



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2010 г.



Лидов М.Л.

Минимаксные методы
оценивания

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лидов М.Л. Минимаксные методы оценивания // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 71. 87 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-71>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской Академии наук

М. Л. ЛИДОВ

МИНИМАКСНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ

Москва, 2010

Лидов М. Л.

Минимаксные методы оценивания.

Описаны основные задачи минимаксного оценивания и изложены методы их решения. На основе метода линейного программирования (гл. I) предложено решение задачи минимаксного оценивания при неизвестной корреляции ошибок измерений (гл. II), задачи обобщенной импульсной коррекции (гл. III) и задачи о выборе оптимальной программы измерений (гл. IV). В заключительном комментарии проведено сопоставление результатов автора с исследованиями, выполненными другими специалистами.

Lidov M. L.

Minimax methods for estimation.

The fundamental problems of minimax estimation are described and the solving methods are set forth. The linear programming based solutions (Ch. I) are proposed for the minimax estimation problem under uncertain correlation of measurement errors (Ch. II), for the problem of generalized impulse correction (Ch. III), and for the problem of the optimal design of measurement experiments (Ch. IV). In concluding comments a comparison of the author's results with the investigations of other researchers is presented.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий препринт представляет собой собранное воедино научное исследование выдающегося ученого в области механики, динамики космического полета и управления движением Лауреата Ленинской премии, профессора Михаила Львовича Лидова (1926–1993). Это исследование, посвященное минимаксным методам оценивания, составило отдельную часть неопубликованной рукописи учебного пособия «Методы оценивания линейных динамических систем», подготовленного М. Л. Лидовым, А. И. Матасовым, В. М. Морозовым и Н. А. Парусниковым в 1985 г. в МГУ им. М. В. Ломоносова. Несмотря на прошествование немалых лет, представленный в препринте материал не потерял своей значимости. Один из соавторов указанного пособия А. И. Матасов оказал неоценимую помощь в редактировании рукописи. По его предложению оригинальный список литературы [1–28] был дополнен появившимися в 1985–1993 гг. работами М. Л. Лидова [29–44]. Данью памяти этому замечательному ученому и является настоящий препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, в котором М. Л. Лидов проработал всю свою жизнь.

Публикация препринта выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00299а.

М. А. Вашковьяк

ВВЕДЕНИЕ

Классические методы оценивания выводятся, исходя из предположения о том, что вероятностное распределение ошибок измерений известно, или, по крайней мере, известны такие характеристики этого распределения, как математическое ожидание и матрица ковариаций. Однако, это не всегда так. Во многих уникальных измерительных системах, используемых, например, для обеспечения космических экспериментов, часто не удается получить достаточно большого количества экспериментальных данных, которые позволили бы с уверенностью и необходимой точностью однозначно определить параметры распределений ошибок измерений.

По-видимому не случайно, что именно в 60-ые годы независимо в СССР и США в различных постановках начали развиваться методы оценивания, которые мы будем называть *минимаксными*. Другие авторы называют их методами *гарантированного* или *робастного* (устойчивого) оценивания, подчеркивая определенные свойства таких оценок.

Уровень современного состояния направления, развиваемого в США, хорошо представлен в переведенной в 1984 г. на русский язык монографии Питера Хьюбера [21], с именем которого связаны основные достижения этого направления. Как правило, в этих работах исходят из предположения, что ошибки измерений являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Однако в отличие от классического случая предполагается, что априори известен лишь класс распределений, которому принадлежит истинное распределение. Исследуется и решается задача о выборе метода оценивания, минимизирующего асимптотическую дисперсию уклонения оценки контролируемого параметра от его истинного значения для, в определенном смысле, «наихудшего» распределения из заданного класса возможных распределений. Рассматривается асимптотика для достаточно большого числа однотипных измерений. Следует отметить, что в результате решения вариационных задач получаются существенно нелинейные методы оценивания, обладающие определенной устойчивостью.

Здесь этот круг задач не рассматривается. Мы можем только рекомендовать читателю познакомиться с уже указанной книгой П. Хьюбера.

Важность этого направления существенно определяется одним практически интересным частным случаем, исследуемым в [21]. Моделируется ситуация, когда с вероятностью $(1 - \varepsilon)$ измерительная аппаратура работает нормально и ошибки измерения подчиняются известному, например, нормальному, закону распределения, а с вероятностью ε ($\varepsilon > 0$, и как правило, $\varepsilon \ll 1$) происходит сбой и реализуется практически любое распределение ошибок. Эта ситуация, моделируемая классом, так называемых, «загрязненных» распределений, типична для практики. Изящное решение проблемы в этом случае одно из больших достижений указанного направления в общей проблеме оценивания.

В связи с этим направлением следует еще упомянуть книгу советских авторов С. А. Смоляка и Б. П. Титоренко [20], в которой исследуется аналогичная задача. Форма изложения в книге [20] более доступна широкому кругу читателей.

Другое направление минимаксных методов оценивания было начато работой [14] в 1964 г., постановкой и анализом задачи о «наихудшей корреляции».

В настоящее время существует ряд исследований различных авторов, в которых развивается это направление. Некоторые из результатов этих исследований приведены в этом препринте, другие кратко упоминаются в прилагаемых комментариях.

Во всех этих исследованиях рассматривается проблема линейного оценивания в рамках корреляционной теории. В этом определенная ограниченность рассматриваемого направления. Однако здесь удастся поставить и решить интересные в прикладном смысле задачи, в которых ошибки измерений могут быть коррелированными; при этом коэффициенты корреляции неизвестны, а известны лишь интервалы значений, которым они должны принадлежать.

Круг задач, изложенных в этой части, объединяется еще одной особенностью. Проблема определения оптимального оценивателя сводится, как правило, к задаче математического программирования. В ряде простейших моделей, в частности, в упомянутой выше задаче о «наихудшей корреляции», оптимальный оцениватель определяется как решение задачи линейного программирования (ЛП). В некоторых других случаях задача линейного программирования возникает как необходимый элемент более сложного алгоритма определения оптимального оценивателя. Поэтому в гл. I максимально кратко изложены основы линейного программирования. Существует много книг, в которых описана эта

задача и, более того, в настоящее время стандартные программы для решения задач ЛП имеются почти на всех достаточно больших ЭВМ. Поэтому в описании ЛП в гл. I мы совсем не затрагиваем вопросов экономной реализации симплекс-метода. Приводя строгое аналитическое описание этого метода, мы преследовали две цели. Во-первых, познакомить с ним читателя, воспитанного на классической математике, которому не приходилось ранее сталкиваться с этим методом. Во-вторых, пояснить основные особенности решения задачи ЛП, имеющие прямое качественное следствие в задачах минимаксного оценивания (например, о числе ненулевых компонент оптимального плана), и вывести некоторые аналитические критерии оптимальности, которые в дальнейшем используются при геометрической интерпретации задачи ЛП и ее обобщениях, типа задачи об обобщенной линейной импульсной коррекции траектории (ОЛИК), описанной в гл. III.

Задача о выборе оптимальной программы измерений, которой посвящена гл. IV, лишь косвенно связана с основной темой этого препринта. Мы включили эту задачу, в основном, чтобы дать представление читателю о других возможных приложениях описанных методов решения задач ЛП и ОЛИК к проблеме, связанной с оцениванием параметров движения по измерениям. Кроме того, анализ этой задачи позволяет выявить замечательное совпадение в решении одного варианта, казалось бы, совершенно различных задач: о «наихудшей корреляции» и проблемы экономного размещения измерений с некоррелированными ошибками.

В этом препринте одно из направлений минимаксных методов излагается наряду с классическим подходом к проблеме оценивания. Более того, минимаксные методы оценивания — это ряд задач, постановка которых требует различного объема исходной информации о распределении ошибок измерений. Этот ряд задач включает в себя некоторые классические проблемы как частный случай. В этой ситуации правомерен вопрос: каким же методом пользоваться в практических приложениях? Ответ на этот вопрос не будет однозначным. Следует упомянуть, что сторонники минимаксных методов оценивания упрекают классиков в том, что их методы основаны на гипотезах, которые не выполняются для реальных измерительных систем. Приверженцы классического направления говорят, что минимаксные методы приводят к неоправданно грубым оценкам, а попытки более тонкого описания ситуации путем уменьшения интервалов неопределенности требуют информации, которую априори трудно получить.

Разрешение этого конфликта мы видим в следующем. Трудности проблемы оценивания связаны не только со сложностью описания той

или иной математической модели, адекватной реальной ситуации, но и со сложностью решения проблемы оптимального оценивания для уже поставленных математических задач. Поэтому задача математика-исследователя, работающего в этой области, заключается в анализе различных постановок задач об оптимальном оценивании, но обязательно с конструированием эффективных алгоритмов их решения. В этом случае инженер-практик, имея в своем распоряжении набор методов и алгоритмов, по принципу обратной связи сам сможет выбрать, на какой модели следует остановиться для решения задач, связанных с работой данной конкретной системы.

Г Л А В А I

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ЛП)

§ 1. Постановка задачи линейного программирования (канонический вариант)

Предполагаются заданными:

- множество \mathcal{A} векторов $A_k \in \mathbb{R}^m$, $k = \overline{1, n}$,
- вектор $b \in \mathbb{R}^m$,
- множество \mathcal{C} вещественных чисел $c_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$.

Будем предполагать, что $n > m$ и набор векторов невырожден, т. е. содержит m линейно-независимых векторов.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Планом* $X \in \mathbb{R}_+^n$ называется вектор с неотрицательными компонентами X_k , $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющими системе уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_k X_k = b. \quad (1.1)$$

Если ввести обозначение A для матрицы $m \times n$, столбцы которой — векторы $A_k \in \mathcal{A}$:

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n), \quad (1.2)$$

то множество планов \mathcal{K} определится следующей формулой:

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathbb{R}_+^n : AX = b\}. \quad (1.3)$$

Канонический вариант задачи ЛП может быть сформулирован в следующем виде: определить $\tilde{X} \in \mathcal{K}$, на котором линейная функция (функционал)

$$L(X) = \sum_{k=1}^n c_k X_k \quad (1.4)$$

достигает минимального значения, или, в краткой записи:

$$\tilde{X} = \arg \min_{X \in \mathcal{K}} L(X). \quad (1.5)$$

План \tilde{X} называется *оптимальным* (или *минимизирующим*).

Пусть $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ — упорядоченный набор m индексов j_k из $\overline{1, n}$. Этому набору соответствуют: набор векторов $A_k \in \mathcal{A}$, составляющих квадратную матрицу $m \times m$: $A_J = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$, вектор $c_J \in \mathbb{R}^m$: $c_J^\top = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m})$, $c_{j_k} \in \mathcal{C}$, j_k из $\overline{1, n}$. Так как матрица A_J представляет указанный набор векторов, то для краткости будем говорить о наборе A_J .

О п р е д е л е н и е 1.2. Набор векторов A_J называется *опорным базисом*, если выполнены следующие два условия.

1. Векторы A_J — линейно-независимы ($\det A_J \neq 0$).

2. Все компоненты x_k вектора $x_J \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего системе уравнений: $A_J x_J = b$, неотрицательны, т. е. $x_J \in \mathbb{R}_+^m$.

Пусть A_J — опорный базис. Определим компоненты вектора $X \in \mathbb{R}_+^n$ следующим правилом: $X_{j_k} = x_k$, если $j_k \in J$, и $X_s = 0$, если $s \in \overline{1, n} \setminus J$. Очевидно, так определенный вектор X является планом: $X \in \mathcal{K}$. Такой план будем называть *опорным планом, соответствующим базису A_J* . Для опорного плана X , соответствующего базису A_J , функционал $L(X)$ можно записать в следующем виде: $L(X) = c_J^\top x_J = L(x_J)$.

Если все компоненты вектора x_J строго положительны: $x_J > 0$, то опорный базис A_J и соответствующий опорный план называются *невырожденными*.

В следующем разделе при описании симплекс-метода мы предполагаем, что множество планов \mathcal{K} не пусто ($\mathcal{K} \neq \emptyset$), и можно указать хотя бы один опорный базис. В приложениях ЛП, которые рассматриваются в препринте, такой базис, как правило, можно определить достаточно просто. В общем случае разработана специальная процедура, основанная на введении в задачу «искусственного базиса» [9, 10, 27], который используется на начальном этапе решения задачи и, в частности, в особых случаях позволяет получить заключение о том, что $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

§ 2. Симплекс-метод решения задачи ЛП

Пусть A_J — опорный базис, $A_J x_J = b$, c_J — определен выше. Для упрощения формул будем полагать, что $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Этого всегда можно добиться перенумерацией индексов. Тем самым справедливо:

$$\sum_{s=1}^m A_s x_s = b, \quad x_s \geq 0, \quad s = \overline{1, m}. \quad (2.1)$$

Процедура симплекс-метода состоит из последовательных итераций. Каждая итерация включает следующие операции.

1. Для каждого $k = \overline{1, n}$ определяется вектор $z_k \in \mathbb{R}^m$ координат разложения вектора $A_k \in \mathcal{A}$ по векторам базиса A_J :

$$A_k = A_J z_k = \sum_{s=1}^m A_s z_{ks}. \quad (2.2)$$

2. Перебором по всем $k = \overline{1, n}$ находится индекс \bar{k} из $\overline{1, n}$, для которого достигает максимума величина

$$r_k = c_J^\top z_k - c_k = \sum_{s=1}^m c_s z_{ks} - c_k, \quad (2.3)$$

$$r = r_{\bar{k}} \geq r_k \quad \text{для всех } k = \overline{1, n}.$$

3. Если $r \leq 0$, то A_J — оптимальный базис, план X , соответствующий A_J , — оптимальный план (см. ниже теорему 2.1). В этом случае задача решена.

4. Если $r > 0$ и $z_{\bar{k}s} \leq 0$ для всех $s = \overline{1, m}$, то конечного оптимального плана X не существует: $\min_{X \in \mathcal{K}} L(X) = -\infty$ (см. теорему 2.2). Решение задачи прекращается. Мы исключим этот особый случай из дальнейшего рассмотрения.

5. Если $r > 0$ и существуют s из $\overline{1, m}$, для которых $z_{\bar{k}s} > 0$, то определяется величина θ^* из следующего условия:

$$\theta^* = \min_{s=\overline{1, m}, z_{\bar{k}s} > 0} (x_s / z_{\bar{k}s}). \quad (2.4)$$

Подчеркнем, что в (2.4) минимизация проводится на подмножестве значений $s = \overline{1, m}$, для которых $z_{\bar{k}s} > 0$. Пусть этот минимум достигается при $s = \bar{s}$.

6. Формируется набор индексов

$$J' = \{1, 2, \dots, \bar{s} - 1, \bar{s} + 1, \dots, m, \bar{k}\}, \quad (2.5)$$

получаемый из J путем исключения индекса \bar{s} и добавления индекса \bar{k} .

Согласно теореме 2.3, набор векторов $A_{J'}$ образует опорный базис. Значение функционала $L(x_{J'})$ на плане, соответствующем этому опорному базису, не превосходит $L(x_J)$. Если опорный базис A_J был невырожденным, то

$$L(x_{J'}) < L(x_J).$$

На этом оканчивается одна итерация, и процедура повторяется, исходя из опорного базиса $A_{J'}$. Как правило, таким путем за конечное

число итераций мы приходим к оптимальному опорному базису, для которого $r = 0$. Заметим, что существуют экзотические примеры, когда в процессе решения задачи происходит циклическое изменение вырожденных опорных базисов без изменения функционала. В этих случаях существуют опорные базисы, начиная с которых решение только с помощью описанной процедуры получить нельзя. Однако в реальных (не сконструированных специально) задачах такие случаи не встречаются.

Теорема 2.1. *Если $r \leq 0$, то A_J — оптимальный опорный базис, план X , соответствующий этому базису, является решением задачи ЛП (1.5).*

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{K}$ — произвольный план с компонентами $X^\top = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Справедлива цепочка равенств:

$$b = \sum_{k=1}^n A_k X_k = \sum_{k=1}^n X_k \sum_{s=1}^m A_s z_{ks} = \sum_{s=1}^m A_s \sum_{k=1}^n X_k z_{ks}.$$

Второе равенство следует после разложения A_k по векторам A_J . С другой стороны, по определению A_J, x_J , имеем: $b = \sum_{s=1}^m A_s x_s$, где x_s — компоненты x_J . В силу единственности разложения b по векторам A_J , находим:

$$x_s = \sum_{k=1}^n X_k z_{ks}, \quad s = \overline{1, m}.$$

Умножая эти соотношения соответственно на c_s и суммируя по s от 1 до m , получим:

$$L(x_J) = \sum_{s=1}^m c_s x_s = \sum_{k=1}^n X_k \sum_{s=1}^m c_s z_{ks} \leq \sum_{k=1}^n X_k c_k = L(X).$$

Неравенство следует из условий: $\sum_{s=1}^m c_s z_{ks} \leq c_k$, справедливых при $r \leq 0$ для всех $k = \overline{1, n}$ и неотрицательности X_k .

Тем самым показано, что при выполнении условий теоремы 2.1 значение функционала на произвольном плане X не меньше, чем $L(x_J)$ — значения функционала на опорном плане, соответствующем A_J . Теорема доказана. \square

Теорема 2.2. *Если $r > 0$ и $z_{\bar{k}s} \leq 0$ для всех $s = \overline{1, m}$, то конечного решения задачи ЛП не существует: $\min_{X \in \mathcal{K}} L(X) = -\infty$.*

Доказательство. Из соотношений (2.1) и (2.2) при $k = \bar{k}$ для любого $\theta \in \mathbb{R}$ получим:

$$\sum_{s=1}^m A_s (x_s - \theta z_{\bar{k}s}) + \theta A_{\bar{k}} = b. \quad (2.6)$$

Для получения (2.6) необходимо к левой части (2.1) прибавить θA_k и вычесть этот вектор в виде его разложения по векторам базиса A_J . Если все $z_{\bar{k}s} \leq 0$, то при любом сколь угодно большом $\theta > 0$, имеем: $x'_s = x_s - \theta z_{\bar{k}s} \geq 0$ для всех $s = \overline{1, m}$. Тем самым вектор $X \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $X_s = x'_s$, $s = \overline{1, m}$, $X_{\bar{k}} = \theta$ и остальными, равными нулю, является планом. При этом значение функционала равно:

$$L(X) = c_J^\top x_J + \theta(c_{\bar{k}} - c_J^\top z_{\bar{k}}) = L(x_J) - \theta r_{\bar{k}}. \quad (2.7)$$

Так как, по предположению, $r_{\bar{k}} > 0$, то при $\theta \rightarrow +\infty$ находим $L(X) \rightarrow -\infty$. Тем самым теорема 2.2 доказана. \square

Теорема 2.3. *Если $r > 0$ и $z_{\bar{k}s} > 0$, хотя бы для одного $s = \overline{1, m}$, то множество индексов (2.5) определяет опорный базис $A_{J'}$; значение функционала на плане, соответствующем этому опорному базису, не превосходит $L(x_J)$. Если опорный базис A_J невырожден, то $L(x_{J'}) < L(x_J)$.*

Доказательство. Все $x'_1, x'_2, \dots, x'_m, \theta$, определенные при доказательстве теоремы 2.2, остаются неотрицательными для $0 \leq \theta \leq \theta^*$ (см. (2.4)). Полагая в (2.6) $\theta = \theta^*$, находим:

$$\sum_{s=1}^m A_s(x_s - \theta^* z_{\bar{k}s}) + \theta^* A_{\bar{k}} = b. \quad (2.8)$$

При этом, из (2.4) следует, что $x_{\bar{s}} - \theta^* z_{\bar{k}\bar{s}} = 0$. Тем самым (2.8) — разложение вектора b по m векторам A_j с индексами $j \in J' = \{1, 2, \dots, \bar{s} - 1, \bar{s} + 1, \dots, m, \bar{k}\}$. При этом $x_{J'} \geq 0$.

В рассматриваемом случае $r_{\bar{k}} > 0$, а $\theta^* \geq 0$ по определению (2.4). Тем самым, $\theta^* r_{\bar{k}} \geq 0$ и из (2.7) при $\theta = \theta^*$ следует: $L(x_{J'}) \leq L(x_J)$. Если A_J — невырожденный опорный базис, то $x_s > 0$ для всех $s = \overline{1, m}$. В этом случае из (2.4) следует, что $\theta^* > 0$, откуда $\theta^* r_{\bar{k}} > 0$ и $L(x_{J'}) < L(x_J)$.

