



Аванесов Г.А., Красиков В.А.,  
Никитин А.В., Сазонов В.В.

Определение  
вращательного движения  
космического аппарата в  
режиме астрокоррекции по  
измерениям звездного  
датчика БОКЗ-М

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Определение вращательного движения космического аппарата в режиме астрокоррекции по измерениям звездного датчика БОКЗ-М / Г.А.Аванесов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 30. 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-30>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**Г.А. Аванесов, В.А. Красиков, А.В. Никитин, В.В. Сазонов**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В РЕЖИМЕ АСТРОКОРРЕКЦИИ  
ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА БОКЗ-М**

## Аннотация

Рассмотрена задача определения вращательного движения космического аппарата (КА) в режиме астрокоррекции по данным измерений звездного датчика БОКЗ-М. В этом режиме КА совершает специальным образом организованное плавное вращательное движение на отрезке времени длиной несколько минут, прибор БОКЗ-М выдает параметры ориентации КА с постоянным шагом по времени длиной 3 с и пренебрежимо малым запаздыванием. По полученным измерениям требуется с повышенной точностью определить параметры ориентации КА и его угловую скорость в некоторый момент времени на отрезке движения, а также параметры ориентации в двух достаточно разнесенных по времени точках этого отрезка. Предложен статистический алгоритм решения такой задачи. Он использует специальное представление данных измерений и их полиномиальное сглаживание. Алгоритм включает возможность обработки данных измерений в рамках математической модели эйлера разворота КА, что в случае использования такого движения для астрокоррекции приводит к существенному повышению точности решения поставленной задачи. Приведены результаты испытания алгоритма на данных, произведенных специальным наземным моделирующим стендом.

**G.A.Avanesov, V.A.Krasikov, A.V.Nikitin, V.V.Sazonov. Determination of a spacecraft attitude motion in the astrocorecction mode by measurements of the star sensor BOKZ-M.** We consider the problem of determining a spacecraft attitude motion formed for the astrocorrection purpose. This motion is very slow and smooth. It continues for a few minutes. The parameters of the motion are determined by measurements of the star sensor BOKZ-M. The sensor determines the quaternion of the spacecraft attitude every 3 seconds with very high accuracy and negligible lag time. We have to estimate very precisely the spacecraft attitude and the angular rate at an instant in the motion time interval or the spacecraft attitude at two spaced instants in the interval. We propose the statistical method for solving this problem. It uses the convenient representation of the measurement data and their polynomial smoothing. The method allows also smoothing the measurements basing on the model of Euler's rotation of a spacecraft. The use of this model increases the accuracy of the solution, when Euler's rotation is used for the astrocorrection purpose. We test the method using the BOKZ-M measurements produced in ground-based testbed.

**1. Постановка задачи.** В данной работе решается задача определения вращательного движения космического аппарата (КА) по данным измерений астроизмерительного прибора БОКЗ-М, далее для краткости называемого датчиком. Предполагается, что при нормальной работе датчик выдает параметры ориентации КА каждые 3 секунды с пренебрежимо малым запаздыванием и достаточно высокой точностью. В работе прибора могут происходить редкие и непродолжительные (до нескольких десятков секунд) сбои, вызванные засветкой его Солнцем, попаданием в него космических частиц и т. п. причинами.

Под определением движения понимается приемлемо точное восстановление зависимости от времени кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА относительно заданной базовой системы координат. Отрезок времени, на котором должно быть восстановлено движение КА, имеет длину около 5 мин. Движение КА на нем происходит по инерции с малой угловой скоростью. Формализуем задачу. Будем считать, что показания датчика интерпретируются в жестко связанной с корпусом КА системе координат. Ориентация этой системы относительно некоторой базовой инерциальной системы координат задается нормированным кватернионом  $\mathbf{q}$ ,  $\|\mathbf{q}\|=1$ . Вращательное движение КА описывается кватернионной функцией времени  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_*(t)$ ,  $\|\mathbf{q}_*(t)\| \equiv 1$ , с которой вектор  $\boldsymbol{\omega}$  угловой скорости КА связан формулой

$$\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{q}_*^{-1} \circ \frac{d\mathbf{q}_*}{dt}.$$

Датчик в моменты времени  $t_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ),  $t_n < t_{n+1}$ , выдает приближенные ("измеренные") значения этой функции  $\mathbf{q}_n \approx \mathbf{q}_*(t_n)$ ,  $\|\mathbf{q}_n\|=1$ . Как правило,  $t_{n+1} - t_n = 3$  с, но иногда эта разность может оказаться равной 6, 9, 12... с. Требуется по измерениям  $(t_n, \mathbf{q}_n)$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ , построить аппроксимацию  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t)$  функции  $\mathbf{q}_*(t)$  на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$ . Функцию  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t)$  и векторную функцию

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{sm}}(t) = 2\mathbf{q}_{\text{sm}}^{-1}(t) \circ \frac{d\mathbf{q}_{\text{sm}}(t)}{dt}$$

будем считать оценками движения КА на этом отрезке.

Поскольку вращательное движение КА плавное и медленное, а длина отрезка  $[t_1, t_N]$  сравнительно невелика, функцию  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t)$  построим с использованием полиномов не выше второй степени. Рассмотрим два варианта конечного результата решения этой задачи.

А. Найти точку  $t_a \in [t_1, t_N]$ , в которой погрешности оценок  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t_a)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\text{sm}}(t_a)$  величин  $\mathbf{q}_*(t_a)$ ,  $\boldsymbol{\omega}(t_a)$  достаточно малы.

Б. Найти на отрезке  $[t_1, t_N]$  удаленные друг от друга точки  $t_a$  и  $t_b$ , в которых погрешности оценок  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t_a)$  и  $\mathbf{q}_{\text{sm}}(t_b)$  достаточно малы.

**2. Полиномиальная аппроксимация данных измерений.** При сделанных предположениях относительно вращательного движения КА, кватернионы  $\mathbf{q}_n$  должны лежать в окрестности их "среднего значения"

$$\mathbf{q}_c = \frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}, \quad \mathbf{Q} = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n.$$

Сглаживающую функцию будем искать в виде

$$\mathbf{q}_{\text{sm}}(t) = \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t), \quad \mathbf{s}(t) = (s_0(t), s_1(t), s_2(t), s_3(t))$$

$$s_0(t) = \frac{1 - z_1^2(t) - z_2^2(t) - z_3^2(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)},$$

$$s_i(t) = \frac{2z_i(t)}{1 + z_1^2(t) + z_2^2(t) + z_3^2(t)} \quad (i=1, 2, 3)$$

где  $z_i(t)$  – полиномы степени не выше второй, коэффициенты которых минимизируют выражение

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_c \circ \mathbf{s}(t_n)\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - \mathbf{s}(t_n)\|^2. \quad (1)$$

Использованные здесь величины  $z_i$  называются модифицированными параметрами Родрига [1]. При такой параметризации  $\|\mathbf{s}\| = 1$ .

Заметим, что кватернион  $\mathbf{q}_c$  является решением задачи

$$\sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q}} \quad \text{при условии} \quad \|\mathbf{q}\| = 1,$$

поэтому  $\|\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n - 1\| \ll 1$  и, следовательно,  $|z_i(t)| \ll 1$  ( $i=1, 2, 3$ ).

Пусть кватернионы  $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  и  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$  нормированы и выражены через параметры Родрига  $u_i$  и  $v_i$  соответственно. В таком случае  $u_i = p_i / (1 + p_0)$ ,  $v_i = q_i / (1 + q_0)$  ( $i=1, 2, 3$ ). При  $|u_i| \ll 1$ ,  $|v_i| \ll 1$  справедливо соотношение

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 \approx 4 \sum_{i=1}^3 (u_i - v_i)^2$$

с ошибкой четвертого порядка малости относительно величин  $u_i$  и  $v_i$ . Указанный факт позволяет упростить задачу отыскания полиномов  $z_i(t)$ .

Кватернионы  $\mathbf{q}_c^{-1} \circ \mathbf{q}_n$  зададим параметрами Родрига  $z_i^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) и представим формулу (1) в виде

$$\Phi \approx 4 \sum_{i=1}^3 \Phi_i, \quad \Phi_i = \sum_{n=1}^N [z_i^{(n)} - z_i(t)]^2.$$

Минимизация правой части последней формулы для  $\Phi$  по коэффициентам полиномов  $z_i(t)$  сводится к независимой минимизации выражений  $\Phi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Получаем три независимых линейных задачи наименьших квадратов, способ

решения которых хорошо известен [2, 3]. Если построенные полиномы  $z_i(t)$  обеспечивают приемлемую точность аппроксимации величин  $z_i^{(n)}$ , то кватернионная функция  $\mathbf{q}_{sm}(t)$  будет искомой аппроксимацией введенной в п.1 функции  $\mathbf{q}_*(t)$ .

Если функция  $\mathbf{q}_{sm}(t)$  выражена через параметры Родрига  $z_i(t)$ , то угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}_{sm}(t)$  также можно выразить через эти параметры. Введем вектор  $\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ . Тогда [1]

$$\boldsymbol{\omega}_{sm} = \frac{4}{(1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^2} \left[ (1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \frac{d\mathbf{z}}{dt} - 2 \left( \mathbf{z} \times \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) + 2 \left( \mathbf{z} \cdot \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right) \mathbf{z} \right].$$

Компоненты вектора  $\mathbf{z}$  и определяемого последней формулой вектора  $\boldsymbol{\omega}_{sm} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  относятся к связанной с КА системе координат, ориентация которой задается кватернионом  $\mathbf{q}$ .

