые можно задать соотношениями

$$\sin \gamma = \sin \delta = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma. \quad (4)$$

Эти решения описывают положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В них оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  совпадают с осями  $\pm OX_3$  и  $\pm OX_2$



соответственно. Выбор знаков здесь произволен. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову решений (4) выражаются неравенствами [6]:  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu$ . Для спутников *Фотон* эти неравенства выполнены, но поскольку значение  $\mu$  мало, следует особо рассмотреть случай  $\mu = 0$ .

*Гравитационная ориентация вращающегося спутника.* При  $\mu = 0$  (осесимметричный спутник:  $I_2 = I_3$ ) уравнения (3) допускают два семейства решений, которые можно записать в виде

$$\omega_1 = \Omega, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \beta \cos \gamma, \quad \omega_3 = -\omega_0 \cos \beta \sin \gamma, \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega t + \gamma_0, \quad \sin \delta = 0, \quad \beta = \arcsin \frac{\lambda \Omega}{\omega_0(4-3\lambda)},$$

Здесь  $\gamma_0$  и  $\Omega$  — произвольные постоянные,  $\lambda|\Omega| \leq \omega_0|4-3\lambda|$ . Одно семейство получается при  $\delta = 0$ , другое — при  $\delta = \pi$ . Решения (5) описывают стационарные вращения спутника вокруг оси  $Ox_1$ , неподвижной в орбитальной системе координат. В случае  $\lambda < 1$  решение (5) устойчиво по переменным  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\omega_1$ ,  $w_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma$  и  $w_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma$  [6, 7]. Величины  $w_2$ ,  $w_3$  представляют собой проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Резаля, совпадающие с осями  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  при  $\gamma = 0$ . В решениях (5)  $w_2 = \omega_0 \cos \beta$ ,  $w_3 = 0$  — постоянные величины.

При малых  $\lambda$  и  $|\mu|$  решения, близкие к (5), реализуют режим одноосной гравитационной ориентации спутника [8]. В случае  $\lambda = 0.27$  и  $\Omega = 0.1^\circ/\text{с}$  имеем в (5)  $\beta = 7.3^\circ$ , ось  $Ox_1$  мало отклоняется от оси  $Ox_3$ .

*Закрутка в плоскости орбиты.* Уравнения (3) допускают два семейства решений, в которых

$$\sin \gamma = \beta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = (\omega_0 + \dot{\delta}) \cos \gamma, \quad (6)$$

а угол  $\delta$  определяется уравнением математического маятника

$$2\ddot{\delta} + \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda\mu} \omega_0^2 \sin 2\delta = 0. \quad (7)$$

Решения (6), (7) достаточно разнообразны. В частности, они включают решения (4). Для дальнейшего интерес представляют вращательные решения уравнения (7) с угловой скоростью  $\omega_2 \approx 2\omega_0$ . Движения спутника, близкие таким решениям, находятся в резонансе 2:1 с движением вдоль орбиты вектора индукции МПЗ в точке  $O$  [9].

**4. Управление вращательным движением.** Гашение достаточно большой угловой скорости спутника можно реализовать следующим образом. Пусть для простоты на спутник действует только внешний механический момент, создаваемый токовыми катушками. Векторная запись этого момента (см. п. 2)  $\mathbf{M}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ,  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ . Рассмотрим кинетическую энергию движения спутника относительно центра масс

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Теорема об изменении этой энергии имеет вид:  $\dot{T} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_m = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega})$ . Закон управления магнитным моментом катушек зададим формулой  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ , где  $a$  — положительный коэффициент. Получим

$$\dot{T} = -a|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}|^2.$$

Поскольку равенство  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = 0$  может выполняться лишь в изолированные моменты времени, кинетическая энергия спутника убывает.

В действительности убывание  $T$  со временем прекратится. На спутник кроме  $\mathbf{M}_m$  действуют и другие внешние моменты. В такой ситуации  $\dot{T} < 0$  лишь при доминировании момента  $\mathbf{M}_m = a(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$ . Но с убыванием  $T$  уменьшается и  $\boldsymbol{\omega}$ , поэтому при ограниченном  $a$  момент  $\mathbf{M}_m$  со временем перестает доминировать.

Чтобы сформировать магнитный момент  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$ , необходимо иметь информацию о векторах  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{V}$ . Ее можно получить, например, обрабатывая на борту спутника показания трехосного магнитометра. Известны примеры успешного решения этой задачи. Такая обработка позволяет получить полную информацию о вращательном движении спутника. Если же требуется только уменьшить  $|\boldsymbol{\omega}|$  до нескольких десятых долей градуса в секунду, то задача формирования  $\mathbf{m}$  значительно упрощается.

Производную вектора  $\mathbf{V}$  по времени относительно системы координат  $Ox_1x_2x_3$  обозначим  $d'\mathbf{V}/dt$ . По определению  $d'\mathbf{V}/dt = (\dot{B}_1, \dot{B}_2, \dot{B}_3)$ . Абсолютную производную по времени вектора  $\mathbf{V}$  обозначим  $\dot{\mathbf{V}}$ ,

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{d'\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}.$$

Абсолютная угловая скорость орта  $\mathbf{V}/|\mathbf{V}|$  приближенно равна  $2\omega_0$  [9]. Если угловая скорость спутника намного превышает это значение, то каждое слагаемое в правой части последней формулы существенно больше по модулю ее левой части. В этом случае можно принять  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \approx -d'\mathbf{V}/dt$  и закон управления магнитным моментом катушек взять в виде

$$\mathbf{m} = -a \frac{d'\mathbf{V}}{dt}. \quad (8)$$

Реализация такого закона управления требует знания лишь величин  $\dot{B}_i$ . Задача заметно упростилась. При формировании  $\mathbf{m}$  можно обойтись без достаточно мощного компьютера, производные  $\dot{B}_i$  можно находить и аналоговым способом.

При наличии тока в катушках показания магнитометров будут содержать систематические ошибки. Возможно, потребуются специальные меры

по устранению этих ошибок или разделении во времени процессов управления и измерения магнитного поля. Например, в течение 1 мин выполняется оценка и строится краткосрочный прогноз величин  $\dot{B}_i$ . Катушки при этом обесточены. В течение последующих 1 — 3 мин с использованием построенного прогноза реализуется закон (8). Затем описанные операции повторяются. Отметим, что задачу устранения систематических ошибок из показаний магнитометров придется решать при любом законе управления магнитным моментом  $\mathbf{m}$ .

Перейдем к задаче о стабилизации режима гравитационной ориентации. Уравнения (3) допускают обобщенный интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i (\omega_i^2 - 2\omega_0 \omega_i a_{2i} + 3\omega_0^2 a_{3i}^2).$$

Этот интеграл использовался в [6] в качестве функции Ляпунова при исследовании устойчивости стационарных решений (4). На этих решениях и только на них  $H$  достигает глобального минимума, равного  $H_{\min} = \omega_0^2(3I_1 - I_2)/2$ .

Учтем в (3) механический момент от катушек с током. В этом случае первые три уравнения этой системы следует заменить уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2 \omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32} a_{33}) + m'_2 B_3 - m'_3 B_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} (\omega_1 \omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31} a_{33}) + \frac{\lambda(m'_3 B_1 - m'_1 B_3)}{1 + \lambda\mu}, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1 \omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31} a_{32}) + \lambda(m'_1 B_2 - m'_2 B_1). \end{aligned}$$

Производная  $H$  по времени в силу новых уравнений (3) имеет вид

$$\dot{H} = (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{M}_m = \mathbf{m} \cdot [\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2)].$$

Здесь  $\mathbf{E}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$  — орт оси  $OX_2$ . Примем закон управления в виде

$$\mathbf{m} = a [(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}], \quad (9)$$

где  $a$  — положительный коэффициент. Получим

$$\dot{H} = -a |(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}|^2.$$

При выполнении достаточных условий устойчивости  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu$  стационарные решения (4) исчерпывают точки строгого минимума  $H$ , поэтому закон управления (9) обеспечивает гашение возмущенного движения в режиме трехосной гравитационной ориентации.

Далее следует повторить сказанное выше про закон  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B})$ . В действительности равенство  $H = H_{\min}$  не достигается. На спутник помимо

гравитационного момента и момента  $\mathbf{M}_m$  действуют еще другие внешние моменты, имеется слабая эллиптичность орбиты. В такой ситуации неравенство  $\dot{H} < 0$  выполняется лишь в том случае, когда гравитационный момент и момент от катушек доминируют. Но с убыванием  $H$  эти моменты уменьшаются и перестают доминировать. В результате  $H$ , не достигнув минимума, начинает колебаться в окрестности некоторого значения, которое при правильном выборе коэффициента  $a$  будет близко к  $H_{\min}$ .

Для реализации закона (9) необходимо иметь информацию об угловой скорости и ориентации спутника. Как указано выше, эту информацию можно получить обрабатывая на борту спутника показания магнитометров.

При  $|\boldsymbol{\omega}| \gg \omega_0$  закон управления (9) близок закону (8). Это обстоятельство позволяет надеяться, что закон (8) также может обеспечить переход произвольного движения спутника в режим гравитационной ориентации.

**5. Электромагнитная система управления.** В предлагаемой системе управления каждая компонента  $m_i$  вектора  $\mathbf{m}$  реализуется собственной токовой катушкой. Система имеет три одинаковых катушки. Их витки образуют окружности большого круга сферы, являющейся внешней оболочкой спускаемого аппарата. Витки катушек, реализующих компоненты  $m_2$  и  $m_3$ , расположены соответственно в плоскостях  $Ox_1x_3$  и  $Ox_1x_2$ . Плоскость катушки, реализующей компоненту  $m_1$ , параллельна плоскости  $Ox_2x_3$ .

Каждая катушка имеет диаметр  $D = 210$  см и содержит  $N$  витков алюминиевого провода с диаметром сечения  $d$ . Магнитный момент, создаваемый такой катушкой, равен  $m = NSI$ , где  $S = \pi D^2/4$  — площадь круга, охватываемого одним витком,  $I$  — ток, проходящий через катушку. Электрическое сопротивление катушки  $R = 4ND\rho_{\text{Al}}/d^2$ , где  $\rho_{\text{Al}} = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$  — удельное сопротивление алюминия; напряжение на концах обмотки катушки  $U = RI$ ; мощность, потребляемая катушкой  $W = UI = RI^2$ ; масса катушки  $M = \pi^2 NDd^2\gamma_{\text{Al}}/4$ , где  $\gamma_{\text{Al}} = 2.7 \text{ г}/\text{см}^3$  — плотность алюминия.

Поскольку законы управления (8) и (9) используются в уравнениях (2), результаты моделирования этих законов будем представлять графиками функций  $m'_i(t)$ , вычисляя их при  $I_1 = 3000 \text{ кгм}^2$ . Работа катушек характеризуется функциями  $W(t)$ ,  $U(t)$  и  $I(t)$ . Соотношения между всеми указанными функциями иллюстрируются следующими числовыми оценками.

Пусть  $N = 10$ ,  $d = 2$  мм. Тогда  $R = 0.59 \text{ Ом}$ ,  $M = 0.54 \text{ кг}$ ; значение  $m' = m/I_1 = 0.1 \cdot 10^{-6} \text{ г}^{-1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$  реализуется при  $I = 0.087 \text{ А}$ ,  $U = 0.051 \text{ В}$ ,  $W = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}$ ; значение  $m' = 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ г}^{-1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$  реализуется при  $I = 0.26 \text{ А}$ ,  $U = 0.15 \text{ В}$ ,  $W = 4.0 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}$ ;  $m' = 10^{-6} \text{ г}^{-1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ с}^{-1}$  реализуется при  $I = 0.87 \text{ А}$ ,  $U = 0.51 \text{ В}$ ,  $W = 0.44 \text{ Вт}$ .

При фиксированных параметрах катушки  $I \sim m'$ ,  $U \sim m'$ ,  $W \sim (m')^2$ . Если фиксировать диаметр провода и значение  $m'$ , то необходимые для реализации этого  $m'$  величины  $W$  и  $I$  обратно пропорциональны  $N$ . При этом  $U$  от  $N$  не зависит,  $R \sim N$ ,  $M \sim N$ . Если же фиксировать  $m'$  и  $N$ , то при

изменении  $d$  будем иметь  $R \sim d^{-2}$ ,  $U \sim d^{-2}$ ,  $W \sim d^{-2}$ ,  $M \sim d^2$ .

**6. Математическое моделирование** законов (8) и (9) выполнялось при  $a/I_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{г}^{-1} \text{см} \cdot \text{с}$ . Движение спутника начиналось в момент  $t = 0$  из так называемой орбитальной ориентации. Идеальная орбитальная ориентация на круговой орбите характеризуется соотношениями  $\gamma = \beta = 0$ ,  $\delta = \pi/2$ ,  $\omega_1 = \omega_3 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega_0$ , задающими неустойчивое стационарное решение уравнений (3). Спутник удерживается в ориентированном состоянии реактивными двигателями. Выключение двигателей вносит в движение спутника возмущения, из которых наиболее значимы возмущения в угловой скорости. По этой причине начальные условия движения спутника после отключения двигателей примем следующие

$$\gamma(0) = \beta(0) = 0, \quad \delta(0) = 90^\circ, \quad (10)$$

$$\omega_1(0) = 0.01^\circ/\text{с}, \quad \omega_2(0) = 0.065^\circ/\text{с}, \quad \omega_3(0) = 0.005^\circ/\text{с},$$

Такие начальные условия по уровню ошибок близки к начальным условиям неуправляемого вращательного движения спутников *Фотон*.