Покажем, что набор $A_{J'}$ линейно-независим и тем самым $A_{J'}$ — опорный базис. Предположим противоположное. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{s}-1}, \lambda_{\bar{s}+1}, \dots, \lambda_m, \lambda - m$ чисел, не равных нулю одновременно и таких, что

$$\sum_{s=1, s \neq \bar{s}}^m A_s \lambda_s + \lambda A_{\bar{k}} = 0. \quad (2.9)$$

Используя разложение $A_{\bar{k}}$ (2.2), из (2.9) получим:

$$\sum_{s=1, s \neq \bar{s}}^m A_s(\lambda_s + \lambda z_{\bar{k}s}) + \lambda z_{\bar{k}\bar{s}} A_{\bar{s}} = 0.$$

Так как набор A_J — линейно-независим, то

$$\lambda_s + \lambda z_{\overline{ks}} = 0, \quad \lambda z_{\overline{k\bar{s}}} = 0.$$

По определению, $z_{\overline{k\bar{s}}} > 0$, откуда $\lambda = 0$ и $\lambda_s = 0$ для всех $s = \overline{1, m}$, $s \neq \bar{s}$. Тем самым набор $A_{J'}$ — опорный базис. Теорема 2.3 доказана. \square

§ 3. Оценки близости решения к оптимальному в процессе итераций

Пусть в процессе итерации определен опорный базис A_J , $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$: $A_J x_J = b$, $c_J^\top = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m})$. Предположим, что в результате вычислений установлено, что $r > 0$ (см. (2.3)). Следовательно, базис A_J не оптимальный; мы будем его называть текущим базисом. Значение функционала при этом базисе $L_\top = L(x_J) = c_J^\top x_J$.

Обозначим $\tilde{J} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, i_s из $\overline{1, n}$ — набор индексов, соответствующих оптимальному базису

$$\begin{aligned} A_{\tilde{J}} &= (A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}), & A_{\tilde{J}} \tilde{x} &= b, \\ c_{\tilde{J}}^\top &= (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_m}). \end{aligned}$$

Значение функционала при оптимальном опорном базисе (в отличие от A_J он нам не известен) обозначим \tilde{L} : $\tilde{L} = L(\tilde{x}) = c_{\tilde{J}}^\top \tilde{x}$ — оптимальное значение функционала.

Лемма 3.1. Справедлива оценка

$$L_\top \leq \tilde{L} + r \sum_{s=1}^m \tilde{x}_s. \quad (3.1)$$

Доказательство. Используя разложение векторов A_{i_k} оптимального базиса по векторам текущего базиса A_J , получим следующую цепочку равенств:

$$A_J x_J = b = A_{\tilde{J}} \tilde{x} = \sum_{s=1}^m A_{i_s} \tilde{x}_s = \sum_{s=1}^m A_J z_{i_s} \tilde{x}_s = A_J \sum_{s=1}^m z_{i_s} \tilde{x}_s.$$

Так как $\det A_J \neq 0$, то отсюда следует:

$$x_J = \sum_{s=1}^m z_{i_s} \tilde{x}_s.$$

Умножая эти соотношения слева на c_J^\top , определим

$$L_\top = c_J^\top x_J = \sum_{s=1}^m c_J^\top z_{i_s} \tilde{x}_s.$$

Из условий $c_J^\top z_{i_s} - c_{i_s} \leq r$ и $\tilde{x}_s \geq 0$ находим

$$L_\top \leq \sum_{s=1}^m (r + c_{i_s}) \tilde{x}_s.$$

Отсюда следует оценка (3.1). Непосредственно оценку (3.1) использовать нельзя, так как значение $\sum_{s=1}^m \tilde{x}_s$ нам неизвестно. \square

Во многих задачах величины $c_k > 0$ для всех $k = \overline{1, n}$. Такие задачи преобразованием $c_k X_k = X'_k$ и $A_k/c_k = A'_k$ сводятся к задаче линейного программирования, у которой все c_k равны единице: $c_k = 1$ для $k = \overline{1, n}$.

Л е м м а 3.2. Если в рассматриваемой задаче линейного программирования $c_k = 1$ для всех $k = \overline{1, n}$, то справедлива оценка:

$$L_\top \leq \tilde{L}(1 + r). \quad (3.2)$$

Доказательство непосредственно следует из (3.1), так как в этом случае $\sum_{s=1}^m \tilde{x}_s = \tilde{L}$. Это в прикладном смысле важная оценка, так как она позволяет оканчивать итерации, когда r становится достаточно малым, хотя и положительным числом. При этом (3.2) указывает насколько можно уменьшить функционал за счет последующих итераций.

Л е м м а 3.3. Если в рассматриваемой задаче линейного программирования все $c_k = -1$, то справедлива оценка

$$L_\top \leq \tilde{L}(1 - r). \quad (3.3)$$

Это также непосредственно следует из (3.2), так как в этом случае $\tilde{L} = -\sum_{s=1}^m \tilde{x}_s$.

В случае, когда параметры c_k имеют разные знаки, такую оценку получить нельзя. В этом можно убедиться на следующем примере.

П р и м е р 1. Пусть $m = 2$, $n = 4$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = A_1 - \Delta A_2$, $A_4 = A_1 + (2 - \Delta)A_2$, $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = c_4 = -1$, $b = \frac{1}{\Delta^\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые числа. Нетрудно проверить, что при базисе $A_{(1)} = (A_1, A_2)$: $x_1 = x_2 = 1/\Delta^\alpha$, значение функционала $L_\top = x_1 - x_2 = 0$ и $r = \Delta$. При этом оптимальное решение достигается на базисе $A_{(2)} = (A_3, A_4)$, для которого значение функционала $\tilde{L} = -1/\Delta^{\alpha-1}$. Тем самым, при $\alpha > 1$, для сколь угодно малого $r = \Delta$ значение $L_\top - \tilde{L}$ может быть сколь угодно велико.

Для получения оценки в общем случае можно предложить следующую процедуру. Необходимо предварительно решить вспомогательную задачу линейного программирования с тем же набором векторов A, b , но для $c_k = -1, k = \overline{1, n}$. Решение такой задачи определяет $\max \sum_{k=1}^n X_k = \beta$ при ограничениях $AX = b, X \geq 0$. Эту задачу, используя лемму 3.3, можно решить не до конца. После этого из (3.1), очевидно, следует, что

$$L_T \leq \tilde{L} + r\beta, \quad (3.4)$$

где теперь уже β известная величина, что позволяет оканчивать вычисления, когда $r \cdot \beta$ достаточно мало.

Пример 2. Рассмотрим вспомогательную задачу для исходных данных примера 1. При базисе $A_{(1)} = (A_1, A_2)$ ($r = \Delta, x_1 = x_2 = 1/\Delta^\alpha$) функционал вспомогательной задачи $L_\varepsilon = -x_1 - x_2 = -2/\Delta^\alpha$. Тем самым, для оптимального значения функционала вспомогательной задачи (используя лемму 3.3) получим:

$$-2/(1 - \Delta)\Delta^\alpha \leq \tilde{L}_\varepsilon \leq -2/\Delta^\alpha.$$

Следовательно, для исходной задачи мы можем только получить оценку $\beta = \sum_{s=1}^m \tilde{x}_{i_s} \leq 2/\Delta^\alpha(1 - \Delta)$ и из (3.1) найдем:

$$L_T \leq \tilde{L} + 2/\Delta^{\alpha-1}(1 - \Delta),$$

т. е. с помощью оценки значения функционала \tilde{L}_ε во вспомогательной задаче мы видим, что базис $A_{(1)} = (A_1, A_2)$, вообще говоря, может быть далек от оптимального даже в случае малых величин $r = \Delta$.

Роль такого рода оценок существенно возрастает при решении задач типа обобщенной коррекции (см. гл. III), в которых итерационную процедуру принципиально нельзя окончить по критерию $r \leq 0$.

§ 4. Задачи, приводимые к каноническому виду. Двойственная задача

4.1. Задача с произвольным знаком части переменных. Пусть матрица $m \times n - A$ из (1.2) представлена в виде двух блоков $m \times k - A'$ и $m \times (n - k) - A''$ и, аналогично, $X \in \mathbb{R}^n$ имеет вид составного вектора $X^\top = (X'^\top, X''^\top)$, $X' \in \mathbb{R}^k, X'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ и $c^\top = (c'^\top, c''^\top)$, где $c' \in \mathbb{R}^k, c'' \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} A'X' + A''X'' &= b, & X'' &\geq 0, \\ c'^\top X' + c''^\top X'' &= \min. \end{aligned} \quad (I)$$

Отличие этой задачи от канонического варианта в том, что компоненты X' могут иметь любые знаки. Такая задача сводится к каноническому варианту задачи линейного программирования с помощью следующего приема. Решается канонический вариант следующей задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} A'\bar{X} - A'\bar{\bar{X}} + A''X'' = b, \quad \bar{X} \geq 0, \quad \bar{\bar{X}} \geq 0, \quad X'' \geq 0, \\ c'^T\bar{X} - c'^T\bar{\bar{X}} + c''^T X'' = \min, \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где $\bar{X}, \bar{\bar{X}} \in \mathbb{R}_+^k$, $X'' \in \mathbb{R}_+^{n-k}$.

Так как в опорный базис не могут входить линейно-зависимые векторы, то нетрудно показать, что на оптимальном решении $\bar{X}_j \bar{\bar{X}}_j = 0$ для $j = \overline{1, k}$. После определения оптимального решения задачи (II) и пересчета по формулам: $X' = \bar{X} - \bar{\bar{X}}$ получим оптимальное решение задачи (I).

4.2. Задачи с неравенствами. Рассматривается следующая задача:

$$\begin{aligned} A_{(1)}X = b_{(1)}, \quad A_{(2)}X \geq b_{(2)}, \quad c^T X = \min, \quad X \geq 0, \\ A_{(1)} \in \{m \times n\}, \quad A_{(2)} \in \{p \times n\}, \quad X \in \mathbb{R}_+^n, \quad c \in \mathbb{R}^n, \\ b_{(1)} \in \mathbb{R}^m, \quad b_{(2)} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В этом случае вводится матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} & O_{mp} \\ A_{(2)} & -E_p \end{pmatrix},$$

где $O_{mp} \in \{m \times p\}$ — матрица с нулевыми элементами, E_p — единичная матрица размерности p , и составные векторы $Y = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{\bar{X}} \end{pmatrix}$, где $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\bar{X}} \in \mathbb{R}^p$, $b = \begin{pmatrix} b_{(1)} \\ b_{(2)} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c \\ O_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}$, где $O_p \in \mathbb{R}^p$ — вектор с нулевыми компонентами.

Решается канонический вариант задачи линейного программирования:

$$AY = b, \quad Y \geq 0, \quad C^T Y = \min. \quad (4.2)$$

После определения оптимального решения задачи (4.2) оптимальное решение исходной задачи, очевидно, определяется с помощью соотношения: $X = \bar{X}$.

4.3. Двойственная задача. Запишем канонический вариант задачи линейного программирования в матричном виде:

$$\begin{aligned} AX &= b, \quad X \geq 0, \\ L(X) &= c^\top X - \min_X, \end{aligned} \tag{P}$$

где A — матрица $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ — заданные объекты, $X \in \mathbb{R}_+^n$ — неизвестный вектор, подлежащий определению из условия минимизации $L(X)$.

Наряду с задачей (P), рассмотрим задачу (D):

$$\begin{aligned} w^\top A &\leq c^\top, \\ M(w) &= w^\top b - \max_w, \end{aligned} \tag{D}$$

где A, b, c — те же, что и в задаче (P). Вектор $w \in \mathbb{R}^m$ необходимо определить из условия максимизации функционала $M(w)$. Здесь и ниже мы используем векторные неравенства $a \leq b$ ($a \in \mathbb{R}^k$, $b \in \mathbb{R}^k$), если это неравенство выполняется для всех соответствующих компонент: $a_s \leq b_s$, $s = \overline{1, k}$.

Задача (D) называется двойственной к задаче (P).

Множество векторов $X \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих ограничениям задачи (P), будем обозначать \mathcal{K} (см. (1.3)). Множество векторов $w \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих ограничениям задачи (D), будем обозначать \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \{w \in \mathbb{R}^m; w^\top A \leq c^\top\}.$$

Л е м м а 4.1.

$$\max_{w \in \mathcal{F}} M(w) \leq \min_{X \in \mathcal{K}} L(X).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $w \in \mathcal{F}$ $w^\top A \leq c^\top$. Отсюда для любого $X \in \mathcal{K}$ получим: $w^\top AX \leq c^\top X$. Кроме того, для любого $X \in \mathcal{K}$: $AX = b$, $c^\top X = L(X)$. Отсюда $w^\top b = M(w) \leq L(X)$. В частности, это будет верно и для X , минимизирующего $L(X)$, и для w , максимизирующего $M(w)$. \square

Т е о р е м а 4.1. Пусть оптимальное решение \tilde{X} задачи (P) существует и конечно. Обозначим $A_{\tilde{J}} = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$ — оптимальный опорный базис: $A_{\tilde{J}}\tilde{x} = b$, $c_{\tilde{J}}^\top = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m})$, $\tilde{x} \geq 0$. Тогда

$$1^\circ. M(\tilde{w}) = \max_{w \in \mathcal{F}} M(w) = L(\tilde{X}) = c_{\tilde{J}}^\top \tilde{x}.$$

2°. Максимизирующий вектор \tilde{w} определяется формулой

$$\tilde{w}^\top = c_{\tilde{J}}^\top A_{\tilde{J}}^{-1}.$$

Доказательство. Так как $A_{\tilde{J}}$ — оптимальный базис, то, согласно теоремам 1.2, 1.4, выполнены неравенства: для любого k из $\overline{1, n}$

$$c_{\tilde{J}}^{\top} z_k \leq c_k, \quad (4.3)$$

где $z_k = A_{\tilde{J}}^{-1} A_k$ — вектор координат разложения $A_k \in \mathcal{A}$ по векторам базиса $A_{\tilde{J}}$. Определим: $\tilde{w}^{\top} = c_{\tilde{J}}^{\top} A_{\tilde{J}}^{-1}$. Из (4.3) следует, что

$$c_{\tilde{J}}^{\top} z_k = c_{\tilde{J}}^{\top} A_{\tilde{J}}^{-1} A_k = \tilde{w}^{\top} A_k \leq c_k.$$

Тем самым, $\tilde{w} \in \mathcal{F}$. При $w = \tilde{w}$ имеем:

$$M(\tilde{w}) = \tilde{w}^{\top} b = c_{\tilde{J}}^{\top} A_{\tilde{J}}^{-1} b = c_{\tilde{J}}^{\top} \tilde{x} = L(\tilde{x}) = L(\tilde{X}).$$

Согласно лемме, $\max_{w \in \mathcal{F}} M(w) \leq L(\tilde{X})$. Следовательно,

$$\max_{w \in \mathcal{F}} M(w) = M(\tilde{w}). \quad \square$$

С л е д с т в и е. 1°. Если $\min_{X \in \mathcal{K}} L(X) = -\infty$, то решения двойственной задачи не существует (множество \mathcal{F} пусто).

2°. Если $\max_{w \in \mathcal{F}} M(w) = +\infty$, то решение задачи (P) не существует (множество \mathcal{K} пусто).

Мы не приводим формальных доказательств этих утверждений. Однако отметим, что почти очевидно следующее: если $\min_{X \in \mathcal{K}} L(X)$ не может быть меньше произвольно большого числа, то это не может означать ничего другого, как то, что $\mathcal{K} = \emptyset$.

Двойственная задача допускает простую геометрическую интерпретацию. Существует строгое описание задачи линейного программирования на основе геометрических понятий. В нашем изложении строгие доказательства — аналитические. При описании геометрической интерпретации мы апеллируем, в основном, к геометрической интуиции читателя и рисункам, которые дают наглядное представление для случая $m = 2$.

Условие $w^{\top} A_k = c_k$ определяет гиперплоскость в пространстве векторов $w \in \mathbb{R}^m$; A_k — вектор нормали к этой гиперплоскости. Условие $w^{\top} A_k \leq c_k$ определяет допустимое полупространство в \mathbb{R}^m , расположенное по одну сторону соответствующей гиперплоскости. Если $c_k > 0$, то допустимое полупространство содержит начало координат; если $c_k < 0$, то начало координат не принадлежит допустимому полупространству. Совокупность условий $w^{\top} A_k \leq c_k$, $k = \overline{1, n}$ определяет пересечение \mathcal{F} допустимых полупространств. \mathcal{F} — многогранное множество.

На рис. 1 для случая $m = 2$ и $n = 3$ изображены: система координат $0w_1w_2$, три вектора A_1, A_2, A_3 и соответствующие им «гиперплоскости» (прямые) (1)–(1), (2)–(2) и (3)–(3). Изображен случай $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 < 0$. Штриховкой обозначены полупространства, запрещенные неравенствами $w^\top A_k \leq c_k$. На рисунке изображен вектор b , определяющий функционал двойственной задачи. Двойственная задача состоит в определении вектора $\tilde{w} \in \mathcal{F}$, для которого проекция $w^\top b$ максимальна.

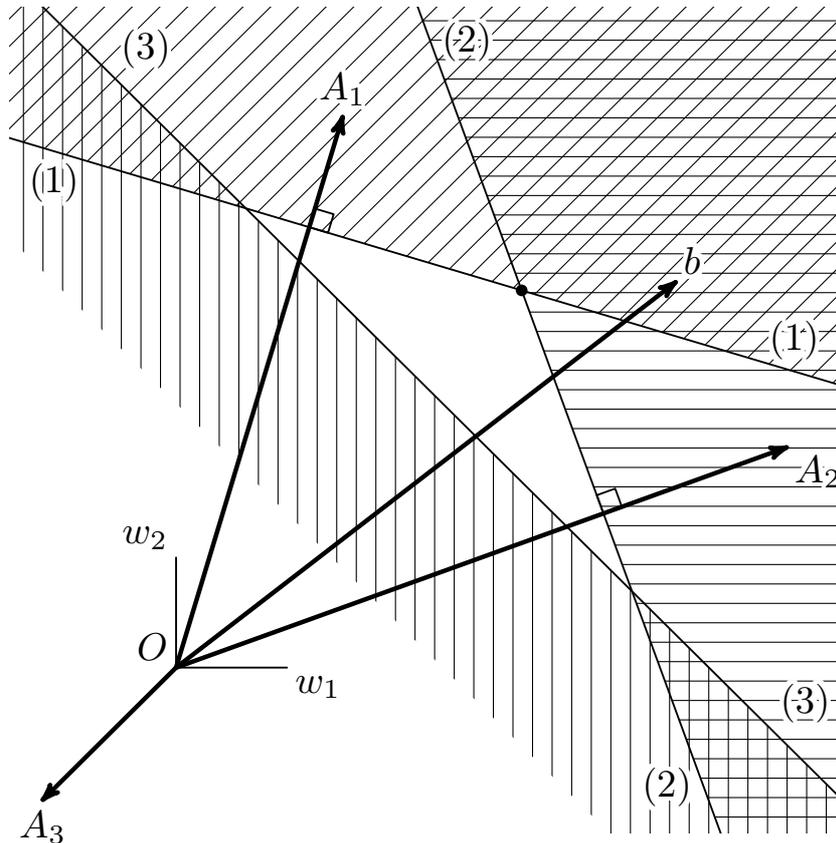


Рис. 1. Геометрическая интерпретация двойственной задачи.

Очевидно, что для ситуации, изображенной на рисунке, \tilde{w} определяется пересечением линий (1)–(1) и (2)–(2). При этом, если длину проекции вектора \tilde{w} на вектор b обозначить l , то $M(\tilde{w}) = b^\top \tilde{w} = l|b|$, $|b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ — модуль вектора b .

На рис. 2 изображен случай, когда система линейных неравенств оставляет множество \mathcal{F} неограниченным. При этом в зависимости от вектора b возможны как случаи, когда задача имеет конечное решение (на рисунке этому случаю соответствует вектор $b = b''$ и решение \tilde{w}''), так и случаи, когда $\max_{w \in \mathcal{F}} M(w) = +\infty$ (так будет, если $b = b'$). Геометрическая интерпретация канонического варианта задачи ЛП в случае $c_k = 1, k = \overline{1, n}$, более подробно описана в § 13.

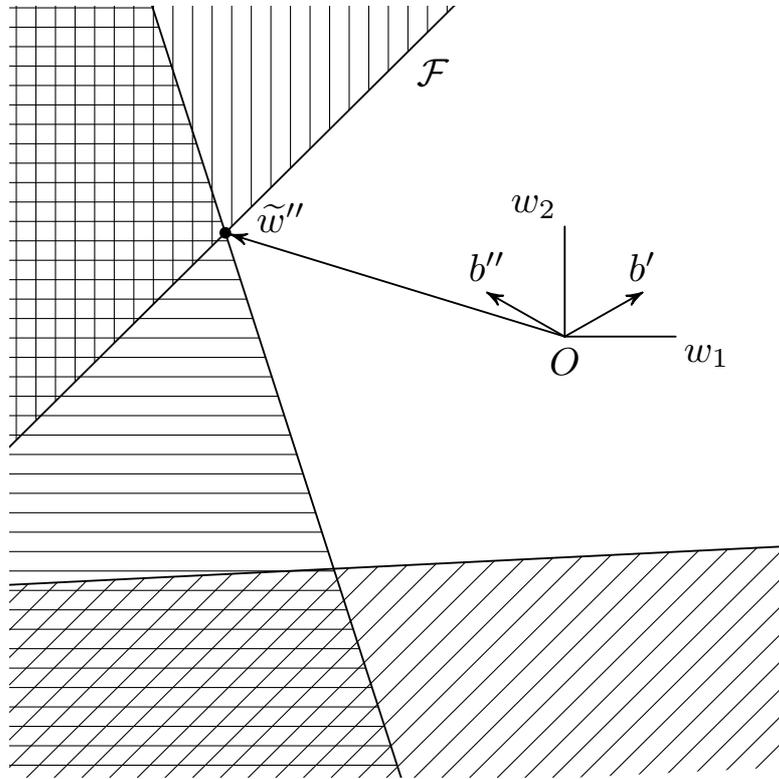


Рис. 2. Различные типы решений для неограниченной области.