**3. Исследование аппроксимирующих полиномов.** Хотя объем данных, полученных в ходе астрокоррекции достаточно велик ( $N \geq 100$ ), величина  $t_N - t_1$  не должна быть слишком большой, иначе применяемая модель потеряет свою адекватность по геометрическим причинам. При больших значениях  $t_N - t_1$  для сглаживания данных измерений  $(t_n, z_i^{(n)})$  следует использовать полиномы степени выше двух или другие функции.

Плавность движения и сравнительно большое число измерений позволяет выявить и исключить из обработки грубые выбросы. С этой целью полиномы  $z_i(t)$  строятся в два этапа. На первом этапе полиномы строятся по всем измерениям. Затем вычисляются медианы  $m_i$  модулей остатков  $\left| z_i^{(n)} - z_i(t_n) \right|$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Если ошибки в измерениях  $z_i^{(n)}$  имеют нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением  $\sigma_i$ , то для последней величины имеет место оценка  $\sigma_i = 1.48m_i$ . Из обработки исключаются измерения, отвечающие моментам  $t_n$ , для которых хотя бы при одном  $i$  выполнено неравенство  $\left| z_i^{(n)} - z_i(t_n) \right| > 3m_i$ . Затем построение полиномов  $z_i(t)$  повторяется.

Вместе с каждым полиномом  $z_i(t)$  строится и функция  $D_i(t)$ , представляющая собой стандартное отклонение значения этого полинома в точке  $t$ . Имеют место формулы (см. Приложение)

$$D_i(t) = f_2(t) \sigma_i^{(2)}, \quad \sigma_i^{(2)} = \sqrt{\frac{\Phi_{i, \min}^{(2)}}{N - 3}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь  $\Phi_{i,\min}^{(2)}$  – минимум введенного выше выражения  $\Phi_i$  (он достигается на коэффициентах полинома  $z_i(t)$ ),  $\sigma_i^{(2)}$  – оценка стандартного отклонения ошибок в величинах  $z_i^{(n)}$ , функция  $f_2(t)$  одинакова для всех  $z_i(t)$  и зависит только от точек  $t_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ), индексы 2 означают, что аппроксимация выполняется полиномами второй степени. В случае  $t_n=3(n-1)$  и  $N=101$  график функции  $f_2(t)$  приведен в верхней части рис. 1. В данном примере функция  $f_2(t)$  имеет два одинаковых минимума. Они достигаются в точках  $t \approx 82$ ,  $t \approx 217$ , и в них  $f_2 \approx 0.134$ . При пропуске или исключении некоторых точек  $t_n$  минимумы  $f_2$  несколько меняются (в этом случае в формулах (2)  $N$  должно быть равно числу фактически включенных в обработку точек). В варианте Б задачи астрокоррекции в качестве точек  $t_a$  и  $t_b$  целесообразно взять точки двух указанных минимумов функции  $f_2(t)$ . В варианте А на роль точки  $t_a$  может претендовать точка абсолютного минимума функции  $f_2(t)$  на отрезке  $[t_1, t_N]$ . Однако окончательный выбор этой точки следует сделать после исследования точности оценки угловой скорости КА.

Для сравнения рассмотрим функции  $D_i(t)$  в случае, когда аппроксимация данных измерений  $(t_n, z_i^{(n)})$  выполняется полиномами первой степени. В этом случае функции (2) следует заменить функциями

$$D_i(t) = f_1(t) \sigma_i^{(1)}, \quad \sigma_i^{(1)} = \sqrt{\frac{\Phi_{i,\min}^{(1)}}{N-2}} \quad (i=1, 2, 3). \quad (3)$$

где  $\Phi_{i,\min}^{(1)}$  – минимум выражения  $\Phi_i$ , достигаемого на коэффициентах полинома  $z_i(t)$  первой степени,  $\sigma_i^{(1)}$  – оценка стандартного отклонения ошибок аппроксимации этим полиномом данных измерений, функция  $f_1(t)$  одинакова для всех  $z_i(t)$  и зависит только от точек  $t_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). В случае  $t_n=3(n-1)$  и  $N=101$  график этой функции приведен в средней части рис. 1. Функция  $f_1(t)$  имеет единственный минимум на отрезке  $[0, 300]$ , который достигается в его средней точке и равен 0.1.

Примеры обработки описанным способом данных измерений, полученных в режиме астрокоррекции, приведены на рис. 2, 3. Используемые здесь и последующих примерах данные получены на специальном моделирующем стенде. Во всех примерах связанная с КА система координат совпадает с собственной системой координат датчика, ось 3 этой системы параллельна оси объектива. В левых частях рис. 2, 3 маркерами указаны данные измерений  $(t_n, z_i^{(n)})$ , сплошными линиями изображены графики аппроксимирующих квадратичных полиномов  $z_i(t)$ . В правых частях рисунков приведены графики ос-

татков  $z_i^{(n)} - z_i(t_n)$ . Эти графики представляют собой ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки  $(t_n, z_i^{(n)} - z_i(t_n))$ . Точки отмечены маркерами, а соединяющие их звенья изображены для наглядности – механического смысла они не имеют. В правых частях рисунков приведены также графики функций (ср. (2))  $\pm D_i(t)$ . Эти графики характеризуют точность описания движения КА в режиме астрокоррекции полиномами  $z_i(t)$ . Рис. 2 иллюстрирует случай, когда сеанс накопления измерений для астрокоррекции продолжался 300с, рис. 3 отвечает сеансу накопления измерений продолжительностью 600с. При этом движение на рис. 2 представляет собой начальный отрезок движения на рис. 3. В подписях к рисункам приведены характеристики точности аппроксимации данных измерений в этих сеансах, моменты  $t_a$  и  $t_b$ , которые предлагается использовать для решения варианта Б рассматриваемой задачи, и характеристики точности определения ориентации КА в указанные моменты.

Графики остатков на рис. 3 показывают, систематическую ошибку в аппроксимации данных  $z_2^{(n)}$  полиномом  $z_2(t)$ . Судя по остаткам  $z_2^{(n)} - z_2(t_n)$  эта систематическая ошибка может быть представлена полиномом третьей степени. Следовательно, полиномы второй степени не обеспечивают нужной точности аппроксимации данных измерений на продолжительном интервале времени. Указанный недостаток можно устранить, выбрав более адекватный способ описания движения, например, взяв полиномы третьей или более высокой степени. Ниже предлагается более радикальный и содержательный способ повышения точности аппроксимации данных измерений. Реализацию этого способа будем рассматривать как третий этап трехэтапного алгоритма обработки данных измерений, два первых этапа которого были описаны выше.

**4. Модель эйлерова разворота.** Анализ графиков функций  $z_i(t)$  на рис. 2, 3 показывает, что в рассматриваемом движении КА совершал эйлеров разворот с постоянной угловой скоростью вокруг оси, близкой оси 2 связанной системы координат. Такое движение описывается соотношениями

$$z_i = e_i \tan \frac{\alpha}{4} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \alpha = a + b(t - t_1), \quad (4)$$

где  $e_i$ ,  $a$  и  $b$  – постоянные параметры,  $e_i$  – компоненты орта оси разворота в связанной системе координат,

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (5)$$

Попытаемся сгладить данные измерений  $(t_n, z_i^{(n)})$  соотношениями (4). Для отыскания неизвестных параметров  $e_i$ ,  $a$  и  $b$  воспользуемся методом наименьших квадратов. Составим выражение

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 w_i \Phi_i, \quad (6)$$

в котором используемые при расчете  $\Phi_i$  функции  $z_i(t)$  определены соотношениями (4), а веса  $w_i$  имеют вид

$$w_i = [\sigma_i^{(2)}]^{-2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

где величины  $\sigma_i^{(2)}$  рассчитываются по формулам (2) для аппроксимации, найденной на втором этапе рассматриваемого алгоритма. В качестве оценки параметров  $e_i$ ,  $a$  и  $b$  принимаются их значения, доставляющие минимум  $\Psi$  при условии (5). Чтобы учесть это условие параметризуем компоненты орта оси разворота формулами

$$e_1 = \frac{2u_1}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad e_2 = \frac{1 - u_1^2 - u_2^2}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad e_3 = \frac{2u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2}$$

и будем искать минимум функции (6) по параметрам  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $a$  и  $b$ .

Точность описания движения КА соотношениями (5) будем характеризовать соответствующими стандартными отклонениями, рассчитываемыми в рамках метода наименьших квадратов. В частности, вычислим стандартные отклонения  $D_i(t)$  величин  $z_i(t)$  и рассмотрим функцию

$$D(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 w_i D_i^2(t)}. \quad (7)$$

Ее можно представить в виде

$$D(t) = \sigma \chi(t), \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Psi_{\min}}{N - 4}}.$$

где  $\Psi_{\min}$  – минимум выражения (6), а функция  $\chi(t)$  зависит только от точек  $t_n$ , весов  $w_i$  и параметров  $e_i$ ,  $a$  и  $b$  (см. Приложение). В случае неизменных разностей  $t_{n+1} - t_n$  график функции  $\chi(t)$  похож на график функции  $f_1(t)$  в (3), точка минимума  $\chi(t)$  единственна и лежит на середине отрезка  $[t_1, t_N]$ . В силу этого свойства модель эйлера разворота весьма удобна для решения варианта А задачи астрокоррекции. В качестве  $t_a$  берется точка минимума функции  $\chi(t)$ , оценка угловой скорости в рамках этой модели от выбора точки  $t_a$  не зависит. Для  $t_n = 3(n-1)$  и  $N = 101$  график функции  $\chi(t)$  приведен в нижней части рис. 1. Веса  $w_i$  и параметры  $e_i$ ,  $a$  и  $b$  здесь взяты из примера на рис. 4.