Пример интегрирования уравнений (2) с использованием закона управления (9) приведен на рис. 1, 2. Здесь изображены графики зависимости от времени углов  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ , компонент угловой скорости  $\omega_i$  и управлений  $m'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Решение построено при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ . Рисунки представляют движение спутника на пересекающихся отрезках времени длиной 3 сут. На рис. 1 виден участок переходного процесса, сменяемый участком установившихся колебаний относительно орбитальной системы координат. Рис. 2 иллюстрирует детали этих колебаний. В установившихся колебаниях переменные  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  и  $\omega_i$  изменяются вблизи одной из точек (4). Следовательно, спутник имеет трехосную гравитационную ориентацию. Основным периодом установившихся колебаний — орбитальный, но на графиках угла  $\gamma$  и угловой скорости  $\omega_3$  на рис. 2 видны вариации с периодом 1 сут. Орбитальный период связан с эллиптичностью орбиты и действием на спутник аэродинамического момента, период 1 сут обусловлен суточным движением МПЗ.

Аналогичные расчеты для закона управления (8) представлены на рис. 3, 4. Приведенное здесь решение уравнений (2) также построено при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ . Движение на рис. 3, 4 имеет по существу тот же характер, что и движение на рис. 1, 2. Следовательно, и закон (8) обеспечивает приведение спутника в режим трехосной гравитационной ориентации. Однако амплитуды установившихся колебаний на рис. 3, 4 несколько больше чем на рис. 1, 2. В частности, возросли амплитуды колебаний управлений  $m'_i$ , что привело к увеличению потребляемой катушками мощности. Судя по оценкам п. 5, энергопотребление при реализации обоих законов, особенно в установившихся движениях, мало.

На рис. 2, 4 колебания спутника происходят вблизи одной и той же точки (4). В общем случае законы управления (8), (9) при подходящем выборе  $a$

обеспечивают выход спутника в окрестность одной из этих точек, но заранее трудно сказать какой именно. Результат зависит от начальных условий движения.

Как показало моделирование, мощность, необходимая для реализации закона (8) или (9), возрастает с увеличением коэффициента  $a$ . Простой прием позволяет ограничить эту мощность. Продемонстрируем его на примере закона (8). Рассмотрим закон, в котором величины  $m'_i$  сначала рассчитываются с использованием формулы (8), затем в случае  $|m'_i| \leq \eta$  остаются без изменения, а в случае  $|m'_i| > \eta$  заменяются величинами  $\eta m'_i/|m'_i|$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Решение уравнений (2), полученное с использованием такого закона при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  и  $\eta = 3 \cdot 10^{-7} \Gamma^{-1/2} \text{сМ}^{1/2} \text{с}^{-1}$ , приведено на рис. 5, 6. Потребление мощности уменьшилось, зато увеличилась длительность переходного процесса и амплитуды установившихся колебаний. Увеличение амплитуд сказывается на уровне микроускорений, но эти уровни в рассмотренных примерах настолько малы по сравнению с имевшими место на летавших *Фотонах* [1 – 4], что их различие можно не принимать во внимание.

Ниже приводятся варианты расчетов со значениями  $\varepsilon_i \neq 0$ , указанными в п. 2. Рис. 7 иллюстрирует установившиеся колебания в случае использования закона (9). Этот рисунок похож на рис. 2, но средние значения переменных  $\gamma$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  на нем другие. В частности, колебания по углу  $\gamma$  на рис. 7 происходят в окрестности значения  $32.5^\circ$ . Таким образом, параметры  $\varepsilon_i$  заметно влияют на режим гравитационной ориентации. При малых  $\lambda$ ,  $|\mu|$  и  $|\varepsilon_i|$  средние значения угла  $\gamma$  и угловых скоростей  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  в этом режиме приближенно определяются соотношениями

$$-\mu\omega_0^2 \sin \gamma \cos \gamma + \varepsilon_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0 \cos \gamma, \quad \omega_3 = -\omega_0 \sin \gamma. \quad (11)$$

Эти соотношения получаются, если в (3) первые уравнения заменить на

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu(\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{32}a_{33}) + \varepsilon_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{33}) + \frac{\lambda\varepsilon_2}{1 + \lambda\mu}, \\ \dot{\omega}_3 &= -(1 - \lambda + \lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2 a_{31}a_{32}) + \lambda\varepsilon_3, \end{aligned}$$

положить в получившейся системе  $\lambda = 0$  и искать ее стационарные решения, в которых  $\omega_1 = 0$ ,  $\sin \delta = \beta = 0$ . Формально малости  $|\mu|$  и  $|\varepsilon_i|$  здесь не требуется, но эта малость повышает точность такого рассмотрения. Видимые на рис. 7 средние значения величин  $\gamma$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  согласуются с (11).

Ненулевые  $\varepsilon_i$  усложняют предельное поведение решений уравнений (2), (9). На рис. 8, 9 показано решение, которое было вычислено при начальных условиях, отличающихся от (10) значениями  $\omega_1(0) = 0.035^\circ/\text{с}$  и  $\omega_3(0) = -0.005^\circ/\text{с}$ . Такие начальные условия реальны. Параметры модели в этом

примере — те же, что и в предыдущем. Видимый на рис. 9 установившийся режим близок одному из решений семейства (5), т. е. представляет собой гравитационную ориентацию вращающегося спутника. По этой причине на рис. 9 вместо графиков величин  $\gamma$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  приведены графики угла  $\theta = \arccos |a_{31}|$  (между прямыми, совпадающими с осями  $Ox_1$ ,  $Ox_3$ ) и введенных в п. 3 величин  $w_2$ ,  $w_3$ . Установившийся режим на рис. 9 отличается от установившегося режима на рис. 7 еще и увеличенными амплитудами колебаний углов  $\delta$ ,  $\beta$  и управлений  $m'_i$ .

Режим, показанный на рис. 9, возникает в случае, когда при данных параметрах спутника движений, близких (4), не существует. Например, при  $|\mu| < 2|\varepsilon_1|\omega_0^{-2}$  первое уравнение (11) не разрешимо. На рис. 10, 11 приведено решение, вычисленное при  $\mu = 0.05$ . Такое значение  $\mu$  вполне возможно. Значения этого параметра, вообще, определяются не очень надежно; как правило, известно только, что  $|\mu| \ll 1$ . Остальные параметры модели в этом примере — те же, что и в примере на рис. 7. Установившийся режим на рис. 10, 11 близок к одному из решений семейства (5). Во всех примерах, где такая близость имеет место, на рисунках вместо графиков переменных  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $\gamma$  приводятся графики переменных  $w_2$ ,  $w_3$  и  $\theta$ .

Рис. 12, 13 иллюстрируют решение уравнений (2), (8), которое получено при начальных условиях, отличающихся от условий (10) знаком  $\omega_3(0)$ . Здесь установившийся режим близок решениям (5); амплитуды установившихся колебаний по углам  $\delta$ ,  $\beta$  и управлениям  $m'_i$  несколько больше чем на рис. 4. Как показали расчеты, не включенные в данный препринт, изменение вида установившегося режима обусловлено наличием постоянного момента в связанных осях. Получить режим трехосной гравитационной ориентации в этих расчетах не удалось. Если в законе (8) ввести ограничение на величины  $|m'_i|$  (см. выше), то длительность переходного процесса, и амплитуды углов  $\delta$ ,  $\beta$  и управлений  $m'_i$  в установившемся движении несколько повышаются по сравнению с рис. 12, 13.

Оценки, сделанные в п. 5, и графики функций  $m'_i(t)$  позволяют оценить энергопотребление, необходимое для реализации законов (8), (9). Приведем характерные данные для описанной в п. 5 системы катушек. Как видно из графиков, потребная мощность зависит от вида движения. На этапе переходного процесса мощность, потребляемая одной катушкой, не превосходит 2 Вт. В установившемся движении эта мощность не превышает 0.5 Вт. Здесь указаны оценки сверху, средние значения примерно в 1.5 раза ниже. Приведенные данные не учитывают энергопотребление аппаратуры для обработки данных измерений магнетометра и формирования закона управления.

Законы (8), (9) допускают очевидную оптимизацию — коэффициент  $a$  в этих законах можно менять в зависимости от вида движения. На этапе переходного процесса его желательно взять достаточно большим, чтобы быстрее погасить возмущенное движение. В установившемся движении его желатель-

но уменьшить (не нарушив устойчивости этого движения), чтобы уменьшить энергопотребление и возмущающее влияние МПЗ. Последнее актуально для закона (8) и режима трехосной гравитационной ориентации.

Выше были приведены результаты моделирования начального этапа полета спутника — в основном, первых пяти суток. Показано, что электромагнитная система управления вращательным движением предотвращает увеличение угловой скорости и стабилизирует режим гравитационной ориентации. Рассмотрим теперь результаты работы этой системы в случае, когда она начинает функционировать при большой угловой скорости спутника. Эти результаты представлены на рис. 14 — 17. Здесь приведены два решения уравнений (2), (8) с начальными условиями, отличающимися от (10) значениями  $\omega_1(0) = 0.5^\circ/\text{с}$ ,  $\omega_2(0) = 0.43^\circ/\text{с}$  и  $\omega_3(0) = 0.25^\circ/\text{с}$ . Решение на рис. 16, 17 получено для модифицированного закона управления магнитным моментом при  $\eta = 3 \cdot 10^{-6} \text{Г}^{-1/2} \text{см}^{1/2} \text{с}^{-1}$ .

Анализ результатов начнем с решения на рис. 14, 15. Установившийся режим, показанный на рис. 15, по существу идентичен режиму на рис. 13. Этот факт не является удивительным, так как все параметры модели, кроме начальных условий, в обоих примерах одинаковы. Переходной процесс на рис. 14 длится дольше чем на рис. 12, соответственно на начальном участке движения потребляемая мощность сравнительно велика.

Решение на рис. 16, 17 не имеет аналогов среди решений, рассмотренных ранее. Это — пример захвата движения спутника в резонанс 2:1 с изменением индукции МПЗ вдоль орбиты. О существовании такого резонанса упоминалось в конце п. 3. Как видно из рис. 17, установившееся движение спутника представляет собой вращение в плоскости орбиты — амплитуда колебаний спутника вокруг оси  $Ox_1$  (по углу  $\gamma$ ) не превышает  $11^\circ$ , эта ось отклоняется от плоскости орбиты (по углу  $\beta$ ) не более, чем на  $5^\circ$ . Среднее значение угловой скорости  $\omega_2$ , вычисленное по ее экстремальным значениям на рис. 17 с помощью формулы общего решения уравнения (7), составляет  $0.128^\circ/\text{с}$ . Это значение близко числу  $2\omega_0 = 0.133^\circ/\text{с}$ .

Хотя установившаяся угловая скорость спутника в резонансном режиме на рис. 17 мала, она все же немного больше, чем в остальных примерах. Существуют простые законы изменения  $\mathbf{m}$ , которые позволяют вывести спутник из этого режима так, чтобы последующее применение закона (8) привело его в режим гравитационной ориентации.

**7. Расчет квазистатических микроускорений.** Несмотря на разнообразие обнаруженных установившихся режимов вращательного движения спутника, угловая скорость в этих режимах достаточно мала. Она существенно меньше по абсолютной величине установившейся угловой скорости *Фотона-11*, *Фотона-12* и *Фотона М-2* [1 — 4]. Соответственно на борту спутника с электромагнитной системой управления должны быть и существенно меньшие квазистатические микроускорения. Продемонстрируем это расчета-



ми. Приведем расчетную формулу.

Пусть спутник представляет собой твердое тело, и точка  $P$  жестко связана с его корпусом. Микроускорением  $\mathbf{b}$  в точке  $P$  называется разность между напряженностью гравитационного поля в этой точке и абсолютным ускорением последней. Если из негравитационных воздействий на спутник существенно только сопротивление атмосферы, то микроускорение можно найти по формуле [1 – 4]

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\mu_E}{r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right] + c\rho_a |\mathbf{v}| \mathbf{v}. \quad (12)$$

Здесь  $\mathbf{d} = \overrightarrow{OP}$ ,  $c$  — баллистический коэффициент спутника. Остальные обозначения были введены в п. 2. Формула (12) выведена для общего случая без каких-либо частотных ограничений. Однако если спутник имеет большие массу и моменты инерции, как *Фотон*, и его вращательное движение рассчитывается как движение твердого тела, то формула (12) дает именно квазистатическое микроускорение.

