



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 39 за 2010 г.



Брюно А.Д., Парусникова А.В.

Асимптотические
разложения решений пятого
уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Парусникова А.В. Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 39. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-39>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
РЕШЕНИЙ
ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2010 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно, А.В. Парусникова. Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

В данной работе рассматривается пятое уравнение Пенлеве, которое имеет 4 комплексных параметра $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Методами степенной геометрии ищутся асимптотические разложения его решений при $x \rightarrow \infty$. При $\alpha \neq 0$ найдено 10 степенных разложений с двумя экспоненциальными добавками каждое. Шесть из них — по целым степеням x (они были известны), и четыре по полуцелым (они новые). При $\alpha = 0$ найдено 4 однопараметрических семейства экспоненциальных асимптотик $y(x)$ и 3 однопараметрических семейства сложных разложений $x = x(y)$. Все экспоненциальные добавки, экспоненциальные асимптотики и сложные разложения найдены впервые. Также уточнена техника вычисления экспоненциальных добавок.

A.D. Bruno, A.V. Parusnikova. Asymptotic expansions of solutions to the fifth Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2010.

The article is devoted to the study of the fifth Painlevé equation which has 4 complex parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. By methods of Power Geometry we look for asymptotic expansions of solutions to the equation when $x \rightarrow \infty$. Ten power expansions with two exponential additions each are obtained when $\alpha \neq 0$. Six of them are over integer powers x (they have been already known) and four are over half-integer powers (they are new). When $\alpha = 0$ we computed 4 one-parameter families of exponential asymptotic forms $y(x)$ and 3 one-parameter families of complicated expansions $x = x(y)$. All exponential additions, exponential asymptotic forms and complicated expansions have not been known before. Here we improve the method of computation of exponential additions to the power expansions as well.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: abruno@keldysh.ru, parus-a@mail.ru

сайт: www.keldysh.ru

1 О вычислении экспоненциальных добавок

Уточним технику таких вычислений, описанную в § 7 [1]. Пусть для исходного уравнения

$$f(x, y) = 0, \quad (1.1)$$

где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма (т.е. сумма дифференциальных мономов вида $a(x, y) = x^{q_1} y^{q_2} \sum_{j=1}^k d^{l_j} y / dx^{l_j}$), найдено степенное или степенно-логарифмическое разложение его решения

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s \stackrel{def}{=} \varphi(x). \quad (1.2)$$

После подстановки $y = \varphi(x) + z$ уравнение (1.1) принимает вид

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{def}{=} f(x, \varphi(x) + z) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(x)z + g(x, z) = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathcal{M}(x)$ — линейный дифференциальный оператор, а у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(g)$ координата $q_2 \geq 2$. Поэтому $z = 0$ является решением уравнения (1.3), соответствующим решению (1.2) уравнения (1.1). Согласно лемме 7.1 [1],

$$\mathcal{M}(x) = \delta f / \delta y \quad \text{на } y = \varphi(x). \quad (1.4)$$

Сумма \tilde{f} в (1.3) имеет носитель $\mathbf{S}(\tilde{f})$ и многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$. Многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$ имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с $q_2 = 1$, соответствующее сумме $\mathcal{M}(x)z$. Для анализа решений укороченного уравнения

$$\mathcal{M}(x)z = 0 \quad (1.5)$$

делается логарифмическое преобразование

$$\zeta = \frac{d \ln z}{dx}, \quad (1.6)$$

(тогда $z' = z\zeta$, $z'' = z(\zeta' + \zeta^2)$), после которого уравнение (1.5) переходит в уравнение

$$h(x, \zeta)z \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(x)z = 0,$$

где $h(x, \zeta)$ — дифференциальная сумма, т.е. — в уравнение

$$h(x, \zeta) = 0. \quad (1.7)$$

Теперь для уравнения (1.7) надо найти разложения решений вида

$$\zeta = \gamma_p x^p + \sum_{\sigma} \gamma_{\sigma} x^{\sigma}, \quad (1.8)$$

соответствующие конусу задачи $\tilde{\mathcal{K}} = \{(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0\}$.

Согласно замечанию 7.2 [1], для того, чтобы различить все семейства решений вида (1.8) уравнения (1.7), достаточно вычислить отрезок оператора $\mathcal{M}(x)$, содержащий член с производной наибольшего порядка. Согласно (1.4), этот член получается из дифференциального монома $a_i(x, y)$ в сумме $f(x, y)$, имеющего наибольший порядок производной. Соответствие между векторным показателем $Q = (q_1, q_2)$ монома $a_i(x, y)$ и наибольшим из показателей ωq_1^* членов в $\mathcal{M}(x)$, соответствующих $a_i(x, y)$, таково:

$$\omega q_1^* = \omega[q_1 + (q_2 - 1)r]. \quad (1.9)$$

Напомним [1], что $\omega = -1$ при $x \rightarrow 0$ и $\omega = 1$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть $\omega \tilde{q}_1 = \max[q_1 + (q_2 - 1)r]\omega$ по всем мономам $a_i(x, y)$ из суммы $f(x, y)$, которые имеют производные наибольшего порядка среди других мономов, содержащихся в $f(x, y)$.

В сумме $f(x, y) = \sum_i a_i(x, y)$, согласно (1.9), выделим подсумму $f^*(x, y) \stackrel{def}{=} \sum a_i(x, y)$ по $Q(a_i) : \omega q_1^* \geq \omega \tilde{q}_1$ и положим $\mathcal{M}^*(x) = \delta f^* / \delta y$ при $y = \varphi(x)$.

После логарифмической замены (1.6) получим

$$h^*(x, \zeta) z \stackrel{def}{=} \mathcal{M}^*(x) z = 0.$$

Для того, чтобы различить все семейства разложений (1.8) решений уравнений (1.7) достаточно найти все решения вида (1.8) уравнения $h^*(x, \zeta) = 0$. Отметим, что при фиксированном r , неравенство

$$\omega[q_1 + (q_2 - 1)r] \geq \omega \tilde{q}_1 \quad (1.10)$$

выполнено для всех точек носителя $\mathbf{S}(f)$, расположенных по одну сторону от прямой $q_1 + r q_2 = \tilde{q}_1 + r$.

Теперь вычислим, какой отрезок разложения (1.2) достаточен для нахождения суммы $h^*(x, \zeta)$. Пусть прямая

$$\omega[q_1 + r q_2] = t \quad (1.11)$$

является опорной к многоугольнику $\Gamma(f)$. Она пересекает горизонталь $q_2 = 2$ в точке с координатой

$$q_1 = t\omega - 2r \stackrel{def}{=} \tilde{q}_1, \quad (1.12)$$

тогда в разложении (1.2) достаточно знать все члены с

$$\omega s \geq \omega(\tilde{q}_1 - \tilde{q}_2). \quad (1.13)$$

Наконец, степенному разложению (1.8) соответствует семейство экспоненциальных добавок

$$\mathcal{C} \exp \left\{ \frac{\gamma_p x^{p+1}}{p+1} + \gamma_0 \ln x + \sum_{\sigma \neq -1} \frac{\gamma_\sigma x^{\sigma+1}}{\sigma+1} \right\}, \quad (1.14)$$

где \mathcal{C} — произвольная постоянная. При $|x|^\omega \rightarrow \infty$ эти добавки малы, если

$$(p+1)\omega \operatorname{Re}(\gamma_p x^{p+1}) < 0. \quad (1.15)$$

На самом деле, зачастую достаточно знать меньшее число членов, чем даёт оценка (1.13). Поэтому удобно сначала вычислить в сумме (1.14) коэффициенты γ_p и γ_σ через буквенные коэффициенты c_s разложения (1.2).

2 Общие свойства пятого уравнения Пенлеве

2.1 Постановка задачи. Пятое уравнение Пенлеве [3] имеет вид:

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \gamma \frac{y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \quad (2.1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры, x — независимая, y — зависимая комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Уравнение (2.1) имеет две особые точки — $x = 0$ и $x = \infty$.