Этот рисунок и рис. 5 иллюстрируют результаты третьего этапа обработки данных измерений, полученных в режиме астрокоррекции. Рисунки устроены аналогично рис. 2, 3 и относятся к тем же отрезкам данных. В подписях к рисункам указаны характеристики точности аппроксимации данных, момент  $t_a$ , реализующий решение варианта А рассматриваемой задачи, и характеристики точности определения движения КА в момент  $t_a$ : стандартные отклоне-

ния  $D_i(t_a)$  и  $D'_i(t_a)$  величин  $z_i(t_a)$  и  $\omega_i(t_a)$ . Приведенные здесь величины  $\sigma_i$  определены формулами (2) (верхний индекс 2 отброшен), в которых  $\Phi_{i,\min}$  – значения выражений  $\Phi_i$  в точке минимума  $\Psi$ , причем используемые при расчете  $\Phi_i$  функции  $z_i(t)$  определены соотношениями (4). Судя по полученным результатам, точность определения величин  $z_i(t_a)$  на третьем этапе повысилась, причем точность определения  $z_1(t_a)$  и  $z_3(t_a)$  повысилась существенно.

Перейдем к оценке угловой скорости КА. В движении, описываемом формулами (4), компоненты вектора  $\omega_{sm}$  имеют вид

$$\omega_i = e_i \frac{d\alpha}{dt} = be_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Выписанные соотношения дают для примера на рис. 4 значения

$$b = 242.416(0.015), \\ \omega_1 = -0.659(0.011), \quad \omega_2 = 242.414(0.0090), \quad \omega_3 = 0.554(0.18).$$

Здесь и ниже угловая скорость измеряется в "/с, в скобках указаны стандартные отклонения. Для примера на рис. 6 получаем

$$b = 242.390(0.015), \\ \omega_1 = -0.675(0.0045), \quad \omega_2 = 242.389(0.010), \quad \omega_3 = 0.323(0.049).$$

Модель эйлера разворота удачно приспособлена для решения варианта А задачи астрокоррекции. Чтобы в рамках этой модели получить решение варианта Б, следует имеющийся отрезок данных разбить на две примерно равные части и обработать каждую часть по отдельности. Полученные для таких частей оптимальные точки можно использовать в качестве точек  $t_a$  и  $t_b$ . Можно показать, что при  $2|t_b - t_a| > t_N - t_1$  такой подход точнее, чем совместная обработка всей совокупности данных с последующим выбором оптимальных точек. Стандартные отклонения параметров  $z_i$  в оптимальных точках при этом увеличатся не более чем на 30%.

Перейдем к оценкам угловой скорости, которые удастся получить на втором этапе обработки данных, и исследуем возможность решения на этом этапе варианта А задачи астрокоррекции. Оценки угловой скорости второго этапа зависят от времени, и желание получить наиболее точную оценку по существу определяет выбор точки  $t_a$ . Графики компонент угловой скорости в рассмотренных выше движениях КА приведены на рис. 6, 7. В левых частях этих рисунков в каждой системе координат приведены по два графика. Один из них представляет собой горизонтальную прямую (на обоих рисунках в верхней системе координат эта прямая совпадает с осью абсцисс) и описывает соответствующую компоненту угловой скорости в эйлеровом развороте. Другой график описывает оценку той же компоненты угловой скорости, полученную на втором этапе.

Графики в правых частях рис. 6, 7 характеризуют точность оценок второго этапа. Здесь в каждой системе координат приведены по три кривые. Это – графики функций  $\omega_i(t)$  и  $\omega_i(t) \pm D'_i(t)$ , где  $D'_i(t)$  – стандартное отклонение оценки  $\omega_i(t)$ . Расчет стандартных отклонений  $D'_i$  основан на приближенных формулах  $\omega_i \approx 4dz_i/dt$ , которые в данном случае в силу неравенства  $|\mathbf{z}| \ll 1$  оказались приемлемыми. Функции  $D'_i(t)$  представляют собой увеличенные вчетверо стандартные отклонения производных  $dz_i/dt$ . Последние определяются формулами (2), в которых функцию  $f_2(t)$  следует заменить функцией  $f'_2(t)$  (см. Приложение), похожей своими свойствами на функцию  $f_1(t)$  в (3). На отрезке  $[t_1, t_N]$  существует единственная точка, в которой все три стандартных отклонения минимальны. В случае неизменных разностей  $t_{n+1} - t_n$  эта точка совпадает с серединой отрезка.

Приведем числовые результаты. Для движения на рис. 2 в точке  $t_a = 5650$  с (94с от начала отрезка) имеем

$$\omega_1 = -0.639(0.22), \quad \omega_2 = 242.443(0.19), \quad \omega_3 = 1.341(3.7);$$

в точке  $t_b = 5779$  с (223с от начала отрезка) имеем

$$\omega_1 = -0.590(0.22), \quad \omega_2 = 242.388(0.19), \quad \omega_3 = -0.234(3.7).$$

В точке  $t = 5714$  с (158с от начала отрезка), доставляющей минимум стандартным отклонениям  $D'_i(t)$ , получаем

$$\omega_1 = -0.576(0.16), \quad \omega_2 = 242.448(0.13), \quad \omega_3 = -1.177(2.6).$$

Для движения на рис. 3 в точках  $t_a = 5747$  с (170с от начала отрезка) и  $t_b = 5982$  с (405с от начала отрезка) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -0.675(0.17), \quad \omega_2 = 242.469(0.38), \quad \omega_3 = 0.496(1.8); \\ \omega_1 &= -0.643(0.17), \quad \omega_2 = 242.379(0.39), \quad \omega_3 = 0.146(1.8). \end{aligned}$$

В точке  $t = 5862$  с (285с от начала отрезка), в которой достигается минимум стандартных отклонений  $D'_i(t)$ , имеем

$$\omega_1 = -0.629(0.12), \quad \omega_2 = 242.624(0.28), \quad \omega_3 = -0.089(1.3).$$

Как видим, надлежащим выбором точки  $t$  можно уменьшить значения  $D'_i(t)$  примерно на треть по сравнению со значениями  $D'_i(t_a)$  и  $D'_i(t_b)$ . При этом значения стандартных отклонения  $D_i(t)$  (см. верхний график на рис. 1) увеличатся примерно на 10%. Таким образом, точка минимума функции  $f'_2(t)$  подходит на роль точки  $t_a$  в решении варианта А задачи астрокоррекции на втором этапе обработки данных. Однако оценки компонент угловой скорости,

которые можно получить на втором этапе обработки данных измерений, существенно уступают по точности оценкам третьего этапа.

Существенное повышение точности определения движения при переходе к модели эйлера разворота можно объяснить двумя обстоятельствами. Во-первых, эта модель оказалась адекватной. Обработываемое движение КА действительно представляло собой эйлеров разворот, что обеспечило малые ошибки аппроксимации данных измерений. Во-вторых, эта модель является более "жесткой", чем модель с полиномами второй степени. Модель эйлера разворота содержит 4 независимых параметра, тогда как полиномиальная модель – 9 таких параметров. В результате матрица системы нормальных уравнений в первом случае получается лучше обусловленной, а вычисляемые по обратной к ней матрице стандартные отклонения – меньше.

Уместно поставить вопрос, можно ли на практике достаточно точно реализовать эйлеров разворот КА? С учетом динамики твердого тела этот вопрос можно переформулировать так. Можно ли достаточно точно реализовать закрутку КА вокруг одной из его главных центральных осей инерции? Поскольку продолжительность сеанса измерений в режиме астрокоррекции составляет около 5 мин, основные погрешности в реализации такой закрутки будут обусловлены выставкой ее начальных условий.

**5. Заключение.** Прежде, чем сформулировать основные результаты проведенного исследования, сделаем одно замечание относительно полученных оценок точности. Выше ошибки определения ориентации КА характеризовались в терминах стандартных отклонений параметров Родрига. Окончательные характеристики таких ошибок выразим в более естественных и привычных терминах углов малых поворотов КА относительно связанной с ним системы координат. Здесь существует простая связь (см. Приложение): стандартные отклонения указанных углов получаются из стандартных отклонений параметров Родрига умножением на 4. Но моделирующий стенд генерирует измерения датчика с ошибкой, которая в 2 – 4 раза превышает реальные ошибки прибора. По этой причине в приводимых ниже выводах коэффициент перехода от ошибок в параметрах Родрига к ошибкам в углах принят равным 2, и ошибки в определении угловой скорости уменьшены в 2 раза. Все указываемые ошибки это – соответствующие стандартные отклонения ( $1\sigma$ ). Напомним, связанная система координат совпадает с собственной системой координат датчика. Переходим к изложению основных результатов.

1. Статистическая обработка данных измерений звездного датчика, использующая модель вращательного движения КА позволяет повысить точность определения этого движения. Повышение точности обусловлено тем обстоятельством, что модель позволяет провести совместную обработку большого числа измерений, выполненных в разные моменты времени. Чем точнее модель и чем больший отрезок данных она способна охватить, тем точнее будет определяться движение КА.