Зная движение спутника, по формуле (12) можно рассчитать квазистатическое микроускорение в любой заданной точке борта в функции времени. Приводимые ниже результаты расчетов получены для точки  $P$  с координатами  $(-1.5 \text{ м}, 0 \text{ м}, 0.5 \text{ м})$ . Такие координаты типичны для мест размещения научного оборудования внутри спускаемого аппарата. Значения баллистического коэффициента в этих расчетах взяты те же, что и в уравнениях орбитального движения спутника.

Найденные микроускорения представлены на рис. 18, 19. Они рассчитаны для установившихся движений, рассмотренных в п. 6. На рисунках изображены графики зависимости от времени компонент вектора  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  и его модуля  $|\mathbf{b}|$ . Чтобы оценить полученные результаты, укажем, что в конце полета *Фотона М-2* модуль микроускорения в выбранной точке  $P$  превышал  $300 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$ . Таким образом, применение на спутниках *Фотон* электромагнитной системы управления вращательным движением позволит существенно — более чем в 10 раз — снизить уровень квазистатических микроускорений на их борту.

Рассматриваемая электромагнитная система управления вращательным движением может быть реализована в виде отдельной аппаратуры, слабо связанной с остальными системами спутника, подобно аппаратуре "Мираж" на *Фотоне-12* и *Фотоне М-2*.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00467).

## Литература

- [1] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ *Фотон-11*. Космические исследования, 2001, т. 39, № 4, с. 419-435.
- [2] Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту. Космические исследования, 2003, т. 41, № 1, с. 45-56.
- [3] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11*. Космические исследования, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.
- [4] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон М-2* и квазистатические микроускорения на его борту. Космические исследования, 2007, т. 45, № 5, с. 450-470.
- [5] Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М., Машиностроение, 1975.
- [6] Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1957.
- [7] Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. Прикладная математика и механика, 1963, т. 28, вып. 1, с. 155-157.
- [8] Ветлов В.И., Новичкова С.М., Сазонов В.В., Матвеев Н.В., Бабкин Е.В. Режим гравитационной ориентации Международной космической станции. Космические исследования, 2001, т. 39, вып. 4, с. 436-448.
- [9] Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М., Наука, 1985.

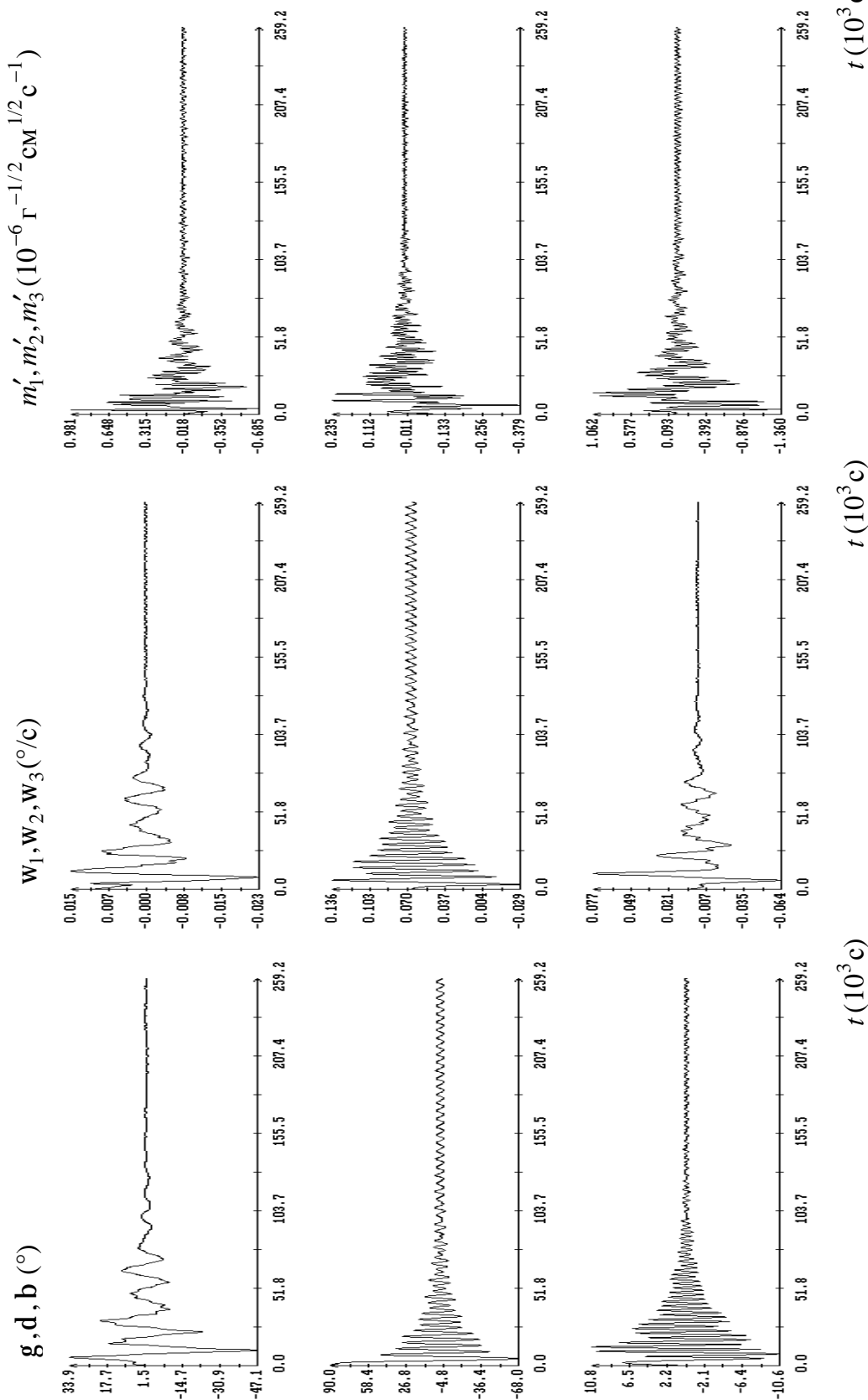


Рис. 1. Реализация режима гравитационной ориентации с помощью управления  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{w}_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

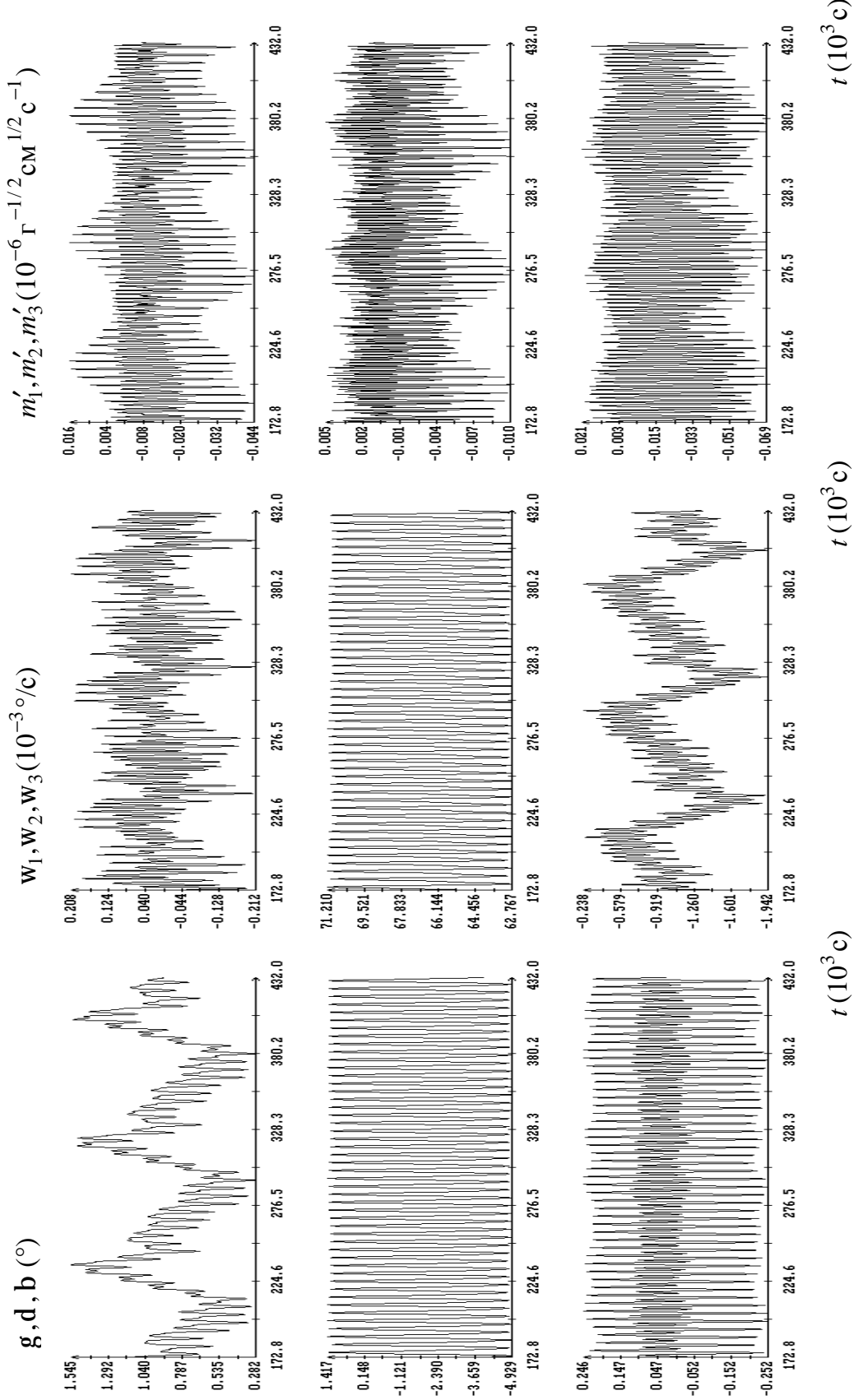


Рис. 2. Реализация режима гравитационной ориентации с помощью управления  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{w}_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

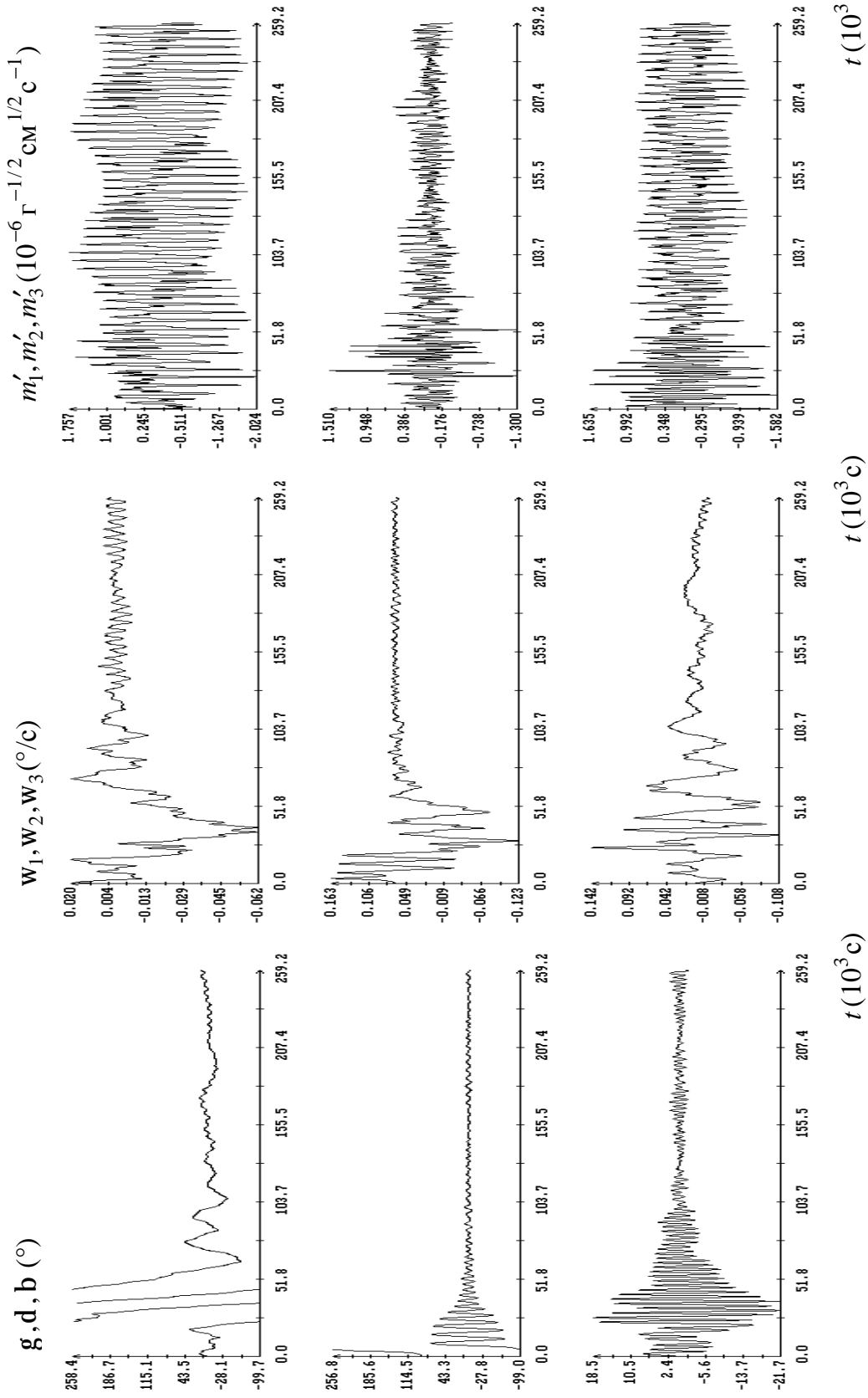


Рис. 3. Реализация режима гравитационной ориентации с помощью управления  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