В более общем случае имеет место следующее соответствие между двумя задачами. Пусть

$$\begin{aligned} A_{(11)} &\in \{m-k, s\}, & A_{(12)} &\in \{m-k, n-s\}, \\ A_{(21)} &\in \{k, s\}, & A_{(22)} &\in \{k, n-s\}, \end{aligned}$$

— заданные матрицы, $c_{(1)} \in \mathbb{R}^s$, $c_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-s}$, $b_{(1)} \in \mathbb{R}^{m-k}$, $b_{(2)} \in \mathbb{R}^k$ — заданные векторы. Задача (P₁) формулируется в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_{(11)}X_{(1)} + A_{(12)}X_{(2)} &\geq b_{(1)}, & X_{(1)} &\geq 0, \\ A_{(21)}X_{(1)} + A_{(22)}X_{(2)} &= b_{(2)}, \\ L(X) = c_{(1)}^\top X_{(1)} + c_{(2)}^\top X_{(2)} &= \min_{X_{(1)}, X_{(2)}} \end{aligned} \quad (P_1)$$

где $X_{(1)} \in \mathbb{R}_+^s$, $X_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-s}$ — векторы, подлежащие определению.

Задача (D₁) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_{(1)}^\top A_{(11)} + w_{(2)}^\top A_{(21)} &\leq c_{(1)}^\top, & w_{(1)} &\geq 0, \\ w_{(1)}^\top A_{(12)} + w_{(2)}^\top A_{(22)}X_{(2)} &= c_{(2)}^\top, \\ M(w) = b_{(1)}^\top w_{(1)} + b_{(2)}^\top w_{(2)} &= \max_{w_{(1)}, w_{(2)}} \end{aligned} \quad (D_1)$$

где $w_{(1)} \in \mathbb{R}_+^{m-k}$, $w_{(2)} \in \mathbb{R}^k$ — векторы, подлежащие определению. Здесь также нетрудно доказать теорему: если оптимальное решение $\tilde{X}^\top = (\tilde{X}_{(1)}^\top, \tilde{X}_{(2)}^\top)$ задачи (P_1) существует и конечно, то

$$M(\tilde{w}) = \max_{w_{(1)}, w_{(2)}} M(w) = L(\tilde{X}).$$

Соответствие между задачами (P_1) и (D_1) нетрудно установить, если предварительно задачу (P_1) привести к каноническому виду, используя приемы, описанные в начале этого раздела, записать для полученного канонического варианта двойственную задачу и упростить ее.

Г Л А В А П

МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

§ 5. Основные понятия и исходная постановка задачи

Введем в рассмотрение следующие объекты.

1. Состояние системы определяется m -мерным вектором $q \in \mathbb{R}^m$. Пространство \mathbb{R}^m будем называть пространством состояний системы.

2. В результате процесса измерений определяется значение z^* вектора $z \in \mathbb{R}^n$. Пространство \mathbb{R}^n будем называть пространством измеряемых параметров. Предполагается заданным однозначное отображение $\mathcal{H}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое вектор-функцией

$$z = \mathcal{H}(q), \quad (5.1)$$

$\mathcal{H}(q)$ — истинное значение вектора измеряемых параметров, когда система находится в состоянии q .

Измеренное значение z^* отличается от истинного значения $\mathcal{H}(q)$ на вектор ошибок измерений $\rho \in \mathbb{R}^n$

$$z^* = \mathcal{H}(q) + \rho. \quad (5.2)$$

3. Оцениваемый параметр выделяется заданием отображения $l: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, определяемого функцией

$$l = l(q). \quad (5.3)$$

4. Методом оценивания (или оценителем) Φ называется отображение $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждому z^* ставит в соответствие число

$$\hat{l} = \Phi(z^*), \quad (5.4)$$

называемое оценкой параметра l .

5. Предполагаются известными некоторые характеристики вероятностного распределения ошибок измерений.

Примеры.

а) Задана функция распределения вектора ρ .

б) Задано математическое ожидание $M\rho$ и матрица ковариаций $\mathcal{P} = M(\rho - M\rho)(\rho - M\rho)^\top$.

в) Задано множество функций распределения ρ .

г) Известно, что $\rho \in U \subset \mathbb{R}^n$, где U — область в \mathbb{R}^n .

Основная задача теории оценивания заключается в определении оценителя Φ , при котором модуль разности $|l(q) - \hat{l}|$ оказывается в некотором смысле наименьшим.

О п р е д е л е н и е. Оценитель Φ называется *несмещенным*, если $M(l(q) - \Phi(\mathcal{H}(q) + \rho)) = 0$ (для всех q), где $M(\cdot)$ — математическое ожидание.

Во многих приложениях можно ограничиться задачей оценивания в линейном приближении. В этом случае соотношения (5.1)–(5.4) имеют следующий вид:

$$z = Hq, \quad (5.1')$$

где H — постоянная матрица $n \times m$,

$$z^* = Hq + \rho, \quad (5.2')$$

$$l = a^\top q, \quad (5.3')$$

где $a \in \mathbb{R}^m$ — вектор, не зависящий от q ,

$$\hat{l} = \Phi^\top z^*, \quad (5.4')$$

где $\Phi \in \mathbb{R}^n$ — постоянный вектор.

§ 6. Оценивание методом наименьших квадратов (МНК)

Процедура оценивания в МНК строится следующим образом. Вводится в рассмотрение функционал — квадратичная форма:

$$J(q) = (z^* - \mathcal{H}(q))^\top Q(z^* - \mathcal{H}(q)),$$

где Q — симметричная, положительно определенная матрица $n \times n$, называемая *весовой матрицей*. Предлагается определить вектор $\hat{q} \in \mathbb{R}^m$, на котором $J(q)$ достигает минимума:

$$\hat{q} = \arg \min_{q \in \mathbb{R}^m} J(q).$$

Оценка \hat{l} определяется по правилу:

$$\hat{l} = l(\hat{q}).$$

Теорема 6.1. Пусть 1) $M\rho = 0$, $M\rho\rho^\top = \mathcal{P}$ — известная положительно определенная матрица, 2) отображения \mathcal{H} и l — линейны, т. е. справедливы соотношения (5.1')–(5.3'), 3) $Q = \mathcal{P}^{-1}$.

Тогда i) алгоритм оценивания МНК линеен (имеет вид (5.4')), ii) для любого $a \in \mathbb{R}^m$ оценка \hat{l} — несмещенная, iii) алгоритм МНК является наилучшим среди всех линейных несмещенных алгоритмов оценивания с точки зрения минимизации математического ожидания квадрата уклонения оценки от истинного значения $l(q)$:

$$M(l - \hat{l})^2 = \min_{\Phi}.$$

Доказательство. В линейном приближении

$$J(q) = (z^* - Hq)^\top \mathcal{P}^{-1} (z^* - Hq).$$

Определяя \hat{q} из необходимых условий экстремума $\left. \frac{\partial J}{\partial q} \right|_{\hat{q}} = 0$, находим:

$$\hat{q} = (H^\top \mathcal{P}^{-1} H)^{-1} H^\top \mathcal{P}^{-1} z^*, \quad (6.1)$$

$$\hat{l} = a^\top \hat{q} = \Phi^\top z^*, \quad (6.2)$$

где

$$\Phi^\top = a^\top (H^\top \mathcal{P}^{-1} H)^{-1} H^\top \mathcal{P}^{-1}. \quad (6.3)$$

Линейность алгоритма непосредственно следует из (6.2). Подставляя в (6.2) z^* в виде (5.2'), находим:

$$\hat{l} = \Phi^\top Hq + \Phi^\top \rho.$$

Так как $\Phi^\top H = a^\top$, то $\hat{l} = a^\top q + \Phi^\top \rho = l + \Phi^\top \rho$. Тем самым, $M\hat{l} = l$ и, следовательно, оценка (6.2) — несмещенная. При этом

$$M(\hat{l} - l)^2 = M(\Phi^\top \rho \rho^\top \Phi) = \Phi^\top \mathcal{P} \Phi = a^\top (H^\top \mathcal{P}^{-1} H)^{-1} a. \quad (6.4)$$

Пусть $\hat{l} = \overline{\Phi}^\top z^*$ — произвольный линейный алгоритм оценивания. Подставляя z^* в виде (5.2') и l в виде (5.3'), получим

$$\hat{l} - l = (\overline{\Phi}^\top H - a^\top)q + \overline{\Phi}^\top \rho. \quad (6.5)$$

Из условия несмещенности ($M(\hat{l} - l) = 0$ для любого q) находим ограничение на допустимые оцениватели $\overline{\Phi}$:

$$H^\top \overline{\Phi} = a. \quad (6.6)$$

При этом

$$M(\hat{l} - l)^2 = \bar{\Phi}^\top \mathcal{P} \bar{\Phi}. \quad (6.7)$$

Минимизируя $\bar{\Phi}^\top \mathcal{P} \bar{\Phi}$ по $\bar{\Phi}$ при условии (6.6) (можно использовать метод множителей Лагранжа), находим:

$$\bar{\Phi} = \mathcal{P}^{-1} H (H^\top \mathcal{P}^{-1} H)^{-1} a.$$

Тем самым $\bar{\Phi} = \Phi$, где Φ из (6.3) — оценитель, определяемый МНК. Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е. В МНК попутно получается оценка \hat{q} состояния системы q . И оценка любого параметра l находится как функция $l(\hat{q})$. В общем случае при оценивании заданного параметра l не обязательно предварительно оценивать состояние системы q .

§ 7. Задача о наихудшей корреляции

Матрицу $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{ij})$ ковариаций ошибок измерений ρ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{P} = \Lambda R \Lambda, \quad (7.1)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{\mathcal{P}_{11}}, \sqrt{\mathcal{P}_{22}}, \dots, \sqrt{\mathcal{P}_{nn}})$ — диагональная матрица, \mathcal{P}_{ii} — диагональные элементы матрицы \mathcal{P} , $R = (R_{ij})$ — матрица коэффициентов корреляции:

$$R_{ij} = \mathcal{P}_{ij} / \sqrt{\mathcal{P}_{ii}} \sqrt{\mathcal{P}_{jj}} \leq 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим задачу линейного оценивания (5.1')–(5.4'). Однако в отличие от рассмотренного выше случая предположим, что величины \mathcal{P}_{ii} нам заданы, а коэффициенты корреляции R_{ij} ($i \neq j$) неизвестны. Если мы по-прежнему потребуем, чтобы алгоритм оценивания $\bar{\Phi}$ был несмещенным, то вектор $\bar{\Phi}$ должен удовлетворять соотношению (6.6). Обозначим: $\Lambda \bar{\Phi} = u \in \mathbb{R}^n$, $H^\top \Lambda^{-1} = \bar{H}^\top$. Из соотношения (6.7) следует:

$$M(\hat{l} - l)^2 = u^\top R u. \quad (7.2)$$

В этом случае оценитель u целесообразно определять из следующей минимаксной задачи:

$$\max_R u^\top R u - \min_u. \quad (7.3)$$

В задаче (7.3) вектор u (и, следовательно, $\bar{\Phi} = \Lambda^{-1} u$) выбирается из условия минимизации максимума по R среднеквадратичного уклонения

оценки \hat{l} от истинного значения l . Максимум левой части (7.3) достигается при

$$R_{ij} = \text{sgn } u_i u_j, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (7.4)$$

и равен

$$\max_R u^\top R u = \left(\sum_{i=1}^n |u_i| \right)^2. \quad (7.5)$$

З а м е ч а н и е. Матрица R , элементы которой определяются (7.4), является неотрицательно определенной и действительно может быть корреляционной матрицей.

Тем самым решение линейной задачи оценивания при наихудшей корреляции сводится к проблеме математического программирования: определить $u \in \mathbb{R}^n$ из условий:

$$\overline{H}^\top u = a, \quad (7.6)$$

$$\sum_{i=1}^n |u_i| \rightarrow \min_u. \quad (7.7)$$

В § 9 мы покажем, что эта задача сводится к задаче линейного программирования.

К задаче (7.6), (7.7) сводится проблема оценивания в несколько иной постановке, получившей название «схемы бортиков». Предположим, что об ошибках измерений ρ_i нам только известно, что они ограничены по модулю: $|\rho_i| \leq \sqrt{\mathcal{P}_{ii}}$, $i = \overline{1, n}$. Тем самым нам известно, что $\rho \in \Pi$, где $\Pi = \{\rho \in \mathbb{R}^n : |\rho_i| \leq \sqrt{\mathcal{P}_{ii}}, i = \overline{1, n}\}$ — параллелепипед в \mathbb{R}^n . Из (6.5) при условии несмещенности (6.6), находим

$$|\hat{l} - l| = |\overline{\Phi}^\top \rho| = |u^\top r|,$$

где $r \in \mathbb{R}^n$ — вектор с компонентами $r_i = \rho_i / \sqrt{\mathcal{P}_{ii}}$ принадлежит единичному кубу Q в \mathbb{R}^n : $Q = \{r \in \mathbb{R}^n; |r_i| \leq 1, i = \overline{1, n}\}$. В этой постановке можно рассмотреть задачу об определении оценки из условия:

$$\max_{r \in Q} |\hat{l} - l| \rightarrow \min_u.$$

Максимум левой части (см. (7.4)) достигается при $r_i = \text{sgn } u_i$, $i = \overline{1, n}$, и тем самым, мы вновь приходим к задаче (7.6), (7.7).

З а м е ч а н и е. Если диагональные элементы \mathcal{P}_{ii} матрицы \mathcal{P} нам тоже не известны точно, а известно только $\mathcal{P}_{ii} \leq \mathcal{P}_{ii_{\max}}$, где $\mathcal{P}_{ii_{\max}} > 0$, $i = \overline{1, n}$ — заданные числа, то постановка задачи об определении линейных несмещенных оценок \hat{q} из условия $\max_{\mathcal{P}} M(\hat{l} - l)^2 \rightarrow \min_{\Phi}$ также

приводит к задаче (7.6)–(7.7). Однако в этом случае вместо матрицы Λ следует использовать матрицу

$$\Lambda_{\max} = \text{diag}(\sqrt{\mathcal{P}_{11_{\max}}}, \sqrt{\mathcal{P}_{22_{\max}}}, \dots, \sqrt{\mathcal{P}_{nn_{\max}}}).$$

§ 8. Некоторые более общие постановки минимаксной проблемы оценивания

В этом разделе мы отметим одно из естественных обобщений минимаксного подхода в задаче оценивания. Предположим, что корреляционная матрица R имеет следующую структуру:

$$R = \begin{pmatrix} R^{(1)} & & & \\ & R^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Вдоль главной диагонали расположены квадратные блоки $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(k)}$, а элементы, не входящие в эти блоки, равны нулю. Пусть размерность блока $R^{(s)}$ равна n_s ,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n. \quad (8.2)$$

Такая структура матрицы R возникает в том случае, когда вектор измеряемых параметров z можно разбить на k составляющих $z^\top = (z^1, z^2, \dots, z^k)$ размерности $z^s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $z^{s\top} = (z_1^s, z_2^s, \dots, z_{n_s}^s)$, $s = \overline{1, k}$. При этом ошибки ρ_i^s , $i = \overline{1, n_s}$ измерений параметров, входящих в вектор z^s , некоррелированы с ошибками ρ_j^l , $j = \overline{1, n_l}$ измерений компонент вектора z^l для $s \neq l$, $s, l = \overline{1, k}$.

Ниже мы будем предполагать, что коэффициенты $R_{ij}^{(s)}$, входящие в блок $R^{(s)}$ корреляционной матрицы R , удовлетворяют условиям:

$$|R_{ij}^{(s)} - \gamma_s| \leq \theta_s, \quad i, j = \overline{1, n_s}, \quad i \neq j, \quad s = \overline{1, k}, \quad (8.3)$$

где γ_s и θ_s заданные числа, удовлетворяющие ограничениям:

$$|\gamma_s \pm \theta_s| \leq 1, \quad \theta_s \geq 0, \quad s = \overline{1, k}, \quad (8.4)$$

$$\gamma_s \geq 0, \quad s = \overline{1, k}. \quad (8.5)$$

При выполнении (8.4) любой коэффициент $R_{ij}^{(s)}$, удовлетворяющий (8.3), будет удовлетворять условию $|R_{ij}^{(s)}| \leq 1$, которому должны удовлетворять коэффициенты корреляции. Ограничение (8.5) мы обсудим ниже.

Из (8.3) следует, что для $R_{ij}^{(s)}$ ($i \neq j$) справедливо представление:

$$R_{ij}^{(s)} = \gamma_s + \theta_s \sigma_{ij}^{(s)}, \quad |\sigma_{ij}^{(s)}| \leq 1. \quad (8.6)$$

В соответствии с разбиением множества измерений на группы $z^s \in \mathbb{R}^{n_s}$ представим оценитель Φ в виде составного вектора: $\Phi^\top = (\Phi^{1\top}, \Phi^{2\top}, \dots, \Phi^{k\top})$, где $\Phi^s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s = \overline{1, k}$, и введем обозначения: $\Lambda^{(s)} = \text{diag}(\sqrt{\mathcal{P}_{11}^{(s)}}, \sqrt{\mathcal{P}_{22}^{(s)}}, \dots, \sqrt{\mathcal{P}_{n_s n_s}^{(s)}})$, $u^s = \Lambda^{(s)} \Phi^{(s)} \in \mathbb{R}^{n_s}$. При этом для $M(\hat{l} - l)^2 = \Phi^\top \mathcal{P} \Phi$ получим следующее представление:

$$M(\hat{l} - l)^2 = \sum_{s=1}^k u^{s\top} R^{(s)} u^s.$$

Каждый член этой суммы, в свою очередь, можно представить в следующем виде:

$$u^{s\top} R^{(s)} u^s = \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_s} u_i^s u_j^s R_{ij}^{(s)}.$$

Используя представление (8.6), получим:

$$u^{s\top} R^{(s)} u^s = \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \gamma_s \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_s} u_i^s u_j^s + \theta_s \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_s} u_i^s u_j^s \sigma_{ij}^{(s)}.$$

Отсюда следует, что

$$\max_{|\sigma_{ij}^{(s)}| \leq 1} u^{s\top} R^{(s)} u^s = \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \gamma_s \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_s} u_i^s u_j^s + \theta_s \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n_s} |u_i^s| |u_j^s|. \quad (8.7)$$

Этот максимум достигается при

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \text{sgn } u_i^s u_j^s, \quad i, j = \overline{1, n_s}, \quad i \neq j, \quad s = \overline{1, k}.$$

Соотношение (8.7) нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$\max u^{s\top} R^{(s)} u^s = (1 - \gamma_s - \theta_s) \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} u_i^s \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} |u_i^s| \right)^2.$$

Окончательно получим следующее представление для наихудшей дисперсии:

$$\begin{aligned} \max_R M(\hat{l} - l)^2 = \\ = \sum_{s=1}^k \left\{ (1 - \gamma_s - \theta_s) \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} u_i^s \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} |u_i^s| \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Тем самым основная задача оценивания в рассматриваемом случае сводится к следующей проблеме математического программирования.

Определить $u \in \mathbb{R}^n$, $u^\top = (u^{1\top}, u^{2\top}, \dots, u^{k\top})$, $u^s \in \mathbb{R}^{n_s}$ из условий:

$$\overline{H}^\top u = a, \quad (8.9)$$

$$\sum_{s=1}^k \left\{ (1 - \gamma_s - \theta_s) \sum_{i=1}^{n_s} (u_i^s)^2 + \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} u_i^s \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} |u_i^s| \right)^2 \right\} \rightarrow \min_u.$$

З а м е ч а н и я. 1. Из представления (8.6) следует: для любого $b^s \in \mathbb{R}^{n_s}$ и $\sigma_{ij}^{(s)} = \text{sgn } u_i^s u_j^s$, $i, j = \overline{1, n_s}$, $s = \overline{1, k}$

$$b^{s\top} R^{(s)} b^s = (1 - \gamma_s - \theta_s) |b^s|^2 + \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} b_i^s \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} b_i^s \text{sgn } u_i^s \right)^2.$$

Тем самым, для любого вектора $b^s \in \mathbb{R}^{n_s}$ и $0 \leq \gamma_s$, $0 \leq \theta_s$, $1 - \gamma_s - \theta_s \geq 0$ выполнено $b^{s\top} R^{(s)} b^s \geq 0$, т. е. матрицы $R^{(s)}$, максимизирующие $M(\hat{l} - l)^2$ при ограничениях (8.4), (8.5), будут неотрицательно определенными и действительно могут быть корреляционными матрицами.