2. При использовании модели эйлера разворота с постоянной угловой скоростью для обработки данных измерений в задаче астрокоррекции погреш-

ность определения ориентации КА в оптимальной точке отрезка данных, охватывающего 300с, не превосходит 0.4" по каждому из углов поворота КА вокруг осей связанной системы координат. Указанная максимальная ошибка реализуется на угле поворота вокруг оси эйлера разворота. Ошибки в углах поворота вокруг перпендикулярных ей осей не превосходят 0.03". Ошибки определения компонент угловой скорости КА в связанной системе координат не превосходят 0.1"/с. При этом ошибки в определении модуля угловой скорости составляют менее 0.01"/с.

3. При обработке тех же данных с помощью полиномиальной модели (описывает произвольное движение КА) погрешность определения ориентации по углу поворота вокруг оси объектива датчика составляет 10", по углам поворотов вокруг перпендикулярных осей – 0.6". Эти величины также относятся к соответствующей оптимальной точке. Погрешность определения угловой скорости КА вокруг оси объектива датчика составляет менее 2"/с, вокруг перпендикулярных ей осей – не более 0.1"/с.

### Приложение. Оценки точности определения вращательного движения КА в режиме астрокоррекции

Начнем с оценки точности сглаженных значений параметров Родрига  $z_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ). Полиномы  $z_i(t) = a_i + b_i(t - t_1) + c_i(t - t_1)^2$  строятся методом наименьших квадратов по данным измерений  $(t_n, z_i^{(n)})$ ,  $n=1, 2, \dots, N$ . Соответствующие системы нормальных уравнений имеют общую матрицу

$$A = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix},$$

$$s_m = \sum_{n=1}^N (t_n - t_1)^m \quad (m=1, 2, 3, 4)$$

и отличаются только правыми частями. Обозначим

$$B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^3 = A^{-1}, \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

Ковариационные матрицы векторов коэффициентов  $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)^T$  рассчитываются по формулам (ср. (3))

$$K_{\xi,i} = [\sigma_i^{(2)}]^2 B, \quad [\sigma_i^{(2)}]^2 = \frac{1}{N-3} \sum_{n=1}^N [z_i^{(n)} - z_i(t_n)]^2$$

Здесь  $z_i(t)$  – полином, коэффициенты которого найдены методом наименьших квадратов.

В рамках теоретико-вероятностной интерпретации метода наименьших квадратов величина  $z_i(t)$  при фиксированном  $t$  является случайной, поскольку случайными величинами являются коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  и  $c_i$ . Стандартное отклонение этой случайной величины имеет вид (2), где положительная функция  $f_2(t)$  определена формулой

$$\begin{aligned} f_2^2(t) &= \left(1, t - t_1, (t - t_1)^2\right) B \left(1, t - t_1, (t - t_1)^2\right)^T = \\ &= b_{11} + 2b_{12}(t - t_1) + (2b_{13} + b_{22})(t - t_1)^2 + 2b_{13}(t - t_1)^3 + b_{33}(t - t_1)^4. \end{aligned}$$

Функция  $f_2(t)$  одинакова для всех  $z_i(t)$ . Ее график при специальном выборе точек  $t_n$  приведен в верхней части рис. 1.

Стандартные отклонения величин  $dz_i(t)/dt$ , используемые при оценке точности компонент угловой скорости КА, определяются формулами вида (2), где функция  $f_2(t)$  заменяется положительной функцией  $f_2'(t)$ ,

$$[f_2'(t)]^2 = \left(0, 1, 2(t - t_1)\right) B \left(0, 1, 2(t - t_1)\right)^T = b_{22} + 4b_{23}(t - t_1) + 4b_{33}(t - t_1)^2.$$

Если те же данные измерений аппроксимировать полиномами первой степени  $z_i(t) = a_i + b_i(t - t_1)$ , то в рамках метода наименьших квадратов получим системы нормальных уравнений с общей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},$$

Положим

$$B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^2 = A^{-1}, \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

Ковариационные матрицы векторов коэффициентов  $\xi_i = (a_i, b_i)^T$  рассчитываются по формулам

$$K_{\xi,i} = [\sigma_i^{(1)}]^2 B, \quad [\sigma_i^{(1)}]^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{n=1}^N [z_i^{(n)} - z_i(t_n)]^2.$$

Здесь  $z_i(t)$  – полином первой степени, коэффициенты которого найдены методом наименьших квадратов.

При фиксированном  $t$  стандартное отклонение случайных величин  $z_i(t)$  имеют вид (3), где положительная функция  $f_1(t)$  определена формулой

$$f_1^2(t) = \left(1, t - t_1\right) B \left(1, t - t_1\right)^T = b_{11} + 2b_{12}(t - t_1) + b_{22}(t - t_1)^2.$$

Функция  $f_1(t)$  одинакова для всех  $z_i(t)$ . Ее график при специальном выборе точек  $t_n$  приведен в нижней части рис. 1. Вид функции  $f_1(t)$  совпадает с видом введенной выше функции  $f_2'(t)$ .

Теперь опишем получение оценок точности сглаженных значений параметров  $z_i(t)$  ( $i=1, 2, 3$ ) в рамках модели эйлера разворота. Функции (4) обозначим  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(t, p)$ , где  $p = (a, b, u_1, u_2)^T$ . Функционал (6) обозначим  $\Psi(p)$ . В рамках метода наименьших квадратов оценкой векторного параметра  $p$  служит  $p_* = \arg \min \Psi(p)$ . Минимизация функции  $\Psi(p)$  выполнялась методом Гаусса-Ньютона. Матрицу соответствующей системы нормальных уравнений в точке  $p_*$  обозначим  $A$ . Это – симметричная положительно определенная матрица порядка 4, причем  $2A \approx \partial^2 \Psi(p_*) / \partial p^2$ . В рамках обычных допущений метода наименьших квадратов  $p_*$  – случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению  $p$  и ковариационной матрицей

$$K_p = \sigma^2 A^{-1}, \quad \sigma^2 = \frac{\Psi(p_*)}{3N - 4}.$$

При фиксированном  $t$  ковариационная матрица  $K_z(t)$  случайной величины  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(t, p_*)$  имеет вид

$$K_z(t) = \sigma^2 B(t), \quad B(t) = \frac{\partial \mathbf{h}(t, p_*)}{\partial p} A^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{h}(t, p_*)}{\partial p} \right]^T.$$

Функцию  $\chi(t)$  в формуле (8) можно представить в виде

$$\chi(t) = \sqrt{\text{tr} LB(t)}, \quad L = \text{diag}(w_1, w_2, w_3).$$

Квадрат правой части новой формулы для  $\chi(t)$  – распространенный критерий качества в теории планирования эксперимента [3]. Выбор матрицы  $L$  требует обоснования, но в рассматриваемом случае оно очевидно.

В матрице  $\partial \mathbf{h}(t, p_*) / \partial p$  только столбец  $\partial \mathbf{h}(t, p_*) / \partial b$  содержит множитель  $t - t_1$ . Элементы остальных столбцов содержат  $t - t_1$  под знаком каких-либо функций, которые ограничены при  $t \in [t_1, t_N]$ . По указанной причине функция  $\chi^2(t)$  ведет себя как квадратичная парабола, которая, как известно, имеет лишь один минимум, и график функции  $\chi(t)$  похож на график функции  $f_1(t)$  в (3) (ср. графики этих функций на рис. 1).

Выше ошибки определения ориентации КА характеризовались в терминах стандартных отклонений параметров Родрига. Более естественно выражать эти ошибки в терминах вектора бесконечно малого поворота КА

$\Delta\theta = (\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3)$ . С помощью этого вектора ошибки аппроксимации измеренных кватернионов можно в линейном приближении представить в виде

$$\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{sm}(t_n) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{sm}(t_n) \circ \Delta\theta_n.$$

Здесь  $\Delta\theta_n$  – векторы бесконечно малого поворота, соответствующие ошибкам ориентации. Ковариационную матрицу этих ошибок можно выразить через ошибки аппроксимации измеренных параметров Родрига.

Из формулы угловой скорости, приведенной в конце п. 2, следует

$$\Delta\theta = \frac{4}{(1 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{z})^2} [(1 - \mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \Delta\mathbf{z} - 2(\mathbf{z} \times \Delta\mathbf{z}) + 2(\mathbf{z} \cdot \Delta\mathbf{z})\mathbf{z}],$$

где  $\Delta\mathbf{z} = (\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3)$ . В рассматриваемых движениях  $|\Delta\mathbf{z}| \ll 1$ , и формулу для  $\Delta\theta$  можно упростить:  $\Delta\theta = 4\Delta\mathbf{z}$ . Отсюда следует, что случайные величины  $\Delta\theta_n$  имеют нулевое среднее значение и ковариационную матрицу  $K_{\Delta\theta}(t) = 16K_z(t)$ . Стандартное отклонение компоненты  $\Delta\theta_i$  в четыре раза больше стандартного отклонения соответствующего параметра  $z_i$ . Это соотношение можно считать очевидным, если вспомнить геометрический смысл параметров Родрига.

Поскольку на стенде, моделирующем измерения датчика, ошибки измерений получаются в 2 – 4 раза больше, чем в действительности, стандартные отклонения параметров  $z_i$  в приведенных выше примерах следует удвоить и считать стандартными отклонениями величин  $\Delta\theta_i$ .

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00467).

### Литература

1. Shuster M.D. A survey of attitude representation. The Journal of the Astronautical Sciences, 1993, vol. 41, No. 4, pp. 439-517.
2. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
3. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М., Наука, 1987.

