



Батхин А.Б.

Порождающие плоские
периодические орбиты
задачи Хилла

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Батхин А.Б. Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 47. 24 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-47>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Б. Батхин

ПОРОЖДАЮЩИЕ ПЛОСКИЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ
ЗАДАЧИ ХИЛЛА

Москва, 2010 г.

УДК 521.1+531.314

А. Б. Батхин. Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Рассматривается плоская задача Хилла, являющаяся предельным случаем круговой ограниченной задачи трех тел. Система уравнений движения задачи Хилла может рассматриваться либо как сингулярно возмущенная линейная гамильтонова система, называемая промежуточной задачи Энона, либо как регулярно возмущенная задача Кеплера в равномерно вращающейся (синодической) системе координат. С помощью метода нормальной формы исследуются порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла. Показано, что в случае, когда невозмущенной задачей является промежуточная задача Энона, то единственным регулярным порождающим решением является двойко симметричная эллиптическая обратная орбита, порождающая известное семейство f . Синодическая задача Кеплера имеет счетное число порождающих семейств состоящих как из симметричных, так и из несимметричных периодических орбит. Получены асимптотики периода и индекса устойчивости порождающих решений.

A. B. Batkhin. Generating planar periodic orbits of the Hill's problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We consider the planar Hill's problem which is a limiting case of the circular restricted three-body problem. The system of equations of motion of the problem can be considered either as a singularly perturbed linear Hamiltonian system (called the intermediate Hénon problem) or as a regularly perturbed Kepler problem in the uniformly rotating (sinodical) frame. Generating planar periodic orbits of the Hill's problem are investigated with the method of normal form. It was shown that in the case of unperturbed problem being intermediate Henon problem, the only generating solution is the double symmetric elliptical reverse orbit which generates the known family f . In the case of the generating problem being the sinodical Kepler problem there are a countable set of generating families, which include both symmetrical and asymmetrical periodic orbits. Asymptotic forms for period and stability index of generating solutions were obtained.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: batkhin@gmail.com

сайт: www.keldysh.ru

Введение

Пусть задана система канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial H / \partial \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\partial H / \partial \mathbf{x}, \quad (1)$$

которая определяется функцией Гамильтона H вида

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon R(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2)$$

где H_0 — невозмущенная часть, определяющая интегрируемую систему канонических уравнений, а R — некоторое возмущение, \mathbf{x} — координаты, а \mathbf{y} — канонически сопряженные импульсы. Система канонических уравнений, определенных невозмущенной частью H_0 гамильтониана (2), имеет множество решений, среди которых будут такие, что могут быть продолжены до решений системы (1) при $\varepsilon > 0$. Такие решения будем называть *порождающими решениями*. Очевидно, что структура порождающих решений определяется видом возмущающей функции R . Порождающие решения будем называть *регулярными*, если они не проходят через особые точки функций R и H_0 .

В данной работе для поиска периодических порождающих решений используется метод нормальных форм. Напомним его основные идеи так, как это изложено в главах I, II и VII книги [1].

Пусть автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы определяется функцией Гамильтона $H_0 = -y_1 + f(y_2)$ и возмущающей функцией $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, причем функции $f(y_2)$ и $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ аналитичны по своим аргументам в некоторой области и R — двояко периодическая по координатам $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. При $\varepsilon = 0$ и $y_2 = 0$ система (1) имеет аналитическое интегральное многообразие \mathcal{M} , расслоенное на инвариантные торы $\mathcal{T}(y_1^0)$, на которых движение имеет вид

$$y_1 = y_1^0, \quad x_1 = x_1^0 - t, \quad x_2 = x_2^0 - Nt, \quad (3)$$

где $N = f'(0)$.

Существует такая каноническая замена локальных координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \varepsilon \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}^* + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \varepsilon) \quad (4)$$

многообразия \mathcal{M} , которая приводит исходную гамильтонову систему (1) к гамильтоновой нормальной форме с гамильтонианом $H^* = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k H_k^*$, причем $H_0^* = H_0(y_1, y_2)$, $H_1^* = [R(\mathbf{x}, \mathbf{y})]$. Здесь квадратные скобки $[\cdot]$ означают усреднение вдоль решений (3).

Если $N = (p+q)/p$ — рациональное число, где $p > 0$ и q — взаимно простые целые числа, то торы $\mathcal{T}(y_1^0)$ расслаиваются на периодические решения,

на которых нормализованный гамильтониан H^* зависит только от одной угловой переменной $\theta^* \stackrel{\text{def}}{=} x_1^* + N^{-1}x_2^*$. Нормализующее преобразование (4) в случае рационального N сходится на множестве \mathcal{A} , определяемом системой уравнений

$$\partial H^* / \partial \theta^* = 0, \quad \partial H^* / \partial y_1^* = 0.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решения этой системы и есть порождающие решения, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial [R]}{\partial \theta^*} = 0, \quad (5)$$

при этом поправки первого порядка к периоду T и к индексу устойчивости s порождающего решения определяются по формулам

$$T = T_0 + \varepsilon T_0 \frac{\partial [R]}{\partial y_1} + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

$$s = 1 - \frac{\varepsilon}{2} f''(0) T_0^2 N^{-2} \frac{\partial^2 [R]}{\partial \theta^{*2}} + O(\varepsilon^2). \quad (7)$$

1. Уравнения задачи Хилла и их свойства

Задача Хилла является некоторым предельным случаем известной *ограниченной задачи трех тел* (ОЗТТ) и используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Если два массивных тела равномерно вращаются по круговым орбитам относительно общего центра масс, то задача называется *круговой*, если движутся по эллипсам, то, соответственно, *эллиптической*. Если спутник движется в плоскости тяготеющих тел, то задача называется *плоской*. Место задачи Хилла в иерархии небесно–механических задач показано на рис. 3.1 в [2, п. 3.1].

Задача Хилла имеет многочисленные применения (см., например, [2]), но первоначально была предложена Дж. Хиллом (G. Hill) для построения теории движения Луны [3] в системе Солнце–Земля–Луна.

1.1. Уравнения задачи. Уравнения задачи Хилла могут быть получены различными способами, но традиционный подход состоит в том, что уравнения ОЗТТ подвергаются так называемому *преобразованию Хилла*, которое состоит в переносе начала координат в точку положения меньшего из двух тел и последующего масштабирования координат. В исходной постановке круговая ОЗТТ рассматривается в синодической (равномерно вращающейся) системе координат, центр которой находится в центре масс тяготеющих тел, а сами тела массами μ и $1 - \mu$, $0 < \mu < 1/2$ располагаются на оси OX в

точках с координатами $(\mu - 1, 0)$ и $(\mu, 0)$, соответственно. В случае плоской задачи преобразование Хилла имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \mu - 1 + \mu^\alpha \xi_1, & y_1 &= \mu^\alpha \eta_1, \\ x_2 &= \mu^\alpha \xi_2, & y_2 &= \mu - 1 + \mu^\alpha \eta_2, \end{aligned} \quad (8)$$

а при $\alpha = 1/3$ потенциальная функция тела массы μ имеет по величине тот же порядок, что и слагаемые, соответствующие силе Кориолиса и центробежной силе в гамильтониане ОЗТТ (см. [4, §10.4]).

Удобнее, однако, выполнять преобразования функции Гамильтона ОЗТТ, а затем уже записывать канонические уравнения. Такой подход был использован в [5, 6], где гамильтониан задачи Хилла получался из гамильтониана ОЗТТ методами степенной геометрии [7]. В [2, §3.2] гамильтониан задачи Хилла получался из гамильтониана ОЗТТ с помощью канонических преобразований.