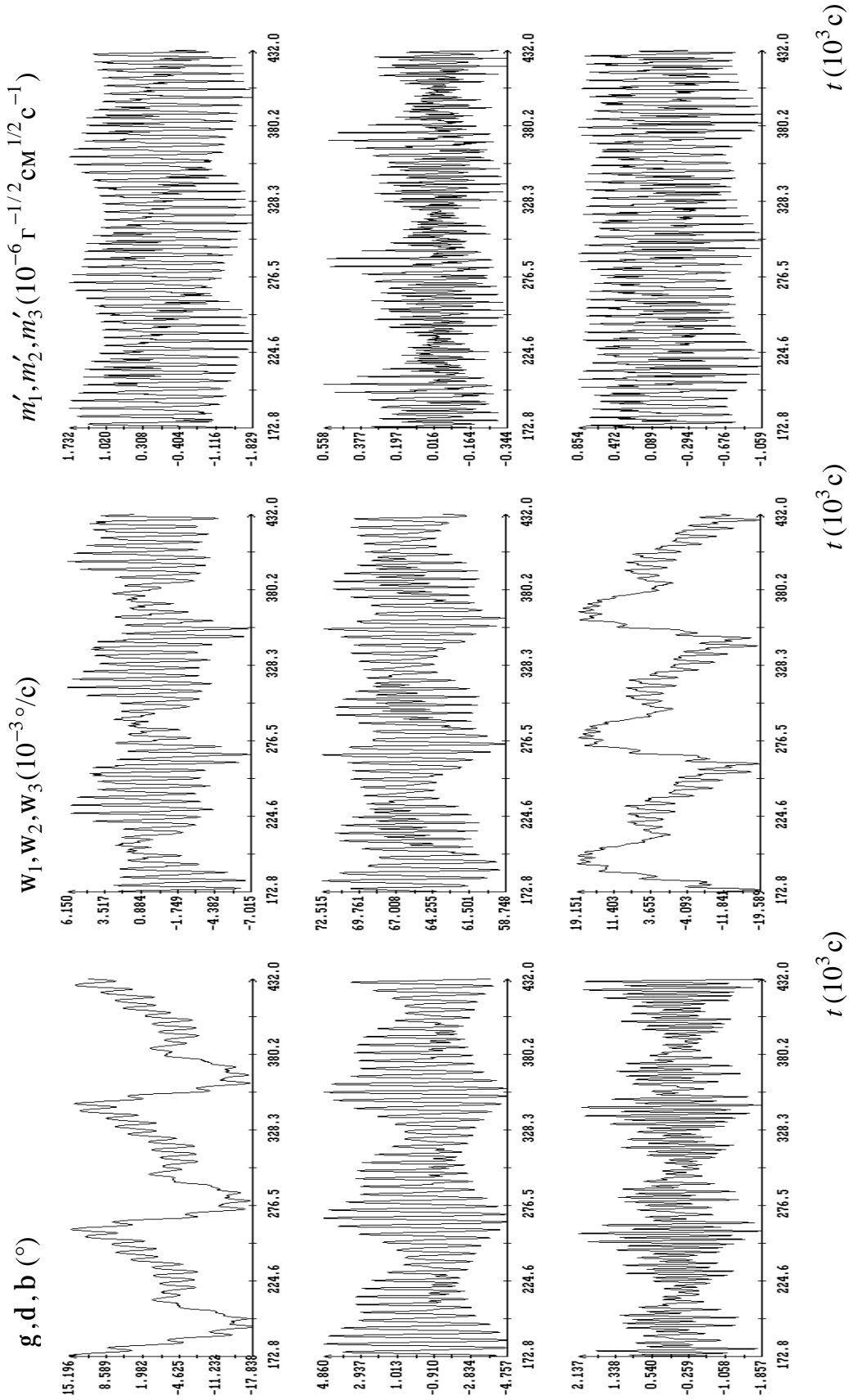


Рис. 4. Реализация режима гравитационной ориентации с помощью управления  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

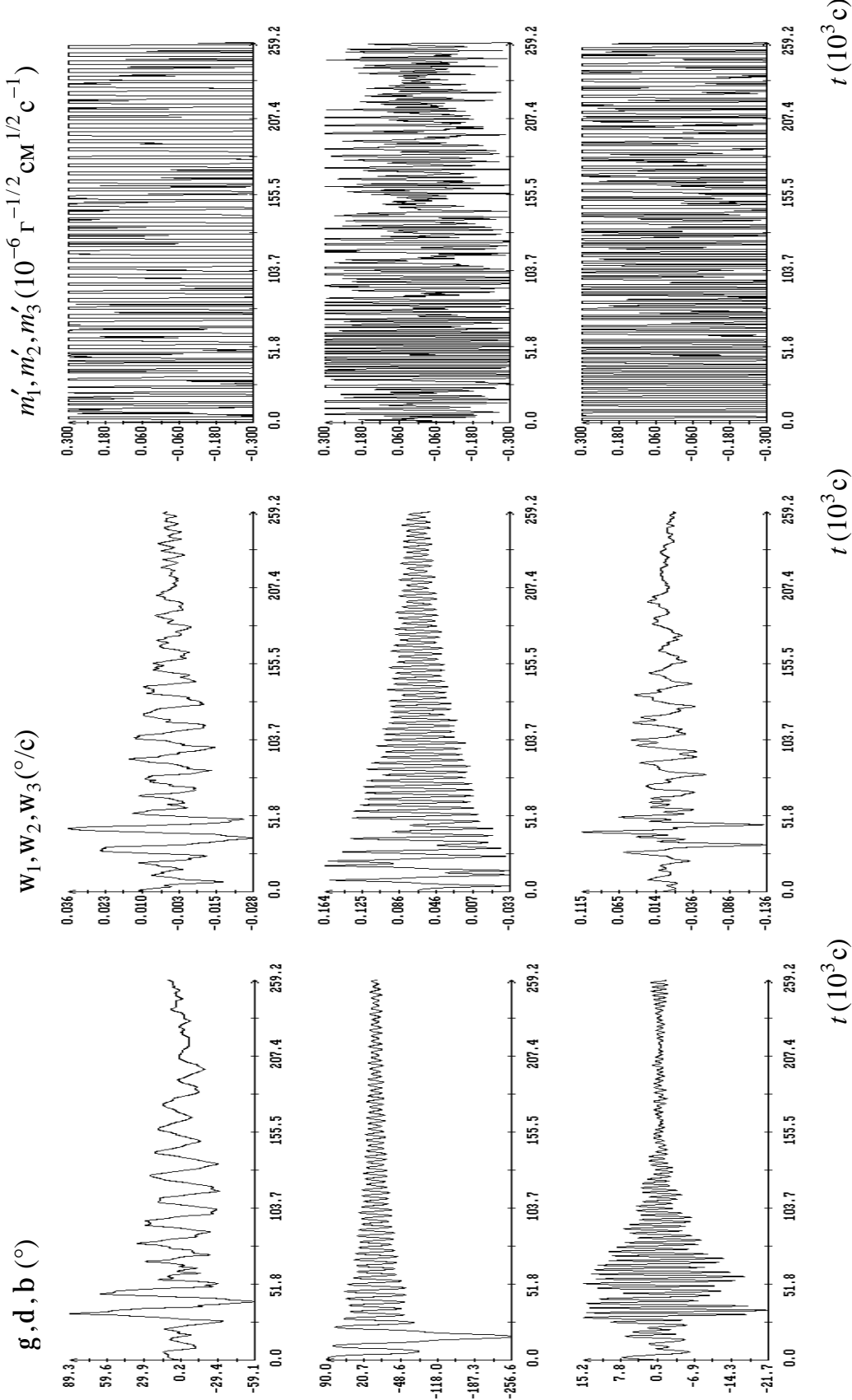


Рис. 5. Реализация режима гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ,  $|m_i| \leq 3 \cdot 10^{-7} \Gamma^{-1/2} \text{CM}^{1/2} c^{-1}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/c$ .

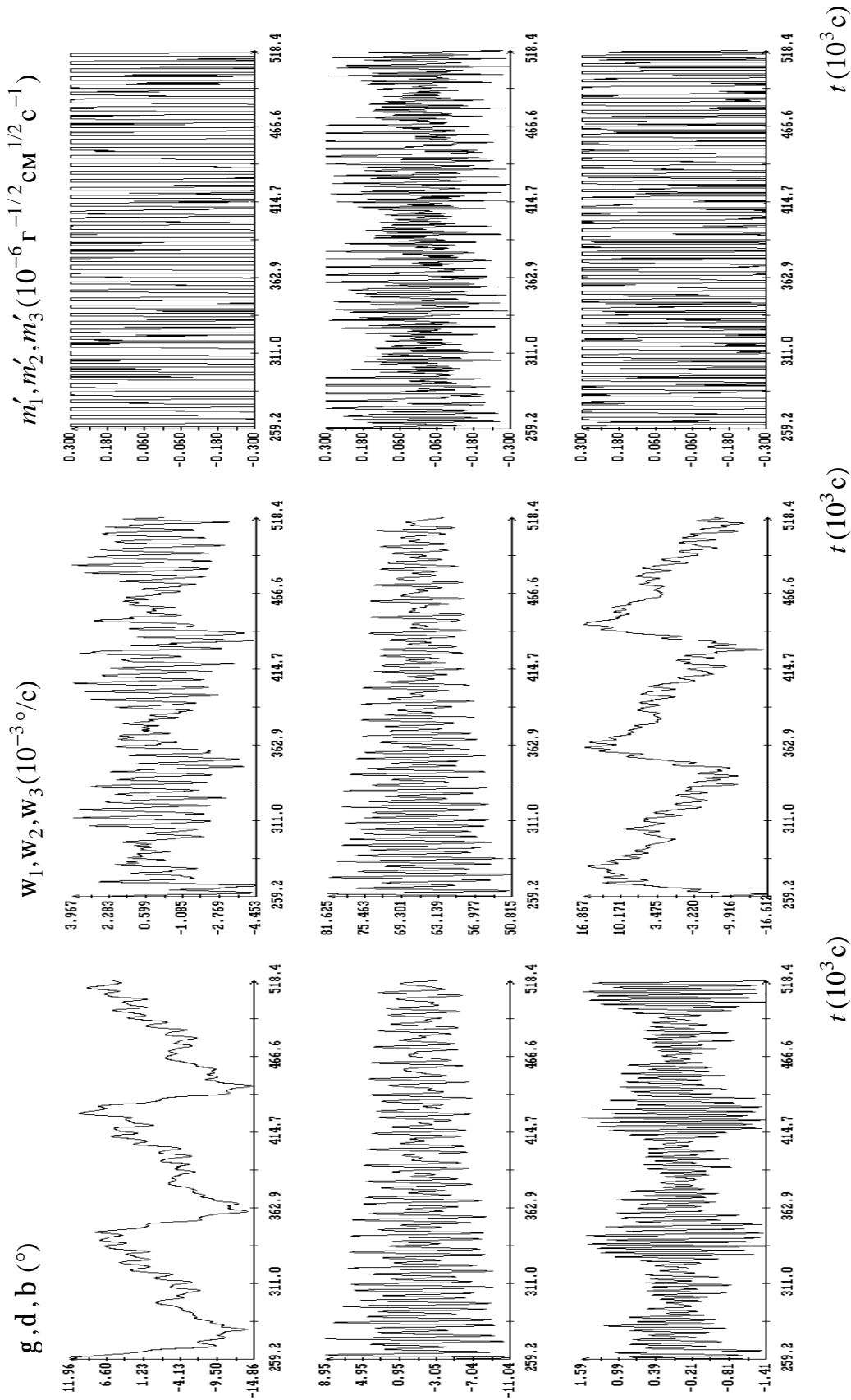


Рис. 6. Реализация режима гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ,  $|m'_i| \leq 3 \cdot 10^{-7} \Gamma^{-1/2} \text{cm}^{1/2} \text{c}^{-1}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/c$ .