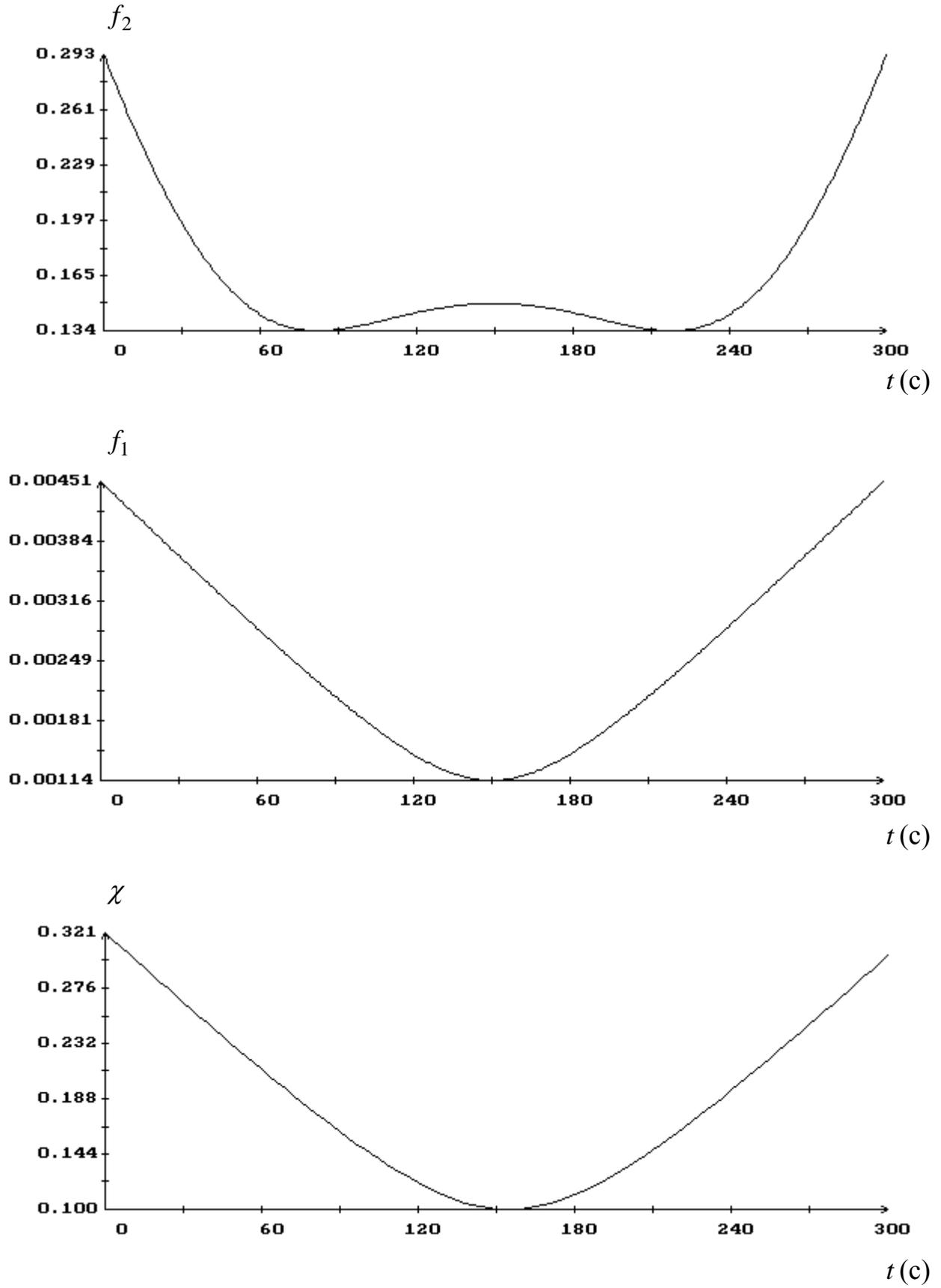


Рис. 1.

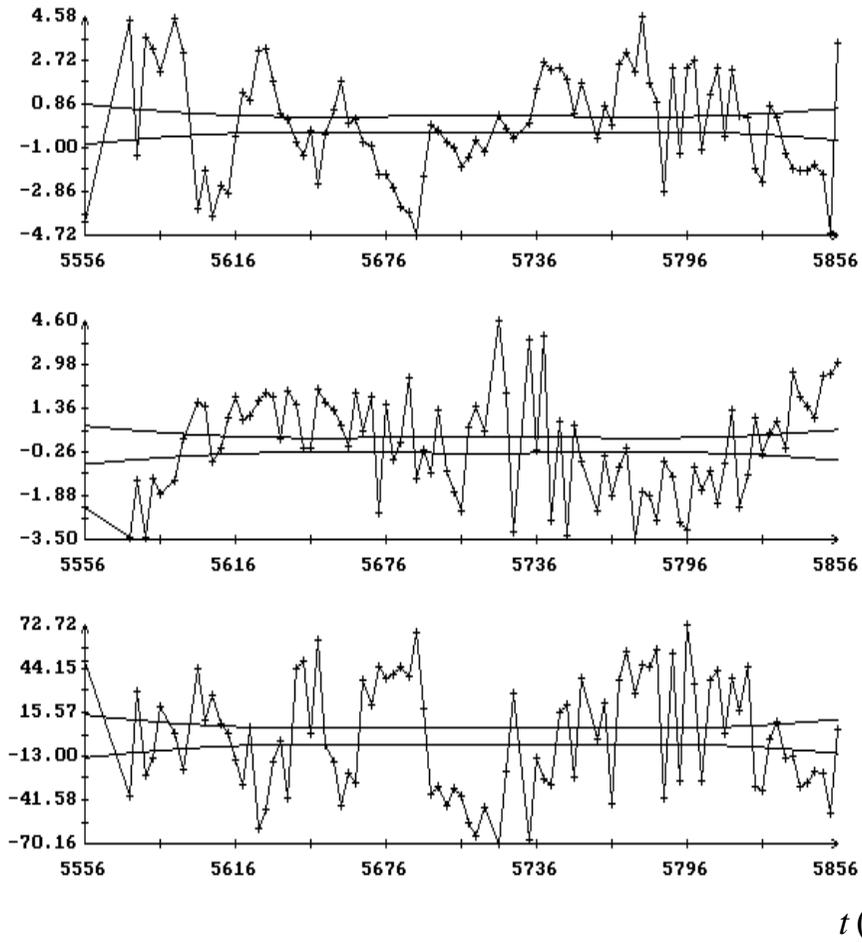
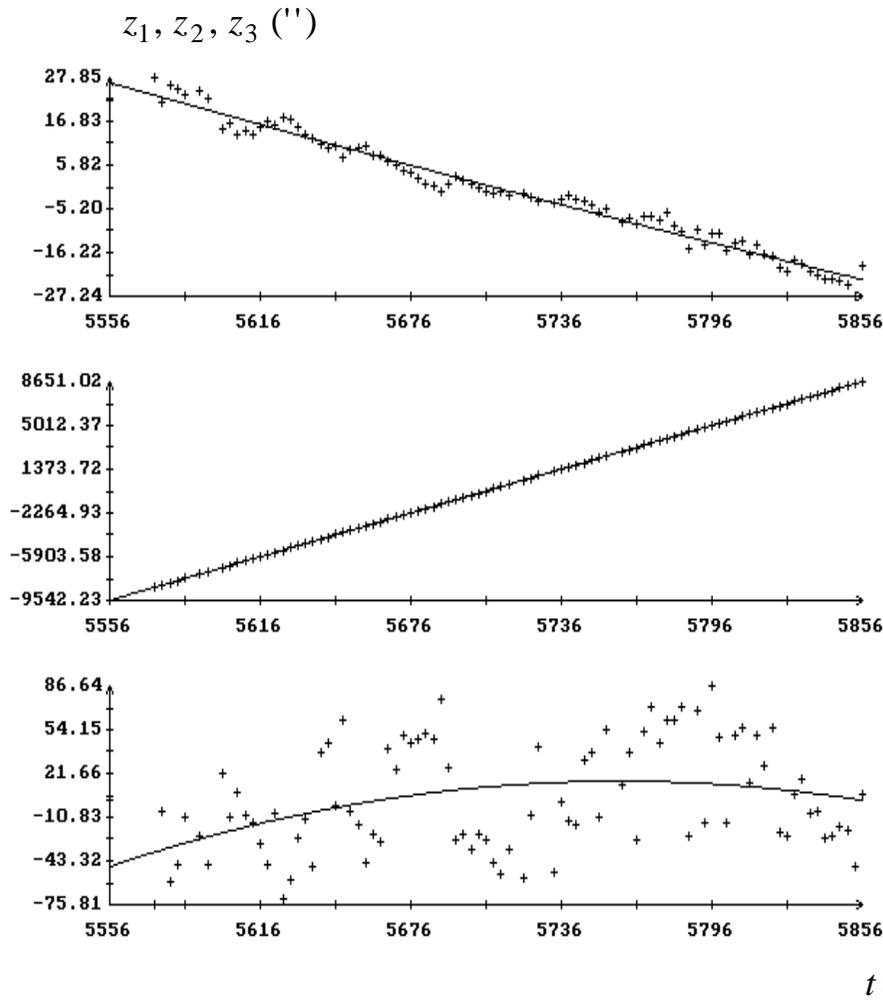
$\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3 (")$ 

Рис. 2. Обработка данных с помощью полиномиальной модели. Длина интервала – 300с, число точек на втором этапе  $N = 91$ , отвергнуто точек – 5, стандартные отклонения ошибок аппроксимации данных:  $\sigma_1^{(2)} = 2.3''$ ,  $\sigma_2^{(2)} = 1.9''$ ,  $\sigma_3^{(2)} = 37''$ ; оптимальные точки для варианта (Б):  $t_a = 5650c$  (94с),  $t_b = 5779c$  (223с), стандартные отклонения величин  $z_i(t_a)$  и  $z_i(t_b)$ :  $D_1(t_a) = 0.32''$ ,  $D_2(t_a) = 0.27''$ ,  $D_3(t_a) = 5.3''$ ,  $D_1(t_b) = 0.31''$ ,  $D_2(t_b) = 0.26''$ ,  $D_3(t_b) = 5.2''$ .