Гамильтониан плоской круговой задачи Хилла в векторной форме имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \mathbf{y}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{x} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} - \frac{1}{2} \left(3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{x} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \right), \quad (9)$$

где \mathbf{x} — синодические координаты, \mathbf{y} — канонически сопряженные импульсы, \mathbf{e}_i — единичный i -й орт, $\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. В координатном представлении гамильтониан записывается в виде

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{1}{r} - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \quad (10)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Канонические уравнения задачи Хилла, определяемые гамильтонианом (9), имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, & \dot{y}_1 = y_2 + 2x_1 - \frac{x_1}{r^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, & \dot{y}_2 = -y_1 - x_2 - \frac{x_2}{r^3}. \end{cases} \quad (11)$$

Традиционный способ записи уравнений задачи Хилла дается в обобщенных координатах и скоростях $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\dot{x}_2 + 3x_1 - \frac{x_1}{r^3}, \\ \ddot{x}_2 = -2\dot{x}_1 - \frac{x_2}{r^3}. \end{cases} \quad (12)$$

1.2. Интеграл Якоби. Гамильтониан (9) задачи Хилла автономен, следовательно, он является первым интегралом уравнений движения (11), который традиционно записывается в форме *интеграла Якоби* в переменных $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:

$$C = 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2, \quad (13)$$

где C — константа Якоби. Значение гамильтониана H связано со значением константы Якоби соотношением

$$C = -2H. \quad (14)$$

В [8] доказано с использованием техники групп Галуа, что других первых интегралов уравнений задачи Хилла нет, и, следовательно, эта задача является неинтегрируемой.

1.3. Симметрии уравнений задачи Хилла. Уравнения задачи Хилла (11) инвариантны относительно конечной группы 4 порядка линейных преобразований фазовых переменных (\mathbf{x}, \mathbf{y}) и времени t , которые задаются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{\alpha,\beta} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \tilde{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \quad t = \alpha\tilde{t}, \quad (15)$$

здесь матрица $\mathbf{Q}_{\alpha,\beta} = \text{diag}\{\alpha\beta, \alpha, \alpha, \alpha\beta\}$, $\alpha, \beta = \pm 1$. Матрица $\mathbf{Q}_{1,1}$ задает тождественное преобразование, $\mathbf{Q}_{-1,1}$ — центральную симметрию относительно начала координат, а матрицы $\mathbf{Q}_{-1,-1}$ и $\mathbf{Q}_{1,-1}$ — симметрии относительно осей OX и OY , соответственно. Будем преобразования симметрии (15), задаваемое матрицей $\mathbf{Q}_{-1,-1}$, обозначать Σ_1 , матрицей $\mathbf{Q}_{1,-1}$ обозначать Σ_2 , а матрицей $\mathbf{Q}_{-1,1}$ обозначать Σ_{12} . Очевидно, что $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \Sigma_2 \circ \Sigma_1 = \Sigma_{12}$.

Все периодические решения задачи Хилла могут быть разделены на 4 группы в зависимости от того, как они меняются под действием преобразования (15):

несимметричные решения, которые под действием любого из преобразований (15) (кроме тождественного) переходят в другое решение; всего таких решений может быть столько, каков порядок группы преобразований, т. е. 4;

однократно симметричные решения, которые под действием одного из преобразований (15) переходят сами в себя, при этом другие преобразования позволяют получить еще одно новое решение;

двукратно симметричные решения, инвариантные относительно любого из преобразований (15).

1.4. Продолжение периодических решений. Интерес к задаче Хилла вызван не в последнюю очередь тем, что ее периодические решения могут быть продолжены до периодических решений как ОЗТТ, так и общей задачи трех тел.

В работе [9] доказано утверждение, что Σ_1 -симметричное семейство периодических решений задачи Хилла может быть продолжено до однопараметрического симметричного семейства ОЗТТ. Там же приведены поправки первого порядка к начальным условиям периодического решения.

В книге [10, §11.2] доказываются утверждения о том, что любые периодические решения задачи Хилла с периодом, не кратным величине 2π , могут быть продолжены до относительных периодических решений общей задачи трех тел.

2. Задача Хилла как сингулярное возмущение промежуточной задачи Энона

Гамильтониан (10) задачи Хилла можно записать в виде

$$\begin{aligned} H &= H_0 + R, \\ \text{где} \\ H_0 &= \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2, \\ R &= -\frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

Квадратичный гамильтониан $H_0 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{\Gamma} \mathbf{z} \rangle / 2$, где $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{\Gamma}$ — симметричная матрица, задает линейную систему канонических уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = J \mathbf{\Gamma} \mathbf{z}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Эта система в переменных $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ была представлена в работе М. Энона (M. Hénon) [11] в виде

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2 - 3x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 = 0. \quad (18)$$

А. Д. Брюно (см. [12]) называл систему уравнений (17) *промежуточной задачей Энона*. Следует отметить, что уравнения (18) использовались В. В. Белецким для описания относительного движения космонавта вблизи спутника, находящегося на круговой орбите [13, очерк 11, п. 3]. Л. Перко (L. Perko) [14, 15] использовал промежуточную задачу Энона для доказательства существования семейств периодических решений f, g, a, c, g' плоской задачи Хилла.

Каноническая замена переменных с валентностью $1/|C|$

$$\mathbf{x} = \sqrt{|C|}\mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = \sqrt{|C|}\mathbf{Y}, \quad (19)$$

где C — постоянная Якоби, приводит гамильтониан (16) задачи Хилла к виду

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H/|C| = H_0(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \varepsilon R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

где $\varepsilon = 1/|C|^{3/2}$. Таким образом, для $C \ll 0$ задачу Хилла можно рассматривать как возмущение промежуточной задачи Энона (17) функцией R , которая имеет особенность в начале координат. При этом решения невозмущенной задачи, определяемой гамильтонианом H_0 , должны удовлетворять первому интегралу

$$H_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) = \frac{1}{2} \quad (20)$$

в силу соотношения (14), которое после преобразования (19) принимает вид $\mathcal{H} = -\text{sign } C/2$.

2.1. Регулярные порождающие решения. Выполним нормализацию гамильтониана H_0 . Для этого построим такую производящую функцию Якоби $S_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ [4, гл. 6], чтобы в новых переменных (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) гамильтониан H_0 имел наиболее простой вид, который определяется структурой элементарных делителей матрицы $J\Gamma$ [1]. При этом старые переменные (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) и новые переменные (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) связаны соотношениями

$$\mathbf{Y} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{P}}.$$

Производящая функция $S_2 = X_1(P_2 - X_2) + P_2(X_2 - 2P_1)$ определяет замену переменных

$$\begin{aligned} X_1 &= Q_1 + 2P_2, & Y_1 &= -P_1 - Q_2, \\ X_2 &= Q_2 + 2P_1, & Y_2 &= -P_2 - Q_1, \end{aligned} \quad (21)$$

после которой функция H_0 примет вид

$$H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2}(Q_1^2 + P_1^2) - \frac{3}{2}P_2^2,$$

а возмущение R запишется так

$$R(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{\sqrt{(Q_1 + 2P_2)^2 + (Q_2 + 2P_1)^2}}. \quad (22)$$

Общее решение системы канонических уравнений, задаваемых гамильтонианом H_0 , имеет вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, & P_1 &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \\ Q_2 &= c_3 t + c_4, & P_2 &= c_3, \end{aligned} \quad (23)$$

при этом произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 должны удовлетворять соотношению $c_1^2 + c_2^2 - 3c_3^2 = 1$. Поскольку нас интересуют регулярные порождающие решения, т. е. периодические и не проходящие через начало координат, то $c_3 = 0$, начальный момент времени можно выбрать таким, что $c_2 = 0$, тогда $c_1 = 1$, а $c_4 \neq \pm 2$. Таким образом, получаем однопараметрическое семейство периодических решений

$$Q_1 = \cos t, \quad Q_2 = Q_2^0, \quad P_1 = -\sin t, \quad P_2 = 0, \quad (24)$$

которое в исходных переменных задает семейство эллипсов с полуосями 1 и 2 и центром в точке $(0, Q_2^0)$:

$$X_1(t) = \cos t, \quad X_2(t) = -2 \sin t + Q_2^0. \quad (25)$$

Определим, какие значения произвольной постоянной Q_2^0 определяют порождающее решение для возмущения R . Для этого приведем Гамильтониан H_0 к виду $H_0 = -\mathcal{Y}_1 + f(\mathcal{Y}_2)$ и применим метод нормальных форм (см. «Введение» или гл. VII, § 1 [1]).