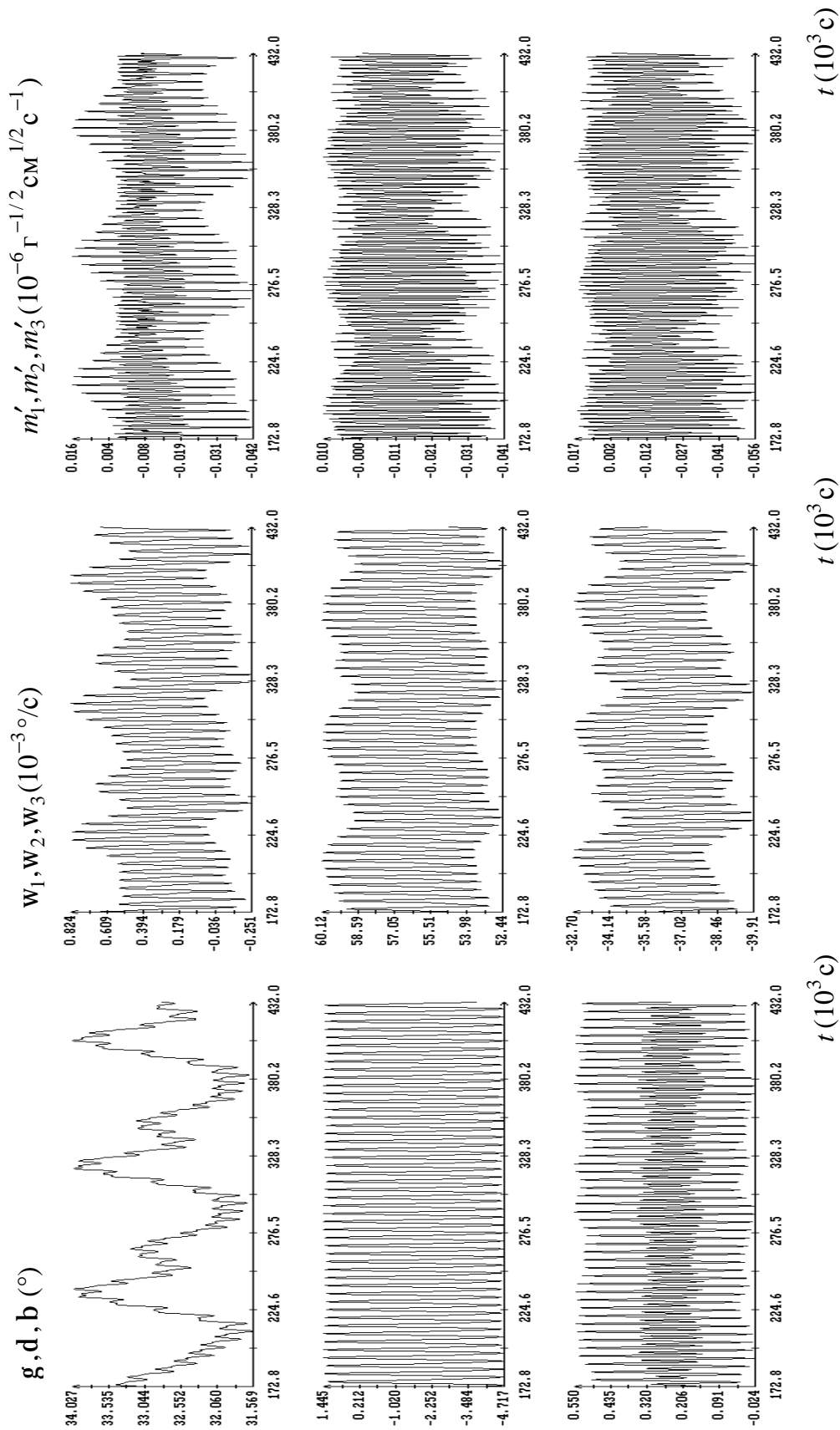


Рис. 7. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - w_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$  и постоянном возмущающем моменте; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.01^\circ/c$ ,  $w_2(0) = 0.065^\circ/c$ ,  $w_3(0) = 0.005^\circ/c$ .

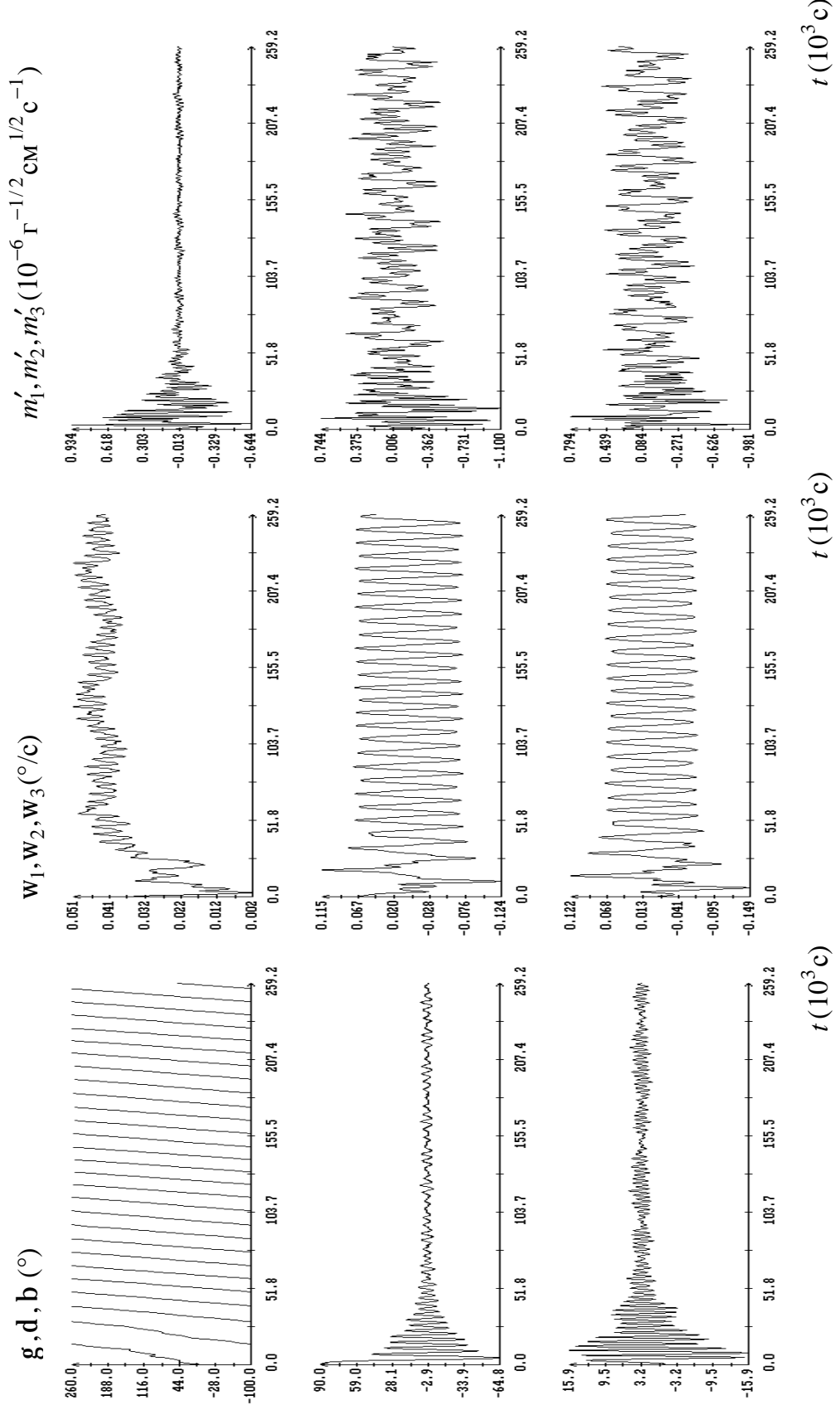


Рис. 8. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - w_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$  и постоянном возмущающем моменте; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.035^\circ/\text{c}$ ,  $w_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $w_3(0) = -0.005^\circ/\text{c}$ .

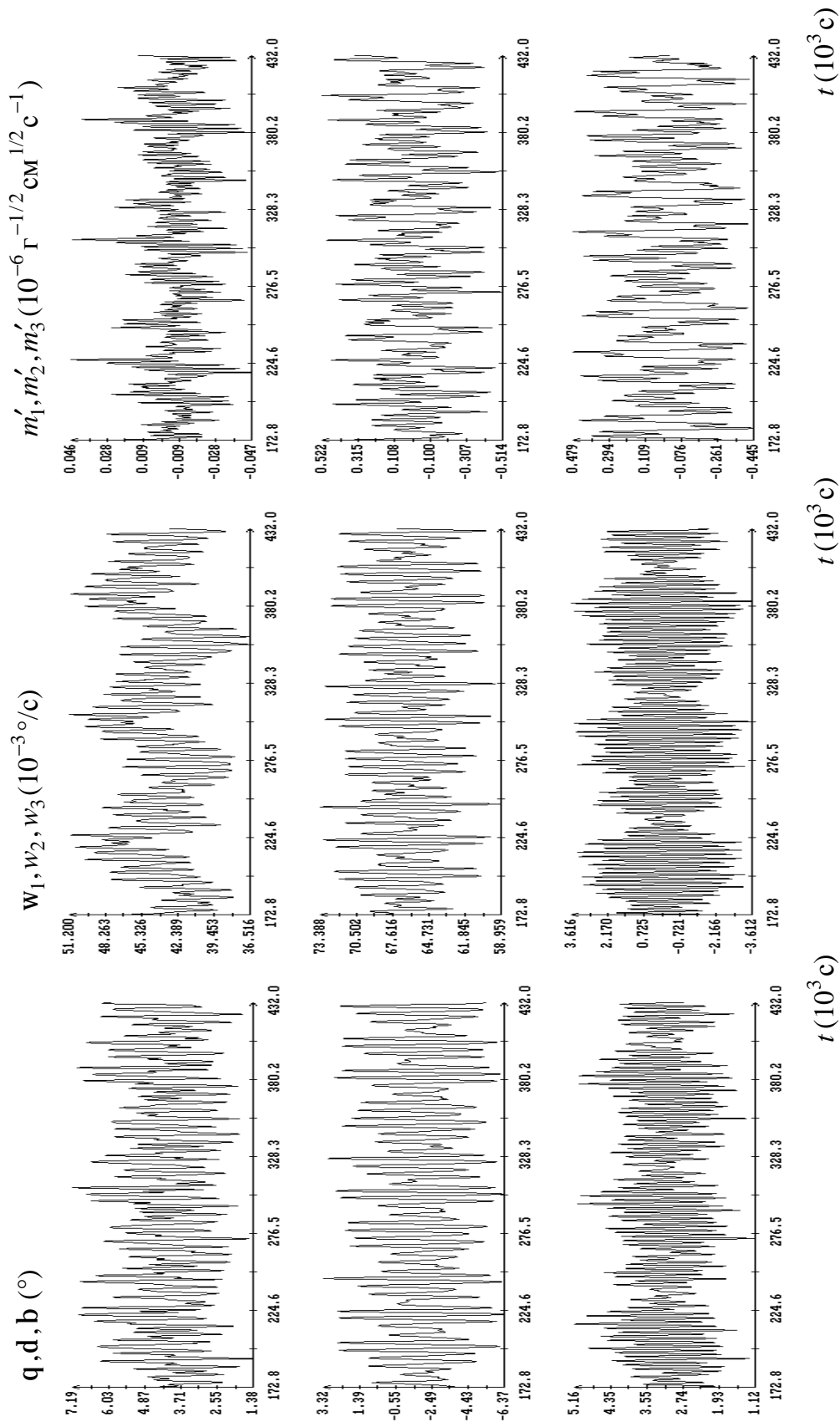


Рис. 9. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - w_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$  и постоянном возмущающем моменте; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.035^\circ / c$ ,  $w_2(0) = 0.065^\circ / c$ ,  $w_3(0) = -0.005^\circ / c$ .