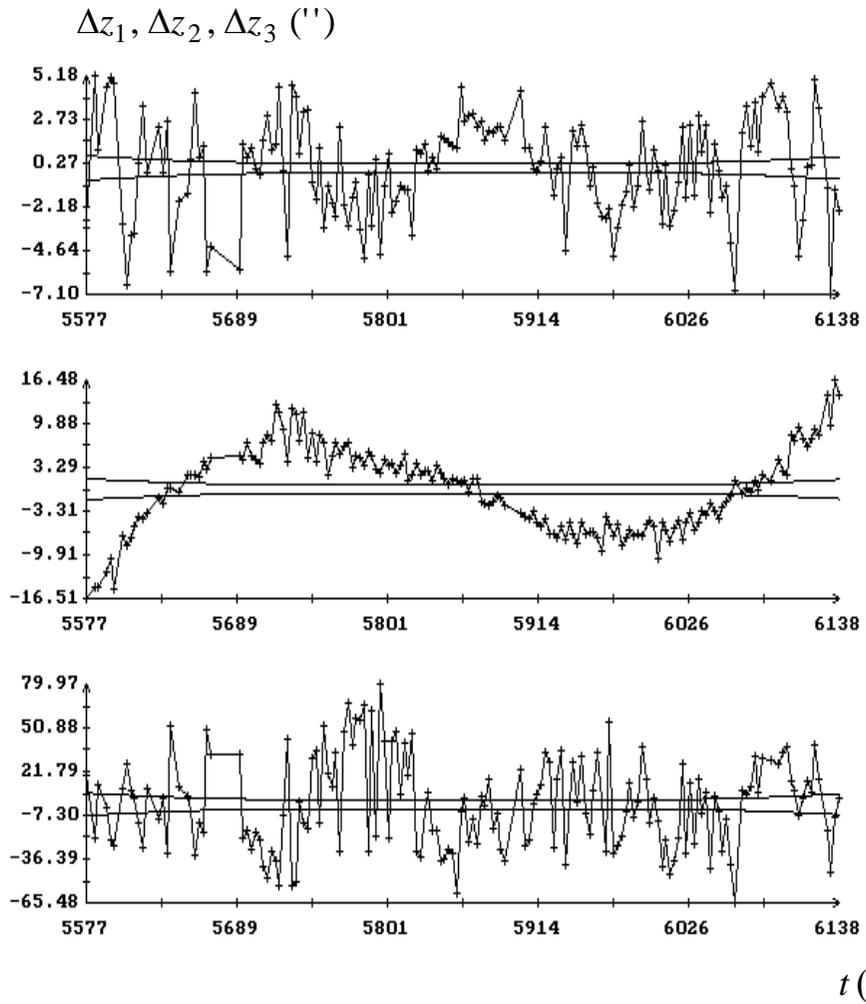
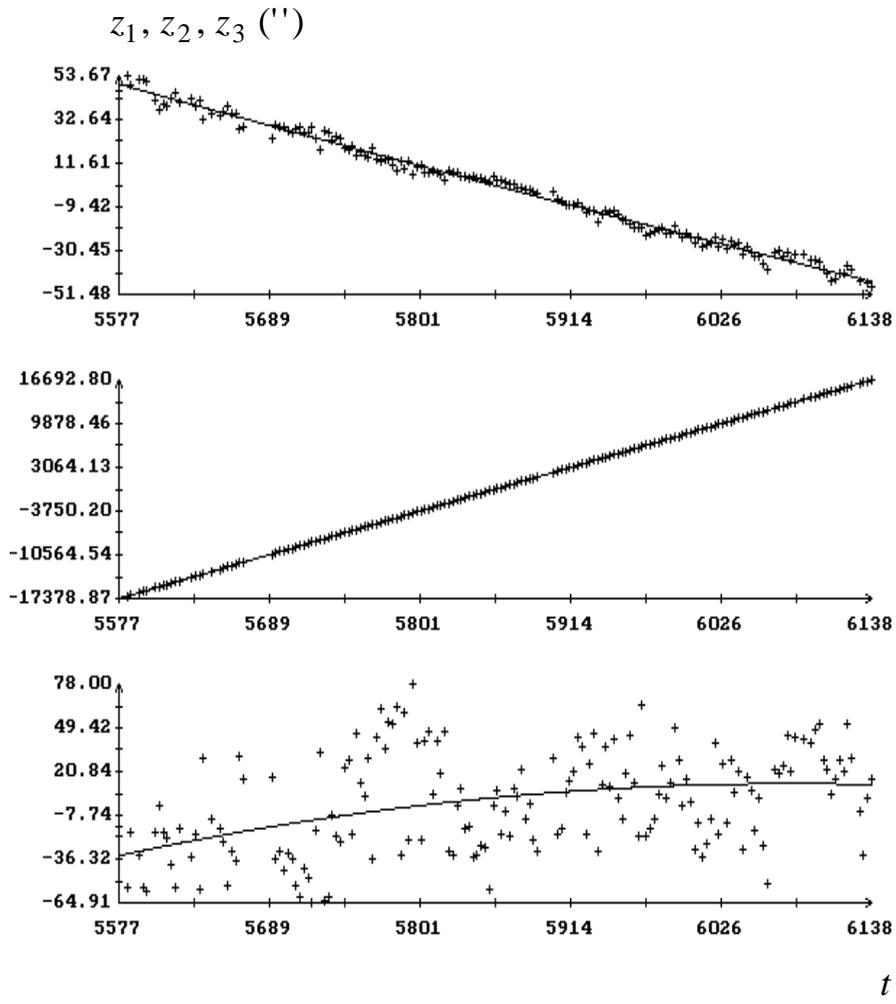


Рис. 3. Обработка данных с помощью полиномиальной модели. Длина интервала – 600 с, число точек на втором этапе  $N = 168$ , отвергнуто точек – 26, стандартные отклонения ошибок аппроксимации данных:  $\sigma_1^{(2)} = 2.8''$ ,  $\sigma_2^{(2)} = 6.3''$ ,  $\sigma_3^{(2)} = 30''$ ; оптимальные точки для варианта (Б):  $t_a = 5747$  с (170с),  $t_b = 5982$  с (405с), стандартные отклонения величин  $z_i(t_a)$  и  $z_i(t_b)$ :  $D_1(t_a) = 0.29''$ ,  $D_2(t_a) = 0.66''$ ,  $D_3(t_a) = 3.1''$ ,  $D_1(t_b) = 0.28''$ ,  $D_2(t_b) = 0.64''$ ,  $D_3(t_b) = 3.1''$