2. Задача о наихудшей корреляции является частным случаем этой более общей постановки. Из (8.8), (8.9) при $k = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\theta_1 = 1$ приходим к (7.6), (7.7).

3. Другие варианты задания ограничений на допустимые значения коэффициентов матрицы \mathcal{P} можно найти в работах [4], [25].

§ 9. Использование методов линейного программирования для решения минимаксных задач оценивания

Сопоставим задачу о наихудшей корреляции:

$$\overline{H}^\top u = a, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{L}(u) = \sum_{i=1}^n |u_i| \rightarrow \min_u, \quad (9.1)$$

\overline{H}^\top — матрица $m \times n$, с задачей линейного программирования

$$Av = a, \quad v \in \mathbb{R}^{2n}, \quad v \geq 0, \quad L(v) = \sum_{i=1}^{2n} v_i = \min_v, \quad (9.2)$$

где $A = (\overline{H}^\top, -\overline{H}^\top)$ — матрица $m \times 2n$.

1°. Прежде всего отметим, что на любом опорном плане v задачи линейного программирования должно быть выполнено $v_i v_{n+i} = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Иначе в опорный базис входили бы два столбца матрицы A , отличающиеся только знаком, что невозможно.

2°. Каждому решению u задачи (9.1) (не обязательно оптимальному) можно поставить в соответствие решение v задачи (9.2), на котором выполнено $v_i v_{n+i} = 0$ для любого $i = \overline{1, n}$ и при этом $\overline{L}(u) = L(v)$. Это соответствие устанавливается следующими формулами для $i = \overline{1, n}$:

$$v_i = \begin{cases} u_i, & \text{если } u_i > 0, \\ 0, & \text{если } u_i \leq 0, \end{cases}, \quad v_{n+i} = \begin{cases} -u_i, & \text{если } u_i < 0, \\ 0, & \text{если } u_i \geq 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

3°. Каждому опорному плану v задачи (9.2) можно поставить в соответствие решение u задачи (9.1) и при этом $\overline{L}(u) = L(v)$. Это соответствие устанавливается следующими формулами для $i = \overline{1, n}$:

$$u_i = \begin{cases} v_i, & \text{если } v_i > 0, \\ -v_{n+i}, & \text{если } v_{n+i} > 0, \\ 0, & \text{если } v_i = v_{n+i} = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Теорема 9.1. *Оптимальное решение задачи (9.2) после пересчета по формулам (9.4) определяет оптимальное решение задачи (9.1).*

Доказательство. Пусть \tilde{v} — оптимальное решение задачи (9.2). После пересчета по формулам (9.4) определим решение \tilde{u} задачи (9.1). Если бы существовало решение u задачи (9.1) с $\overline{L}(u) < \overline{L}(\tilde{u})$, то на основании 2° должно существовать решение задачи (9.2) с меньшим значением функционала, что невозможно, так как \tilde{v} — оптимальное решение. \square

Следствие. *Так как решение задачи линейного программирования достигается на опорном плане, то отличными от нуля могут быть не более, чем t компонент вектора \tilde{v} (t — размерность пространства состояний системы). Тем самым, только t компонент оценителя Φ будут отличны от нуля. То есть из всего множества n (как правило, $n \gg t$) возможных измерений только t измерений*

необходимы для оптимальной оценки параметра l . Это основная особенность минимаксной задачи о наихудшей корреляции по сравнению с задачей, где матрица \mathcal{P} предполагается известной.

К необходимости решения задачи (9.1) приходят, как на стадии априорного анализа с целью получения информации о достижимой точности оценки \hat{l} параметра l , т. е. оценки $M(\hat{l} - l)^2$, так и после проведения измерений для определения оптимального оценивателя Φ , оценки \hat{l} и характеристики точности оценки $M(\hat{l} - l)^2$.

При априорном анализе решение этой задачи выделяет m измерений, которые необходимы для оптимальной оценки. Тем самым рассматриваемая задача попутно дает решение проблемы о составлении программы измерений (см. гл. IV). Из возможного множества измерений $z = \mathcal{H}(q) \in \mathbb{R}^n$ мы (исходя из условия минимизации ошибки оценки параметра l) выделяем m измерений, которые нам необходимы.

Пусть $z_{j_s}^* = H_{j_s}^\top q + \rho_{j_s}$, $s = \overline{1, m}$, j_s из $\overline{1, n}$, $q \in \mathbb{R}^m$, $H_{j_s} \in \mathbb{R}^m$ — набор m измерений, которые определяют оптимальную оценку и $H^{(m)} = (H_{j_1}, H_{j_2}, \dots, H_{j_m})$ — матрицу $m \times m$. Не равные нулю компоненты оптимального оценивателя $\Phi^{(m)} = (\Phi_{j_1}, \Phi_{j_2}, \dots, \Phi_{j_m})$ определяются непосредственно из условия несмещенности однозначно: $H^{(m)}\Phi^{(m)} = a$. Остальные компоненты вектора Φ равны нулю. При этом $\Phi^{(m)}$ будет равен вектору Φ , определяемому методом наименьших квадратов (6.3) в случае $n = m$ и $H = H^{(m)}$.

Так как реальные ошибки измерения, кроме коррелированной составляющей, содержат и чисто флуктуационную некоррелированную составляющую, то при использовании решения рассмотренной задачи в практических приложениях предполагается, что в окрестностях выделенных решением задачи m моментов времени измерений проводятся сеансы измерений. Каждый сеанс измерений содержит достаточно большое число M однотипных измерений, что позволяет уменьшить чисто флуктуационную составляющую в $1/\sqrt{M}$ раз.

В непрерывной постановке задачи о минимаксном оценивании, рассмотренной в [17], длина сеансов измерений получается как следствие решения задачи. В рассматриваемой же сейчас дискретной постановке задачи о наихудшей корреляции сеансы измерений появляются в результате чисто эвристических соображений.

В случае, когда необходимо оценить несколько параметров l_1, l_2, \dots, l_r : $l_j = a_j^\top q$, $j = \overline{1, r}$, для каждого параметра l_j рассматривается свой оцениватель $\Phi^{(j)} \in \mathbb{R}^n$: $\hat{l}_j = \Phi^{(j)\top} z^*$, $j = \overline{1, r}$.

В рассматриваемой минимаксной постановке оптимальные оцениватели $\tilde{\Phi}^{(j)}$ и точность оценок $M(\hat{l}_j - l_j)^2$ получаются из независимых решений r задач (7.6), (7.7) с различными $a = a_j$, $j = \overline{1, r}$.

Решение всех этих задач из множества n измерений выделяет не более mr измерений, содержащих все наборы измерений, оптимизирующие оценки \hat{l}_j , $j = \overline{1, r}$. Для некоторых приложений число mr оказывается слишком большим. Таким образом приходят к проблеме о выборе из множества n возможных измерений ограниченного числа p ($m \leq p \leq mr$) измерений, при которых в некотором смысле достаточно хороши оценки всех параметров l_j .

Одна из таких постановок рассмотрена в [7]. Обозначим $\mu(a, u) = \sum_{i=1}^n |u_i|$ значение функционала задачи (9.1) на некотором решении $u \in \mathbb{R}^n$. Оптимальное значение функционала $\tilde{\mu}(a)$ определяется из решения задачи (9.1):

$$\tilde{\mu}(a) = \min \mu(a, u), \quad \overline{H}^\top u = a, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Близость произвольного решения u к оптимальному можно характеризовать функцией $\nu(a, u)$:

$$\nu(a, u) = \mu(a, u) / \tilde{\mu}(a).$$

Пусть $J = (j_1, j_2, \dots, j_p)$ набор p различных индексов j_s из $\overline{1, n}$. Очевидно, имеется $N = C_n^p$ различных наборов J , которые можно упорядочить индексом s : $J = J_s$, $s = \overline{1, N}$.

Рассмотрим подмножества $\mathbb{R}_{p_s}^n$, $s = \overline{1, N}$ векторов \mathbb{R}^n , определяемые следующим условием:

$$\mathbb{R}_{p_s}^n = \{u \in \mathbb{R}^n; u_j = 0, \text{ если } j \in \overline{J_s}\},$$

т. е. вектор $u \in \mathbb{R}^n$ принадлежит $\mathbb{R}_{p_s}^n$, если у него компоненты u_j для j , не принадлежащего набору J_s , равны нулю.

Для каждого J_s можно рассмотреть задачу:

$$\min_{u \in \mathbb{R}_{p_s}^n} \nu(a, u) = \overline{\nu}(a, J_s)$$

и вычислить:

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} \overline{\nu}(a, J_s) = \overline{\overline{\nu}}(J_s).$$

Основная задача, поставленная в [7], сводится к следующей проблеме: определить J_s из условия минимизации $\overline{\overline{\nu}}$ по J_s :

$$\tilde{\nu} = \min_{J_s} \overline{\overline{\nu}}(J_s).$$

Очевидно, при $p = n$ для любого $a \in \mathbb{R}^m$ $\overline{\nu}(a, J_s) = 1$. Тем самым $\overline{\overline{\nu}}(J_s) = 1$ и $\tilde{\nu} = 1$. (В этом случае $N = 1$.)

В общем случае $m \leq p < n$ — это очень сложная задача математического программирования, эффективный метод решения которой неизвестен. Возможно ничего другого, кроме нереализуемого перебора по N вариантам J_s , придумать нельзя.

В [7] для $p = m + 1$ указан эффективный метод определения набора индексов $\overline{J_s}$, для которого доказано выполнение неравенства $\overline{v}(J_s) \leq 2$.

Симплекс-метод линейного программирования может быть существенно использован и при решении более сложных задач типа (8.9). Запишем задачу (8.9) для случая, когда $\gamma_s + \theta_s = 1$ для всех $s = \overline{1, k}$:

$$\sum_{s=1}^k \overline{H}^{(s)\top} u^s = a, \quad (9.5)$$

$$D(u) = \sum_{s=1}^k \left\{ \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} u_i^s \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} |u_i^s| \right)^2 \right\} - \min_u.$$

Здесь $u^\top = (u^{1\top}, u^{2\top}, \dots, u^{k\top})$, $u^s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, матрицы $m \times n_s$ — $\overline{H}^{(s)\top}$ — блоки матрицы \overline{H}^\top размером $m \times n$, соответствующие векторам u^s : $\overline{H}^\top = (\overline{H}^{(1)\top}, \dots, \overline{H}^{(k)\top})$. Наряду с задачей (9.5) рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{s=1}^k A^{(s)} v^s = a, \quad (9.6)$$

$$\mathcal{E}(v) = \sum_{s=1}^k \left\{ \gamma_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} (v_i^s - v_{n_s+i}^s) \right)^2 + \theta_s \left(\sum_{i=1}^{n_s} (v_i^s + v_{n_s+i}^s) \right)^2 \right\} - \min_v,$$

где для всех $s = \overline{1, k}$: $A^{(s)} = (\overline{H}^{(s)\top}, -\overline{H}^{(s)\top})$ — матрица $m \times 2n_s$, $v^s \in \mathbb{R}^{2n_s}$, $v_i^s \geq 0$ для всех $i = \overline{1, n_s}$, $s = \overline{1, k}$. Прежде всего отметим соответствие между решениями задач (9.5) и (9.6).

1. Пусть u — некоторое (не обязательно оптимальное) решение задачи (9.5). Этому решению можно поставить в соответствие решение задачи (9.6), определяемое следующими соотношениями, справедливыми для всех $s = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n_s}$:

$$v_i^s = \begin{cases} u_i^s, & \text{если } u_i^s > 0, \\ 0, & \text{если } u_i^s \leq 0, \end{cases} \quad v_{n_s+i}^s = \begin{cases} -u_i^s, & \text{если } u_i^s < 0, \\ 0, & \text{если } u_i^s \geq 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

При этом значение функционалов этих задач на соответствующих решениях одинаково:

$$D(u) = \mathcal{E}(v). \quad (9.8)$$

2. Пусть v — некоторое решение задачи (9.6) и компоненты вектора v удовлетворяют следующему условию, выполненному для всех $s = \overline{1, k}$ и всех $i = \overline{1, n_s}$:

$$v_i^s v_{n_s+i}^s = 0. \quad (9.9)$$

Тогда этому решению можно поставить в соответствие решение задачи (9.5), определяемое следующими формулами ($s = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, n_s}$):

$$u_i^s = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i^s = v_{n_s+i}^s = 0, \\ v_i^s, & \text{если } v_i^s > 0, \\ -v_{n_s+i}^s, & \text{если } v_{n_s+i}^s > 0 \end{cases} \quad (9.10)$$

и при этом выполнено (9.8).

3. На оптимальном решении \tilde{v} задачи (9.6) выполнено условие (9.9).

Доказательство первых двух утверждений следует из сопоставления основных соотношений задач (9.5) и (9.6). Для доказательства справедливости утверждения 3 предположим противоположное. Пусть для оптимального \tilde{v} можно указать некоторые s и i , так что $\tilde{v}_i^s > 0$ и $\tilde{v}_{n_s+i}^s > 0$.

Учитывая специальную конструкцию матрицы $A^{(s)}$, нетрудно показать, что для $\varepsilon > 0$ и при $\varepsilon \leq \min(v_i^s, v_{n_s+i}^s)$ вектор v' , получаемый заменой в \tilde{v} компонент \tilde{v}_i^s и $\tilde{v}_{n_s+i}^s$ на $v_i'^s = \tilde{v}_i^s - \varepsilon$, $v_{n_s+i}'^s = \tilde{v}_{n_s+i}^s - \varepsilon$, также является решением (9.6) и при этом $\mathcal{E}(v') < \mathcal{E}(\tilde{v})$. То есть \tilde{v} не может быть оптимальным решением. Это противоречие и доказывает утверждение 3. Отсюда следует

Теорема 9.2. *Оптимальное решение \tilde{v} задачи (9.6) после пересчета по формулам (9.10) определяет оптимальное решение \tilde{u} задачи (9.5).*

Доказательство. Если бы существовало решение u^* задачи (9.5), для которого $D(u^*) < D(\tilde{u})$, то после пересчета по формулам (9.7), мы получили бы решение v^* , для которого $\mathcal{E}(v^*) = D(u^*) < D(\tilde{u}) = \mathcal{E}(\tilde{v})$. Так как \tilde{v} — оптимальное решение, этого быть не может. Теорема доказана. \square

Остановимся теперь на возможном методе решения задачи (9.6). Пусть $\mu^\top = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ — фиксированный набор вещественных чисел и $\nu^\top = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{k-1})$ — другой набор неотрицательных чисел.

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^k A^{(s)} v^s = a, \\
& \sum_{i=1}^{n_s} (v_i^s - v_{n_s+i}^s) = \mu_s, \quad s = \overline{1, k}, \\
& \sum_{i=1}^{n_s} (v_i^s + v_{n_s+i}^s) = \nu_s, \quad s = \overline{1, (k-1)}, \\
& \sum_{i=1}^{n_k} (v_i^k + v_{n_k+i}^k) = \min_v.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Для решения этой задачи может быть применен симплекс-метод.

В результате для любых $\mu \in \mathbb{R}^k$ и $\nu \in \mathbb{R}_+^{k-1}$ можно определить оптимальное решение $\tilde{v} = \tilde{v}(\mu, \nu)$.

Таким образом, решение задачи (9.6) сводится к проблеме определения $\mu = \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^k$ и $\nu = \tilde{\nu} \in \mathbb{R}_+^{k-1}$, оптимизирующих функционал

$$\sum_{s=1}^k (\gamma_s \mu_s^2 + \theta_s \nu_s^2) = \min_{\mu, \nu}, \tag{9.12}$$

где

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n_k} (\tilde{v}_i^k(\mu, \nu) + \tilde{v}_{n_k+i}^k(\mu, \nu)).$$

Тем самым решение задачи (9.6) сводится к «внутренней» многомерной проблеме (9.11), эффективно решаемой симплекс-методом, и к «внешней» задаче (9.12), зависящей от $2k - 1$ параметров. Такой алгоритм является особенно эффективным при малых k .

Отметим две практически важные задачи.

1°. Задача «о наилучшей положительной корреляции». Эта задача возникает при $k = 1$, $\gamma_1 = \theta_1 = 1/2$. Из (8.3) следует, что при этом значении параметров γ_1 и θ_1 допустимы коэффициенты корреляции R_{ij} , удовлетворяющие неравенству $0 \leq R_{ij} \leq 1$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, что и определило название этой задачи. При этом «внутренняя» задача (9.11) имеет вид

$$\begin{aligned}
Av = a, \quad A = (\overline{H}^\top, -\overline{H}^\top), \quad v \in \mathbb{R}_+^{2n}, \\
\sum_{i=1}^n (v_i - v_{n+i}) = \mu, \quad \sum_{i=1}^n (v_i + v_{n+i}) = \min_v,
\end{aligned} \tag{9.13}$$

а «внешняя» задача — одномерна

$$\frac{1}{2} \left[\mu^2 + \left(\sum_{i=1}^n (\tilde{v}_i(\mu) + \tilde{v}_{n+i}(\mu)) \right)^2 \right] - \min_{\mu} . \quad (9.14)$$

Так как внутренняя задача имеет $m + 1$ ограничение типа равенства, то оптимальное решение задачи «о положительной наихудшей корреляции» выделяет из рассматриваемой совокупности n измерений не более, чем $m + 1$ измерение, которые необходимы для оптимальной оценки параметра l .

2°. Задача о двух группах взаимно некоррелированных измерений.

Эта задача возникает при $k = 2$, $\gamma_s = 0$, $\theta_s = 1$, $s = 1, 2$. То есть все множество n измерений разбивается на две группы $s = 1$ и $s = 2$; ошибки измерений, принадлежащие разным группам, некоррелированы, а внутри каждой группы ошибки могут быть коррелированными произвольно: $|R_{ij}^{(s)}| \leq 1$, $i, j = \overline{1, n_s}$.

Внутренняя проблема в этой задаче имеет вид

$$\sum_{s=1}^2 A^{(s)} v^{(s)} = a, \quad A^{(s)} = (\overline{H}^{(s)\top}, -\overline{H}^{(s)\top}), \quad v^s \in \mathbb{R}_+^{2n_s}, \quad s = 1, 2, \quad (9.15)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} (v_i^1 + v_{n_1+i}^1) = \nu_1, \quad \sum_{i=1}^{n_2} (v_i^2 + v_{n_2+i}^2) - \min_{\nu} ,$$

а внешняя задача — одномерна

$$\nu_1^2 + \left(\sum_{i=1}^{n_2} \tilde{v}_i^2(\nu_1) + \tilde{v}_{n_2+i}^2(\nu_1) \right)^2 - \min_{\nu_1 \geq 0} . \quad (9.16)$$

Здесь также решение выделяет не более, чем $m + 1$ точку, где надо производить измерения. Численные эксперименты показывают, что в случае одномерных внешних задач такой алгоритм является достаточно эффективным.

Г Л А В А ІІІ

ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ КОРРЕКЦИЯ (ОЛИК)

§ 10. Физическая постановка задачи о линейной импульсной коррекции параметров траектории

Пусть движение некоторого объекта описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (10.1)$$

Если рассматривается полет космического аппарата (КА), то обычно $m = 6$, x — вектор фазовых координат, объединяющий три компоненты скорости движения аппарата и три его координаты; $f(x, t)$ — вектор сил, действующих на аппарат, например, суммарное влияние гравитационного притяжения различных тел.

Решение системы уравнений (10.1)

$$x = \varphi(t, x_0), \quad \varphi(0, x_0) = x_0$$

определяет траекторию движения аппарата. Траектория движения однозначно определяется заданием фазовых координат $x(t)$ в некоторый момент времени t , в частности, начальных условий: $t = 0$, $x(0) = x_0$.

Во многих случаях для целей полета основной интерес представляет не вся траектория, а значения некоторого набора соответствующих данной траектории параметров $\xi \in \mathbb{R}^k$: $\xi^\top = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Подчеркнем, что параметры ξ_i — параметры траектории и для данной траектории не зависят от времени. Например, при стрельбе ракетой по наземной цели в качестве таких параметром можно принять две координаты (географические широту и долготу) точки пересечения траектории с поверхностью Земли. При полете КА к планете особый интерес представляют координаты точки пересечения траекторией некоторой плоскости, связанной с планетой, и время достижения КА этой плоскости, т. е. $k = 3$. Такие параметры ξ мы будем называть *контролируемыми* (или *корректируемыми*). Смысл последнего определения станет понятен ниже.

Предположим, что выделена некоторая траектория $x^*(t) = \varphi(t, x_0^*)$, которую обычно принято называть номинальной, и на этой траектории контролируемые параметры имеют необходимые для целей полета значения. Без ограничения общности можно считать, что для номинальной траектории $\xi = 0$. Ниже мы будем полагать, что отклонение реальной траектории полета от номинальной остается малым и будем рассматривать задачу в линейном приближении. Представим $x(t) = x^*(t) + y(t)$. После линеаризации системы уравнений относительно y система уравнений (10.1) преобразуется к следующей линейной системе:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad (10.2)$$

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{x=x^*(t)}.$$

Номинальной траектории отвечает решение (10.2) $y = 0$.