Выполним еще одну каноническую замену переменных с заменой независимой переменной $t = -\tau$:

$$Q_1 = \sqrt{2L} \cos \varphi, \quad P_1 = \sqrt{2L} \sin \varphi, \quad (26)$$

после которой гамильтониан примет вид $\tilde{H}_0(\varphi, Q_2, L, P_2) = -L + 3P_2^2/2$, а семейство периодических решений будет определяться значениями

$$\varphi = -\tau, \quad L = 1/2, \quad Q_2 = Q_2^0, \quad P_2 = 0. \quad (27)$$

На этом семействе возмущение R записывается в виде

$$\tilde{R}(Q_2^0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{(Q_2^0)^2 - 4Q_2^0 \sin \tau + 3 \sin^2 \tau + 1}}. \quad (28)$$

Как следует из (5) порождающие решения невозмущенной задачи должны удовлетворять условию $\partial [\tilde{R}] / \partial Q_2^0 = 0$, где квадратные скобки $[\tilde{R}]$ означают усреднение вдоль решения (27):

$$[\tilde{R}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{R}(Q_2^0, \tau) d\tau.$$

Функция \tilde{R} непрерывна всюду кроме точек $Q_2^0 = \pm 2$, а ее усреднение может быть выражено через эллиптические функции, но это выражение

слишком громоздко для его аналитического исследования. Проще провести численный анализ функции $[\tilde{R}]$, график которой показан на рис. 1.

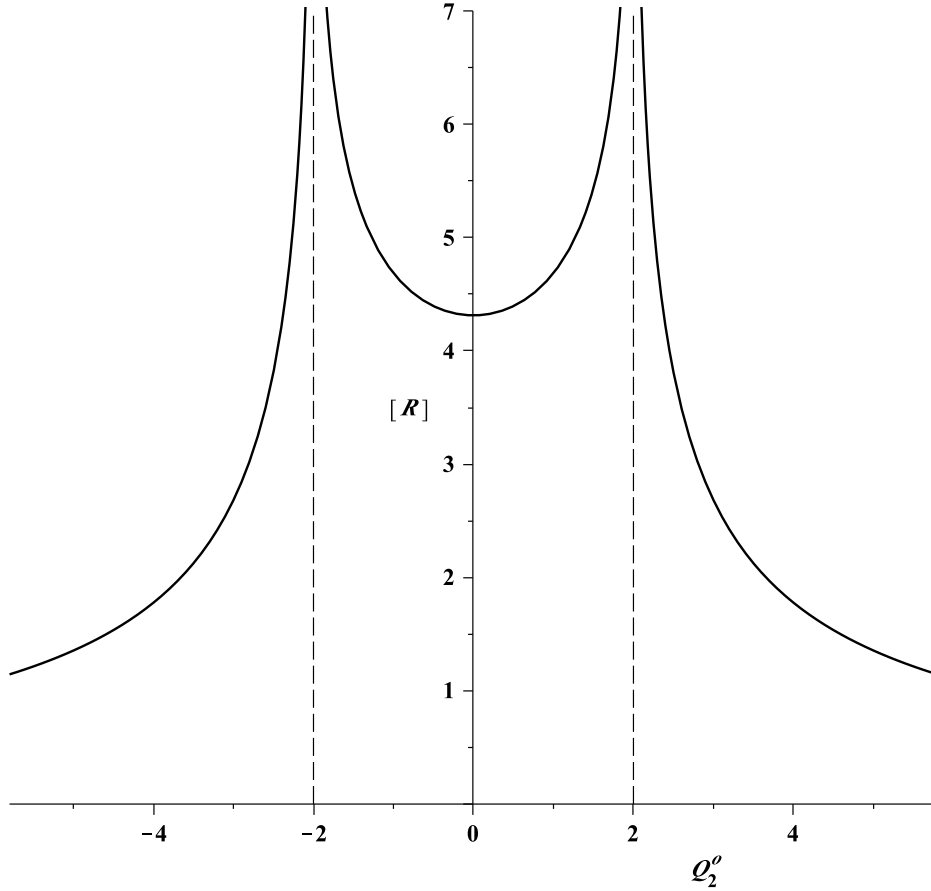


Рис. 1: Зависимость усреднения возмущения \tilde{R} от параметра Q_2^0 .

Функция $[\tilde{R}(Q_2^0)]$ имеет единственную точку экстремума при $Q_2^0 = 0$, следовательно, порождающим решением будет эллипс (25) с центром в начале координат, который ортогонально пересекает оси симметрии задачи Хилла. Это решение является порождающим для семейства f двоякосимметричных обратных однооборотных орбит, впервые посчитанных Дж. Джексоном (1913 г.) и Т. Матукумой (1932, 1957 г.г.) (см. [11]). Л. Перко (L. Perko) в [14] находил поправки первого порядка к начальным условиям и периоду орбит семейства f при $C \rightarrow \infty$, однако приведенные на стр. 345–346 формулы ошибочны.

Для определения поправки первого порядка к периоду порождающего решения необходимо найти значение $\partial [\tilde{R}] / \partial L$ на порождающем решении (27) при $Q_2 = 0$, тогда, согласно формуле (6),

$$T = T_0 + \varepsilon T_0 \left. \partial [\tilde{R}] / \partial L \right|_{L=1/2} + O(\varepsilon^2). \quad (29)$$

Выполняя в (22) замену (26) и подставляя порождающее решение, получим

$$\partial [\tilde{R}] / \partial L \Big|_{L=1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \tau}} = \frac{1}{\pi} K \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода (см., например, [16, глава VII]). Таким образом, асимптотика периода семейства f задается формулой

$$T = 2\pi - 2K \left(\sqrt{3}/2 \right) |C|^{-3/2} + O(|C|^{-3}) \approx 2\pi - 4,313031295 \cdot |C|^{-3/2}. \quad (30)$$

Итак, среди регулярных периодических решений промежуточной задачи Энона (16) единственной порождающей орбитой является двоякосимметричное решение (25) с начальным условием $Q_2^0 = 0$.

Замечание 1. М. Энон показал (см. [11, 17, 18]), что порождающими решениями семейств периодических орбит задачи Хилла является не только регулярное решение (27) для $Q_2^0 = 0$, но и любое решение, составленное из эпициклоидальных дуг и эллипсов (27) для $Q_2^0 = \pm 2$. Однако, такие порождающие решения не являются регулярными, поскольку все они проходят через начало координат — точку особенности возмущающей функции R .

3. Задача Хилла как регулярное возмущение кеплеровой задачи

Задачу Хилла можно рассматривать как регулярное возмущение кеплеровой задачи в синодической системе координат, т. е. теперь

$$H = H_0 + \varepsilon R,$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 - \frac{1}{r}, \quad (31)$$

$$R = \frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{2} x_1^2.$$

При $\varepsilon = 0$ имеем гамильтониан задачи Кеплера в равномерно вращающейся синодической системе координат, а при $\varepsilon = 1$ получаем гамильтониан задачи Хилла.

Такое представление задачи Хилла было впервые, по-видимому, предложено в [12], но так и не было использовано для поиска новых семейств периодических решений задачи Хилла.