В этом препринте при $x \rightarrow \infty$ ищем для решений уравнения (2.1) все разложения вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (2.2)$$

где $c_r, r, s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$, $\operatorname{Re} s$ возрастают, трёх типов:

Тип 1. c_r и c_s — постоянные (*степенные разложения*).

Тип 2. c_r — постоянный коэффициент, c_s — многочлены от $\ln x$ (*степенно-логарифмические разложения*).

Тип 3. c_r и c_s — степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$ (*сложные разложения*).

Кроме того, для разложений типов 1 и 2 ищем экспоненциальные добавки (1.14), описанные в §1.

Представим уравнение (2.1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $x^2 y(y-1)$ и перенесём все члены уравнения в правую часть. Получим уравнение

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 y(y-1) y'' + x^2 \left(\frac{3}{2} y - \frac{1}{2} \right) (y')^2 - x y(y-1) y' +$$

$$+(y-1)^3(\alpha y^2 + \beta) + \gamma xy^2(y-1) + \delta x^2 y^2(y+1) = 0. \quad (2.3)$$

2.2 Процедура вычисления разложений. В дальнейшем вычисление разложений решений вида (1.2) уравнения вида (1.1) осуществляется по следующей последовательности операций [1]:

1. Вычисляются или изображаются носитель $\mathbf{S}(f)$ и многоугольник $\Gamma(f)$.
2. Выделяются обобщённые грани $\Gamma_j^{(d)}$ (при $j = 1$ — это рёбра, при $j = 0$ — это вершины) многоугольника $\Gamma(f)$ и их нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$ (лучи и секторы соответственно).
3. Отбираются те грани $\Gamma_j^{(d)}$, у которых нормальный конус пересекается с конусом задачи \mathcal{K} .
4. Для каждой из отобранных граней $\Gamma_j^{(d)}$ выписывается укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0$ и находятся его решения $y = c_r x^r$ с $\omega(1, r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$.
5. Вычисляются критические числа $\varkappa_1, \dots, \varkappa_l$ этого решения.
6. Вычисляется носитель $\mathbf{K}(\varkappa_1, \dots, \varkappa_l)$ разложения решения (1.2), т.е. множество показателей степеней s , по которым идёт разложение.
7. Отрезок разложения (1.2) с известными r и s и неопределёнными коэффициентами c_s подставляется в уравнение (1.1) и с помощью специальной программы, написанной в пакете *Maple*, последовательно (по убыванию ωRes) находятся коэффициенты c_s .

Сначала вычисления будем описывать довольно подробно, потом некоторые выкладки будем опускать.

2.3 Многоугольник $\Gamma(\mathbf{f})$ при $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$. Согласно [1], для решения нашей задачи при $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$ изобразим носитель $\mathbf{S}(f)$ левой части уравнения (2.3), его выпуклую оболочку $\Gamma(f)$, её вершины $\Gamma_j^{(0)}$, рёбра $\Gamma_j^{(1)}$ (рис. 1) и нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(0)}$, $\mathbf{U}_j^{(1)}$ к вершинам и рёбрам соответственно (рис. 2). Многоугольник $\Gamma(f)$ является равнобокой трапецией. Она симметрична относительно прямой $q_2 = 5/2$. Эта симметрия многоугольника соответствует симметрии (2.4) уравнения (2.1). Носитель $\mathbf{S}(f)$ лежит в решётке \mathbb{Z}^2 и не лежит ни в какой её подрешётке.

Внешние нормали N_j к рёбрам $\Gamma_j^{(1)}$ — это

$$N_1 = (1, -1), \quad N_2 = (1, 0), \quad N_3 = (1, 1), \quad N_4 = (-1, 0).$$

Нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(1)}$ и $\mathbf{U}_j^{(0)}$ рёбер $\Gamma_j^{(1)}$ и вершин $\Gamma_j^{(0)}$ суть

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) | p_1 > 0, p_1 = -p_2\} = \{\lambda N_1, \lambda > 0\},$$

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) | p_1 > 0, p_2 = 0\} = \{\lambda N_2, \lambda > 0\},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3^{(1)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_1 > 0, p_1 = p_2\} = \{\lambda N_3, \lambda > 0\}, \\ \mathbf{U}_4^{(1)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_1 < 0, p_2 = 0\} = \{\lambda N_1, \lambda > 0\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_1^{(0)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_2 < 0, p_1 < -p_2\}, \\ \mathbf{U}_2^{(0)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_1 > 0, -p_1 < p_2 < 0\}, \\ \mathbf{U}_3^{(0)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_1 > 0, 0 < p_2 < p_1\}, \\ \mathbf{U}_4^{(0)} &= \{P = (p_1, p_2) | p_2 > 0, p_1 < p_2\}.\end{aligned}$$

2.4 Симметрия.

Теорема 1. Уравнение (2.1) инвариантно относительно замены

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) = \left(x, \frac{1}{y}, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta\right). \quad (2.4)$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой при помощи подстановки (2.4) в уравнение (2.1).

3 Разложения решений, соответствующие вершинам

Все укороченные уравнения $\hat{f}_j^{(0)}(x, y) = 0$ для вершин $\Gamma_j^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ имеют вид:

$\hat{f}_1^{(0)}(x, y) \stackrel{def}{=} -\beta$, $\hat{f}_2^{(0)}(x, y) \stackrel{def}{=} \delta x^2 y^2$, $\hat{f}_3^{(0)}(x, y) \stackrel{def}{=} \delta x^2 y^3$, $\hat{f}_4^{(0)}(x, y) \stackrel{def}{=} -\alpha y^5$, т.е. они являются алгебраическими и, согласно замечанию 1.1 из [1], решений не дают.

4 Разложения решений, соответствующие рёбрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ в случае $\alpha \cdot \beta \cdot \delta \neq 0$

Как видно на рис. 2, при условии $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$ с полуплоскостью $p_1 > 0$ пересекаются только нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(1)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$, $\mathbf{U}_3^{(1)}$. Следовательно, разложения (2.2) решений уравнения (2.3) при $x \rightarrow \infty$ имеют асимптотики $y = c_r x^r$, удовлетворяющие укороченным уравнениям $\hat{f}_1^{(1)}$, $\hat{f}_2^{(1)}$, $\hat{f}_3^{(1)}$, соответствующим рёбрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$. Все эти укороченные уравнения алгебраические, поэтому их степенные решения не имеют критических чисел [1]. Рассмотрим эти уравнения последовательно.

4.1 Ребро $\Gamma_1^{(1)}$. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} -\beta + \delta x^2 y^2 = 0 \quad (4.1)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1, -1), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = -1$, $\omega = 1$, $x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (4.1) в виде $y = c_{-1}x^{-1}$.

Подставив $y = c_{-1}x^{-1}$ в укороченное уравнение (4.1), получаем

$$-\beta + \delta c_{-1}^2 = 0,$$

откуда $c_{-1,k} = (-1)^k \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}$, $y_k = (-1)^k \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \frac{1}{x}$, $k = 1, 2$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (2.3) и укороченного решения (4.1), состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то, согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2, получаем два степенных разложения:

$$\mathcal{D}_k : y_k = (-1)^k \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \frac{1}{x} + \left(-\frac{2\beta}{\delta} + (-1)^k \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \right) \frac{1}{x^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{sk}}{x^s}, \quad (4.2)$$

где c_{sk} — однозначно определённые комплексные константы, $k = 1, 2$.

4.2 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (4.2) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях §1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, \zeta)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 0$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} c_{-1} (\zeta' + \zeta^2 + 2\delta) x + (6\beta - 2\gamma c_{-1} + 2\delta c_{-2}) + 2c_{-1}\zeta + \\ + \left(c_{-2} - \frac{\beta}{\delta} \right) \zeta^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (4.3), его выпуклая оболочка, её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$ и рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$ изображены на рис. 3.