Если в силу ошибок выведения аппарата на траекторию в момент времени $t = 0$ $y = y_0 \neq 0$, то на траектории значение корректируемых параметров ξ , вообще говоря, не будет равно нулю, и эта цель полета не будет достигнута. Для исправления ошибок выведения аппарата на траекторию с помощью активной системы управления проводится коррекция траектории. Так, например, на борту космического аппарата предусмотрены специальные реактивные двигатели, включение которых может изменять в определенные моменты времени скорость движения КА. Формально, возможность такого управления описывается добавлением в правые части (10.2) специальных сил; и уравнения движения аппарата с управлением можно представить в виде

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u, \quad (10.3)$$

где $u \in \mathbb{R}^s$ — управление, $B(t)$ — матрица $m \times s$. В частности, в примере полета космического аппарата $u \in \mathbb{R}^3$ — вектор реактивного ускорения, $B(t) = \begin{pmatrix} E_3 \\ O_3 \end{pmatrix}$, E_3 — трехмерная единичная матрица, O_3 — трехмерная матрица, все элементы которой равны нулю.

Пусть $Y \in \{m \times m\}$ — фундаментальная матрица решения системы (10.2):

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(0) = E_m. \quad (10.4)$$

Тогда решение (10.3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \text{а) } y(t) = Y(t)c(t), \quad \text{б) } \frac{dc}{dt} = Y^{-1}B(t)u, \\ c(t) \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$y(t) = Y(t) \left(c_0 + \int_0^t Y^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \right), \quad (10.6)$$

где $c_0 = c(0) = y(0)$ — отклонение начальных данных от номинальных.

Так как контролируемые параметры являются параметрами траектории и не изменяются с течением времени при $u = 0$, то всегда можно представить ξ как функции $c(t)$, которые в линейном приближении имеют вид

$$\xi = Hc(t), \quad (10.7)$$

где H — постоянная матрица $k \times m$.

Если разрешено управление на отрезке времени $t \in [T_1, T_2]$, то возникает следующая задача управления. Определить $u(t)$, $t \in [T_1, T_2]$, из условия $\xi(T_2) = Hc(T_2) = 0$, где $c(t)$ удовлетворяет системе уравнений (10.5).

Такая задача может быть решена многими способами и обычно в динамике космического полета рассматривается задача оптимального управления. Так как при реактивном управлении модуль $|u|$ вектора u пропорционален расходу массы топлива, то рассматривается сформулированная выше задача управления при дополнительном условии: из всех возможных управлений необходимо выбрать то, для которого следующий интеграл — функционал задачи имеет минимальное значение:

$$\int_{T_1}^{T_2} |u| dt = \min_u. \quad (10.8)$$

Умножая уравнение (10.5) б) слева на матрицу H , интегрируя по t от T_1 до T_2 и удовлетворяя условию $\xi(T_2) = 0$, получим следующее ограничение на управление:

$$b = \int_{T_1}^{T_2} D(\tau)u(\tau) d\tau, \quad (10.9)$$

где

$$b = -\xi(T_1), \quad D(\tau) = HY^{-1}(\tau)B(\tau).$$

Проблему (10.8), (10.9) будем называть задачей о линейной коррекции траектории. Можно показать, что решение этой вариационной задачи имеет импульсный характер. Существуют специальные моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m , в которые модуль $|u|$ реактивного ускорения равен бесконечности, а в остальные моменты времени $|u| = 0$, т. е. управление импульсное. Поэтому мы с самого начала представим $|u|$ в следующем виде:

$$|u(t)| = \sum_{j=1}^n w_j \delta(t_j), \quad (10.10)$$

где $T_1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T_2$ — моменты времени, достаточно плотно заполняющие интервал $[T_1, T_2]$, $\delta(t_s)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент $t = t_s$, а $w_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_s - \varepsilon}^{t_s + \varepsilon} |u(t)| dt$ — величина s -го импульса. Вектор $u \in \mathbb{R}^s$ представим в следующем виде:

$$u = |u(t)|\alpha(t), \quad (10.11)$$

где $\alpha(t) \in \mathbb{R}^s$ — вектор единичной длины:

$$|\alpha(t)| = \sqrt{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \dots + \alpha_s^2(t)} = 1.$$

Подстановка (10.10), (10.11) в соотношения (10.8) и (10.9), приводит к следующей дискретной задаче:

$$b = \sum_{j=1}^n D_j \alpha_j w_j, \quad w_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10.12)$$

$$W = \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \min_{w_j, \alpha_j},$$

где обозначено $D_j = D(t_j)$, $\alpha_j = \alpha(t_j)$. Необходимо определить величины корректирующих импульсов w_j и их ориентацию α_j при выполнении указанных ограничений и минимизирующих W . Задачу (10.12) будем называть задачей о линейной импульсной коррекции траектории.

§ 11. Общая постановка задачи ОЛИК

Анализ предыдущего раздела служит подсказкой для формулировки следующей задачи обобщенной линейной импульсной коррекции (ОЛИК), к которой сводится ряд проблем, в частности, рассматриваемая в гл. IV задача о выборе программы измерений.

Предполагаются заданными матрицы D_j размера $m \times n_j$ для $j = \overline{1, n}$ и вектор $b \in \mathbb{R}^m$.

Требуется определить

$$w_j \geq 0, \quad \text{и} \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad |\alpha_j| = 1, \quad j = \overline{1, n},$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^n D_j \alpha_j w_j = b \quad (11.1)$$

и минимизирующие функционал

$$W(w_j, \alpha_j) = \sum_{j=1}^n w_j. \quad (11.2)$$

Прежде всего отметим один частный случай этой задачи. В задаче коррекции траектории полета космического аппарата к планете иногда рассматривается вариант коррекции, когда в каждый момент времени возможное направление корректирующего импульса определено заранее. Например, система ориентации КА устроена так, что двигатель может быть либо ориентирован только на Солнце, либо против Солнца. В этих случаях векторы α_j , $j = \overline{1, n}$, оказываются определенными однозначно — заданы. При обозначениях $A_j = D_j \alpha_j \in \mathbb{R}^m$ соотношения (11.1) и (11.2) преобразуются к соотношениям следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^n A_j w_j = b, \quad w_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \min_{w_j}. \quad (11.3)$$

Вообще между задачей (11.1), (11.2) ОЛИК и задачей ЛП имеется много общего. Это и послужит нам для обоснования применимости симплекс-метода для решения этой задачи.

Наряду с задачей (11.1), (11.2) рассмотрим другую вспомогательную задачу, для постановки которой введем в рассмотрение специальное множество \mathcal{K} векторов $A \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathbb{R}^m; \text{ существует } j \text{ из } \overline{1, n} \text{ и } \alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \\ |\alpha_j| = 1 \text{ такое, что } A = D_j \alpha_j\}. \quad (11.4)$$

Пусть N — любое конечное число. Вспомогательную задачу сформулируем в следующем виде: определить $w_j \geq 0$ и $A_j \in \mathcal{K}$, $j = \overline{1, N}$ из следующих условий:

$$\sum_{j=1}^N A_j w_j = b, \quad \overline{W} = \sum_{j=1}^N w_j - \min_{w_j \geq 0, A_j \in \mathcal{K}}. \quad (11.5)$$

Эту проблему будем называть вспомогательной задачей об обобщенной линейной импульсной коррекции траектории (ВОЛИК).

Из сопоставления задач (11.1), (11.2) и (11.5) видно, что имеется ровно одно существенное отличие между ними. В задаче (11.1), (11.2) предполагается, что в условия типа равенства для каждого j входит не более одного вектора A_j , представимого в виде $A_j = D_j \alpha_j$. В постановке задачи (11.5) это ограничение снято. В частности, возможно: $A_1 = D_1 \alpha'_1$, $A_2 = D_1 \alpha''_1$, $A_3 = D_1 \alpha'''_1$ (где $\alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$) входят в эти условия при $w_j > 0$.

Отметим два обстоятельства, позволяющих рассматривать вместо задачи (11.1), (11.2) задачу (11.5).

1°. Во-первых, такая возможность может быть предусмотрена физической постановкой задачи или допустимым приближением к ней. Например, так как в задаче коррекции полета КА при переходе к дискретному варианту моменты времени t_j выбирались произвольно, то весь набор t_j мы могли бы задать сериями $t_{11} < t_{12} < \dots < t_{1L_1} < t_{21} < t_{22} < \dots < t_{2L_2} < \dots < t_{n1} < \dots < t_{nL_n}$ и предположить, что интервал времени Δ между конечными точками каждой серии ($\Delta = t_{jL_j} - t_{j1}$) может быть настолько мал, а элементы матрицы $D(t)$ изменяются столь медленно, что без существенной погрешности можно положить для всех j_1, j_2, \dots, j_{L_j} :

$$D(t_{j_s}) \approx D\left(t_{j_1} + \frac{\Delta}{2}\right) = D_j.$$

Тем самым, уже в соотношениях (11.1) для различных $j = j_1, j_2, \dots, j_{L_j}$ матрицы D_j оказываются одинаковыми.

2°. Второе формальное соображение определяется следующей леммой.

Л е м м а 11.1. Для любого фиксированного j из $\overline{1, n}$ в оптимальное решение задачи (11.5) входит не более одного вектора $A \in \mathcal{K}$, представимого в виде $A = D_j \alpha_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о от противного. Пусть в условия типа равенств входит два вектора $A_{j_1} = D_j \alpha'_j$ и $A_{j_2} = D_j \alpha''_j$ с коэффициентами $w'_j > 0$ и $w''_j > 0$. Определяя $\overline{w}_j, \overline{\alpha}_j$ из условий

$$\overline{w}_j \overline{\alpha}_j = w'_j \alpha'_j + w''_j \alpha''_j, \quad (11.6)$$

находим (надо возвести обе части (11.6) в квадрат)

$$\bar{w}_j^2 = (w'_j)^2 + (w''_j)^2 + 2w'_j w''_j (\alpha'_j \alpha''_j).$$

Так как для скалярного произведения (α'_j, α''_j) различных единичных векторов справедливо неравенство $(\alpha'_j, \alpha''_j) < 1$, то $\bar{w}_j < w'_j + w''_j$, и замена $A_{j_1} w'_j + A_{j_2} w''_j$ на $\bar{A}_j \bar{w}_j$ ($\bar{A}_j = D_j \bar{\alpha}_j$), не изменяя условию типа равенства, уменьшает функционал. То есть, решение неоптимально. Лемма доказана. \square

Тем самым в решения (11.5) могут входить векторы

$$A_{j_1} = D_j \alpha'_j \quad \text{и} \quad A_{j_2} = D_j \alpha''_j \quad (w'_j > 0, \quad w''_j > 0),$$

однако в оптимальном решении это невозможно.

Вспомогательная задача ОЛИК (11.5) отличается от частного случая задачи линейного программирования ($c_i = 1, i = \overline{1, n}$) только тем, что множество векторов A_j , которые могут входить в условия типа равенства не конечно, а образуют континуальное множество. Все определения и свойства задачи линейного программирования, где конечность исходной совокупности векторов несущественна, остаются справедливыми и для этой задачи. Напомним некоторые из них с необходимыми изменениями.

Планом для задачи (11.5) будем называть конечный набор пар (w_j, A_j) , $w_j \geq 0, A_j \in \mathcal{K}, j = \overline{1, N}$, удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^N A_j w_j = b.$$

О п р е д е л е н и е 11.1. Набор m векторов $A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$, где $A_s \in \mathcal{K}, s = \overline{1, m}$ будем называть *опорным базисом*, если выполнены следующие условия.

1. Векторы A_J линейно-независимы ($\det A_J \neq 0$).

2. Все компоненты вектора $w_J \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющего системе уравнений

$$A_J w_J = b, \tag{11.7}$$

неотрицательны: $w_J \in \mathbb{R}_+^m$.

Если $w_J \in \mathbb{R}_+^m$ удовлетворяет (11.7), то будем говорить, что w_J определен опорным базисом A_J .

О п р е д е л е н и е 11.2. *Опорным планом* будем называть m троек $(j_s, w_s, \alpha_s), s = \overline{1, m}$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Индексы j_s принадлежат набору $\overline{1, n}$:

$$J^* = (j_1, j_2, \dots, j_m).$$

При различных s индексы $j_s \in J^*$ могут, вообще говоря, совпадать.

2. $\alpha_s \in \mathbb{R}^{n_{j_s}}$, $|\alpha_s| = 1$.

3. Набор A_J векторов $A_s = D_{j_s} \alpha_s$, $s = \overline{1, m}$:

$$A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$$

образует опорный базис.

4. $w_s \geq 0$, $s = \overline{1, m}$ и вектор $w_J^\top = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ удовлетворяет системе уравнений (11.7), т. е. определен опорным базисом A_J .

Очевидно, определяемый опорным планом набор пар (w_j, A_j) , $j = \overline{1, m}$ является планом задачи (11.5).

Заметим: это определение допускает, что различные векторы α_i и α_s , i, s из $\overline{1, m}$, входящие в определение опорного плана, могут принадлежать одному и тому же пространству \mathbb{R}^{n_k} (при $j_i = k$ и $j_s = k$), тем самым возможно, что

$$A_i = D_k \alpha_i, \quad A_s = D_k \alpha_s, \quad \alpha_i, \alpha_s \in \mathbb{R}^{n_k}.$$

§ 12. Вариант симплекс-метода для задачи ВОЛИК

Читателю рекомендуется просмотреть процедуру симплекс-метода для задачи ЛП (§ 2), учитывая, что для задачи коррекции все $c_i = 1$.

Пусть (j_s, w_s, α_s) , $s = \overline{1, m}$ — некоторый опорный план и $A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ — соответствующий опорный базис, который мы будем называть текущим: $A_s = D_{j_s} \alpha_s$, $s = \overline{1, m}$, $w_J^\top = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, $A_J w_J = b$, $J^* = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$.

На каждой итерации первые две операции симплекс-метода ЛП служат для определения из заданной совокупности \mathcal{A} вектора A_k , для которого вектор координат z_k разложения A_k по векторам базиса максимизирует форму

$$r_k = c_J^\top z_k - c_k, \quad (12.1)$$

$$c_J^\top = (c_1, c_2, \dots, c_m).$$

Здесь мы проделаем ту же операцию (для $c_k = 1$, $k = \overline{1, n}$).

1. Для каждого фиксированного $k = \overline{1, n}$ и любого вектора $A_k = D_k \alpha_k$ находим его разложение по векторам опорного базиса A_J : $A_k = D_k \alpha_k = A_J z_k$. Отсюда: $z_k = A_J^{-1} D_k \alpha_k$. В рассматриваемой задаче все $c_i = 1$. Поэтому форма r_k имеет вид:

$$r_k = \sum_{s=1}^m z_{ks} - 1 = e^\top A_J^{-1} D_k \alpha_k - 1 = d_k^\top \alpha_k - 1, \quad (12.2)$$

где $e \in \mathbb{R}^m$ — вектор, все компоненты которого равны единице: $e^\top = (1, 1, \dots, 1)$, и введено обозначение:

$$d_k^\top = e^\top A_J^{-1} D_k. \quad (12.3)$$

При каждом фиксированном k из $\overline{1, n}$ определим

$$\bar{r}_k = \max_{|\alpha_k|=1} r_k = |d_k| - 1$$

и максимум достигается при

$$\alpha_k = \tilde{\alpha}_k = d_k / |d_k|. \quad (12.4)$$

2. Перебором по всем $k = \overline{1, n}$ находим $k = \bar{k}$, для которого $r = \bar{r}_{\bar{k}} \geq \bar{r}_k$ для любого $k = \overline{1, n}$. Тем самым, в результате этой операции, мы находим:

1) индекс \bar{k} , при котором достигается $\max_k \bar{r}_k = r$;

2) вектор $\tilde{\alpha}_{\bar{k}}$, максимизирующий $r_{\bar{k}}$ на множестве векторов $\alpha_{\bar{k}} \in \mathbb{R}^{n_{\bar{k}}}$, $|\alpha_{\bar{k}}| = 1$;

3) вектор $\tilde{A}_{\bar{k}} = D_{\bar{k}} \tilde{\alpha}_{\bar{k}} \in \mathcal{K}$;

4) вектор $z_{\bar{k}} = A_J^{-1} \tilde{A}_{\bar{k}}$ координат разложения $\tilde{A}_{\bar{k}}$ по векторам базиса.

После того, как эти параметры определены, дальнейшие операции определяются следующими теоремами, доказательство которых повторяет доказательство соответствующих теорем в ЛП, приведенное в § 2.

Теорема 12.1. *Если $r \leq 0$, то текущий опорный план $(j_1, w_1, \alpha_1), \dots, (j_m, w_m, \alpha_m)$ является оптимальным и задача решена.*

Если $r > 0$, то определяется

$$\theta^* = \min_{\substack{s=\overline{1, m}, \\ z_{\bar{k}s} > 0}} \left(\frac{w_s}{z_{\bar{k}s}} \right). \quad (12.5)$$

(Случай $z_{\bar{k}s} \leq 0$ для всех $s = \overline{1, m}$ здесь невозможен.)

Пусть этот минимум достигается при $s = \bar{s}$. Тогда производится изменение опорного плана и опорного базиса (см. теорему 2.3). Новый базис $A_{J'}$ получается из исходного базиса A_J путем исключения вектора $A_{\bar{s}}$ и включения в базис вектора $\tilde{A}_{\bar{k}}$:

$$A_{J'} = (A_1, A_2, \dots, A_{\bar{s}-1}, A_{\bar{s}+1}, \dots, A_m, \tilde{A}_{\bar{k}}).$$

При этом новый опорный план будет иметь вид:

$$(j_1, w'_1, \alpha_1), \dots, (j_{\bar{s}-1}, w'_{\bar{s}-1}, \alpha_{\bar{s}-1}), (j_{\bar{s}+1}, w'_{\bar{s}+1}, \alpha_{\bar{s}+1}), \dots \\ \dots, (j_m, w'_m, \alpha_m), (\bar{k}, \theta^*, \tilde{\alpha}_{\bar{k}}), \quad (12.6)$$

где $w'_i = w_i - \theta^* z_{\bar{k}i}$, $i = \overline{1, m}$.

Теорема 12.2. *Набор (12.6) действительно является опорным планом. Значение функционала на этом опорном плане не превосходит значение функционала на исходном опорном плане:*

$$W' = w'_1 + w'_2 + \dots + w'_{\bar{s}-1} + w'_{\bar{s}+1} + \dots + w'_m + \theta^* = W - \theta^* r,$$

$$W = \sum_{i=1}^m w_i.$$

Если базис A_J был невырожденным ($w_i > 0, i = \overline{1, m}$), то $W' < W$.

Построением нового опорного плана заканчивается каждая итерация. Прежде, чем переходить к обсуждению описанной процедуры, сформулируем и докажем одну теорему, которая потребуется нам в гл. IV.

Пусть $(\bar{j}_s, \tilde{w}_s, \alpha_s), s = \overline{1, m}$ — оптимальный опорный план, $J^* = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ — соответствующий набор индексов и $A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ — оптимальный опорный базис: $A_s = D_{j_s} \alpha_s, s = \overline{1, m}$. Определим:

$$\lambda = A_J^{-1\top} e \in \mathbb{R}^m, \quad (12.7)$$

где $e \in \mathbb{R}^m$ — вектор, все компоненты которого равны единице: $e^\top = (1, 1, \dots, 1)$.

Теорема 12.3. *Справедливы следующие соотношения:*

(i) $\lambda^\top D_k D_k^\top \lambda \leq 1$ для любого $k = \overline{1, n}$;

(ii) $\lambda^\top D_k D_k^\top \lambda = 1$, если $k \in J^*$;

(iii) $\left(\sum_{s=1}^m D_{j_s} D_{j_s}^\top \tilde{w}_s \right) \lambda = b$.

Доказательство. Из (12.2)–(12.4) находим:

$$\begin{aligned} r &= \max_k \max_{|\alpha_k|=1} (e^\top z_k - 1) = \max_k \max_{|\alpha_k|=1} (\lambda^\top D_k \alpha_k - 1) = \\ &= \max_k (\sqrt{\lambda^\top D_k D_k^\top \lambda} - 1) \leq 0. \end{aligned} \quad (12.8)$$

При этом максимизирующее $\tilde{\alpha}_k$ определяется в следующем виде:

$$\tilde{\alpha}_k = D_k^\top \lambda / |D_k^\top \lambda|. \quad (12.9)$$

Из (12.8) сразу следует справедливость утверждения (i). В том случае, если $k = j_s \in J^*$ — (в оптимальном опорном плане все j_s различны), то $A_s = A_J e_s$, где $e_s \in \mathbb{R}^m$ — вектор, у которого все компоненты нули, за исключением s -ой, равной единице. Тем самым $e^\top e_s = 1$ и неравенство (12.8) переходит в равенство (ii). Соотношение (iii) следует из

условий типа равенства $A_J w_J = b$, если вместо базисных векторов A_s подставить их представление

$$A_s = D_{j_s} \tilde{\alpha}_s = D_{j_s} D_{j_s}^\top \lambda,$$

которое следует из (12.9) и $|D_{j_s} \lambda| = 1$ (ii). \square

Следует подчеркнуть некоторые особенности рассматриваемой задачи ВОЛИК по сравнению с задачей линейного программирования.