Напомним, что все конечные движения в задаче Кеплера в сидерической (инерциальной) системе координат являются периодическими, а их орбиты представляют собой эллипсы. Движение материальной точки по эллипсу однозначно определяется следующими элементами: a — большой полуосью орбиты, e — эксцентриситетом, ϖ — аргументом перицентра, l — средней аномалией и направлением движения $\varepsilon' = \pm 1$. Если начало координат сидерической системы поместить в фокус эллипса, а в качестве начального момента времени выбрать момент прохождения перицентра, то движение тела описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varpi (\cos E - \varepsilon' e) - a \sin \varpi \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ y &= a \sin \varpi (\cos E - \varepsilon' e) + a \cos \varpi \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ t &= a^{3/2} l, \end{aligned} \quad (32)$$

где E — эксцентрическая аномалия. Связь между средней аномалией l и эксцентрической аномалией E задается уравнением Кеплера: $l = E - e \sin E$. Связь между эксцентрической аномалией E и истинной аномалией v показана на рис. 2.

При переходе в синодическую — равномерно вращающуюся — систему координат периодическими решениями будут либо те, у которых сидерические орбиты круговые, либо те, у которых период соизмерим с периодом равномерного вращения 2π . Более того, в синодической системе появляется множество неподвижных точек, расположенных на единичной окружности.

Периодические решения синодической кеплеровой задачи представлены двумя однопараметрическими семействами круговых прямых и обратных $\mathcal{I}d$ и $\mathcal{I}r$, соответственно, и счетным числом трехмерных многообразий \mathcal{D}_N для $N = 1 + q/p$, где $p > 0$ и q — взаимно простые целые числа.

3.1. Возмущение стационарных точек. Стационарные точки системы канонических уравнений синодической Кеплеровой задачи образуют единичную окружность $r = 1$ на плоскости XOY , которая при возмущении R разрушается, но остаются две пары стационарных точек. Первая пара с координатами $(\pm(1 + 2\varepsilon)^{-1/3}, 0)$ лежит на оси OX и соответствует коллинеарным точкам либрации. Вторая пара неподвижных точек с координатами $(0, \pm(1 - \varepsilon)^{-1/3})$ лежит на оси OY и стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 1$. Следует ожидать, что прямооборотные орбиты, расположенные вне единичной окружности, будут разрушаться при возмущении Хилла (31).

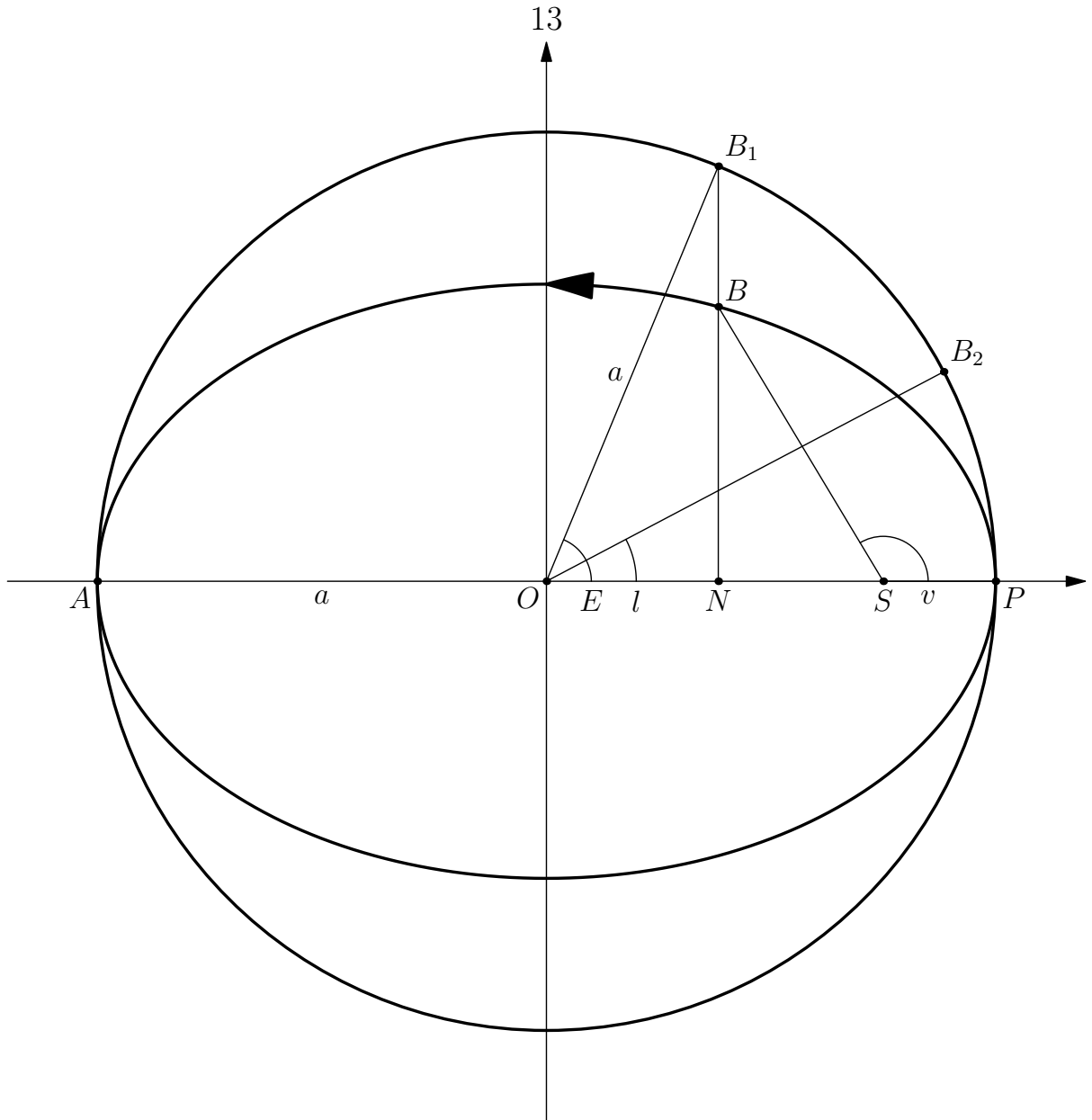


Рис. 2: Геометрическая интерпретация эксцентрисической и истинной аномалий на примере эллиптической орбиты при $a = 1$ и $e = 0.75$.

3.2. Возмущение эллиптических орбит. Будем рассматривать порождающую задачу в модифицированных элементах Делоне (см. [4, гл. 7]). В этих координатах гамильтониан H_0 представлен в нормальной форме в окрестности интегральных многообразий прямо и обратно оборотных эллиптических орбит $\mathcal{D}d_N$ и $\mathcal{D}r_N$, соответственно [1, гл. VII, §2], а первое приближение нормальной формы гамильтониана H получается в результате усреднения возмущения R (см. [19, п. 4.4]). Далее будем использовать обозначения, принятые в [1, гл. VII].

В переменных Делоне (l, g, L, G) , смысл которых будет объяснен ниже,

гамильтониан (31) запишется следующим образом:

$$H_0 = -G - \frac{1}{2L^2}, \quad R = \frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{2}r^2 \cos^2 h, \quad (33)$$

где r и h — полярные координаты точки. При $\varepsilon = 0$ эллиптические орбиты определяются следующими значениями переменных Делоне:

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \varepsilon' \sqrt{a(1 - e^2)}, \quad l = Nt, \quad g = \varpi - t, \quad (34)$$

где a — большая полуось орбиты, e — ее эксцентриситет, $N = a^{-3/2}$ — среднее движение по орбите, ϖ — аргумент перицентра орбиты, а $\varepsilon' = \pm 1$ при прямом или обратном движении по орбите, соответственно. Величина $\varepsilon'l$ есть средняя аномалия, определяющая положение точки на эллиптической орбите в определенный момент времени, а g задает движение перицентра орбиты. Поскольку выбрана синодическая система координат, то перицентр эллиптической орбиты равномерно вращается против часовой стрелки. Наконец, обобщенные импульсы L и G связаны со значениями первых интегралов движения: L с интегралом энергии, а G есть интеграл площадей.