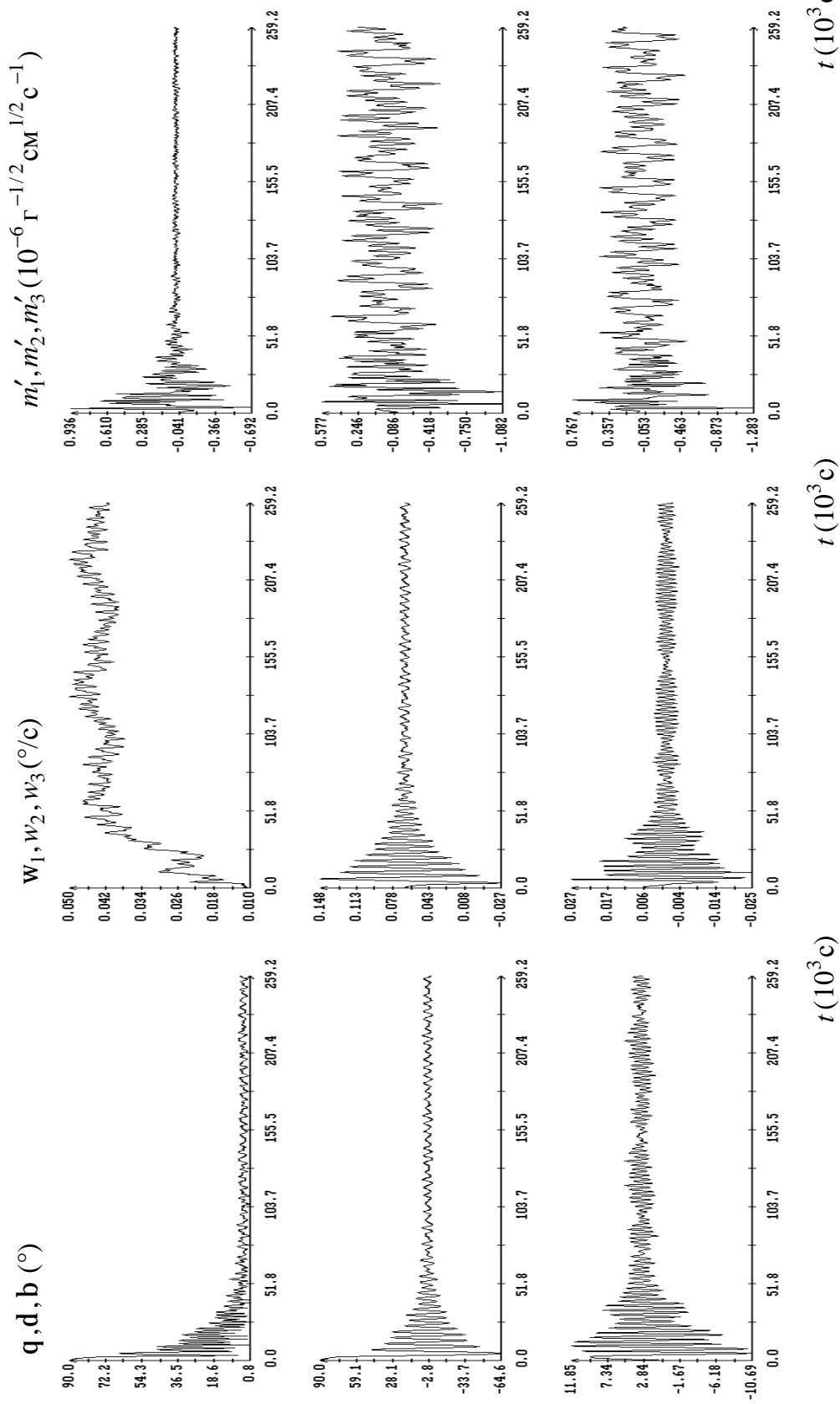


Рис. 10. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = a(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{w}_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$  и постоянном возмущающем моменте;  $\mathbf{m} = 0.05$ , начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

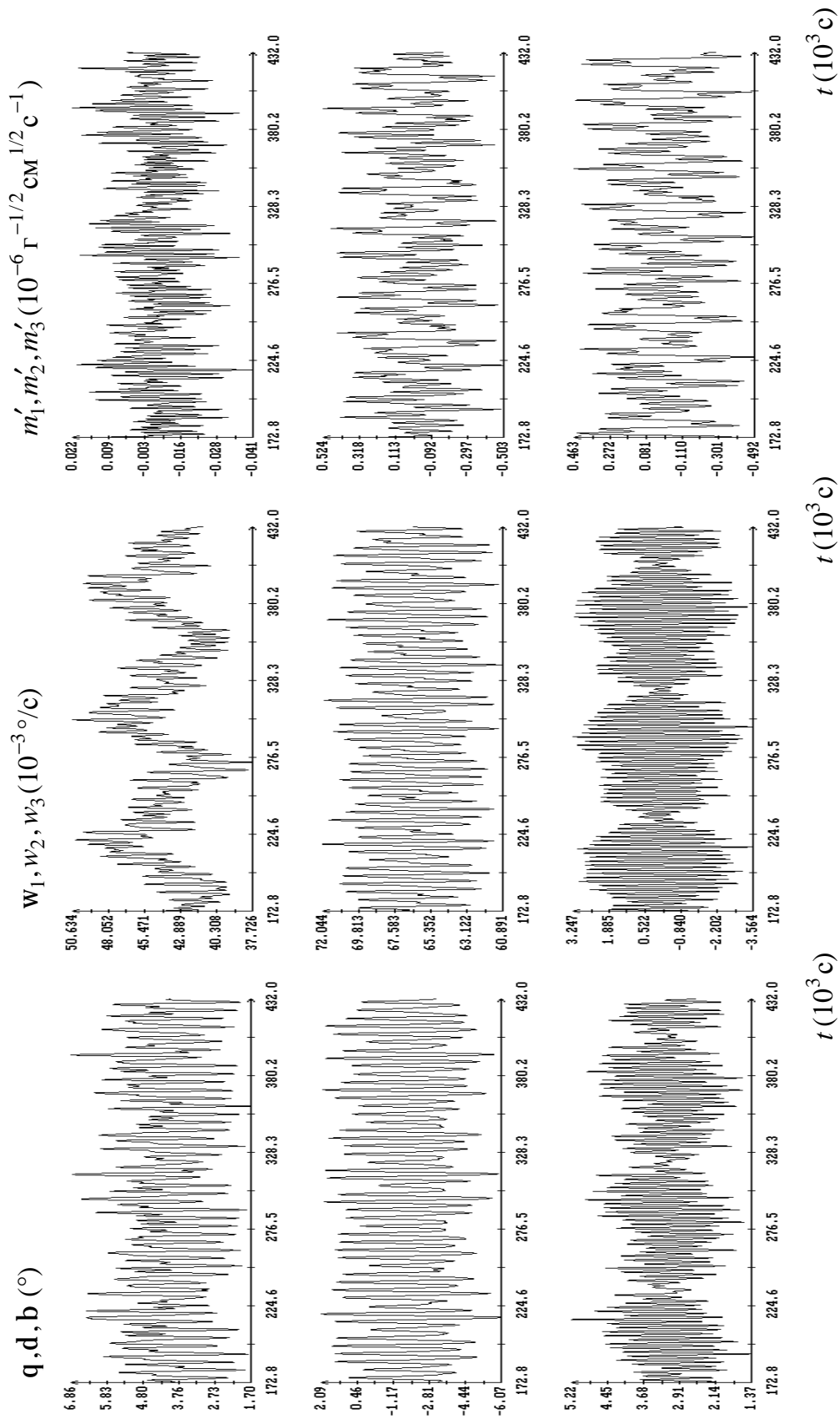


Рис. 11. Режим гравитационной ориентации  $\text{прим} = a(\boldsymbol{\omega} - w_0 \mathbf{E}_2) \times \mathbf{B}$  и постоянном возмущающем моменте;  $\mathbf{m} = 0.05$ , начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $w_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $w_3(0) = 0.005^\circ/\text{c}$ .

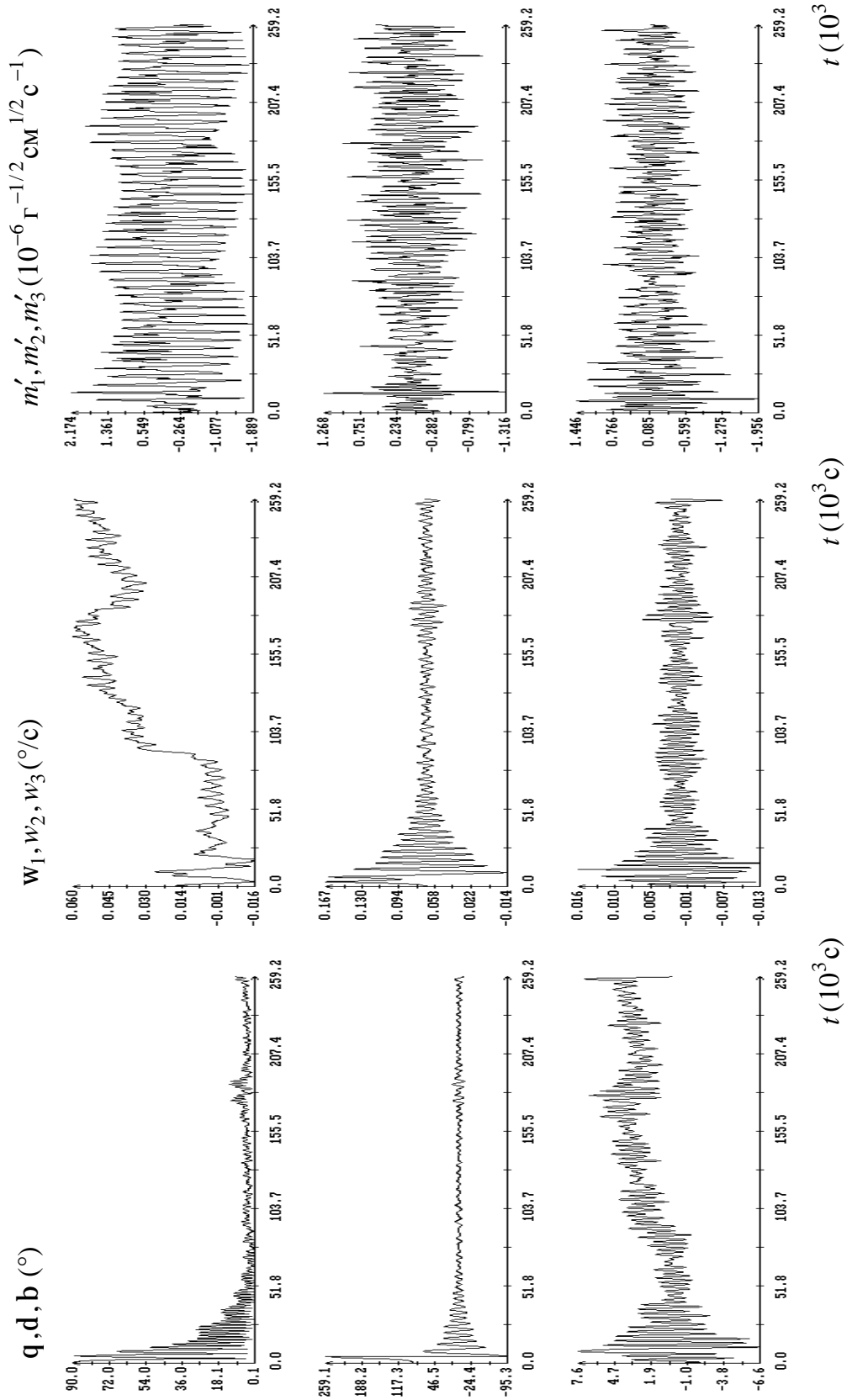


Рис. 12. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$  и постоянном возмущающем моменте; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.01^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.065^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = -0.005^\circ/c$ .

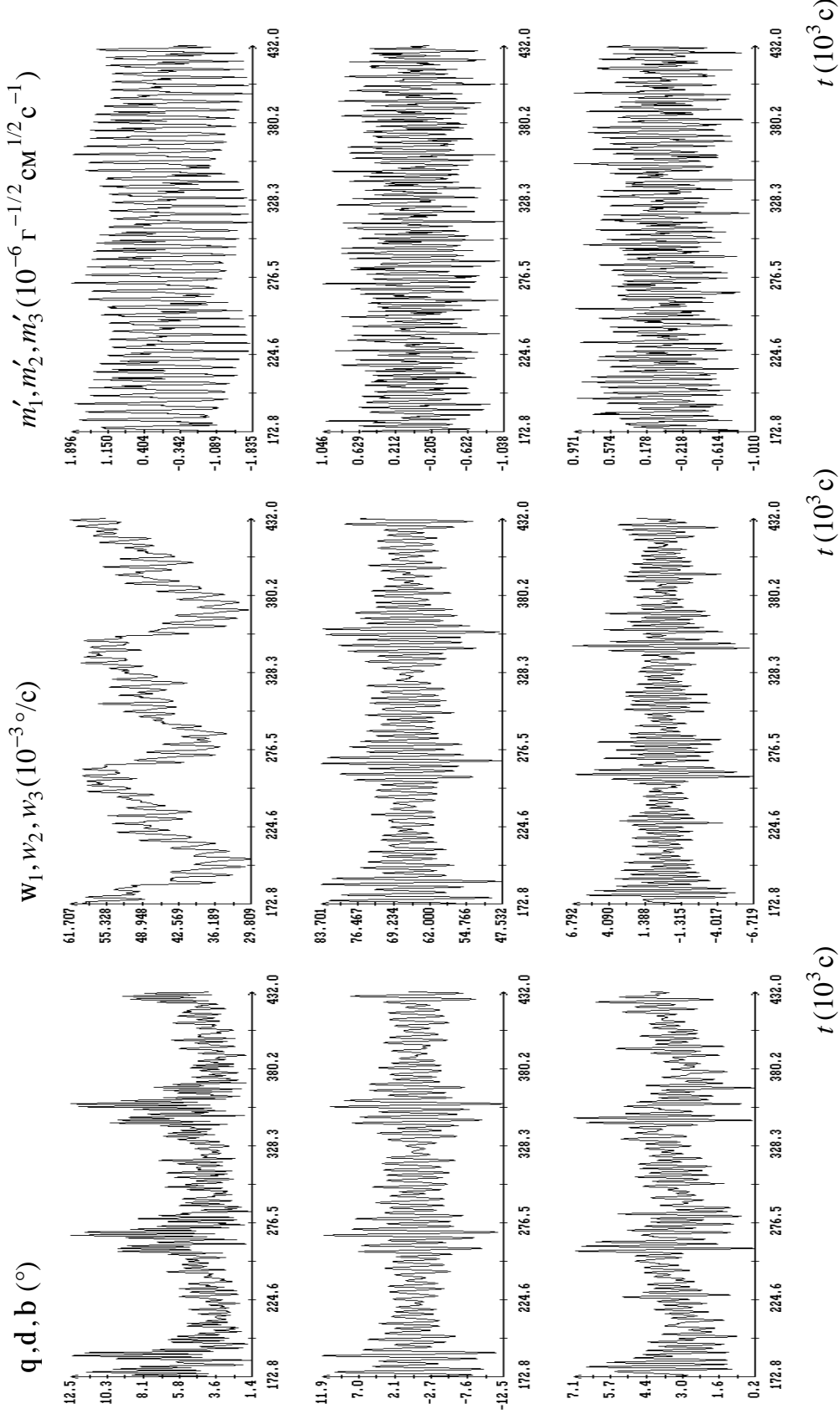


Рис. 13. Режим гравитационной ориентации при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{V}/dt)$  и постоянном возмущающем моменте; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.01^\circ/\text{c}$ ,  $w_2(0) = 0.065^\circ/\text{c}$ ,  $w_3(0) = -0.005^\circ/\text{c}$ .