1. Как видно из описанного варианта симплекс-метода для задачи ВОЛИК, при одинаковых с задачей ЛП m и n затраты времени на одну итерацию в обоих вариантах одного порядка. Несколько больше памяти и операций требует умножение матрицы A_J^{-1} на матрицу D_k по сравнению с умножением A_J^{-1} на вектор A_k в ЛП.

2. Единственная новая операция поиска $\max_{|\alpha_k|=1} r_k$ решается в случае задачи ВОЛИК элементарно.

3. Основная особенность симплекс-метода в случае задачи ВОЛИК заключается в том, что алгоритм становится существенно итерационным (мы поясним эту особенность при описании геометрической интерпретации в § 13) и не оканчивается за конечное число итераций. Однако для практических приложений это не очень важно, так как для задачи ВОЛИК на каждой итерации можно вычислить оценку (3.2) близости решения к оптимальному. Если \tilde{L} оптимальное значение функционала $\tilde{L} = \sum_{i=1} \tilde{w}_i$, а $L_\top = \sum_{i=1} w_i$ — значение функционала на текущем опорном плане, то $L_\top \leq \tilde{L}(1+r)$, где $r = \max_k \bar{r}_k$ — значение, вычисляемое в процедуре симплекс-метода на каждой итерации. В прикладных задачах можно задать некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$ и оканчивать итерационный процесс при $0 < r \leq \varepsilon$.

Опыт применения симплекс-метода для задачи ОЛИК показывает, что величина r в процессе итерации убывает очень быстро (хотя и остается больше нуля). При значении ε порядка 10^{-3} — 10^{-4} оказывается, что затраты времени на решение задачи ОЛИК по порядку величины примерно такие же, как и для задачи ЛП с теми же значениями n и m .

4. Другая особенность рассматриваемой задачи (которую мы также качественно поясним при геометрической интерпретации) состоит в появлении вырожденных опорных планов. Напомним, что опорный план называется вырожденным, если число компонент вектора $w_J^\top = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, которые строго больше нуля, оказывается меньше m , т. е. вектор w_J имеет нулевые компоненты. В этом случае возможно (не обязательно!), что величина θ^* , определяемая формулой (12.5), на некоторых итерациях также окажется равной нулю. Заметим, что

в этом случае в результате итерации мы исключаем из базиса вектор $A_{\bar{s}}$, у которого коэффициент $w_{\bar{s}} = 0$, и вводим в базис вектор $A_{\bar{k}}$ с коэффициентом $\theta^* = 0$, и в результате итерации происходит изменение опорного базиса без изменения функционала.

Если отвлечься от проблем, связанных с вычислением с ограниченным числом знаков, то получение в результате итерации вырожденного решения является для задачи ЛП событием исключительным. Можно показать, что в задаче ВОЛИК получение вырожденного плана является достаточно регулярным случаем. Не исключено, что для вырожденного опорного плана процедуру симплекс-метода следует видоизменить. Теоретически этот вопрос в настоящее время еще не достаточно исследован. Однако следует сослаться на вычислительный опыт решения задач ОЛИК, в котором решение задачи описанным выше стандартным симплекс-методом не приводит к существенным затруднениям (связанным с вырождением) при определении решения, близкого к оптимальному.

Можно привести соображения в пользу разумного выбора величины $\varepsilon > 0$, которая определяет критерий окончания вычислений ($r \leq \varepsilon$). Эта величина должна быть достаточно мала, чтобы обеспечить близость найденного решения к оптимальному по функционалу, но не следует ее задавать слишком малой. Кроме увеличения времени вычислений, связанного с проведением итерации, несущественно уменьшающих значение функционала, при очень малых ε скорее могут проявиться нежелательные эффекты, связанные с близостью опорного плана к вырожденному.

§ 13. Геометрическая интерпретация для задачи линейного программирования и задачи ОЛИК

Пусть $A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ совокупность m линейно-независимых векторов $A_s \in \mathbb{R}^m$.

Гиперплоскость $\Pi(A_J)$, проходящую через концы этих векторов, можно записать в следующем виде:

$$\Pi(A_J) = \left\{ A \in \mathbb{R}^m; A = A_1 + \sum_{s=2}^m \mu_s (A_s - A_1) \right\},$$

μ_s — произвольные вещественные числа. Обозначая $\lambda_1 = 1 - \sum_{s=2}^m \mu_s$,

$\lambda_s = \mu_s$ для $s = \overline{2, m}$, $\Pi(A_J)$ можно представить в симметричном виде:

$$\Pi(A_J) = \left\{ A \in \mathbb{R}^m; A = \sum_{s=1}^m \lambda_s A_s, \sum_{s=1}^m \lambda_s = 1 \right\}.$$

Нормаль n к этой гиперплоскости определяется системой $(m - 1)$ -го уравнения:

$$n^\top (A_s - A_1) = 0, \quad s = \overline{2, m}.$$

Единичная нормаль n^0 определяется дополнительным условием $|n^0| = 1$. Решение этой системы уравнений определяет n^0 с точностью до знака. Внешняя нормаль к гиперплоскости определяется условием:

$$n^{0\top} A_1 = \rho > 0.$$

Для любого вектора $A \in \Pi(A_J)$ для проекции A на n^0 справедливо:

$$n^{0\top} A = \sum_{s=1}^m \lambda_s (n^{0\top} A_s) = \sum_{s=1}^m \lambda_s (n^{0\top} A_1) = \rho,$$

ρ — расстояние гиперплоскости от начала координат. Множество векторов (точек) $\xi \in \mathbb{R}^m$ гиперплоскостью $\Pi(A_J)$ разделяются на два полупространства. Если $n^{0\top} \xi < \rho$, то точка ξ принадлежит полупространству, содержащему начало координат $\xi = 0$. В этом случае будем говорить, что точка ξ (конец вектора ξ) лежит под гиперплоскостью $\Pi(A_J)$. В случае $n^{0\top} \xi > \rho$ будем говорить, что ξ (или конец вектора ξ , определяемая им точка) лежит над гиперплоскостью $\Pi(A_J)$.

Разложим вектор ξ по векторам A_J :

$$\xi = \sum_{s=1}^m \kappa_s A_s.$$

Проектируя ξ на нормаль n^0 , получим:

$$n^{0\top} \xi = \sum_{s=1}^m \kappa_s (n^{0\top} A_s) = \rho \sum_{s=1}^m \kappa_s.$$

Таким образом, величина

$$r_\xi = \rho \left(\sum_{s=1}^m \kappa_s - 1 \right) \quad (13.1)$$

определяет величину удаления (со знаком) конца вектора ξ от гиперплоскости. Если $r_\xi > 0$, то конец вектора ξ лежит над $\Pi(A_J)$, если $r_\xi < 0$, то под $\Pi(A_J)$.

Другой геометрический объект, определяемый набором векторов A_J , который нам потребуется, — это многогранный конус $K(A_J)$:

$$K(A_J) = \left\{ A \in \mathbb{R}^m; A = \sum_{s=1}^m \lambda_s A_s, \lambda_s \geq 0 \right\}.$$

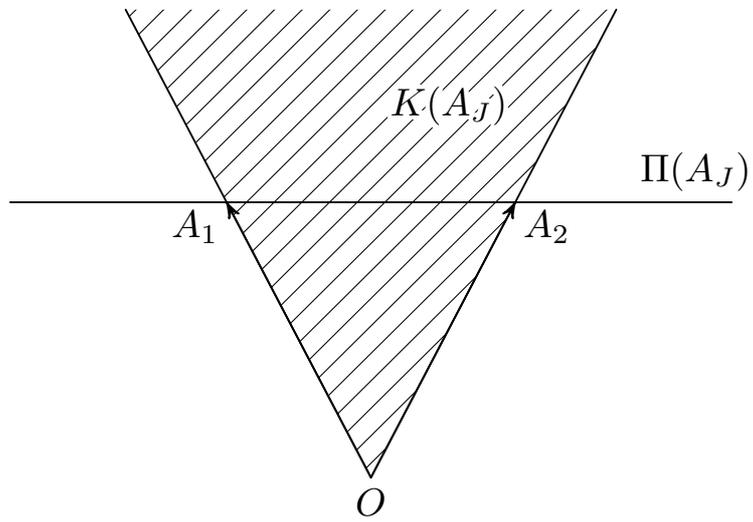


Рис. 3 а). Конус $K(A_J)$ и плоскость $\Pi(A_J)$ для случая $m = 2$.

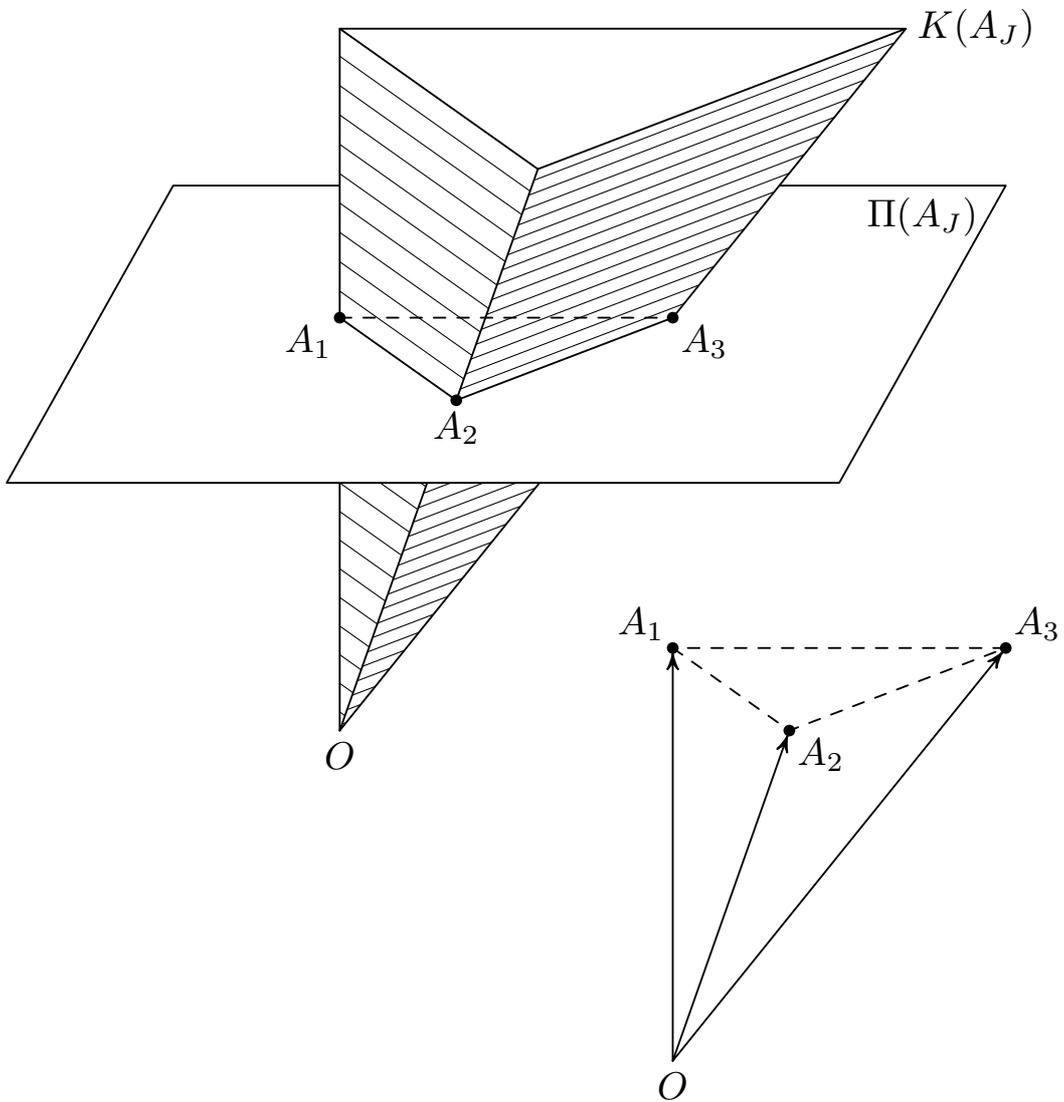


Рис. 3 б). Конус $K(A_J)$ и плоскость $\Pi(A_J)$ для случая $m = 3$.

Плоскость $\Pi(A_J)$ и конус $K(A_J)$ для случая $m = 2, 3$ изображены на рис. 3 а), б). Конус $K(A_J)$ заштрихован. При $m = 2$ — это угол, ограниченный лучами, определяемыми векторами A_1 и A_2 .

Рассмотрим теперь задачу линейного программирования:

$$\sum_{k=1}^n A_k X_k = b, \quad X_k \geq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (13.2)$$

$$L(X) = \sum_{k=1}^n X_k = \min.$$

Это частный случай канонического варианта общей задачи ЛП, когда $c_k = 1$ для $k = \overline{1, n}$. В частности, такая задача возникает при рассмотрении задачи о наихудшей корреляции (см. (9.2)). Из определения опорного базиса $A_J = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$ следует, что $\det A_J \neq 0$ и система уравнений

$$A_J x_J = b \quad (13.3)$$

имеет решение $x_J \in \mathbb{R}^m$ и $x_J \geq 0$: $x_J^\top = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Тем самым, из (13.3) следует, что A_J будет опорным базисом в том и только в том случае, если вектор b будет принадлежать многогранному конусу $K(A_J)$, определенному векторами A_J , входящими в опорный базис.

Так как решение задачи ЛП реализуется на опорном плане, то проблема минимизации функционала сводится к проблеме выбора опорного базиса. Пусть $L(x_J)$ — значение функционала, соответствующего данному опорному базису. Обозначим

$$\begin{aligned} \varkappa_s = x_s / L(x_J), \quad \varkappa^\top = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_m), \quad \varkappa \in \mathbb{R}^m, \\ \sum_{s=1}^m \varkappa_s = 1. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Из (13.4) следует:

$$A_J \varkappa = b / L(x_J) = b_L. \quad (13.5)$$

Из (13.4), (13.5) следует, что вектор $b_L \in \mathbb{R}^m$ принадлежит плоскости $\Pi(A_J)$. Для опорного плана, для которого $L(x_J)$ достигает минимума, длина вектора b_L будет максимальной. Таким образом, в геометрических терминах рассматриваемую задачу ЛП можно сформулировать в следующем виде: из заданной совокупности векторов \mathcal{A} , надо выбирать m линейно-независимых векторов A_J таких, что конус $K(A_J)$ содержит вектор b , и при этом плоскость $\Pi(A_J)$, проходящая через концы векторов A_J , отсекает от луча νb ($\nu \geq 0$) отрезок максимальной длины.

Рассмотрим в тех же терминах, как решается эта задача симплекс-методом. При текущем опорном базисе A_J из совокупности \mathcal{A} мы выбираем вектор A_k , для которого величина $e^\top z_k - 1$ максимальна, где $z_k = A_J^{-1} A_k$ вектор координат разложения A_k по векторам базиса. В соответствии с (13.1) мы можем сказать, что выбирается вектор $A_{\bar{k}}$, конец которого максимально возвышается над плоскостью $\Pi(A_J)$. Если для любого $A_k \in \mathcal{A}$ выполнено $r_k \leq 0$, то базис A_J — оптимальный. В геометрических терминах это означает, что нет ни одного вектора A_k , конец которого возвышался бы над гиперплоскостью $\Pi(A_J)$. Если $r_{\bar{k}} > 0$, то вектор $A_{\bar{k}}$ вводится в базис. Из базиса исключается вектор $A_{\bar{s}}$. Аналитическим условиям исключения вектора из базиса соответствует следующая геометрическая интерпретация. Необходимо, чтобы после исключения вектора $A_{\bar{s}}$ и включения вектора $A_{\bar{k}}$ мы получили бы набор

$$A_{J'} = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{\bar{s}-1}}, A_{j_{\bar{s}+1}}, \dots, A_{j_m}, A_{\bar{k}}),$$

определяющий конус $K(A_{J'})$, содержащий вектор b .

Используя геометрическую трактовку, рассмотрим пример геометрического решения задачи ЛП, изображенный на рис. 4 для случая $m = 2, n = 7$.

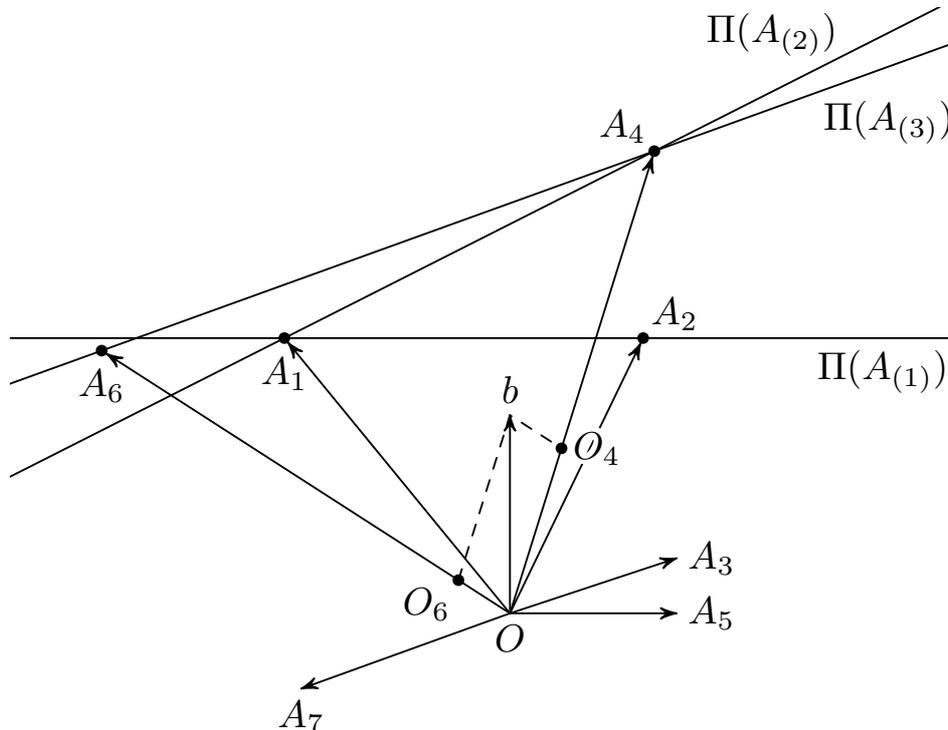


Рис. 4. Геометрическое решение задачи ЛП для случая $m = 2, n = 7$.

В качестве начального приближения выбран опорный базис $A_{(1)} = (A_1, A_2)$. Это действительно опорный базис, так как луч, опреде-

ляемый вектором b , содержится внутри угла (конуса), определяемого $A_{(1)}$. Над плоскостью $\Pi(A_{(1)})$ максимально возвышается конец вектора A_4 . Поэтому он вводится в новый базис. Набор (A_2, A_4) не образует опорного базиса, так как соответствующий конус не содержит луча νb ($\nu \geq 0$). Поэтому следующий базис $A_{(2)} = (A_1, A_4)$. Из рисунка видно, что b принадлежит углу, определяемому этими векторами. Над плоскостью $\Pi(A_{(2)})$ возвышается один вектор A_6 . Поэтому он вводится в новый базис. Из базиса $A_{(2)}$ исключается вектор A_1 . Набор $A_{(3)} = (A_6, A_4)$ действительно образует опорный базис. Все точки, определяемые концами векторов A_k , $k = \overline{1, 7}$, не возвышаются над плоскостью (прямой) $\Pi(A_{(3)})$. Следовательно, базис $A_{(3)} = (A_6, A_4)$ является оптимальным.

Оптимальный опорный план X_6, X_4 , ($X_1 = X_2 = X_3 = X_5 = X_7 = 0$) находится как решение системы двух уравнений: $A_6 X_6 + A_4 X_4 = b$. Величины X_6, X_4 можно определить геометрически, если из конца вектора b провести два отрезка: параллельный вектору A_6 до пересечения с лучом νA_4 ($\nu \geq 0$) и отрезок, параллельный A_4 до пересечения с лучом νA_6 ($\nu \geq 0$). На рисунке точки пересечения обозначены O_4 и O_6 . Тогда $X_6 = |O_6 O|/|A_6|$, $X_4 = |O_4 O|/|A_4|$, где $|O_i O|$ — длина соответствующего отрезка, $|A_i|$ — длина вектора.

Построим аналогичную интерпретацию для задачи ОЛИК (или точнее, для вспомогательной задачи (11.5)). В задаче ВОЛИК каждому индексу k отвечает множество \mathcal{E}_k векторов $A_k \in \mathbb{R}^m$, представимых в виде:

$$A_k = D_k \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad |\alpha_k| = 1. \quad (13.6)$$

Соотношение (13.6) — это линейное отображение единичной сферы в пространстве \mathbb{R}^{n_k} в пространство \mathbb{R}^m . Следовательно, множества \mathcal{E}_k — это эллипсоиды в \mathbb{R}^m , вообще говоря, различной размерности $\leq n_k$.