Каждое из многообразий $\mathcal{M} \in \mathcal{D}d_N \cup \mathcal{D}r_N$ выделяется значением $L = L_0$. Будем рассматривать только такие L_0 , что среднее движение $N = L_0^{-3}$ будет рациональным числом, представимым в виде $N = 1 + q/p$, тогда многообразии \mathcal{M} состоят из периодических орбит с периодом $T_0 = 2\pi p$. На этих резонансах гамильтониан H будет зависеть только от одной угловой переменной ϖ и обобщенного импульса G . Условие, выделяющее среди множества периодических решений многообразия \mathcal{M} порождающие орбиты согласно формуле (5), следующее:

$$\frac{\partial [R(\varpi, G)]}{\partial \varpi} = 0, \quad (35)$$

где скобки $[\cdot]$ означают усреднение вдоль периодического решения. Таким образом, порождающие решения, удовлетворяющие (35), образуют однопараметрическое семейство.

Для определения порождающих решений при возмущении (33) перепишем функцию R как функцию от средней аномалии l , тогда

$$[R] = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} R(t, \varpi, G) dt = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi(p+q)} R(l, \varpi, N) N^{-1} dl. \quad (36)$$

Угловая координата h точки будет определяться положением перицентра g и значением истинной аномалии v :

$$h = \varepsilon'v + g = \varepsilon'v + \varpi - N^{-1}l(v). \quad (37)$$

Истинная аномалия v связана со средней аномалией l через эксцентрикескую аномалию E соотношением $\operatorname{tg}(v/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \operatorname{tg}(E/2)$ и уравнением Кеплера $l = E - e \sin E$.

Представим возмущающую функцию R в виде суммы двух слагаемых: $R = R_1 + R_2$, где $R_1 = -r^2/4$, $R_2 = -3/4 \cdot r^2 \cos 2h$. Поскольку функция R_1 не зависит от ϖ , то и ее усреднение $[R_1]$ будет зависеть только от L и G (или от a и e), следовательно, $\partial[R_1]/\partial\varpi \equiv 0$.

Подставим выражение (37) в функцию R_2 и, с учетом соотношений $x = r \cos v$ и $y = r \sin v$, запишем ее в виде

$$R_2 = -\frac{3}{4} (x^2 - y^2) \left(\cos 2\varpi \cos \frac{2pl}{p+q} + \sin 2\varpi \sin \frac{2pl}{p+q} \right) - \frac{3}{2} \varepsilon' xy \left(\cos 2\varpi \sin \frac{2pl}{p+q} - \sin 2\varpi \cos \frac{2pl}{p+q} \right). \quad (38)$$

Для представления величин x^2 , y^2 и xy как функций средней аномалии воспользуемся соотношениями (см. рис. 2)

$$x = a(\cos E - e), \quad y = a\sqrt{1-e^2} \sin E, \quad (39)$$

тогда

$$x^2 - y^2 = \frac{3}{2}a^2 - 2a^2e \cos E + a^2 \left(1 - \frac{1}{2}e^2 \right) \cos 2E, \quad (40)$$

$$xy = a^2 \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2E - \sin E \right). \quad (41)$$

Теперь воспользуемся разложением тригонометрических функций эксцентрикеской аномалии в ряды Фурье по средней аномалии с помощью функций Бесселя первого рода (см. [20, гл. VI, § 5]):

$$\cos E = -\frac{1}{2}e + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'(ke) \cos kl, \quad (42)$$

$$\cos mE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) - J_{k+m}(ke)] \cos kl, \quad m > 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k} [J_{k-m}(ke) + J_{k+m}(ke)] \sin kl. \quad (44)$$

Используя тождества

$$J'_k(x) = \frac{1}{2} (J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x)), \quad \frac{x}{2} (J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x)) = kJ_k(x),$$

запишем функции (40) и (41) в виде тригонометрических рядов по l с коэффициентами от функций Бесселя одного порядка

$$x^2 - y^2 = \frac{5}{2}a^2e^2 + 4a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [-eJ'_k(ke) + (2 - e^2)J''_k(ke)] \cos kl, \quad (45)$$

$$xy = 4a^2\sqrt{1 - e^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J''_k(ke) \sin kl. \quad (46)$$

Поскольку $[\cos kl \sin ml] = 0$ при любых целых k и m , функция $x^2 - y^2$ разлагается в ряд по $\cos kl$, а функция xy в ряд по $\sin kl$, то достаточно посчитать только усреднение $\left[(x^2 - y^2) \cos 2\varpi \cos \frac{2pl}{p+q} \right]$ и $\left[2\varepsilon' xy \cos 2\varpi \sin \frac{2pl}{p+q} \right]$. Заметим, что

$$[\cos kl \cos ml] = [\sin kl \sin ml] = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } k = m, \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}. \quad (47)$$

Из вида (38) возмущающей функции R_2 и представления ее компонентов в виде разложения в ряды Фурье по средней аномалии l (45–46) следует, что ее усреднение $[R_2]$ представимо в виде

$$[R_2] = F(p, \varepsilon, e) \cos 2\varpi, \quad (48)$$

где $F(p, \varepsilon, e)$ — некоторая функция от указанных аргументов. Следовательно, условие (35) выполняется в одном из двух случаев: либо

$$\varpi = n\pi/2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p, \varepsilon', e — \text{любые}, \quad (49)$$

либо

$$F(p, \varepsilon', e) = 0, \quad \varpi — \text{любое}. \quad (50)$$

При выполнении условия (49) порождающие решения представляют собой симметричные орбиты либо относительно оси OX при $\varpi = 0, \pi$, либо относительно оси OY при $\varpi = \pm\pi/2$ при любых значениях эксцентриситета e , направления движения ε' и кратности p . Если выполнено условие (50), то корни уравнения $F(p, \varepsilon', e) = 0$ определяют несимметричные порождающие периодические решения, если $\varpi \neq n\pi/2, n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим три случая: $p + q = 1$, $p + q = 2$ и $p + q > 2$.

Случай $p + q = 1$. В этом случае при усреднении сохранятся только те члены в разложениях (45–46), у которых $k = 2p$. Таким образом, имеем

$$[R_2] = \frac{3a^2 \cos 2\varpi}{4p} \left(eJ'_{2p}(2pe) - (2 - e^2 + \varepsilon' \sqrt{1 - e^2})J''_{2p}(2pe) \right). \quad (51)$$

Случай $p + q = 2$. В этом случае при усреднении сохраняются только те члены в разложениях (45–46), у которых $k = p$. При этом p не может быть четным, поскольку тогда дробь $N = (p + q)/p$ будет сократима.

$$[R_2] = \frac{3a^2 \cos 2\varpi}{2p} \left(eJ'_p(pe) - (2 - e^2 + \varepsilon' \sqrt{1 - e^2})J''_p(pe) \right). \quad (52)$$

Случай $p + q > 2$. Поскольку числа p и q взаимно простые, то дробь $p/(p + q)$ будет несократима и не будет целым числом, значит в этом случае $k \neq p/(p + q)$ и, следовательно, $[R_2] = 0$.

Осталось заметить, что величины N и a связаны соотношением $N = a^{-3/2}$, поэтому в случае $p + q = 1$ имеем $a = p^{2/3}$, а в случае $p + q = 2 - a = (p/2)^{2/3}$. Итак, доказана следующая теорема

Теорема 3.1.

$$[R_2] = \begin{cases} \frac{3\sqrt[3]{p}}{2} \cos 2\varpi S_{2p}(\varepsilon', e) & \text{при } p + q = 1; \\ \frac{3\sqrt[3]{p}}{2^{7/3}} \cos 2\varpi S_p(\varepsilon', e) & \text{при } p + q = 2; \\ 0 & \text{при } p + q > 2, \end{cases}$$

где

$$S_p(\varepsilon', e) = eJ'_p(pe) - \left(\sqrt{1 - e^2} + \varepsilon' \right)^2 J''_p(pe), \quad (53)$$

а J_p — функция Бесселя первого рода.