Так как конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) \mid p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ему соответствует уравнение $\hat{h}_1^{(1)} \stackrel{def}{=} c_{-1}x(\zeta^2 + 2\delta) = 0$, откуда

$$\zeta_m = (-1)^m \sqrt{-2\delta}, \quad m = 1, 2. \quad (4.4)$$

Поскольку базис решётки, содержащей носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ уравнения (4.3) и укороченного решения (4.4), состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то

согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2 получаем

$$\zeta_{m,k} = (-1)^m \sqrt{-2\delta} + \left((-1)^{k+m+1} 2\sqrt{-2\beta} + (-1)^{m+1} \frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}} - 1 \right) \frac{1}{x} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{x^s},$$

где $k, m = 1, 2$ и $b_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные постоянные.

Переходя к исходной переменной z , получаем

$$\text{e}\tilde{x}p\mathcal{D}_k : z_{m,k} = \mathcal{C}x^{\rho_{m,k}} \exp\left\{(-1)^m \sqrt{-2\delta}x + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{(1-s)x^{s-1}}\right\}, \quad (4.5)$$

$\rho_{m,k} = (-1)^{m+k+1} 2\sqrt{-2\beta} + \frac{(-1)^{m+1}\gamma}{\sqrt{-2\delta}} - 1$, где \mathcal{C} — произвольная комплексная постоянная, не равная нулю, $b_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные постоянные, $k, m = 1, 2$. Область малости экспоненциальной добавки (4.5) при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}(\sqrt{-\delta}x) < 0$. Следовательно, каждое из разложений (4.2) имеет по две добавки (4.5) с $m = 1, 2$, каждая из которых определена на своей полуплоскости по x .

4.3 Ребро $\Gamma_2^{(1)}$. Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} \delta x^2 y^2 + \delta x^2 y^3 = 0 \quad (4.6)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 0, \omega = 1, x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (4.6) в виде $y = c_0$. Подставив $y = c_0$ в укороченное уравнение (4.6), получаем $\delta c_0^2 x^2 + \delta c_0^3 x^2 = 0$, откуда $c_0 = -1, y = -1$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (2.3) и укороченного решения, состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2 получаем одно степенное разложение:

$$\mathcal{E}_1 : y = -1 + \frac{2\gamma}{\delta x} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{c_s}{x^s}, \quad (4.7)$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы.

4.4 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (4.7) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях §1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, \zeta)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 1$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$. Получим уравнение

$$\tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} -2x^2(\zeta' + \zeta^2) + \delta x^2 - (2\zeta + 3\gamma)x + 3c_{-1}\zeta^2 x = 0. \quad (4.8)$$

На рис. 4 изображены носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (4.8), его выпуклая оболочка $\Gamma(\tilde{h}) = \tilde{H}$, её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$ и рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$.

Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) \mid p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $-2x^2\zeta^2 + \delta x^2 = 0$, откуда $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{\delta/2}$, где $m = 1, 2$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по целым степеням x .

Согласно п. 2.2, решение $\zeta(x)$ уравнения (4.8) имеет вид

$$\zeta = \tau \sqrt{\frac{\delta}{2}} - \frac{1}{2x} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_s}{x^s}.$$

Переходя к исходной переменной z , получаем

$$\text{e}\tilde{\text{x}}\text{p}\mathcal{E}_1 : z_m = \mathcal{C} x^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{(-1)^m \sqrt{\frac{\delta}{2}} x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\delta_s}{x^s}\right\}, \quad (4.9)$$

где \mathcal{C} — произвольная комплексная постоянная, не равная нулю, $m = 1, 2$.

Область малости экспоненциальной добавки (4.9) при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}(\sqrt{\delta}x) < 0$. Следовательно, для каждого значения $m = 1, 2$ имеем по одной добавке, определённой в соответствующей полуплоскости x .

4.5 Ребро $\Gamma_3^{(1)}$. Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \delta x^2 y^3 + \alpha y^5 = 0 \quad (4.10)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1, 1), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 1$, $\omega = 1$, $x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (4.10) в виде $y = c_1 x$. Подставив $y = c_1 x$ в укороченное уравнение (4.10), получаем $\delta x^5 c_1^3 + \alpha c_1^5 = 0$, откуда $c_{1,k} = (-1)^k \sqrt{-\delta/\alpha}$, $y_k = (-1)^k \sqrt{-\delta/\alpha} x$, $k = 1, 2$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2, получаем два степенных разложения:

$$\mathcal{F}_k : y = (-1)^k \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} x + 2 + (-1)^k \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\sqrt{-\alpha\delta}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{s,k}}{x^s}, \quad (4.11)$$

где $c_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные константы, $k = 1, 2$.

4.6 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (4.11) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях

§1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, \zeta)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 3$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} & x^4 c_1^2 (-(\zeta^2 + \zeta') + (5c_1^2 \alpha + 3\delta)) + \\ & + x^3 (3\gamma c_1^2 - 12\alpha c_1^3 + 20\alpha c_1^3 c_0 + 6\delta c_0 c_1 + 2\delta) + \\ & + x^3 (2c_1^2 \zeta + (2c_0 - 1)c_1 \zeta^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Изобразим носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (4.12), его выпуклую оболочку \tilde{H} , её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$, рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$ (рис. 5).

Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $\zeta^2 + 2\delta = 0$, откуда $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{-2\delta}$, где $m = 1, 2$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (4.12) и укороченного решения, состоит из векторов $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2, получаем разложение

$$\zeta_{m,k} = (-1)^m \sqrt{-2\delta} + \frac{1}{x} \left(1 + (-1)^{k+m+1} 2\sqrt{2\alpha} + (-1)^m \frac{3\gamma}{2\sqrt{-2\delta}} \right) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{x^s}.$$

Возвращаясь к исходной переменной z :

$$\text{e}\tilde{x}\mathcal{P}_k : z_{m,k} = \mathcal{C} x^{\rho_{m,k}} \exp\left\{(-1)^m \sqrt{-2\delta} x + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{(1-s)x^{s-1}}\right\}, \quad (4.13)$$

где \mathcal{C} — произвольная ненулевая комплексная постоянная, $k = 1, 2$, $\rho_{m,k} = 1 + (-1)^{k+m+1} 2\sqrt{2\alpha} + (-1)^m \frac{3\gamma}{2\sqrt{-2\delta}}$, $b_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные постоянные. Область малости экспоненциальной добавки при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}(\sqrt{-\delta} x) < 0$. Следовательно, каждое из разложений (4.11) имеет по две экспоненциальные добавки (4.13), определённые в соответствующей полуплоскости x .

5 Случай $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$, $\delta = 0$

При $\delta = 0$ уравнение (2.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & -x^2 y(y-1)y'' + x^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) (y')^2 - xy(y-1)y' + \\ & + (\alpha y^2 + \beta)(y-1)^3 + \gamma xy^2(y-1) = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Носитель и многоугольник уравнения (5.1) изображены на рис. 6.

5.1 Ребро $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\tilde{f}_1^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} -\beta - \gamma xy^2 = 0 \quad (5.2)$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(1, -1/2), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = -1/2$, $\omega = 1$, $x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (5.2) в виде $y = c_{-1/2}x^{-1/2}$. Подставив $y = c_{-1/2}x^{-1/2}$ в укороченное уравнение (5.2), получаем, что $y_k = (-1)^k \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{x}}$, $k = 3, 4$.

Поскольку базисом решётки, содержащей носитель уравнения, являются векторы $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, а сдвинутый носитель укороченного решения есть $M_3 = (1/2, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по полуцелым степеням x . Согласно п. 2.2 получаем два степенных разложения:

$$\mathcal{D}_k : y_k = (-1)^k \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{s,k}}{x^{s/2}}, \quad k = 3, 4, \quad (5.3)$$

где $c_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные константы.