Замена векторов A_k , входящих в задачу ЛП, на эллипсоиды $\mathcal{E}_k = \{A \in \mathbb{R}^m; A = D_k \alpha_k, \alpha_k \in \mathbb{R}^{n_k}, |\alpha_k| = 1\}$ — это главное отличие задачи ВОЛИК от задачи ЛП. В остальном процедура остается той же самой.

Набор $A_J = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ ($A_s \in \mathcal{K}$, \mathcal{K} — множество эллипсоидов \mathcal{E}_k , $k = \overline{1, n}$) образует опорный базис в задаче ВОЛИК, если конус $K(A_J)$ содержит луч νb ($\nu \geq 0$). При выборе вектора $\tilde{A}_{\bar{k}}$, вводимого в базис, мы определяем из множества \mathcal{K} (11.4), вектор $\tilde{A}_{\bar{k}}$ эллипсоида $\mathcal{E}_{\bar{k}}$, конец которого максимально возвышается над плоскостью $\Pi(A_J)$.

Из старого базиса исключается вектор $A_{\bar{s}}$. Требуется, чтобы после исключения $A_{\bar{s}}$ и включения в базис $\tilde{A}_{\bar{k}}$ новый набор давал такую совокупность векторов $A_{J'}$, чтобы конус $K(A_{J'})$ содержал луч νb ($\nu \geq 0$).

Метод решения такой задачи для случая $m = 2$ и $n = 4$ иллюстрируется на рис. 5. На рисунке в \mathbb{R}^2 изображены четыре эллипсоида \mathcal{E}_i ,

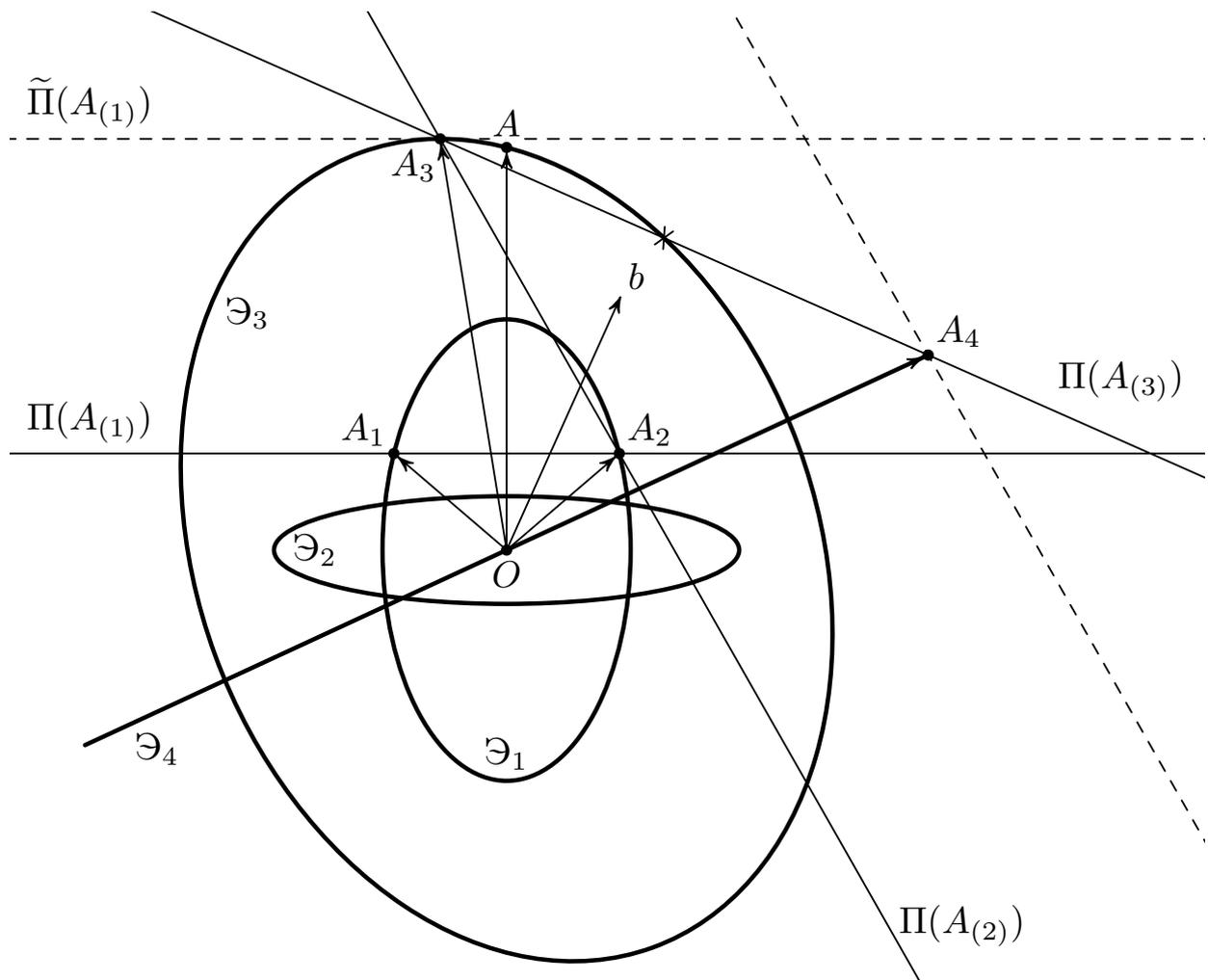


Рис. 5. Геометрическая интерпретация решения задачи ВОЛИК для случая $m = 2, n = 4$.

$i = \overline{1, 4}$. Эллипсоиды $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ двумерны, а эллипсоид \mathcal{E}_4 одномерный, он представлен отрезком, симметричным относительно начала координат. Начальный опорный базис $A_{(1)} = (A_1, A_2)$ представлен двумя векторами A_1, A_2 , принадлежащими одному эллипсоиду \mathcal{E}_1 . В задаче ВОЛИК это допустимо.

Находим вектор $A_3 \in \mathcal{E}_3$, который максимально возвышается над плоскостью $\Pi(A_{(1)})$. Следующий опорный базис $A_{(2)} = (A_2, A_3)$ (очевидно, (A_1, A_3) не образуют опорный базис). Над плоскостью $\Pi(A_{(2)})$ максимально возвышается вектор $A_4 \in \mathcal{E}_4$. Следующий опорный базис $A_{(3)} = (A_3, A_4)$. Вектор A_3 определяется точкой касания плоскости $\tilde{\Pi}(A_{(1)})$, параллельной $\Pi(A_{(1)})$, к эллипсоиду \mathcal{E}_3 . Поэтому плоскость $\Pi(A_{(3)})$ не может быть касательной к эллипсоиду \mathcal{E}_3 и, следовательно, сечет его. Тем самым, существуют векторы $A \in \mathcal{E}_3$, возвышающиеся над плоскостью $\Pi(A_{(3)})$.

Геометрически нетрудно понять, что векторы $A \in \mathcal{E}_3$, возвышаю-

щие над плоскостью $\Pi(A_{(k)})$, будут оставаться после любого числа k итераций. Поэтому оптимальное решение задачи симплекс-методом за конечное число итераций достигнуть нельзя. Однако это возвышение в масштабе рисунка мало и проведение дальнейших итераций на рисунке нецелесообразно.

Базис $A_{(3)}$ является приближенно оптимальным. Оптимальное значение функционала $\tilde{L} = \sum_{i=1}^m \tilde{w}_i$ может быть меньше текущего значения функционала $L_{\top} = \sum_{i=1}^m w_i$ не более, чем на rL_{\top} , где r величина возвышения векторов \mathcal{E}_3 над плоскостью $\Pi(A_{(3)})$. На рисунке r определить трудно в силу ее малости.

Воспользуемся приведенной геометрической интерпретацией и для сравнительного обсуждения проблемы вырожденности в задачах ЛП и ВОЛИК. Пусть выполняется условие: $A_J x_J = b$, $x_J \geq 0$ и одна или несколько компонент вектора $x_J^{\top} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ равны нулю. Это означает, что вектор b принадлежит подпространству \mathbb{R}^m размерности $m - 1$ или меньше. Если векторы $A_k \in \mathcal{A}$, b , которые входят в постановку задачи ЛП, заданы не специальным образом, то такая ситуация является исключительной. В частности, для $m = 2$ требуется, чтобы вектор b был в точности параллелен одному из векторов $A_k \in \mathcal{A}$.

Другая ситуация имеет место в задаче ВОЛИК. Поясним суть с помощью рис. 6 для $m = 2$. На рисунке в \mathbb{R}^2 представлены два эллипсоида \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 . Пунктиром отмечены линии, которые касаются обоих эллипсоидов. Числами занумерованы точки касания. Пусть A_k — вектор, определяющий точку касания $k = \overline{1, 8}$. Эти векторы определяют четыре конуса:

$$K(A_1, A_2), \quad K(A_3, A_4), \quad K(A_5, A_6), \quad K(A_7, A_8).$$

На рисунке они заштрихованы. Используя геометрическую интерпретацию, сформулированную выше для задачи ЛП, нетрудно понять, что если вектор b принадлежит одному из этих конусов, например, $b = b' \in K(A_7, A_8)$, как изображено на рисунке, то оптимальным будет решение $b' = wA + 0A'$, где $A \in \mathcal{E}_1$ — вектор, совпадающий по направлению с вектором b , $A' \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ — любой другой вектор, образующий совместно с A линейно-независимую систему (A, A') .

Если b не принадлежит ни одному из указанных конусов, например, на рисунке $b = b''$, то оптимальный план будет невырожденным:

$$b'' = w_2 A_2 + w_3 A_3, \quad w_2 > 0, \quad w_3 > 0.$$

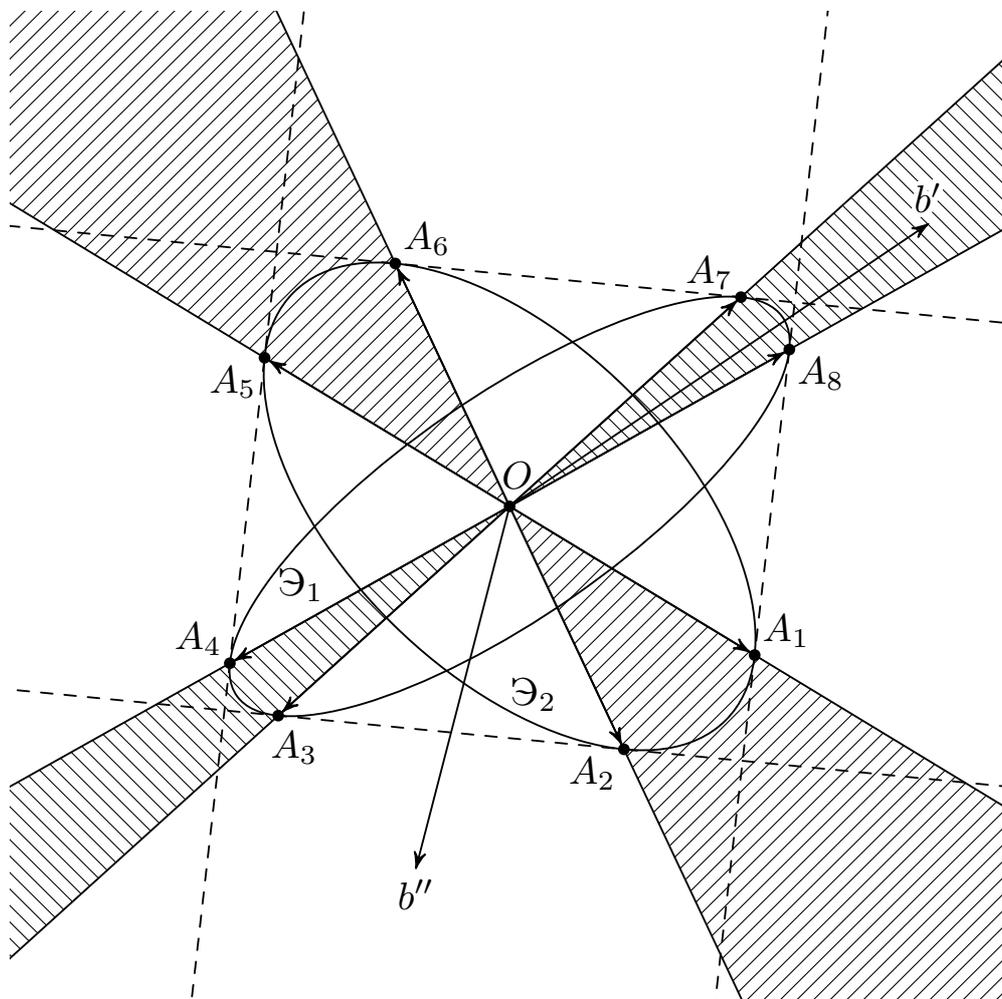


Рис. 6. Регулярность вырождения ($m = 2$).

Уже рассмотренный пример показывает, что в задаче ВОЛИК реализация оптимального решения на вырожденном плане является событием вполне регулярным. Однако, как мы уже отмечали, сложности, связанные с вырождением, не проявляются, как правило, в численных экспериментах. Поясним, почему это так происходит.

Для этого рассмотрим простейший пример задачи при $m = 2$ и $n = 1$, изображенный на рис. 7. Очевидно, оптимальное решение реализуется на векторе $A \in \mathcal{E}$, совпадающим по направлению с вектором b : $b = wA$, $w = |b|/|A|$. Однако, если в качестве начального базиса мы возьмем, например, $A_{(1)} = (A_1, A_2)$, то на последующих итерациях будем получать базисы $A_{(2)} = (A_2, A_3)$, $A_{(3)} = (A_3, A_4), \dots$. Нетрудно усмотреть, что при продолжении итераций будем получать базисы $A_J = (A_i, A_j)$, где оба вектора A_i, A_j стремятся к вектору A :

$$b = w_i A_i + w_j A_j, \quad A_i \rightarrow A, \quad A_j \rightarrow A, \quad w_i \rightarrow w/2, \quad w_j \rightarrow w/2.$$

В пределе не только план, но и базис становится вырожденным $\det(A_i, A_j) \rightarrow 0$.

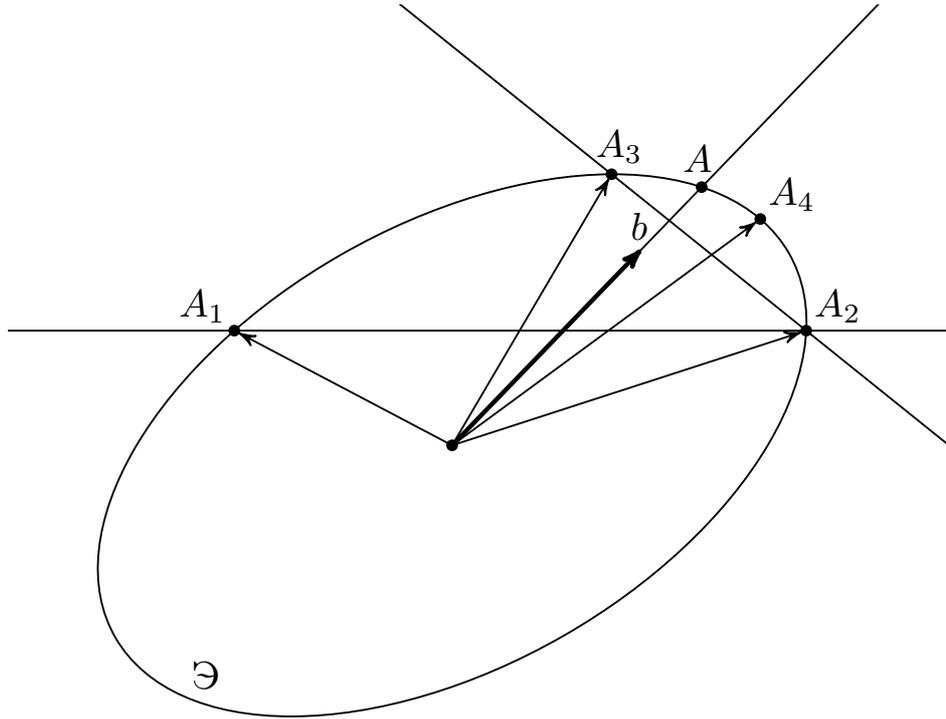


Рис. 7. Вырождение итераций ($m = 2, n = 1$).

Если окончить итерации при $r \approx \varepsilon$, то $\det(A_i, A_j)$ будет величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$. При $\varepsilon \approx 10^{-4}$, $\det(A_i, A_j) \approx 10^{-2}$. Вычисления с точностью восьми десятичных знаков позволят довести процедуру до таких величин r .

§ 14. Некоторые обобщения

14.1. Первое обобщение задачи ОЛИК (11.1), (11.2), которое мы отметим, связано только с изменением функционала. Предположим, что в дополнение к исходным данным задачи ОЛИК задан набор постоянных $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$ и требуется решить задачу:

$$\sum_{j=1}^n D_j \alpha_j w_j = b, \quad w_j \geq 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad |\alpha_j| = 1, \quad (14.1)$$

$$L(w_j, \alpha_j) = \sum_{j=1}^n c_j w_j - \min_{w_j, \alpha_j} .$$

Задача ОЛИК является частным случаем этой задачи при $c_j = 1$ для всех $j = \overline{1, n}$. Коэффициенты c_j являются «ценой» единичного импульса, которая вообще говоря, может быть различной для различных j .

Тем самым ставится задача оптимизации суммарных затрат L на коррекцию.

В случае, если все $c_j > 0$, то задача (14.1) заменой $c_j w_j = w'_j$, $D_j/c_j = D'_j$ тривиально сводится к задаче (11.1), (11.2). Если же среди коэффициентов c_j имеются положительные, отрицательные и, возможно, нулевые, то в этой задаче появляются более существенные отличия от задачи ОЛИК.

1. Вспомогательная задача имеет почти тот же самый вид:

$$\sum_{j=1}^N A_j w_j = b, \quad L(w) = \sum_{j=1}^N c_j w_j - \min_{w_j \geq 0, A_j \in \mathcal{K}}, \quad (14.2)$$

где \mathcal{K} определяется согласно (11.4). Однако утверждение леммы 11.1 о свойствах оптимального решения вспомогательной задачи для этого случая уже несправедливо. Оптимальный базис может содержать два вектора A_1, A_2 , принадлежащих одному эллипсоиду \mathcal{E}_j .

Вместо задачи (14.1) можно решать задачу (14.2) только в том случае, если справедливы физические предпосылки, сформулированные в п. 1 § 11.

2. Процедура симплекс-метода изменяется следующим образом. Максимизируемая величина r_k (сравни с (12.2)) определяется следующей формулой:

$$r_k = d_k^\top \alpha_k - c_k, \quad (14.3)$$

где

$$d_k^\top = c_{J^*}^\top A_{J^*}^{-1} D_k, \quad (14.4)$$

$c_{J^*}^\top = (c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_m})$ — упорядоченный набор m коэффициентов c_j , соответствующих индексам $J^* = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ опорного плана. При этом (12.2), (12.3) — частный случай этой задачи (при $c_j = 1$ для всех $j = \overline{1, n}$). В остальном процедура § 12 полностью переносится на рассматриваемый случай.

3. Для задачи типа задачи коррекции необходимо оканчивать итерации при определенной близости решения к оптимальному по функционалу. Для возможности оценки такой близости следует предварительно решить задачу с функционалом $-\sum_{j=1}^n w_j$, как это указано в § 3.

14.2. Если записать задачу ОЛИК в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n A_j w_j = b, \quad w_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n w_j - \min, \quad (14.5)$$

где $A_j \in \mathcal{E}_j$ и эллипсоиды \mathcal{E}_j определить условием:

$$\mathcal{E}_j = \{A \in \mathbb{R}^m; A = D_j \alpha_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad |\alpha_j| = 1\}, \quad (14.6)$$

то напрашивается еще одно обобщение.

Пусть в \mathbb{R}^m задан набор множеств S_j для $j = \overline{1, n}$. Можно рассмотреть задачу:

$$\sum_{j=1}^n A_j w_j = b, \quad w_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n w_j \rightarrow \min \quad (14.7)$$

при дополнительных условиях

$$A_j \in S_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14.8)$$

Постановка (14.5), (14.6) является частным случаем задачи (14.7), (14.8) при $S_j = \mathcal{E}_j$. (Заданные множества S_j являются эллипсоидами (14.6)).

Вспомогательная задача для (14.7), (14.8) разрешает включать в базис несколько векторов A', A'', \dots , принадлежащих одному из множеств S_j .