Укажем некоторые свойства $S_p(\varepsilon', e)$ как функции от e :

1. На интервале $0 \leq e < 1$ функция $S_p(e)$ аналитична.
2. При $e \rightarrow 0$

$$S_p(e) = \begin{cases} -\frac{4(p-1)p^{p-1}}{p!2^p} e^{p-2} (1 + O(e^2)), & \text{при } \varepsilon' = +1, p > 1, \\ \frac{(pe)^p}{p!2^p} (1 + O(e^2)), & \text{при } \varepsilon' = -1. \end{cases}$$

3. $S_p(1) = J'_p(p) - J''_p(p) > 0$.
4. Уравнение (50) имеет единственный корень $e_p^* \in (0; 1)$ при $\varepsilon' = 1$ и $p > 1$.
5. При $\varepsilon' = -1$ уравнение (50) не имеет корней e_p^* на интервале $(0; 1)$.

Графики функции $S_p(\varepsilon', e)$ для значений $p = 1, 2, 3, 4$ и $\varepsilon' = \pm 1$ показаны на рис. 3.

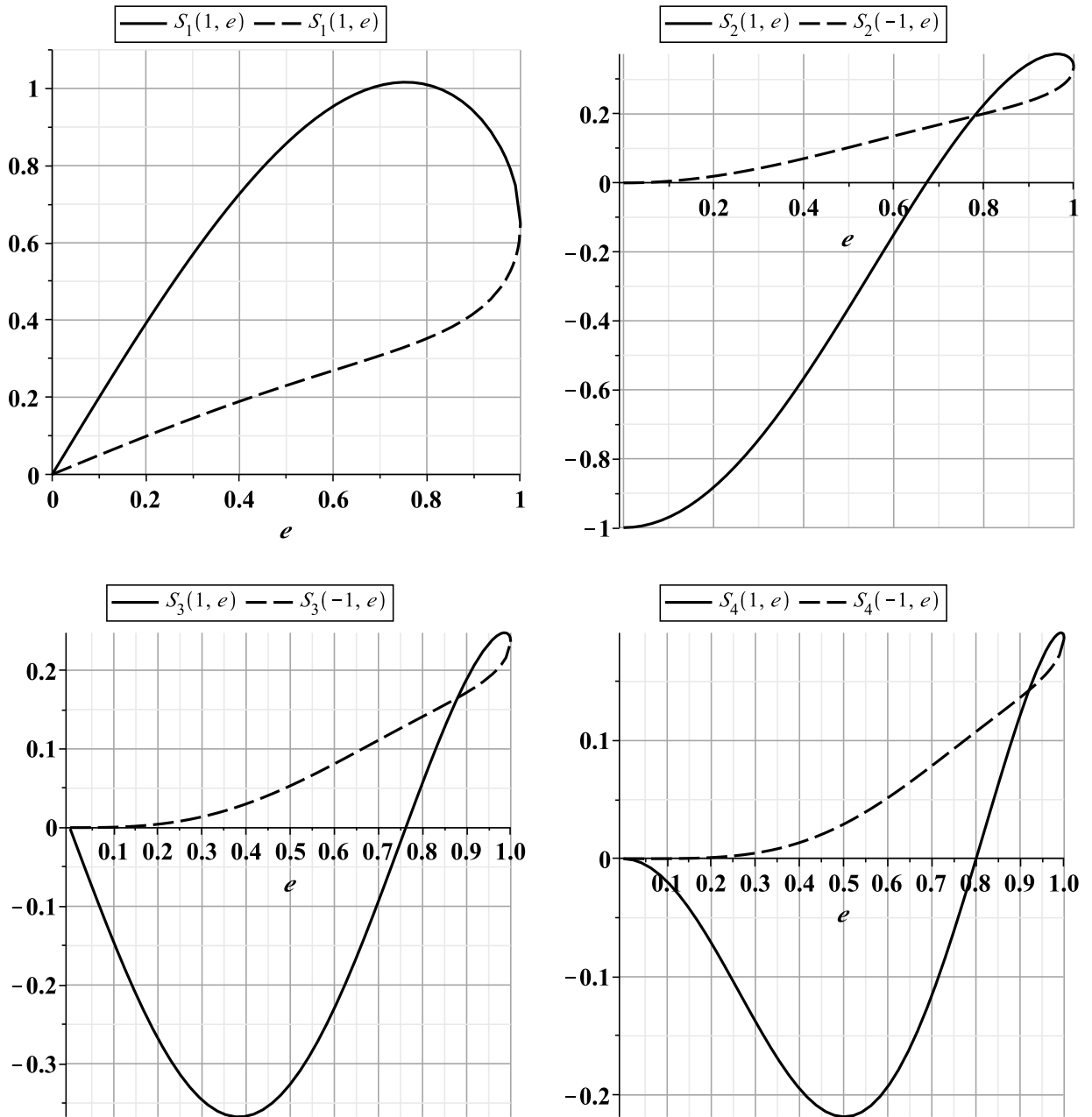


Рис. 3: Графики функции $S_p(\varepsilon', e)$ для значений $p = 1, 2, 3, 4$ (слева направо и сверху вниз). Сплошная линия соответствует значению $\varepsilon' = 1$, пунктирная — $\varepsilon' = -1$.

Для определения поправок первого порядка к периоду и индексу устойчивости порождающего периодического решения необходимо вычислить производные $\partial[R]/\partial G$ и $\partial^2[R]/\partial \varpi^2$. В силу замечания на стр. 15 $\partial^2[R]/\partial \varpi^2 = \partial^2[R_2]/\partial \varpi^2$ и, следовательно, для симметричных порождающих решений

получим

$$\frac{\partial^2[R]}{\partial \varpi^2} = \begin{cases} \pm 6\sqrt[3]{p}S_{2p}(\varepsilon', e) & \text{при } p + q = 1; \\ \pm \frac{3\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{2}}S_p(\varepsilon', e) & \text{при } p + q = 2. \end{cases}$$

Функция $f(y_2)$ для гамильтониана (33) имеет вид $f(y_2) = -1/2(y_2 + L_0)^{-2}$, тогда $f''(0) = -3L_0^{-4} = -3a^{-2}$. Учитывая, что $T_0 = 2\pi p$ согласно формуле (7), получаем выражение для индекса устойчивости

$$s = \begin{cases} 1 \mp 36\varepsilon\pi^2 p^3 S_{2p}(\varepsilon', e) + O(\varepsilon^2) & \text{при } p + q = 1, \\ 1 \mp 9\varepsilon\pi^2 p^3 S_p(\varepsilon', e) + O(\varepsilon^2) & \text{при } p + q = 2. \end{cases} \quad (54)$$

При этом знак « $-$ » соответствует порождающим решениям с $\varpi = 0, \pi$, а знак « $+$ » — порождающим решениям с $\varpi = \pi/2, 3\pi/2$.