5.2 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (5.3) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях §1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, z)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 0$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} & c_{-1/2}x^{3/2}(\zeta^2 + \zeta') + (c_{-1} + c_{-1/2}^2)(\zeta^2 + \zeta')x + \\ & + \sqrt{x} (3c_{-1/2}\zeta/2 - 2\gamma c_{-1/2} + (c_{-3/2} - 2c_{-1}c_{-1/2})\zeta^2) + \\ & + 3\beta + (-5c_{-1/2}^2/2 + 2c_{-1})\zeta + 2\gamma c_{-1} = 3\gamma c_{-1/2}^2 - (2c_{-3/2}c_{-1/2} + c_{-1}^2)\zeta^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Изобразим носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (5.4), его выпуклую оболочку, её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$, рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$ на рис. 7.

Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $c_{-1/2}x^{3/2}\zeta^2 - 2\gamma c_{-1/2}\delta\sqrt{x} = 0$, из которого $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{2\gamma/x}$, $m = 1, 2$.

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, будут векторы $M_2 = (0, 1)$ и $M_3 = (1/2, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по полуцелым степеням x . Согласно п. 2.2 получаем

$$\zeta_{m,k} = (-1)^m \sqrt{\frac{2\gamma}{x}} + \left(-\frac{1}{2} + (-1)^{m+k+1} \frac{\sqrt{-2\beta}}{2} \right) \frac{1}{x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{x^{s/2}}.$$

Переходя к исходной переменной z :

$$\text{e}\ddot{x}p\mathcal{D}_k : z_{m,k} = \mathcal{C}x^{\rho_{m,k}} \exp\{(-1)^m 2\sqrt{2\gamma x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{(1-s/2)x^{s/2-1}}\}, \quad (5.5)$$

где $b_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные постоянные,

$\rho_{m,k} = -\frac{1}{2} + (-1)^{m+k+1} \frac{\sqrt{-2\beta}}{2}$, \mathcal{C} — произвольная комплексная постоянная, $m = 1, 2, k = 3, 4$. Область малости экспоненциальной добавки при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}(\sqrt{\gamma x}) < 0$. Следовательно, каждое из разложений (5.3) имеет по две экспоненциальные добавки, выбор добавки определяется выбором ветви \sqrt{x} .

5.3 Ребро $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$. Ребру $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\tilde{f}_2^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma xy^2(y-1) = 0 \quad (5.6)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 0, \omega = 1, x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (5.6) в виде $y = c_0$. Подставив $y = c_0$ в укороченное уравнение (5.6), получаем, что $c_0 = 1$

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, будут векторы $M_1 = (1, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по целым степеням x . Согласно п. 2.2 получаем одно степенное разложение:

$$\mathcal{E}_2 : y = 1 - \frac{8(\alpha + \beta)}{\gamma} \frac{1}{x} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{c_s}{x^s}, \quad (5.7)$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы.

5.4 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (5.7) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях §1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, \zeta)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 0$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} & -2x^2(\zeta' + \zeta^2) + (3c_{-1}(\zeta^2 + \zeta') - 2\zeta + 5\gamma)x + \\ & + (3c_{-2} - c_{-1}^2)\zeta^2 + 7c_{-1}\zeta + (28\alpha + 12\beta - 8\gamma c_{-1}) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Изобразим носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (5.8), его выпуклую оболочку, её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$, рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$ на рис. 8.

Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $-2x^2\zeta^2 + 5\gamma x = 0$, из которого $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{5\gamma/(2x)}$, где $m = 1, 2$.

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, будут векторы $M_1 = (0, 1)$ и $M_2 = (1/2, 0)$, то согласно [1], разложение идёт по полуцелым степеням x . Согласно п. 2.2, переходя к исходной переменной z , получаем экспоненциальную добавку:

$$\text{e}\tilde{x}\mathcal{R}_2 : z_m = \mathcal{C}x^{-1/4} \exp\left((-1)^m \sqrt{10\gamma x} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{x^{s/2}}\right), \quad m = 1, 2, \quad (5.9)$$

где b_s — однозначно определённые комплексные постоянные, \mathcal{C} — произвольная комплексная постоянная. Область малости экспоненциальной добавки при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}(\sqrt{\gamma x}) < 0$. Следовательно, разложение (5.7) имеет две экспоненциальные добавки, выбор добавки определён выбором ветви \sqrt{x} .

5.5 Ребро $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$. Ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\tilde{f}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} \gamma xy^3 + \alpha y^5 = 0 \quad (5.10)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1, 1/2), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 1/2$, $\omega = 1$, $x \rightarrow \infty$. Поэтому ищем решение уравнения (5.10) в виде $y = c_{1/2}x^{1/2}$. Подставив $y = c_{1/2}x^{1/2}$ в укороченное уравнение (5.10), получаем, что $y_k = (-1)^k \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \sqrt{x}$, $k = 3, 4$.

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, будут векторы $M_2 = (0, 1)$ и $M_3 = (-1/2, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по полуцелым степеням x . Согласно п. 2.2, получаем два семейства степенных разложений:

$$\mathcal{F}_k : y = (-1)^k \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \sqrt{x} + 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{s,k}}{x^{s/2}}, \quad k = 3, 4, \quad (5.11)$$

где $c_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные константы.

5.6 Вычисление экспоненциальных добавок. Для уравнения (2.3) и разложений (5.11) применим алгоритм, описанный в §1 (в обозначениях §1 — это разложение (1.2) решения уравнения (1.1)). Оставим в $h(x, \zeta)$ (1.7) только те члены $a_i(x, \zeta)$, у которых векторные показатели $Q(a_i) = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 \geq 0$, их сумму обозначим через $\tilde{h}(x, \zeta)$. Получим уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} & -c_{1/2}^2(\zeta' + \zeta^2)x^3 - c_{1/2}(\zeta' + \zeta^2)x^{5/2} + ((1/2)c_{1/2}^2\zeta - 2c_{-1}c_{1/2}(\zeta' + \zeta^2) + \\ & + (5c_{1/2}^4\alpha + 3\gamma c_{1/2}^2)x^2 + ((4\gamma c_{1/2} + 8c_{1/2}^3\alpha) - c_{-1/2}\zeta^2)x^{3/2} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Изобразим носитель $\mathbf{S}(\tilde{h})$ левой части уравнения (5.12), его выпуклую оболочку, её вершины $\tilde{H}_j^{(0)}$ и рёбра $\tilde{H}_j^{(1)}$ на рис. 9.

Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\tilde{H}_1^{(1)}$. Получаем уравнение $x^2 c_{1/2}^2 (\zeta^2 x + 2\gamma) = 0$, откуда $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{-2\gamma/x}$, где $m = 1, 2$.

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения и укороченного решения, будут векторы $M_1 = (1/2, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, то согласно [1], разложение идёт по полуцелым степеням x . Согласно п. 2.2, переходя к исходной переменной z , получаем экспоненциальные добавки

$$\text{e}\tilde{x}\mathcal{F}_k : z_{m,k} = x^{\rho_{m,k}} \exp\{(-1)^m 2\sqrt{-2\gamma x} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_{s,k}}{x^{s/2}}\}, \quad k = 3, 4, \quad m = 1, 2, \quad (5.13)$$

где $b_{s,k}$ — однозначно определённые комплексные постоянные,

$\rho_{m,k} = \left(\frac{1}{2} + (-1)^{k+m+1} 2\sqrt{2} + (-1)^{k+m+1} \frac{3\sqrt{2\alpha}}{2} \right)$, \mathcal{C} — произвольная комплексная постоянная. Область малости экспоненциальной добавки при $|x| \rightarrow \infty$ — это $(-1)^m \text{Re}\sqrt{-\gamma x} < 0$. Следовательно, каждое из разложений (5.11) имеет по две экспоненциальные добавки, выбор добавки определён выбором ветви \sqrt{x} .