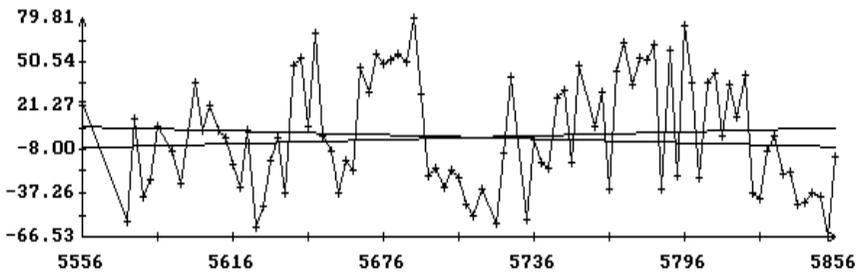
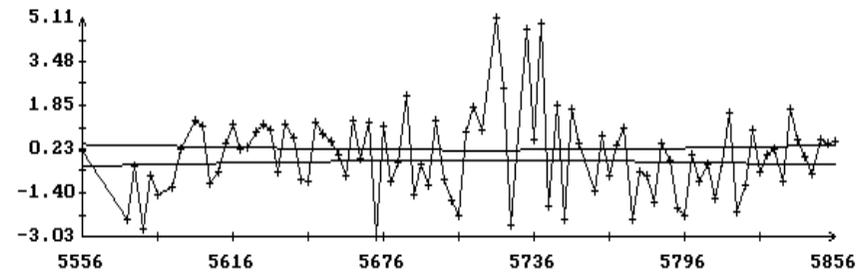
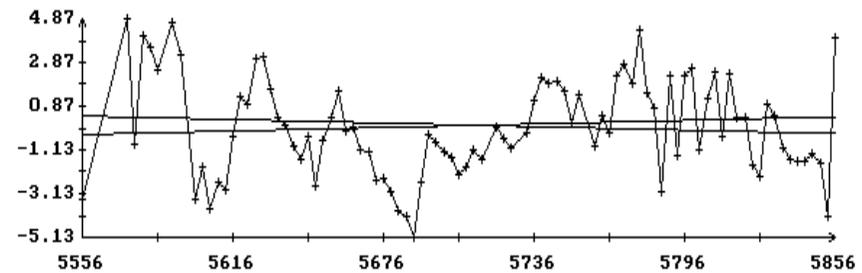
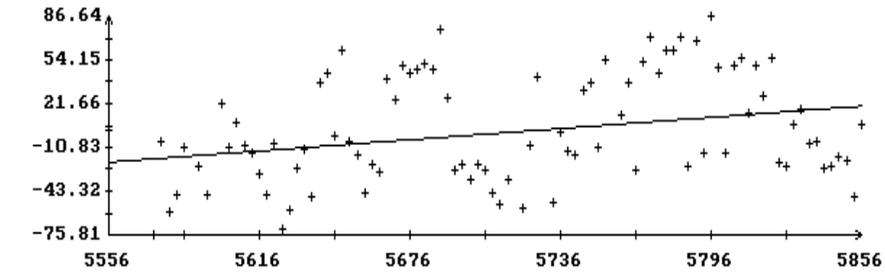
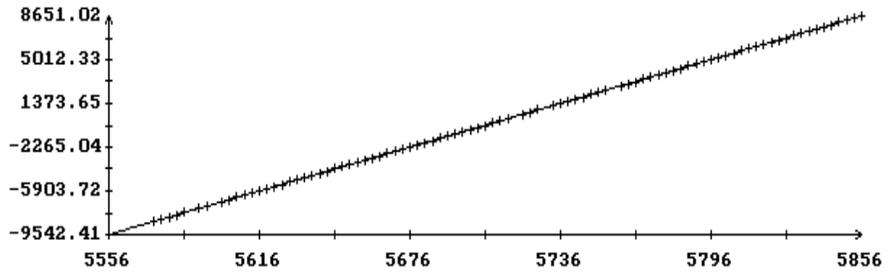
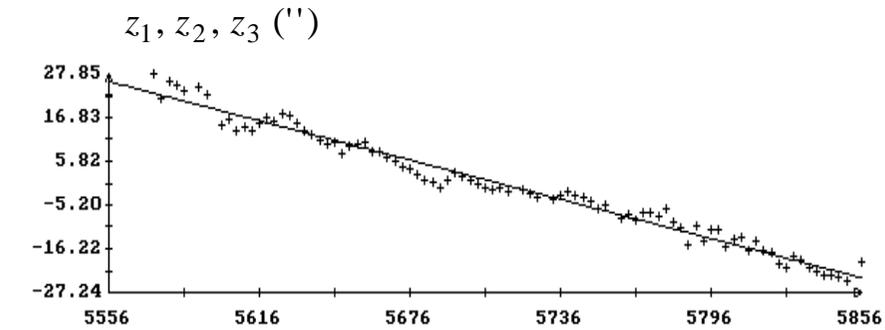
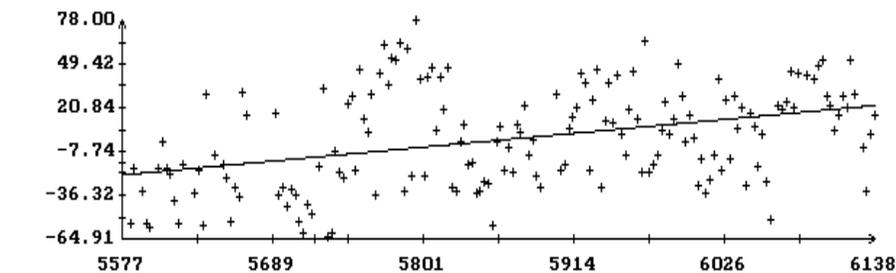
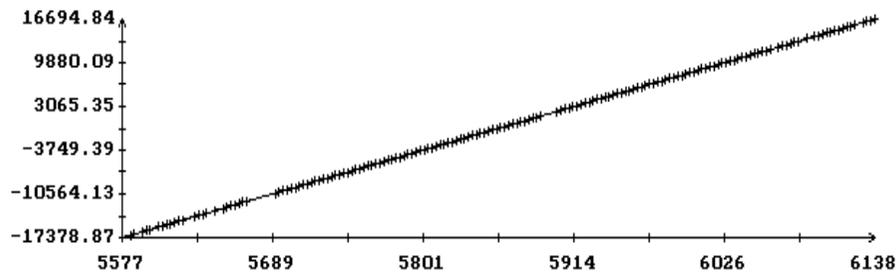
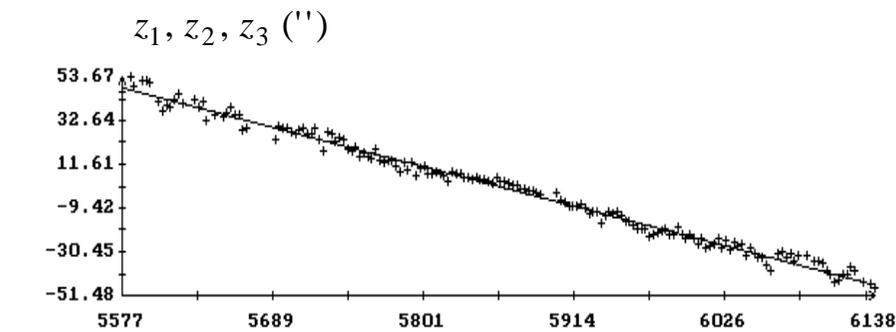
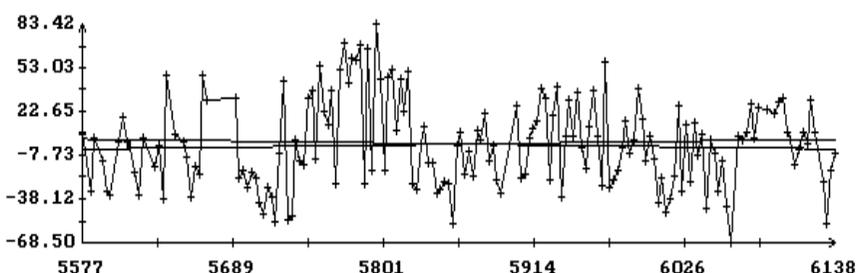
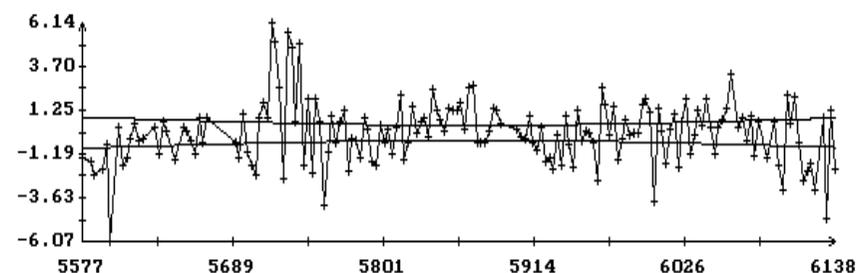
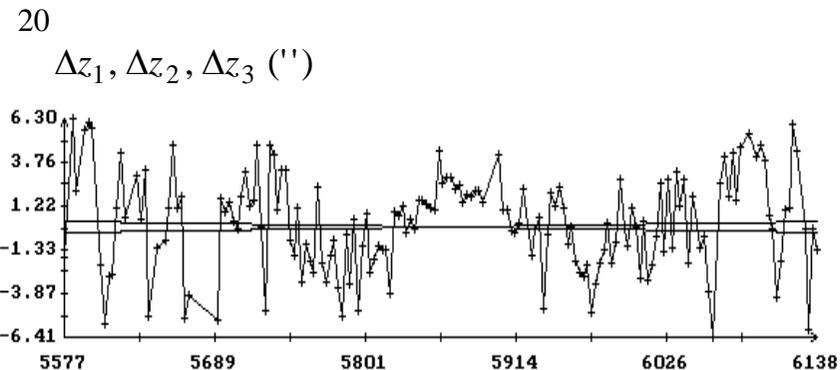
$\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3 (')$  $t (c)$  $t (c)$  $t (c)$ 

Рис. 4. Обработка данных с помощью модели эйлера разворота. Длина интервала – 300 с, число точек на втором этапе  $N = 91$ , отвергнуто точек – 5, стандартные отклонения ошибок аппроксимации данных:  $\sigma_1 = 2.3''$ ,  $\sigma_2 = 1.6''$ ,  $\sigma_3 = 39''$ ; оптимальная точка для варианта (А):  $t_a = 5714$  с (158с), стандартные отклонения величин  $z_i(t_a)$ :  $D_1(t_a) = 0.0018''$ ,  $D_2(t_a) = 0.19''$ ,  $D_3(t_a) = 0.029''$ , стандартные отклонения величин  $\omega_i(t_a)$ :  $D'_1(t_a) = 0.011''/c$ ,  $D'_2(t_a) = 0.009''/c$ ,  $D'_3(t_a) = 0.18''/c$ .