Для вычисления $[R_1]$ воспользуемся разложением r^2 по средней аномалии:

$$r^2 = a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{k^2} J_k(ke) \cos kl.$$

Усредняя по средней аномалии, получим

$$[R_1] = \begin{cases} -\frac{p^{4/3}}{4} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) & \text{при } p + q = 1, \\ -\frac{p^{4/3}}{2^{10/3}} \left(1 + \frac{3}{2}e^2\right) & \text{при } p + q = 2, \\ 0 & \text{при } p + q > 2. \end{cases} \quad (55)$$

Остается учесть, что обобщенный импульс G связан с эксцентриситетом e соотношением (34), а тогда

$$\frac{\partial[R]}{\partial G} = \frac{\partial[R]}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial G} = \frac{\partial[R]}{\partial e} \cdot \frac{1}{G'_e} = -\frac{\partial[R]}{\partial e} \frac{\varepsilon' \sqrt{ae}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

В итоге получаем разложение для периода порождающего решения с точностью до первого порядка по ε

$$T = \begin{cases} 2\pi p \left[1 - \varepsilon \frac{3\varepsilon' p^{2/3} e}{2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{pe}{2} - \cos 2\varpi S'_{2p}(\varepsilon', e)\right) + O(\varepsilon^2)\right] & \text{при } p + q = 1, \\ 2\pi p \left[1 - \varepsilon \frac{3\varepsilon' p^{2/3} e}{\beta\sqrt{1-e^2}} (pe - 2 \cos 2\varpi S'_p(\varepsilon', e)) + O(\varepsilon^2)\right] & \text{при } p + q = 2, \end{cases}$$

где $\beta = 2^{10/3}$.

Рассмотрим подробнее порождающие решения. Выделяется два их типа: симметричные, удовлетворяющие условию (49) и несимметричные, удовлетворяющие условию (50). В каждом из случаев число порождающих семейств счетно.

Симметричные порождающие решения. Это семейства периодических орбит с фиксированным значением аргумента перицентра $\varpi = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$, направлением движения $\varepsilon' = \pm 1$ и произвольным значением эксцентриситета из интервала $0 < e \leq 1$.

Если $p + q = 1$, то четность целых чисел p и q различна. В этом случае имеется два Σ_1 -симметричных семейства с $\varpi = 0, \pi$ и два Σ_2 -симметричных семейства с $\varpi = \pi/2, 3\pi/2$. Примеры орбит показаны на рис. 4.

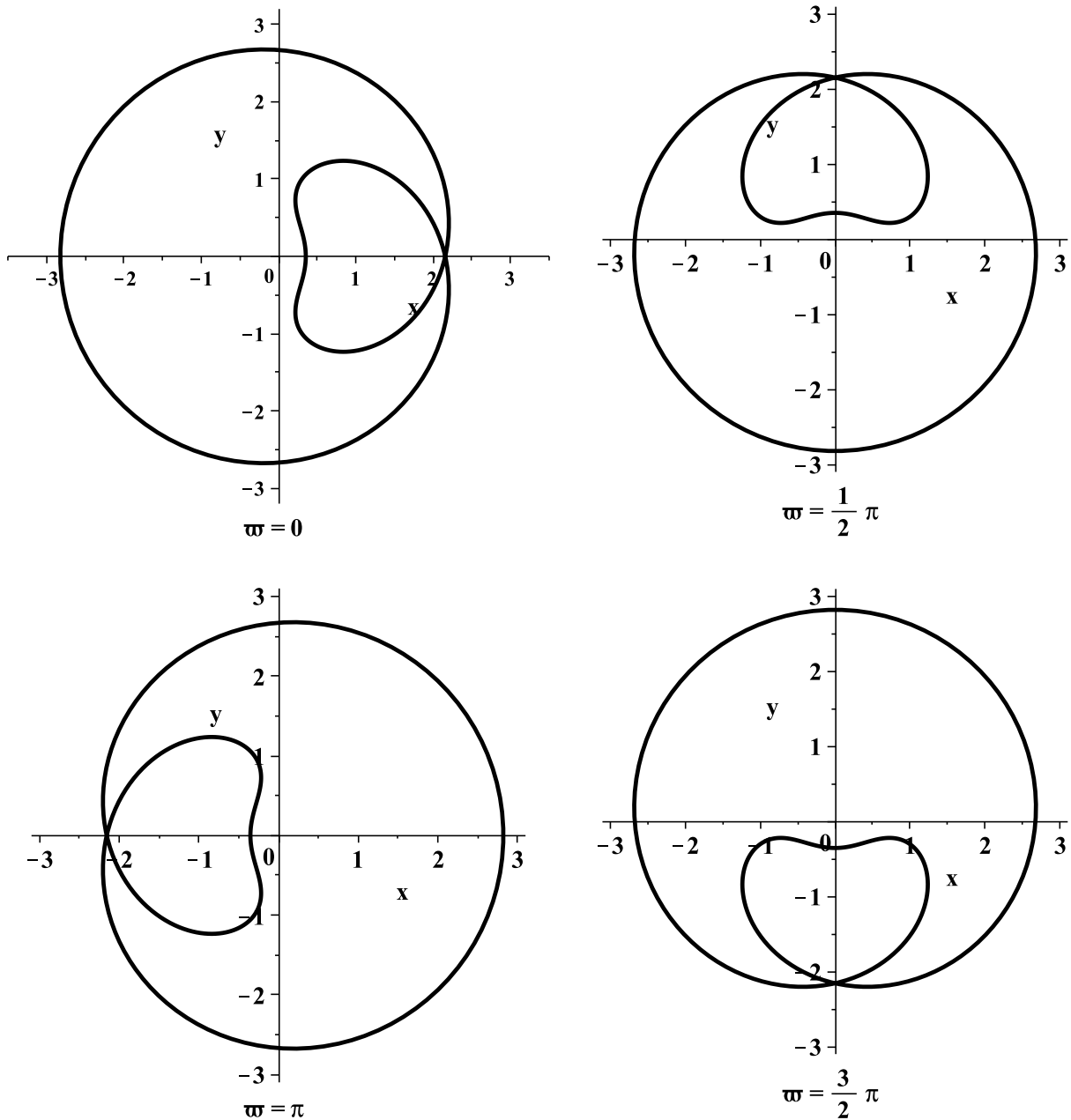


Рис. 4: Однократно симметричные прямые порождающие орбиты при $p = 2$, $q = -1$, $e = 7/9$, $\varepsilon' = 1$.

Согласно формуле (54) одна пара решений будет при продолжении

на параметру ε давать устойчивые орбиты, а другая неустойчивые. При $e < e_p^*$ устойчивые орбиты будут Σ_2 -симметричные, а при $e > e_p^*$ — Σ_1 -симметричные.

Если $p + q = 2$, то оба целых числа p и q нечетные. В этом случае имеется два двойко симметричных семейства порождающих решения с $\varpi = 0, \pi/2$, соответственно. Примеры орбит показаны на рис. 5.

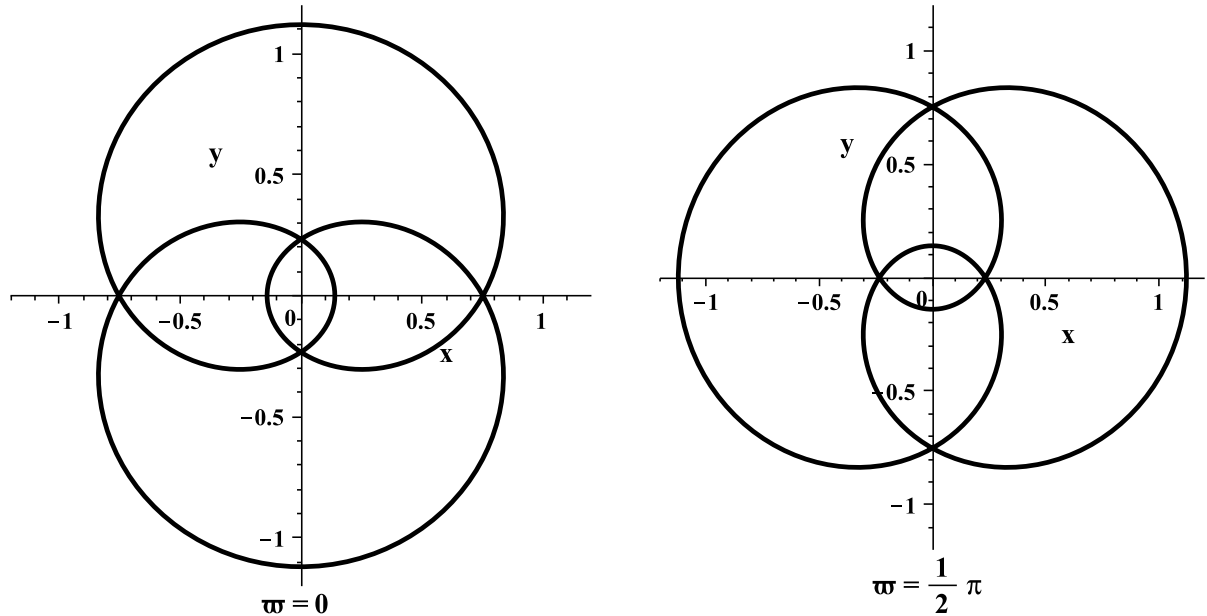


Рис. 5: Двойко симметричные обратные порождающие орбиты при $p = 1$, $q = 1$, $e = 7/9$, $\varepsilon' = -1$.