6 Случай $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$

При $\alpha = 0$ уравнение (2.3) принимает следующий вид:

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 y(y-1)y'' + x^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) (y')^2 - xy(y-1)y' + \beta(y-1)^3 + \gamma xy^2(y-1) + \delta x^2 y^2(y+1) = 0. \quad (6.1)$$

Носитель и многоугольник уравнения (6.1) изображены на рис. 10.

6.1 Вычисление разложений вида $y = y(x)$. Вычислим разложение, используя технику, описанную в § 5 [1]. Укороченное уравнение, соответствующее горизонтальному ребру $G_3^{(1)}$ носителя уравнения (6.1) — это

$$\hat{f}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -x^2 y^2 y'' + \frac{3}{2} x^2 y (y')^2 - xy^2 y' + \beta y^3 + \gamma xy^3 + \delta x^2 y^3 = 0. \quad (6.2)$$

Сделаем логарифмическую замену (1.6) в уравнении (6.2), получим

$$-x^2 \zeta' + \frac{1}{2} x^2 \zeta^2 - x\zeta + \beta + \gamma x + \delta x^2 = 0, \quad (6.3)$$

носитель уравнения (6.3) изображён на рис. 11. Нас интересует только конус задачи, в котором $p_1 + p_2 \geq 0$, поэтому рассматриваем только ребро

$\Pi_1^{(1)}$ многоугольника уравнения (6.3). Укороченное уравнение, соответствующее этому ребру, имеет вид $\hat{g}_1^{(1)}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} x^2 \zeta^2 / 2 + \delta x^2 = 0$, из которого $\zeta_{1,2} = \sigma \sqrt{-2\delta}$, где $\sigma_{1,2} = \pm 1$. Разложениями для решений уравнения (6.3) являются $\zeta_{1,2} = \sigma \sqrt{-2\delta} + (1 - \sigma \frac{\gamma}{\sqrt{-2\delta}}) \frac{1}{x} + \sum_{s=2}^{\infty} c_s x^{-s}$, где c_s — однозначно определённые комплексные константы для фиксированного $\sigma_{1,2}$. Следовательно, для разложений полного уравнения получаем асимптотики вида

$$y_{1,2} = Cx \left(1 - \frac{\sigma\gamma}{\sqrt{-2\delta}} \right) \exp \left\{ \sigma \sqrt{-2\delta} x + \sum_{s=2}^{\infty} c_s \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right\}, \quad (6.4)$$

где C — произвольная постоянная. Поскольку ребро $G_3^{(1)}$ — верхнее, то $y \rightarrow \infty$, что происходит в области $\operatorname{Re}(\sigma \sqrt{-\delta} x) > 0$. Отметим, что в формуле (6.4) параметр δ в показателе степени переменной x стоит в знаменателе, поэтому формула (6.4) неприменима при $\delta = 0$. Случай $\delta = 0$ будет рассмотрен отдельно.

Пока нет способа, зная семейство разложений (6.4) укороченного уравнения (6.2), построить по нему разложение для решений полного уравнения (6.1). Такая техника развита только для степенных разложений. Поэтому теперь поменяем местами зависимую и независимую переменные и найдём сложные разложения для $x = x(y)$.

6.2 Вычисление разложений вида $x = x(y)$. Если теперь y будет независимой, а x — зависимой переменной, то $y' = \frac{1}{x'_y}$, $y'' = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$, уравнение (6.1) преобразуется в следующее уравнение:

$$g^*(x, y) \stackrel{def}{=} x^2 y (y-1) x''_{yy} + \left(\frac{3}{2} y - \frac{1}{2} \right) x^2 x'_y - x y (y-1) (x'_y)^2 + \\ + \beta (y-1)^3 (x'_y)^3 + \gamma x y^2 (y-1) (x'_y)^3 + \delta x^2 y^2 (y+1) (x'_y)^3 = 0. \quad (6.5)$$

Носитель уравнения (6.5) изображён на рис. 12. Вертикальному ребру $G_3^{(1)*}$ многоугольника уравнения (6.5) соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_3^{(1)*}(x, y) \stackrel{def}{=} x^2 y^2 x''_{yy} + \frac{3}{2} x^2 y x'_y - x y^2 (x'_y)^2 + \beta y^3 (x'_y)^3 + \\ + \gamma x y^3 (x'_y)^3 + \delta x^2 y^3 (x'_y)^3 = 0. \quad (6.6)$$

Вертикальное ребро $G_3^{(1)*}$ многоугольника уравнения (6.5) соответствует горизонтальному ребру $G_3^{(1)}$ уравнения (6.1). Исследуем укороченное уравнение (6.6) согласно [1]. Сделаем замену

$$\xi = \ln y \quad (6.7)$$

в уравнении (6.6), тогда $x' = \frac{\dot{x}}{y}$, $x'' = \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{y^2}$ (здесь точкой обозначено дифференцирование по $\ln y$), получим уравнение

$$x^2 (\ddot{x} - \dot{x}) + (3/2)x^2 \dot{x} - x\dot{x}^2 + \beta\dot{x}^3 + \gamma x\dot{x}^3 + \delta x^2 \dot{x}^3 = 0, \quad (6.8)$$

носитель уравнения (6.8) изображён на рис. 13. Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\Upsilon_1^{(1)}$. Этому ребру соответствует укороченное уравнение $\hat{h}_1^{(1)}(\xi, x) \stackrel{def}{=} x^2 \dot{x}/2 + \delta x^2 \dot{x}^3 = 0$. Подставив $y = c\xi$ в это укороченное уравнение, получаем $c^3/2 + \delta c^5 = 0$ откуда $c_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2\delta}}$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2\delta}}\xi$.

Обозначим второй член разложения через z . Вычислим его по формуле

$$\frac{\delta \hat{h}_1^{(1)}(\xi, x)}{\delta x} z + \hat{h}_1^{(1)}(\xi, x) = 0, \quad (6.9)$$

где $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2\delta}}\xi$; в данном случае $\frac{\delta \hat{h}(x, \xi)}{\delta x} = x\dot{x} + \frac{1}{2}x^2 \frac{d}{d\xi} + 2\delta x\dot{x}^3 + 3\delta x^2 \dot{x}^2 \frac{d}{d\xi}$, $\hat{h}(\xi, x) = x^2 \ddot{x} - x\dot{x}^2 + \gamma x\dot{x}^3$.

Вычислим оператор $\mathcal{L}_k(\xi)$ — значение первой вариации, применённой к $x_k = (-1)^k \sqrt{-\frac{1}{2\delta}}\xi$: $\mathcal{L}_k(\xi) = \frac{\xi^2}{2\delta} \frac{d}{d\xi}$, $k = 1, 2$. Получаем следующее уравнение для z :

$$-c_k^2 \xi^2 z - c_k^3 \xi + \gamma c_k^4 \xi = 0,$$

из которого находим, что $z_k = C + (-c_k + \gamma c_k^2) \ln \xi$, где C — произвольная постоянная. Итак, получаем два однопараметрических семейства разложений

$$x_k = c_k \ln y + (\gamma c_k^2 - c_k) \ln \ln y + C + \sum_{s=1}^{\infty} c_{-s,k} (\ln \ln y) (\ln y)^{-s}, \quad (6.10)$$

где $c_{s,k}$ — однозначно определённые многочлены от $\ln \ln y$, C — произвольная постоянная, $k = 1, 2$.