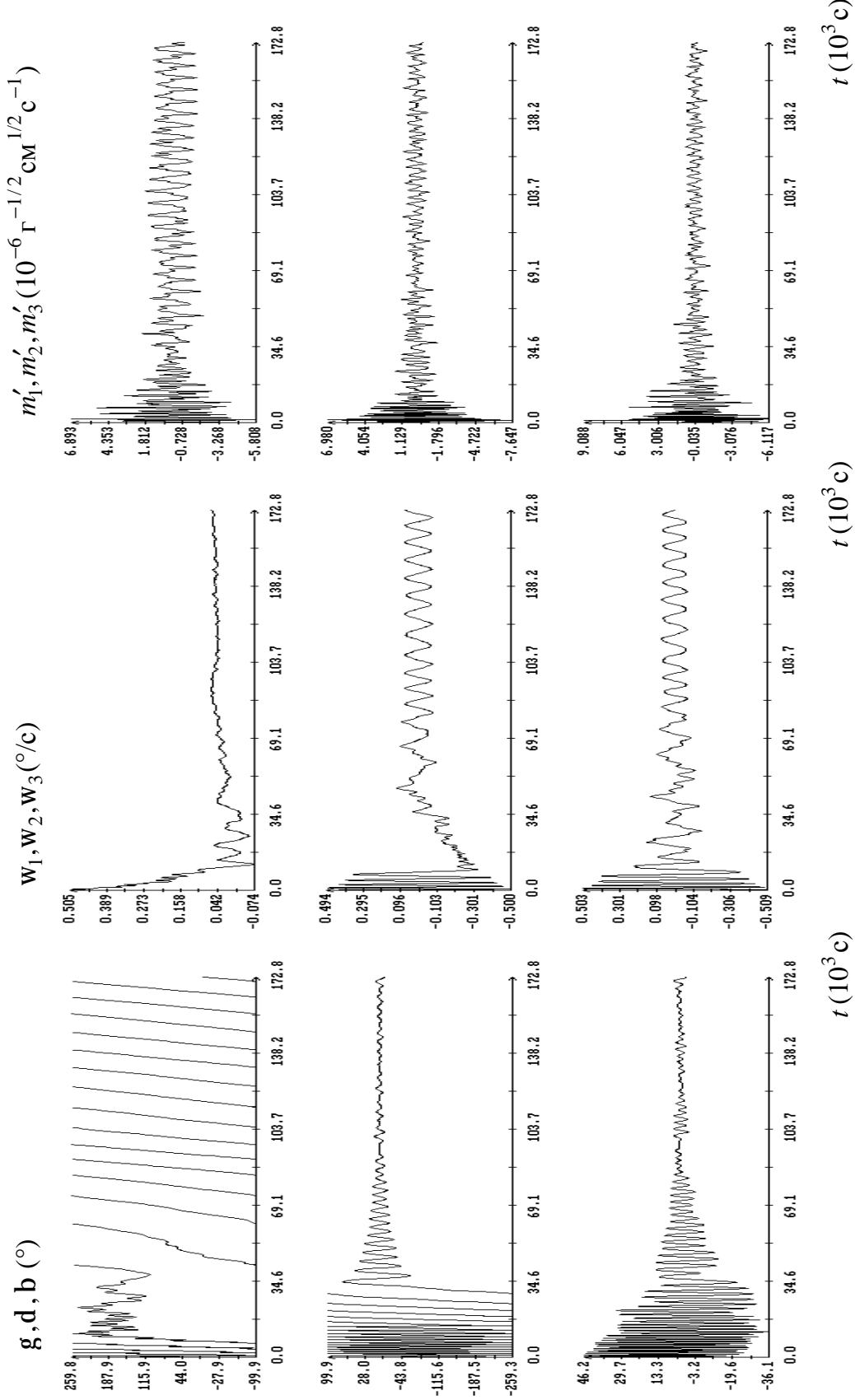


Рис. 14. Гашение возмущенного движения при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{b}/dt)$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.5^\circ/\text{c}$ ,  $w_2(0) = 0.43^\circ/\text{c}$ ,  $w_3(0) = 0.25^\circ/\text{c}$ .



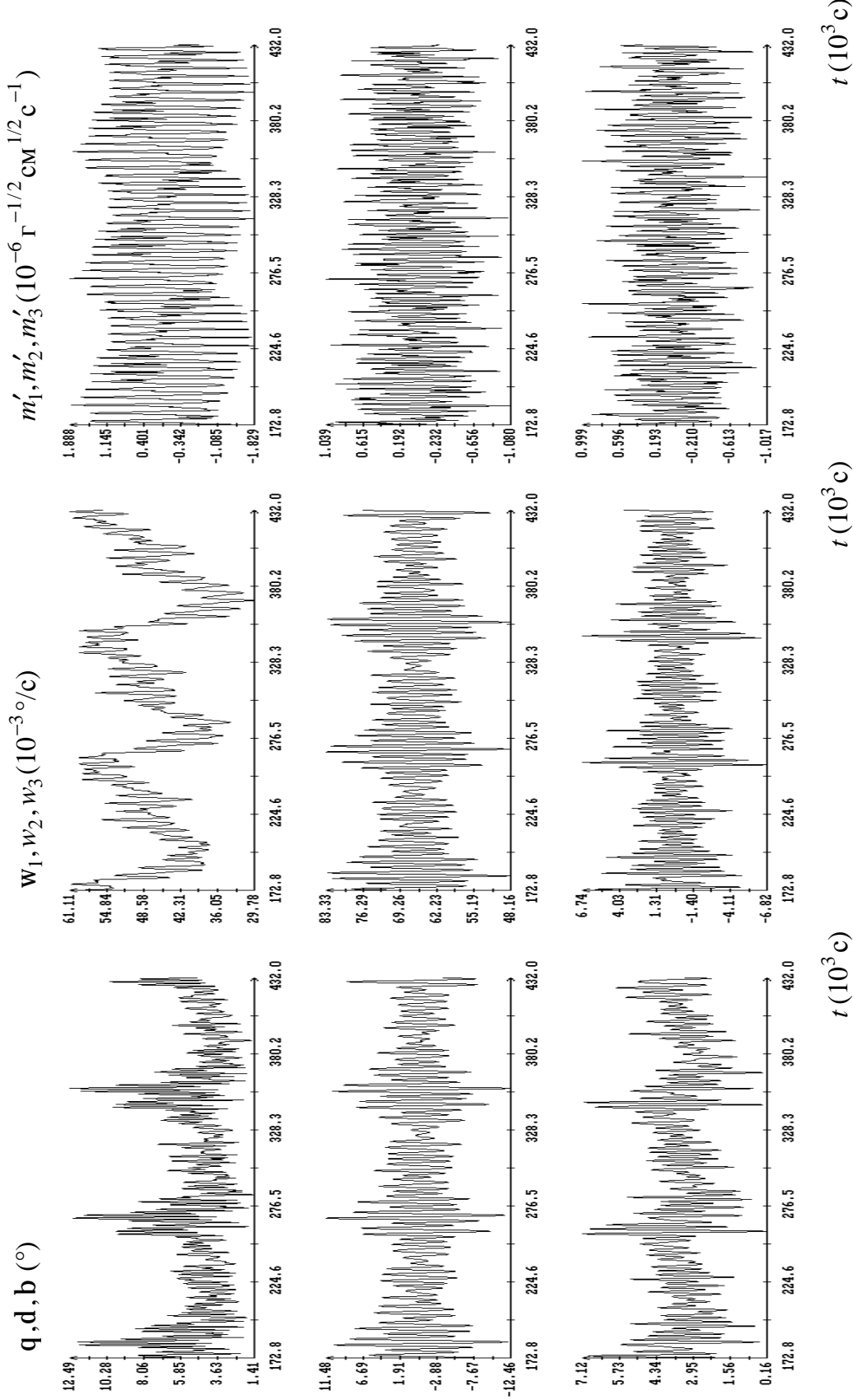


Рис. 15. Гашение возмущенного движения при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{b}/dt)$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.5^\circ/\text{c}$ ,  $w_2(0) = 0.43^\circ/\text{c}$ ,  $w_3(0) = 0.25^\circ/\text{c}$ .

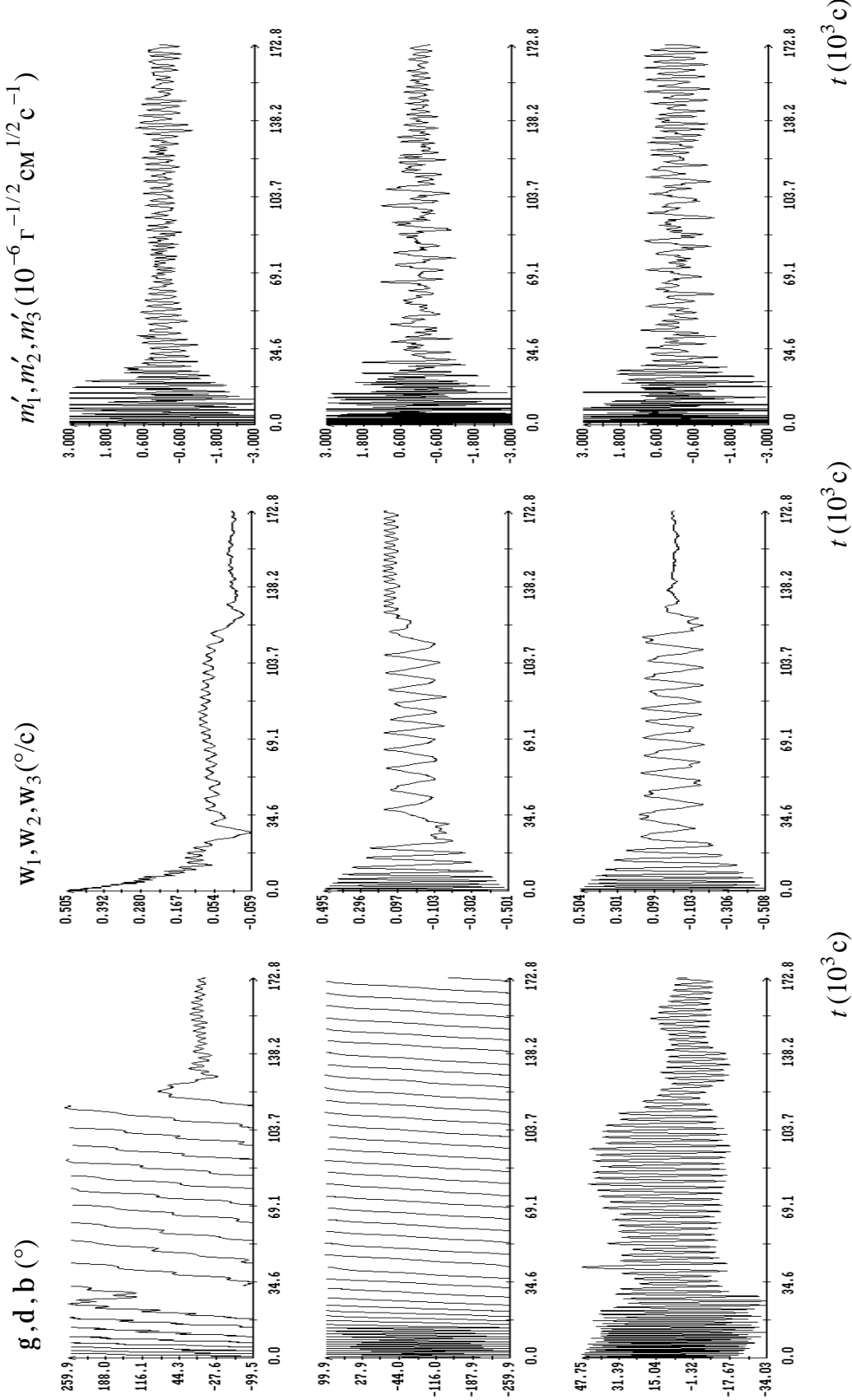


Рис. 16. Гашение возмущенного движения при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ,  $|m_i| \leq 3 \cdot 10^{-6} \Gamma^{-1/2} \text{cm}^{1/2} c^{-1}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $\mathbf{w}_1(0) = 0.5^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_2(0) = 0.43^\circ/c$ ,  $\mathbf{w}_3(0) = 0.25^\circ/c$ .