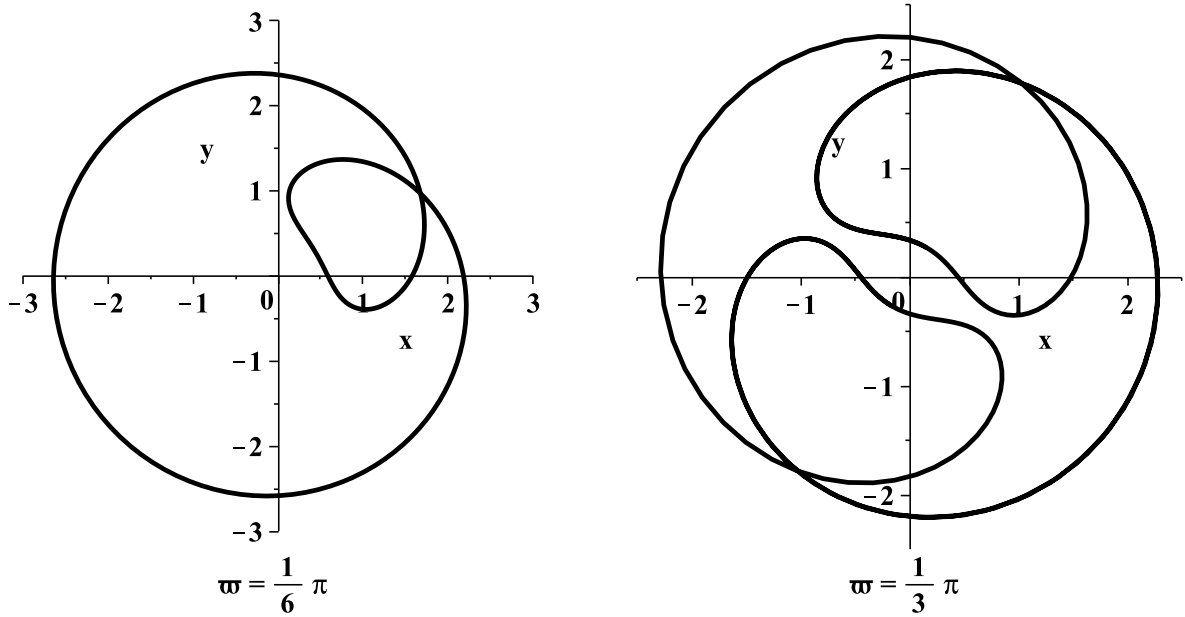
Как и в предыдущем случае, одно решение будет давать устойчивые орбиты, а другое — неустойчивые.

Несимметричные порождающие решения. Это семейства прямых ($\varepsilon' = 1$) периодических орбит с фиксированным значением эксцентриситета $e = e_p^*$, $p > 1$ и произвольном значении аргумента перицентра $\varpi \neq k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Приближенные значения e_p^* для $p = 2, \dots, 10$ указаны в таблице 3.2. Примеры несимметричных порождающих орбит показаны на рис. 6.

Отметим, что поскольку для несимметричных орбит $p > 1$, то $N = 1/p$ или $N = 2/p$, при $p > 2$, то $a > 1$, т.е. все они лежат вне окружности неподвижных точек. Более того, поскольку $S_p(1, e_p^*) = 0$ для $p > 1$, то поправки первого порядка к индексу устойчивости и периоду несимметричных порождающих решений будут равны нулю.

Таблица 1: Критические значения эксцентриситета для несимметричных порождающих решений

№	p	e_p^*
1	2	0,67263199652821
2	3	0,76201296558111
3	4	0,80042875827756
4	5	0,82197002774461
5	6	0,83584549376657
6	7	0,84558379030681
7	8	0,85282899502939
8	9	0,85845157323104
9	10	0,86295621696501



а) $p = 2, q = -1, e_2^* = 0,67263199652821$ б) $p = 3, q = -1, e_3^* = 0,76201296558111$

Рис. 6: Несимметричные прямые порождающие орбиты.

Итак, в случае, когда невозмущенной задачей является синодическая задача Кеплера, то уже первое приближение нормальной формы гамильтониана (31) позволяет выделить два типа счетного числа однопараметрических семейств порождающих решений.

Замечание 2. Семейства круговых прямых \mathcal{I}_d и обратных \mathcal{I}_r орбит тоже являются порождающими для возмущения задачи Хилла, но требуют отдельного исследования.

Заключение

Порождающие решения синодической кеплеровой задачи найдены с использованием первого приближения нормальной формы гамильтониана (31). Следует ожидать, что следующие приближения нормальной формы гамильтониана позволят найти порождающие решения, удовлетворяющие условию $p + q > 2$.

Надо отметить, что найденные порождающие решения синодической кеплеровой задачи это только первый шаг на пути поиска новых семейств периодических решений задачи. Эти решения необходимо продолжить по параметру ε до значения 1.

Список литературы

- [1] Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990. — 296 с.
- [2] Батхин А. Б., Батхина Н. В. Задача Хилла. — Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. — 200 с.
- [3] Hill G. W. Researches in the lunar theory // *The Collected Mathematical Works of G.W. Hill*. — 1905. — Vol. 1. — Pp. 284–335.
- [4] Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. — М.: Наука, 1982. — 656 с.
- [5] Bruno A. D. On periodic flybys of the Moon // *Celestial Mechanics*. — 1981. — Vol. 24. — Pp. 255–268.
- [6] Брюно А. Д., Варин В. П. Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // *ПММ*. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 1034–1066.
- [7] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998. — 288 с.
- [8] Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S. Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. — 2005. — Vol. 25, no. 4. — Pp. 1237–1256.
- [9] Perko L. Periodic solutions of the restricted problem that are analytic continuations of periodic solutions of Hill's problem for small $\mu > 0$ // *Celestial Mechanics*. — 1983. — Vol. 30. — Pp. 115–132.

- [10] *Meyer K. R.* Periodic solutions of the N -body problem. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1999. — Vol. 1719 of *Lecture Notes in Mathematics*.
- [11] *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability // *Astron. & Astrophys.* — 1969. — Vol. 1. — Pp. 223–238.
- [12] *Брюно А. Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. Препринт № 93. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. — 32 с.
- [13] *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. — М.: Издательство ЛКИ, 2009. — 432 с.
- [14] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem I: First species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* — 1981. — Vol. 104, no. 2. — Pp. 321–352.
- [15] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem II: Second species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* — 1981. — Vol. 104, no. 2. — Pp. 353–397.
- [16] *Аксенов Е. П.* Специальные функции в небесной механике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с.
- [17] *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. — Springer, 1997. — 278 pp.
- [18] *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* — 2003. — no. 85. — Pp. 223–246.
- [19] *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 252 с.
- [20] *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. — Издательство «Наука», 1968. — 800 с.