6.3 Нахождение сложных решений, соответствующих нестепенным асимптотикам. Применим алгоритм, описанный в [2] для нахождения сложных решений, соответствующих нестепенным асимптотикам. Посчитаем первую вариацию от (6.6):

$$\begin{aligned} \frac{\delta g_3^{*(1)}(y, x)}{\delta x} &= 2xy^2 x''_{yy} + x^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + 3xyx'_y + \frac{3}{2}x^2 y \frac{d}{dy} - (x'_y)^2 y^2 - \\ &- 2xy^2 x'_y \frac{d}{dy} + 3\beta y^3 (x'_y)^2 \frac{d}{dy} + 3\gamma xy^3 (x'_y)^2 \frac{d}{dy} + \gamma y^3 (x'_y)^3 + 2\delta xy^3 (x'_y)^3 + \end{aligned}$$

$$+3\delta x^2 y^3 (x'_y)^2 \frac{d}{dy}. \quad (6.11)$$

Сделаем логарифмическое преобразование (6.7) в (6.11), получим оператор

$$\begin{aligned} N(\xi, x) = & 2x(\ddot{x} - \dot{x}) + x^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right) + 3x\dot{x} + \frac{3}{2}x^2 \frac{d}{d\xi} - (\dot{x})^2 - 2x\dot{x} \frac{d}{d\xi} + \\ & + 3\beta(\dot{x})^2 \frac{d}{d\xi} + 3\gamma x(\dot{x})^2 \frac{d}{d\xi} + \gamma(\dot{x})^3 + 2\delta x(\dot{x})^3 + 3\delta x^2(\dot{x})^2 \frac{d}{d\xi}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Подставим в оператор (6.12) решение $x = c\xi$, получим:

$$\begin{aligned} N(\xi) = & c^2\xi + c^2\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}c^2\xi^2 \frac{d}{d\xi} - 2c^2\xi \frac{d}{d\xi} - c^2 + 3\beta c^2 \frac{d}{d\xi} + \\ & + \gamma c^3 + 2\delta c^4\xi + 3\delta c^4\xi^2 \frac{d}{d\xi}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

оставим лишь те слагаемые из (6.13), которые при операторе $d^l/d\xi^l$ будут ведущими, получим следующий оператор:

$$\tilde{N}(\xi) = c^2\xi^2 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right), \quad (6.14)$$

характеристический многочлен для (6.14) равен $\nu(k) = c^2(k^2 - k)$, он имеет два корня: $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{s | s < 0\}$, корни характеристического многочлена не лежат в конусе задачи, следовательно, критических чисел нет. Таким образом, получаем следующие семейства разложений

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k : \quad x = & c_k \ln y + (\gamma c_k^2 - c_k) \ln \ln y + C + \\ & + \sum_{s=1}^{\infty} c_{-s,k} (\ln \ln y) (\ln y)^{-s} + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{p,k} (\ln y, \ln \ln y) y^{-p}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где $\varphi_{p,k}$ — степенные ряды по $\ln y$ и $\ln \ln y$ с однозначно определёнными комплексными коэффициентами, зависящими от произвольной постоянной C , $k = 1, 2$.

7 Случай $\alpha = 0$, $\delta = 0$

При $\alpha = 0$, $\delta = 0$ уравнение (2.3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, y) \stackrel{def}{=} & -x^2 y (y-1) y'' + x^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) (y')^2 - xy(y-1)y' + \\ & + \beta(y-1)^3 + \gamma xy^2(y-1) + \delta x^2 y^2 (y+1) = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Носитель уравнения (7.1) изображён на рис. 14.

7.1 Вычисление разложений вида $y = y(x)$. Произведём те же вычисления, что и в случае $\alpha = 0, \delta \neq 0$, в выражения (6.2), (6.3), подставим $\delta = 0$, при $\delta = 0$ в (6.3) получим

$$-x^2\zeta' + \frac{1}{2}x^2\zeta^2 - x\zeta + \beta + \gamma x = 0, \quad (7.2)$$

носитель уравнения (7.2) изображён на рис. 15. Нас интересует только конус задачи, в котором $p_1 + p_2 \geq 0$, поэтому рассматриваем только ребро $\Pi_1^{(1)}$ носителя уравнения (7.2), укороченное уравнение, соответствующее этому ребру имеет вид $g_1^{(1)}(x, \zeta) \stackrel{def}{=} x^2\zeta^2/2 + \gamma x = 0$, из которого $\zeta_{1,2} = \sigma\sqrt{-\frac{2\gamma}{x}}$, где $\sigma_{1,2} = \pm 1$. Разложениями для решения уравнения (7.2) будут

$$\zeta_{1,2} = \sigma\sqrt{-\frac{2\gamma}{x}} + \frac{1}{2x} + \sum_{s=3}^{\infty} c_s x^{-s/2},$$

то есть

$$y_{1,2} = C\sqrt{x}\exp\left\{2\sigma\sqrt{-2\gamma x} + \sum_{s=3}^{\infty} c_s \frac{x^{-s/2+1}}{-s/2+1}\right\} \quad (7.3)$$

в области $\operatorname{Re}(\sigma\sqrt{-2\delta x}) > 0$, где C — произвольная постоянная.

7.2 Вычисление разложений вида $x = x(y)$. Произведём те же вычисления, что и в случае $\alpha = 0, \delta \neq 0$. В выражения (6.5), (6.6), (6.8) подставим $\delta = 0$, при $\delta = 0$ в (6.8) получим

$$x^2(\ddot{x} - \dot{x}) + \frac{3}{2}x^2\dot{x} - x\dot{x}^2 + \beta\dot{x}^3 + \gamma x\dot{x}^3 = 0, \quad (7.4)$$

носитель уравнения (7.4) изображён на рис. 16. Поскольку конус задачи — это $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) | p_1 + p_2 \geq 0\}$, то нас интересует лишь ребро $\Upsilon_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $\hat{h}_1^{(1)}(x, \xi) \stackrel{def}{=} x^2\dot{x}/2 + \gamma x\dot{x}^3 = 0$. Подставив $y = c\xi^2$ в укороченное уравнение, получаем $c^3 + 8\gamma c^4 = 0$ откуда $c = -\frac{1}{8\gamma}$, $x = -\frac{1}{8\gamma}\xi^2$.

Обозначим второй член разложения через z . Вычислим его по формуле (6.9), где $x = -\frac{1}{8\gamma}\xi^2$; в данном случае $\frac{\delta\hat{h}_1^{(1)}(x, \xi)}{\delta x} = x\dot{x} + \frac{1}{2}x^2\frac{d}{d\xi} + \gamma\dot{x}^3 + 3\gamma x\dot{x}^2\frac{d}{d\xi}$, $\hat{h}_1^{(1)}(x, \xi) = x^2\ddot{x} - x\dot{x}^2$.

Вычислим оператор $\mathcal{L}(\xi)$ — значение первой вариации, применённой к $x = -\frac{1}{8\gamma}\xi^2$: $\mathcal{L}(\xi) = c^2\xi^3 + c^2\xi^4\frac{d}{d\xi}$. Получаем следующее уравнение для z :

$c^2\xi^3z - c^2\xi^4\dot{z} - 2c^3\xi^4 = 0$, из которого находим, что $z = (-2c \ln \xi + C)\xi$, где C — произвольная постоянная. Итак, получаем однопараметрическое семейство разложений

$$x = c(\ln y)^2 + (-2c \ln \ln y + C) \ln y + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}(\ln \ln y)(\ln y)^{-s}.$$

7.3 Нахождение сложных решений, соответствующих нестепенным асимптотикам. Произведём те же вычисления, что и в случае $\alpha = 0, \delta \neq 0$, в выражения (6.11), (6.12) подставим $\delta = 0$. Подставим в оператор (6.12) при $\delta = 0$ решение $x = C\xi^2$, получим:

$$N(\xi) = c^2\xi^4 \frac{d^2}{d\xi^2} + (-c^2\xi^4 - 4c^2\xi^3 + 12\beta c^2\xi^2) \frac{d}{d\xi} + 4c^2\xi^2 + c^2\xi^3, \quad (7.5)$$

оставим лишь те слагаемые из (6.13), которые при операторе $d^l/d\xi^l$ будут ведущими, получим следующий оператор:

$$\tilde{N}(\xi) = c^2\xi^4 \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{d}{d\xi} \right), \quad (7.6)$$

характеристический многочлен для (7.6) равен $\nu(k) = c^2(k^2 - k)$, он имеет два корня: $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$. Конус задачи — это $\mathcal{K} = \{s | s < 0\}$, корни характеристического многочлена не лежат в конусе задачи, следовательно, критических чисел нет. Таким образом, получаем следующее семейство разложений

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}} : x = & \left(c(\ln y)^2 + (2c \ln \ln y + C)\xi + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}(\ln \ln y)(\ln y)^{-s} \right) + \\ & + \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_p(\ln y, \ln \ln y)y^{-p}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где φ_p — ряды по $\ln y$ и $\ln \ln y$ с однозначно определёнными комплексными коэффициентами, зависящими от C .