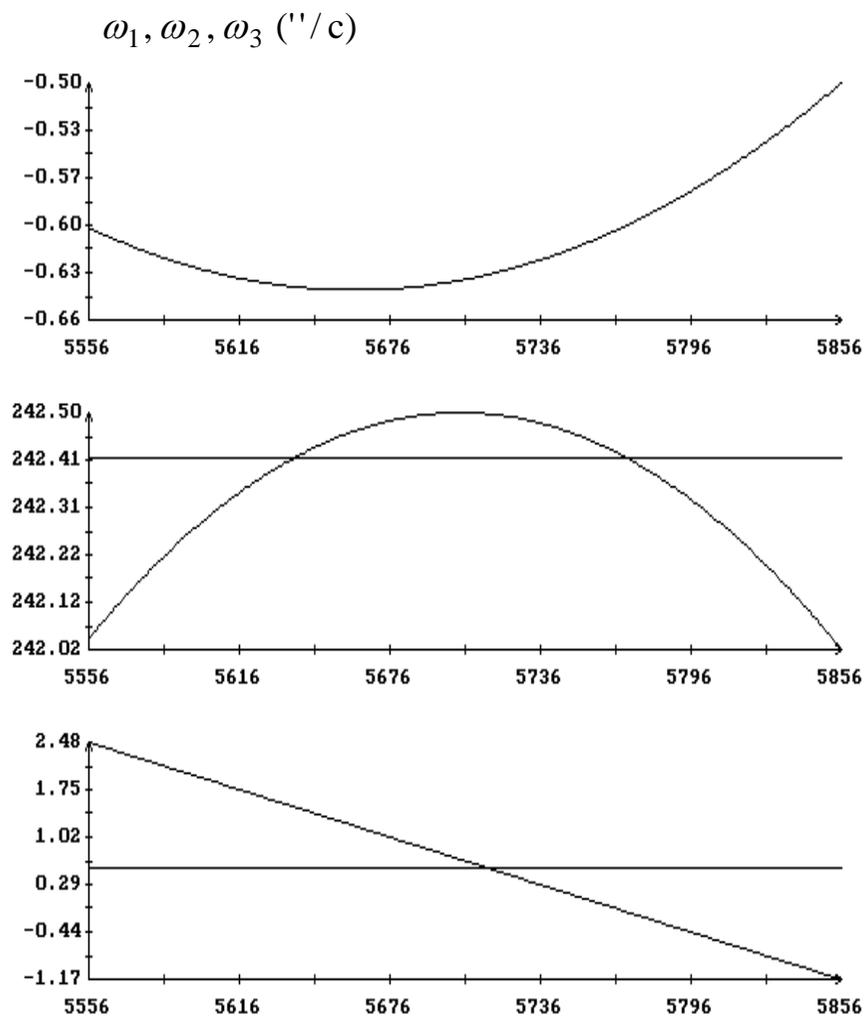


$t$  (с)

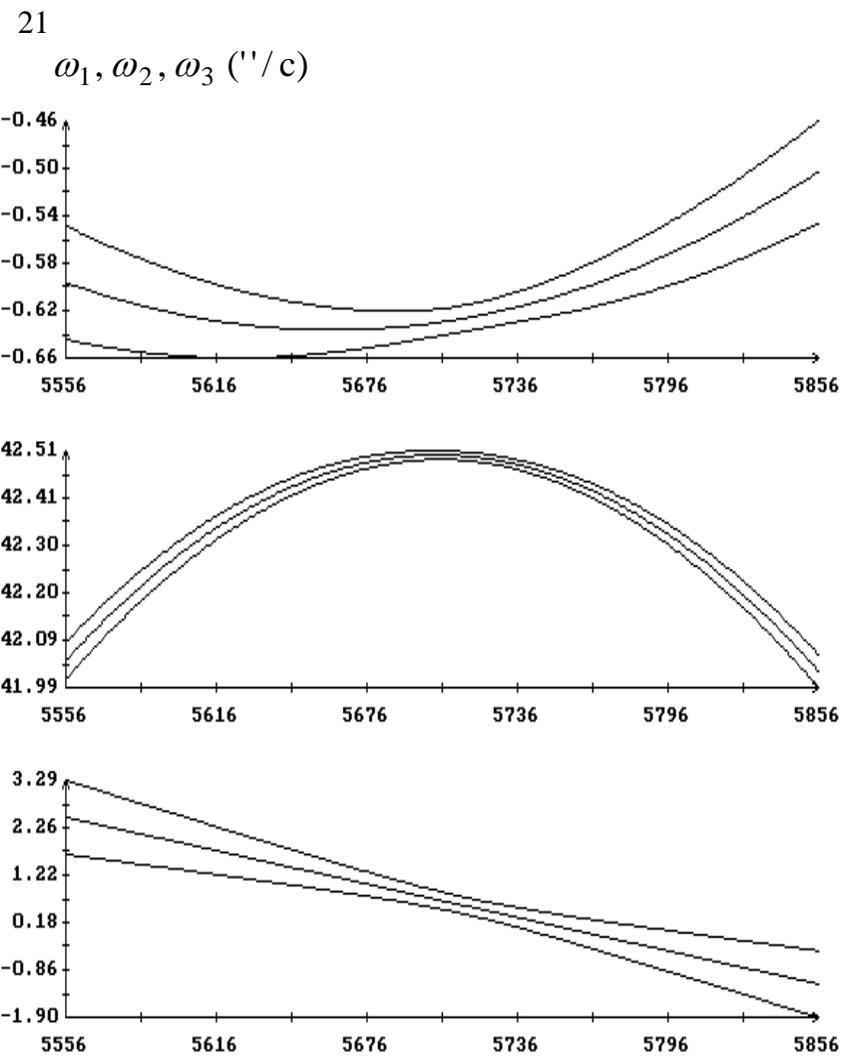


$t$  (с)

Рис. 5. Обработка данных с помощью модели эйлера разворота. Длина интервала – 600 с, число точек на втором этапе  $N = 168$ , отвергнуто точек – 26, стандартные отклонения ошибок аппроксимации данных:  $\sigma_1 = 2.8''$ ,  $\sigma_2 = 1.8''$ ,  $\sigma_3 = 30''$ ; оптимальная точка для варианта (А)  $t_a = 5865$  с (288с), стандартные отклонения величин  $z_i(t_a)$ :  $D_1(t_a) = 0.0024''$ ,  $D_2(t_a) = 0.41''$ ,  $D_3(t_a) = 0.024''$ , стандартные отклонения величин  $\omega_i(t_a)$ :  $D'_1(t_a) = 0.0045''/с$ ,  $D'_2(t_a) = 0.010''/с$ ,  $D'_3(t_a) = 0.049''/с$ .



$t$  (с)



$t$  (с)

Рис. 6. Обработка данных в задаче А. Оценки угловой скорости в движении, представленном на рис. 2, 4.

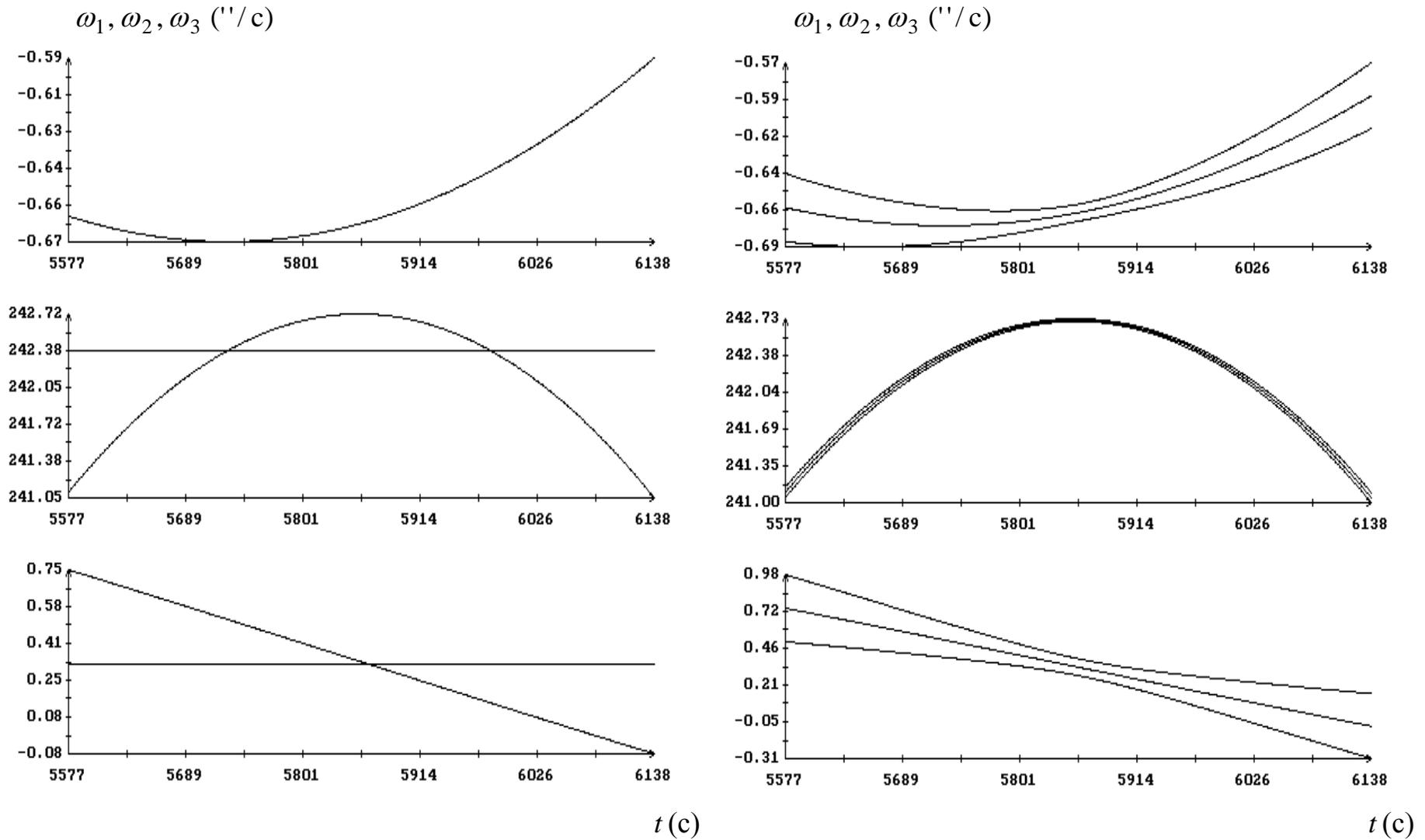


Рис. 7. Обработка данных в задаче А. Оценки угловой скорости в движении, представленном на рис. 3, 5.