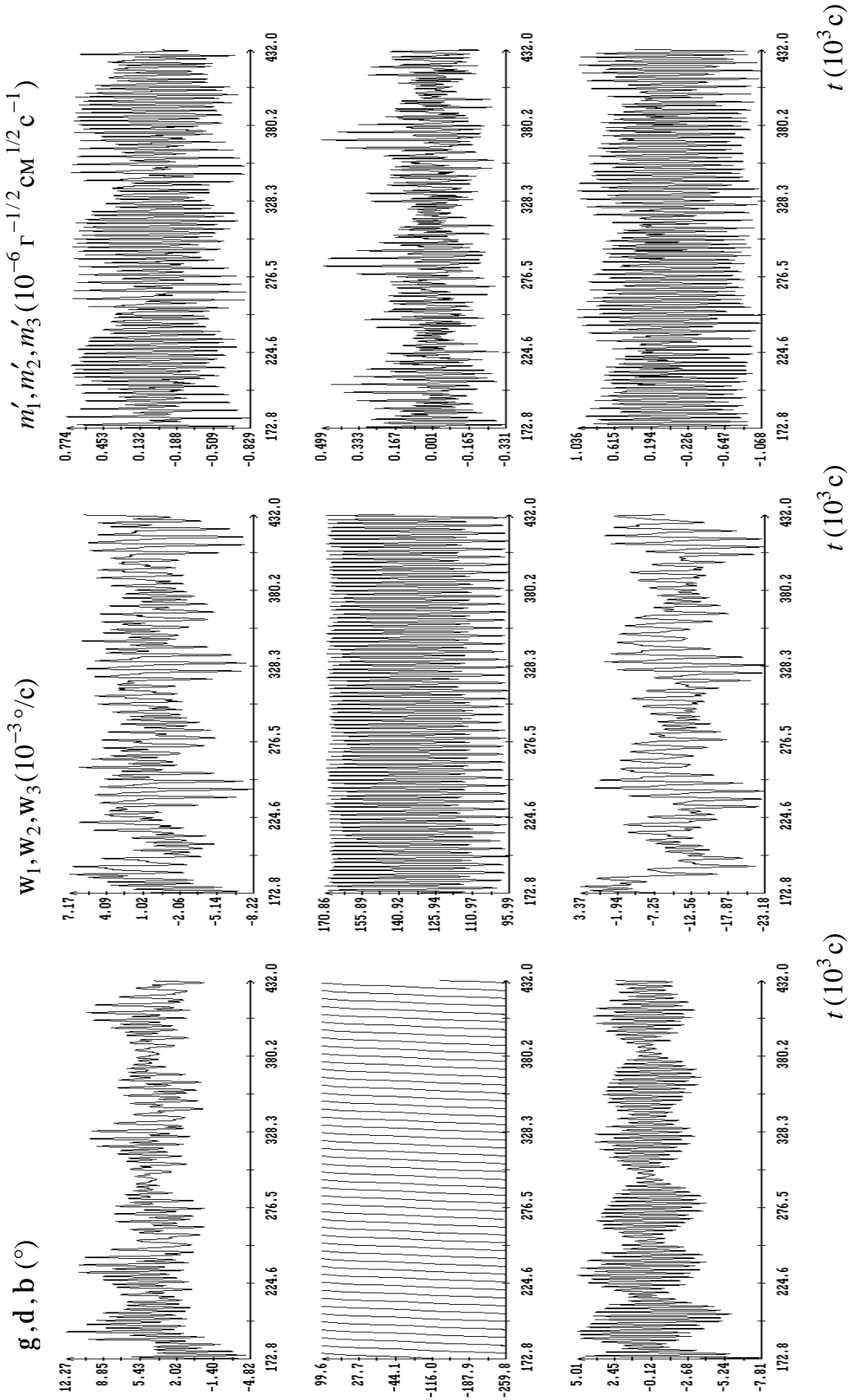


Рис. 17. Гашение возмущенного движения при  $\mathbf{m} = -a(d\mathbf{B}/dt)$ ,  $|m_i| \leq 3 \cdot 10^{-6} \Gamma^{-1/2} \text{cm}^{-1/2} c^{-1}$ ; начальные условия:  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{b}(0) = 0$ ,  $\mathbf{d}(0) = 90^\circ$ ,  $w_1(0) = 0.5^\circ/c$ ,  $w_2(0) = 0.43^\circ/c$ ,  $w_3(0) = 0.25^\circ/c$ .

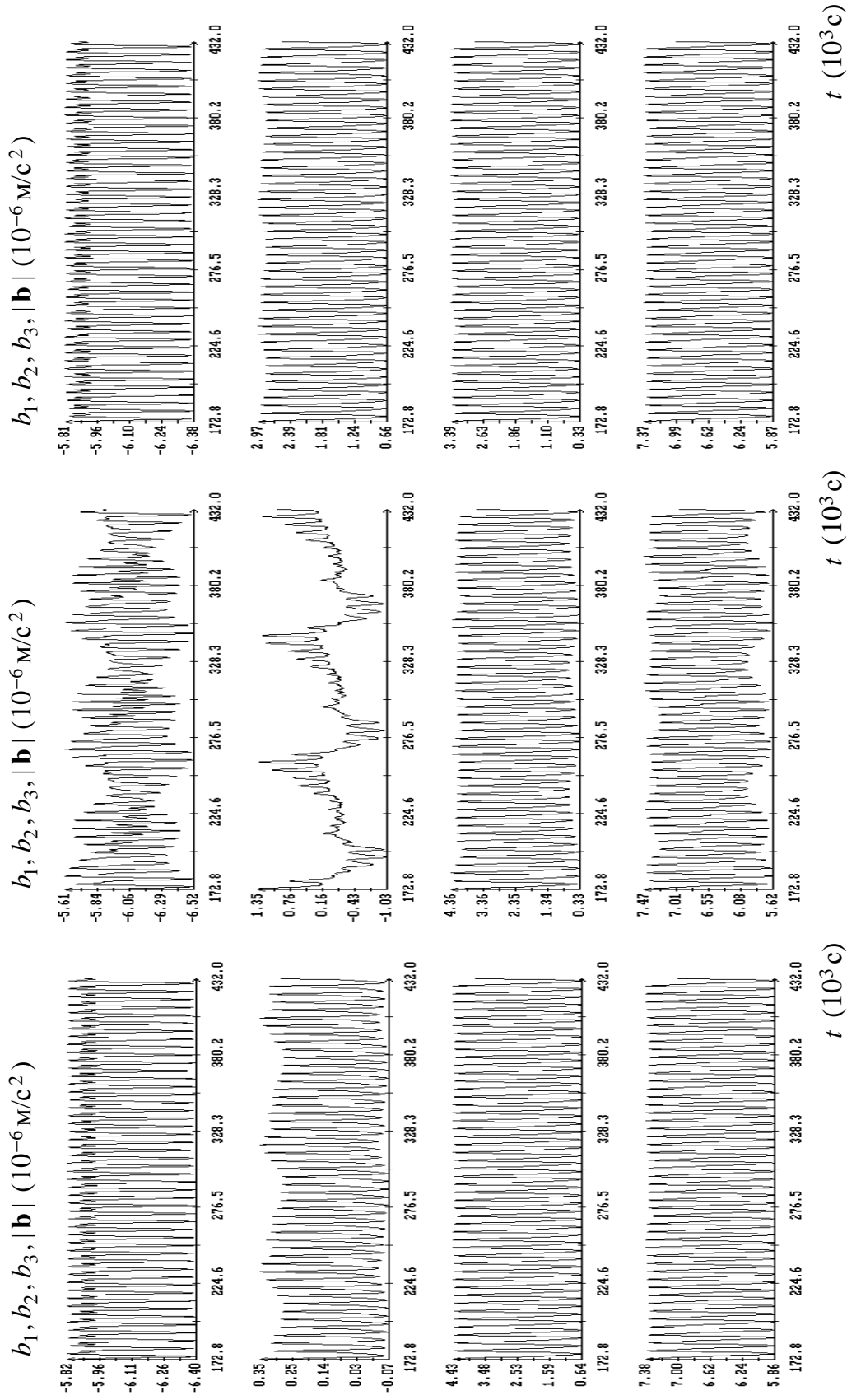


Рис. 18. Микроскорения в движениях, представленных на рис. 2, 4, 7.

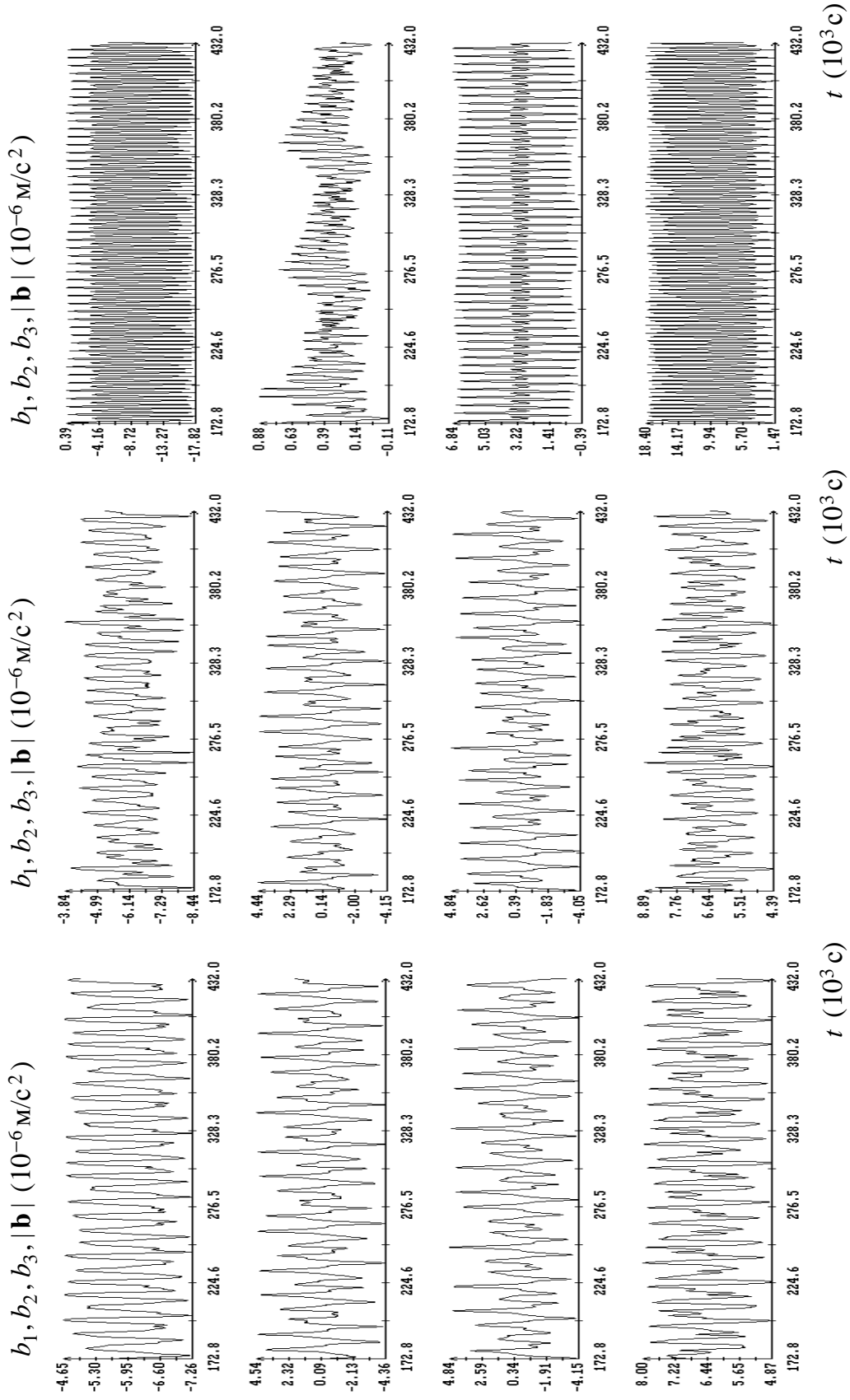


Рис. 19. Микроускорения в движениях, представленных на рис. 11, 13, 17.