Случай $\alpha = \beta = 0$ не даёт новых решений.

Разложения решений для случая $\beta = 0$ получается из разложений решений в случае $\alpha = 0$ при помощи симметрии (2.4).

Случай $\gamma = \delta = 0$ будет рассмотрен отдельно в другой работе.

8 Сводка результатов

При $x \rightarrow \infty$ получены следующие семейства разложений.

В случае $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$ получены следующие степенные разложения и добавки к ним:

1. Два разложения $\mathcal{D}_{1,2}$ (формула (4.2)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{D}_{1,2}$ (формула (4.5)) каждое.

2. Разложение \mathcal{E}_1 (формула (4.7)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{E}_1$ (формула (4.9)).

3. Два разложения $\mathcal{F}_{1,2}$ (формула (4.11)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{F}_{1,2}$ (формула (4.13)) каждое.

Эти разложения были известны раньше [4], [5, §37].

В случае $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 0$, $\delta = 0$ получены следующие степенные разложения и добавки к ним:

4. Два разложения $\mathcal{D}_{3,4}$ (формула (5.3)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{D}_{3,4}$ (формула (5.5)) каждое.

5. Разложение \mathcal{E}_2 (формула (5.7)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{E}_2$ (формула (5.9)). Это разложение было известно раньше [5, §37].

6. Два разложения $\mathcal{F}_{3,4}$ (формула (5.11)) с двумя экспоненциальными добавками $e\tilde{x}\mathcal{F}_{3,4}$ (формула (5.13)) каждое.

7. В случае $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$ получены однопараметрическое семейство экспоненциальных асимптотик $y(x)$ (формула (6.4)) и два однопараметрических по C сложных семейства $\mathcal{P}_{1,2}$ разложений $x(y)$ (формула (6.15)).

8. В случае $\alpha = 0$, $\delta = 0$ получены два однопараметрических семейства экспоненциальных асимптотик $y(x)$ (формула (7.3)) и однопараметрическое по C сложное семейство $\tilde{\mathcal{P}}$ разложений $x(y)$ (формула (7.7)).

Литература

1. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи матем. наук, 2004. **59**, № 3, С. 31-80.

2. Брюно А.Д. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Докл. РАН. 2006. **406**, № 6, С. 730-733.

3. Розов Н.Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия.—М.: Советская Энциклопедия, 1984, т. 4, С. 233-234.

4. Брюно А.Д., Карулина Е.С. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН 2004 **395**, № 4, с. 439-444.

5. Gromak V.I., Laine I., Shimomoura S., Painleve Differential Equations in the Complex Plane // Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2002. 303 p.

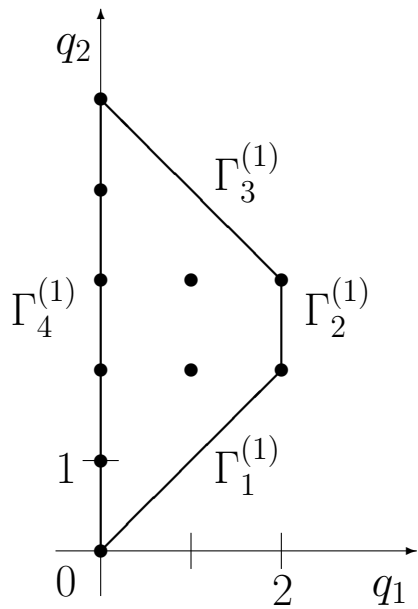


Рис. 1

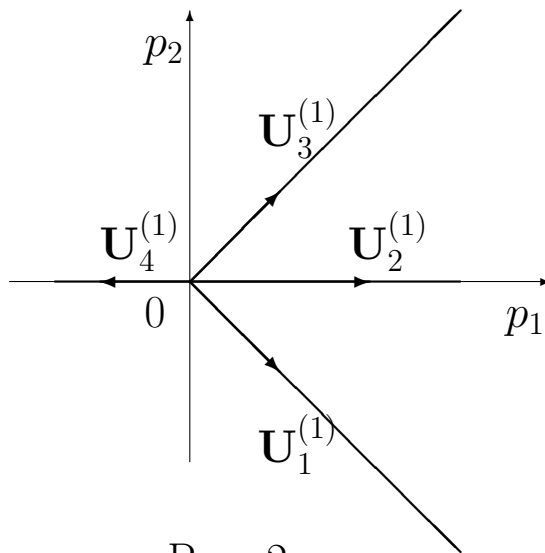


Рис. 2

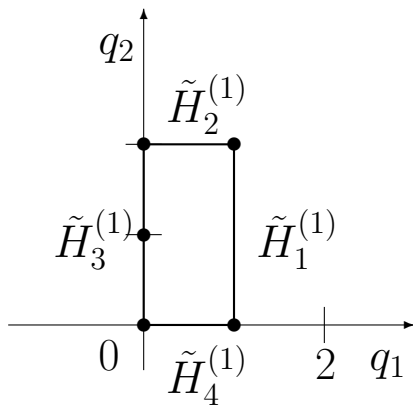


Рис. 3

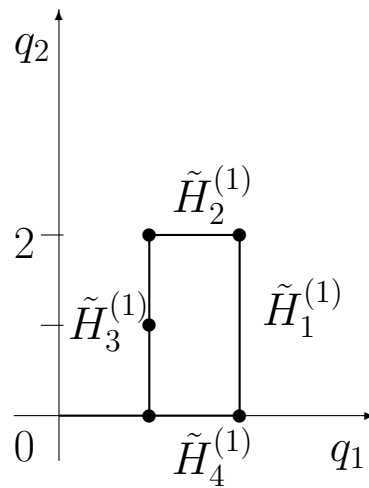


Рис. 4

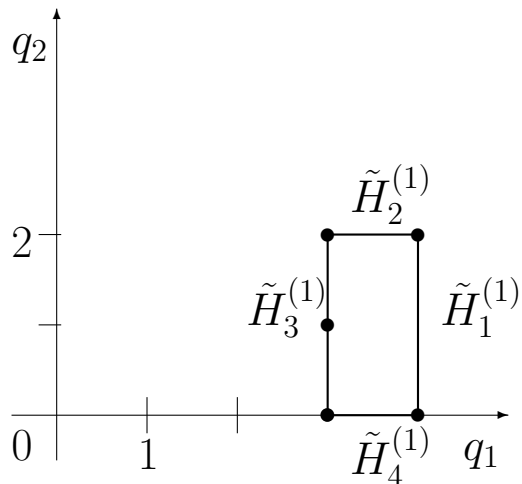


Рис. 5

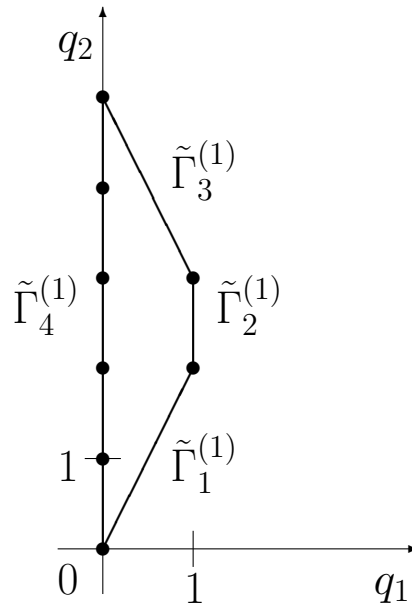


Рис.6

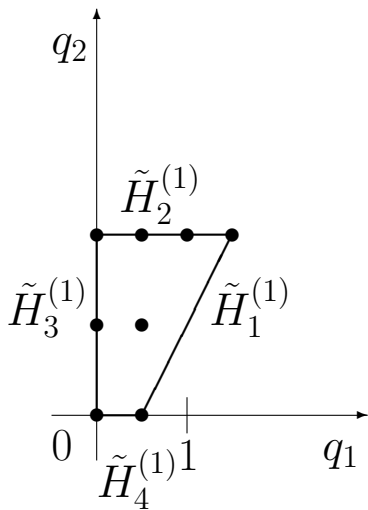


Рис. 7

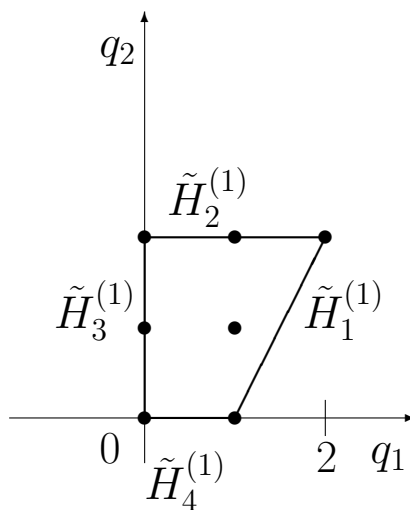


Рис. 8

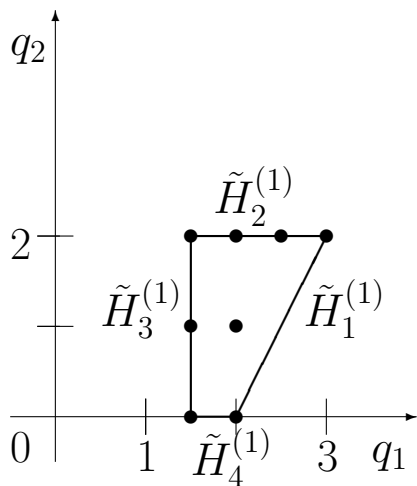


Рис. 9

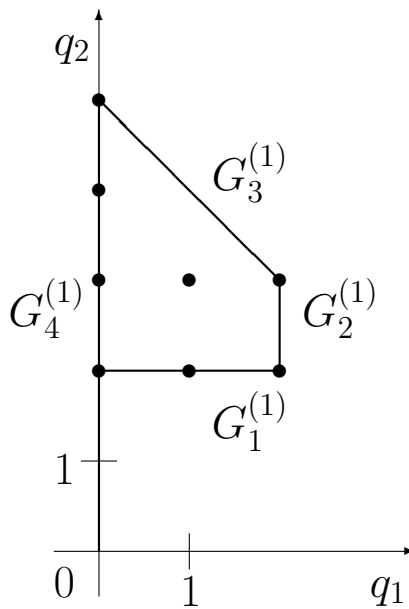


Рис.10

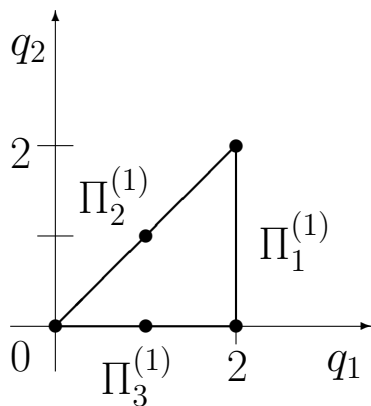


Рис.11

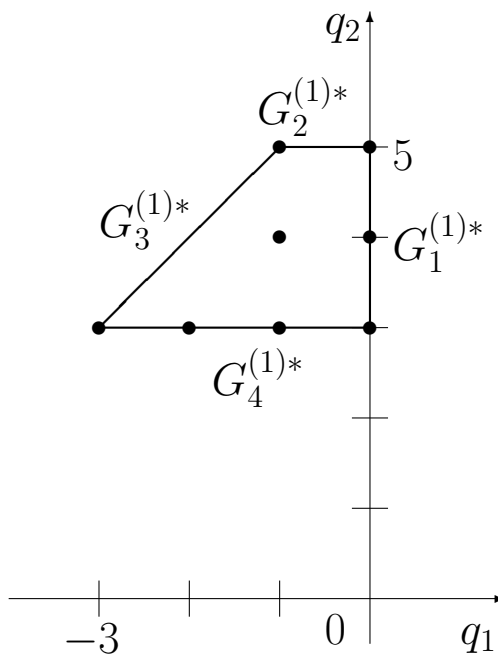


Рис.12

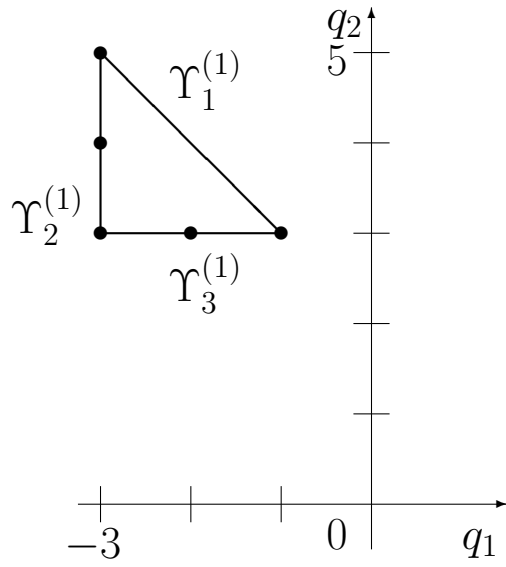


Рис.13

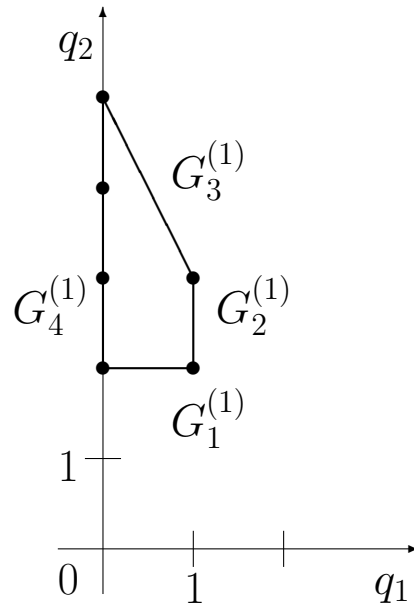


Рис.14

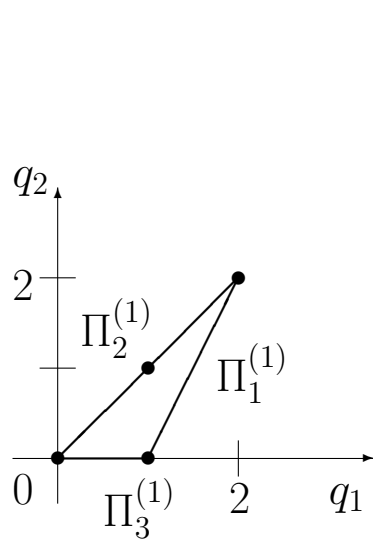


Рис.15

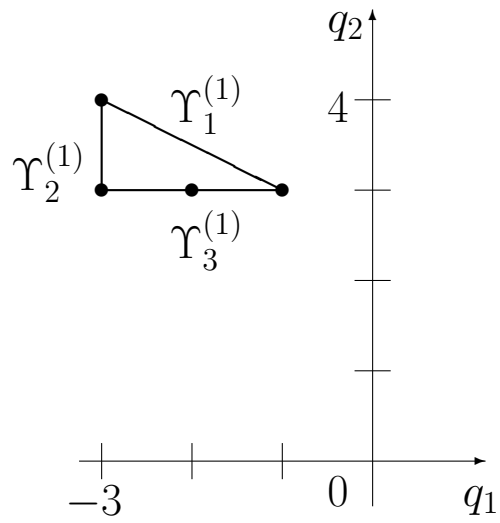


Рис.16