Отметим особенности процедуры симплекс-метода в случае проблемы (14.7), (14.8). Для фиксированного k определяется разложение векторов $A_k \in S_k$ по векторам текущего базиса A_J : $A_k = A_J z_k$. Аналогично § 12:

$$r_k = e^\top z_k - 1 = e^\top A_J^{-1} A_k - 1.$$

Прежде всего необходимо решить задачу математического программирования

$$\max_{A_k \in S_k} r_k = \bar{r}_k. \quad (14.9)$$

Для случая задачи ОЛИК, когда S_k — эллипсоиды \mathcal{E}_k (14.6), эта задача решается почти тривиально. Максимизирующее $A_k = \tilde{A}_k$ определяется в следующем виде (см. (12.1)–(12.4)):

$$\tilde{A}_k = D_k \tilde{\alpha}_k, \quad \tilde{\alpha}_k = d_k / |d_k|.$$

В общем случае (14.9) является задачей математического программирования, сложность которой определяется сложностью описания множеств S_k (см. примеры ниже). В остальном симплекс-метод остается в том же виде, как описано в § 12. Перебором по $k = \overline{1, n}$ решается задача

$$\max_{k=\overline{1, n}} \bar{r}_k = \bar{r}_k = r$$

и определяется вектор \tilde{A}_k , который вводится в базис в случае $r > 0$, и т. д.

Для каждого S_j определим множество \tilde{S}_j : $\tilde{S}_j = \{A \in \mathbb{R}^m$; существуют $A_j \in S_j$ и $0 \leq \nu \leq 1$ такие, что $A = \nu A_j\}$. Можно показать: если все \tilde{S}_j ,

$j = \overline{1, n}$ выпуклы (из $A' \in \tilde{S}_j, A'' \in \tilde{S}_j \Rightarrow \alpha A' + (1 - \alpha)A'' \in \tilde{S}_j$ для любого $0 \leq \alpha \leq 1$), то справедливо утверждение, аналогичное лемме 11.1: существует оптимальное решение задачи, вспомогательной для (14.7), (14.8), в котором для каждого j содержится не более одного вектора, принадлежащего S_j . Для задачи ОЛИК $\tilde{\Theta}_j$ не только выпуклы, но и строго выпуклы (для любого $0 < \alpha < 1$: $\alpha A' + (1 - \alpha)A''$ — внутренняя точка $\tilde{\Theta}_j$) и верна лемма 11.1.

Оценка близости решения к оптимальному в рассматриваемом случае такая же, как для задачи ОЛИК.

Теперь читателю должны быть почти очевидны возможности и специфика решения более общей задачи:

$$\sum_{j=1}^n A_j w_j = b, \quad w_j \geq 0, \quad A_j \in S_j, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^n c_j w_j \rightarrow \min,$$
(14.10)

которая отличается от (14.7), (14.8) видом функционала, он такой же, как в (14.1).

В заключение этого раздела рассмотрим некоторые примеры.

Пример 14.1. Будем исходить из физической постановки задачи ОЛИК, описанной в § 10 и, в частности, будем обращаться к физическому смыслу коррекции траектории движения космического аппарата. В § 10 рассматривался случай, когда допустима произвольная ориентация двигателя (и, следовательно, корректирующего импульса) в пространстве. При описании мы допускали любые единичные векторы $\alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Возможны случаи, когда технические ограничения требуют, чтобы векторы α_j были достаточно близки по направлению к некоторому заданному единичному вектору β_j . Например, должно выполняться условие: $\cos(\widehat{\alpha_j, \beta_j}) = \alpha_j^\top \beta_j \geq \gamma = \cos \psi$, где γ — заданное число. В этом случае множество S_j определяется условием:

$$S_j = \{A \in \mathbb{R}^m; A = D_j \alpha_j, \alpha_j \in \mathbb{R}^{n_j}, |\alpha_j| = 1, \beta_j^\top \alpha_j \geq \gamma\}.$$

Тем самым в процессе решения задачи (14.7) симплекс-методом необходимо определить

$$\max_{A \in S_k} r_k = \max_{\alpha_k} (d_k^\top \alpha_k - 1), \quad d_k = e^\top A_J^{-1} D_k,$$

при ограничениях $|\alpha_k| = 1, \alpha_k^\top \beta_k \geq \gamma$. Эта задача решается достаточно просто.

Если второе ограничение на α_k не учитывать, то максимизирующее $\tilde{\alpha}_k$ равно α_k^* : $\alpha_k^* = d_k/|d_k|$. Такое же решение мы получим, если окажется, что $\beta_k^\top \alpha_k^* \geq \gamma$. Если $\beta_k^\top \alpha_k^* < \gamma$, то нетрудно показать, что максимизирующий вектор $\tilde{\alpha}_k$ будет лежать в плоскости, натянутой на векторы α_k^* и β_k :

$$\tilde{\alpha}_k = \nu \alpha_k^* + \mu \beta_k, \quad (14.11)$$

где коэффициенты ν, μ должны удовлетворять условию, определяемому равенством $|\tilde{\alpha}_k| = 1$:

$$\nu^2 + \mu^2 + 2\nu\mu(\alpha_k^{*\top} \beta_k) = 1, \quad (14.12)$$

условию

$$\tilde{\alpha}_k^\top \beta_k = \mu + \nu(\alpha_k^{*\top} \beta_k) \geq \gamma, \quad (14.13)$$

и условию:

$$\alpha_k^{*\top} \tilde{\alpha}_k = \nu + \mu(\beta_k^\top \alpha_k^*) = \max. \quad (14.14)$$

Очевидно, решение (14.14) реализуется при выполнении в (14.13) равенства. Тем самым из двух уравнений находим:

$$\nu = \tilde{\nu} = \sqrt{(1 - \gamma^2)/(1 - \gamma^{*2})}, \quad \tilde{\mu} = \gamma - \tilde{\nu}\gamma^*,$$

где $\gamma^* = \beta_k^\top \alpha_k^*$ и $\tilde{\alpha}_k = \tilde{\nu}\alpha_k^* + \tilde{\mu}\beta_k$, $\tilde{A}_k = D_k \tilde{\alpha}_k$. Таким образом, в этом примере решение задачи: $\max_{A_k \in S_k} r_k$ получается в аналитическом виде.

Пример 14.2. Предположим, что космический аппарат постоянно ориентирован в пространстве. Но на КА имеются s связанных с ним двигателей, ориентация которых в момент времени t_k определяется единичными векторами α_{kj} , $j = \overline{1, s}$.

Если j -й двигатель в момент t_k сообщает импульс w_{kj} , то результирующий импульс в момент t_k равен:

$$\sum_{j=1}^s D_k \alpha_{kj} w_{kj}.$$

Обозначим: $\sum_{j=1}^s w_{kj} = w_k$, $x_j = w_{kj}/w_k$. В этом случае ограничения в задаче коррекции можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^n A_k w_k = b, \quad w_k \geq 0,$$

где $A_k \in S_k$,

$$S_k = \left\{ A \in \mathbb{R}^m; A = \sum_{j=1}^s x_j A_{kj}, \sum_{j=1}^s x_j = 1, x_j \geq 0, j = \overline{1, s} \right\},$$

а $A_{kj} = D_k \alpha_{kj}$ — заданные векторы.

В этом примере проблема определения

$$\max_{A \in S_k} r_k = \max \left(e^\top A_J^{-1} \sum_{j=1}^s x_j A_{kj} - 1 \right)$$

сводится к задаче линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^s \beta_j x_j \rightarrow \max$$

при условиях

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, s}, \quad \sum_{j=1}^s x_j = 1,$$

где

$$\beta_j = e^\top A_J^{-1} A_{kj}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Эта задача решается тоже элементарно. Если $\beta_l \geq \beta_j$ для всех $j = \overline{1, s}$, то максимизирующие x_j определяются следующей формулой: $x_j = \tilde{x}_j = 0$ при $j \neq l$ и $\tilde{x}_l = 1$. Откуда следует, что

$$\bar{r}_k = \max_{A \in S_k} r_k = \beta_l - 1.$$

ГЛАВА IV

ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Проведение измерений связано с определенными затратами. Это могут быть денежные затраты, расход энергии бортовых источников питания, запас которой ограничен, время работы средств измерений или другие лимитированные величины. Поэтому возникают задачи, в которых требуется из множества возможных измерений выбрать те, которые позволяют оценить значения некоторых параметров задачи (контролируемых параметров) с требуемой точностью при ограниченных или минимальных затратах. Одна из таких задач рассматривается в этой главе в рамках общей постановки задачи линейного оценивания, описанной в гл. II.

§ 15. Постановка задачи и схема измерений

Предположим, что вся совокупность возможных измерений разбивается на n сеансов измерений. В каждый момент времени на s -ом сеансе можно проводить измерения n_s фиксированных параметров $z_{s1}, z_{s2}, \dots, z_{sn_s}$, которые для краткости будем представлять вектором $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$:

$$z_s^\top = \{z_{s1}, z_{s2}, \dots, z_{sn_s}\}.$$

Пусть в s -м сеансе вектор z_s измеряется k_s раз в моменты времени $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sk_s}$. Таким образом, в сеансе проводятся векторные однотипные измерения $z_s(i)$, $i = \overline{1, k_s}$, где $z_s(i)$ — измерение вектора z_s в момент времени t_{si} .

Измеренное значение $z_s^*(i)$ связано с состоянием системы q линейным соотношением

$$z_s^*(i) = H_{si}q + \rho_s(i), \quad (15.1)$$

где $q \in \mathbb{R}^m$ — вектор состояния системы (см. гл. II), $\rho_s(i) \in \mathbb{R}^{n_s}$ — вектор ошибок измерений, H_{si} — известные матрицы $n_s \times m$.

Предположим, что ошибки измерения удовлетворяют следующим статистическим гипотезам.

1. Математическое ожидание ошибок измерений $M\rho_s(i) = 0$ для всех $s = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, k_s}$.

2. Матрицы ковариаций $M\rho_s(i)\rho_s^\top(i) = \mathcal{P}_s$ — матрицы $n_s \times n_s$ — предполагаются известными. Будем полагать, что они одинаковы для всех k_s измерений $z_s(i)$, принадлежащих одному сеансу.

3. Ошибки измерений, проводимых в различные моменты времени, некоррелированы:

$$M\rho_s(i)\rho_l^\top(j) = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Пусть линейные соотношения $l_j = a_j^\top q$, $j = \overline{1, r}$ определяют связь контролируемых параметров l_j с вектором состояния системы q (см. гл. II). При известной матрице ковариаций \mathcal{P} и оптимальном линейном оценивании (например, методом наименьших квадратов), дисперсия ошибки $\hat{l}_j - l_j$ оценки параметра l_j определяется формулой (6.8):

$$D_j = M(\hat{l}_j - l_j)^2 = a_j^\top (H^\top \mathcal{P}^{-1} H)^{-1} a_j. \quad (15.2)$$

Используя специфику структуры матрицы \mathcal{P} , определяемую гипотезами 2 и 3, и представление (15.1), формулу (15.2) можно записать в следующем виде:

$$D_j = a_j^\top \left(\sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^{k_s} H_{si}^\top \mathcal{P}_s^{-1} H_{si} \right)^{-1} a_j, \quad j = \overline{1, r}. \quad (15.3)$$

Ниже мы будем предполагать, что для всех измерений одного сеанса матрицы H_{si} одинаковы и будем их обозначать H_s . В реальной ситуации это предположение не выполняется точно. Однако, если сеансы проводятся на достаточно коротком интервале времени ($t_{sk_s} - t_{s1} = \Delta_s$ — достаточно малые числа — $s = \overline{1, n}$), а изменение матриц H_{si} с течением времени достаточно медленное, то приближенно такая предпосылка, существенно упрощающая задачу, может быть принята. При этом получим:

$$D_j = a_j^\top \left(\sum_{s=1}^n k_s \overline{G}_s \right)^{-1} a_j, \quad \overline{G}_s = H_s^\top \mathcal{P}_s^{-1} H_s, \quad j = \overline{1, r}. \quad (15.4)$$

Введем в рассмотрение положительные коэффициенты $c_s > 0$, $s = \overline{1, n}$, определяющие «стоимость» проведения однократного измерения $z_s \in \mathbb{R}^{n_s}$. Обозначим

$$c_s k_s = w_s, \quad \overline{G}_s / c_s = G_s. \quad (15.5)$$

Тогда из (15.4) получим:

$$D_j = a_j^\top \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right)^{-1} a_j, \quad G_s = H_s^\top \mathcal{P}_s^{-1} H_s / c_s, \quad j = \overline{1, r}. \quad (15.6)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу о выборе программы измерений. Пусть $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2$ — заданные положительные числа. Рассмотрим задачу об определении неотрицательных w_1, w_2, \dots, w_n , удовлетворяющих условиям

$$D_j \leq \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, r} \quad (15.7)$$

и минимизирующих суммарные затраты на измерения

$$W = \sum_{s=1}^n w_s \rightarrow \min_{w_s}. \quad (15.8)$$

Условие (15.7) требует: дисперсии D_j (15.6) ошибок оценок выделенных параметров $l_j = a_j^\top q$ не должны превосходить заданные величины σ_j^2 .

З а м е ч а н и я. В результате решения такой задачи мы можем получить решение $\tilde{w}_s, s = \overline{1, n}$, не представимое в виде (15.5) с целыми k_s . Однако для упрощения мы отвлекаемся от исходной целочисленности проблемы, предполагая, что округление w_s/c_s до большего целого будет связано с несущественным увеличением затрат на измерения по сравнению с оптимальными затратами.

Задачу (15.6)–(15.8) можно записать в эквивалентном виде, если ввести векторы $\lambda_j \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1, r}$:

$$\lambda_j = \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right)^{-1} a_j. \quad (15.9)$$

Задача: определить $w_s \geq 0, s = \overline{1, n}$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1, r}$ из следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \lambda_j = a_j, \quad j = \overline{1, r}; \\ \text{б) } & \lambda_j^\top a_j \leq \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, r}; \\ \text{в) } & W = \sum_{s=1}^n w_s \rightarrow \min_{\lambda_j, w_s}. \end{aligned} \quad (15.10)$$

При анализе этой задачи будем предполагать, что число оцениваемых параметров r не превосходит m , где m — размерность пространства состояний системы, а число возможных сеансов измерений n больше, чем mr и, в типичных случаях, $n \gg mr$.

§ 16. Некоторые свойства решения и достаточные условия оптимальности

Мыслима следующая процедура решения (15.10), определяемая последовательной минимизацией: $\min_{\lambda_j, w_s} W = \min_{\lambda_j} \min_{w_s} W$, т. е. при заданных $\lambda_j, j = \overline{1, r}$, удовлетворяющих условиям (15.10) б), решается внутренняя задача определения $w_s, s = \overline{1, n}$, минимизирующих W :

$$\min W = \widetilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r),$$

а затем решается внешняя задача поиска оптимальных $\tilde{\lambda}_j, j = \overline{1, r}$, удовлетворяющих (15.10) б) и минимизирующих $\widetilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$:

$$\widetilde{\widetilde{W}} = \min_{\lambda_j} \widetilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r).$$

Обозначим $G_s \lambda_j = A_{js} \in \mathbb{R}^m$ и введем в рассмотрение составную матрицу $A(\lambda)$ размером $mr \times n$ и составной вектор $a \in \mathbb{R}^{mr}$:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rn} \end{pmatrix}, \quad (16.1)$$

$$a^\top = (a_1^\top, a_2^\top, \dots, a_r^\top). \quad (16.2)$$

Используя эти обозначения, внутреннюю задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{а) } & A(\lambda)w = a, \\ \text{б) } & \sum_{s=1}^n w_s = \min_{w_s}, \end{aligned} \quad (16.3)$$

где $w \in \mathbb{R}_+^n$ ($w_s \geq 0, s = \overline{1, n}$), $w^\top = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Условия (16.3) а) — другая запись соотношений (15.10) а) при фиксированных $\lambda_j, j = \overline{1, r}$. Очевидно (16.3) — канонический вариант задачи линейного программирования. Отсюда сразу следует, что в оптимальном решении (16.3) число положительных компонент вектора w не превосходит mr . Однако условия (16.3) а) не являются независимыми. Более точная оценка определяется следующей теоремой [29].

Теорема 16.1. *В оптимальном решении задачи (15.10) число положительных компонент вектора w не превосходит N , где*

$$N = mr - \frac{r(r-1)}{2}. \quad (16.4)$$

Эта оценка определяет максимальное число сеансов измерений, которые необходимо проводить при реализации оптимальной программы измерений. Можно привести пример для $m = 2$, из которого следует, что эта оценка не может быть улучшена.

Доказательство. Рассуждения, обосновывающие (16.4), проведем для внутренней задачи (16.3). Если (16.4) верно для любой внутренней задачи, то оно будет верно и для задачи (15.10), совпадающей с внутренней задачей при оптимальных $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$.

Пусть $d_i \in \mathbb{R}^m$, $i = \overline{1, r}$, и $d \in \mathbb{R}^{mr}$ — составной вектор:

$$d^\top = (d_1^\top, d_2^\top, \dots, d_r^\top). \quad (16.5)$$

Обозначим $d_{ij} \in \mathbb{R}^{mr}$ вектор вида (16.5), формируемый по следующему правилу: $d_{ij} = d$, если $d_i = \lambda_j$, $d_j = -\lambda_i$, $d_k = 0$ — нулевой вектор \mathbb{R}^m при $k \neq i$ и $k \neq j$. Так как $\lambda_i^\top G_s \lambda_j - \lambda_j^\top G_s \lambda_i = 0$ ввиду симметричности матриц G_s для $s = \overline{1, n}$, то выполнено: $d_{ij}^\top A(\lambda) = (0^\top, 0^\top, \dots, 0^\top)$ — нулевая матрица $1 \times n$.

Отсюда и из (16.3) а), в частности, следует, что векторы λ_j , $j = \overline{1, r}$, задаваемые при решении внутренней задачи, должны не только удовлетворять условиям (15.10) б), но и дополнительным условиям

$$\lambda_j^\top a_i = \lambda_i^\top a_j. \quad (16.6)$$

При выполнении (16.6) система соотношений (16.3) а) оказывается линейно-зависимой. Нетрудно показать, что число линейно-независимых векторов d_{ij} равно $r(r-1)/2$. Действительно, при $i = 1$ существует $r-1$ такой вектор для $j = 2, 3, \dots, r$. При $i = 2$ — $(r-2)$ вектора: $j = 3, 4, \dots, r$, и т. д. При $i = r-1$ существует один вектор $d_{r-1, r}$ и $\sum_{s=1}^{r-1} s = r(r-1)/2$. (Предполагается, что векторы a_j — линейно-независимы.)

Из сказанного выше следует, что число линейно-независимых соотношений в (16.3) а) не превосходит указанного в (16.4) числа N и, следовательно, число индексов s , для которых в оптимальном решении $w_s > 0$, тоже не превосходит этого числа. Теорема доказана. \square

Лемма 16.1. Пусть $\tilde{\lambda}_j$, $j = \overline{1, r}$, \tilde{w}_s , $s = \overline{1, n}$, — оптимальное решение задачи (15.10). Определим $J^* = (j_1, j_2, \dots, j_l)$, $l \leq r$, j_s из $\overline{1, r}$ — набор индексов, для которых в (15.10) б) достигаются равенства $\tilde{\lambda}_j^\top a_j = \sigma_j^2$. Тогда множество J^* не пусто.

Доказательство проводится от противного. Если при всех $j = \overline{1, r}$: $\tilde{\lambda}_j^\top a_j = \sigma_j^2 / (1 + \varepsilon_j)$, где $\varepsilon_j > 0$, то определяя $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$,

$$\tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j(1 + \varepsilon), \quad \tilde{w}_s = \tilde{w}_s / (1 + \varepsilon),$$

получим: $\tilde{\lambda}_j, \tilde{w}_s$ — решение (15.10) (удовлетворяют условиям (15.10) а), б)), а значение функционала на этом решении:

$$\sum_{s=1}^n \tilde{w}_s = \sum_{s=1}^n \tilde{w}_s / (1 + \varepsilon) < \sum_{s=1}^n \tilde{w}_s,$$

т. е. \tilde{w}_s — не оптимальное решение. Лемма доказана.

Теорема 16.2. (О достаточных условиях оптимальности решения задачи (15.10).)

1°. Пусть $\tilde{\lambda}_j \in \mathbb{R}^m, j = \overline{1, r}, \tilde{w}_s \geq 0, s = \overline{1, n}$ удовлетворяют системе условий (15.10) а), б).

2°. Пусть для набора индексов $J^* = (j_1, j_2, \dots, j_l), l \leq r, j_s$ из $\overline{1, r}$ в (15.10) б) достигаются равенства: $\tilde{\lambda}_j^\top a_j = \sigma_j^2$ при $j \in J^*$.

3°. Существуют числа $\mu_j \geq 0, j \in J^*$ такие, что выполнены соотношения

$$\text{а) } \sum_{j \in J^*} \mu_j (\tilde{\lambda}_j^\top G_s \tilde{\lambda}_j) \leq 1, \quad s = \overline{1, n}$$

и

$$\text{б) } \sum_{j \in J^*} \mu_j (\tilde{\lambda}_j^\top G_s \tilde{\lambda}_j) = 1, \quad \text{если } \tilde{w}_s > 0, \quad s = \overline{1, n}.$$

(16.7)

Тогда $\tilde{\lambda}_j, \tilde{w}_s$ — оптимальное решение задачи (15.10).

Доказательство. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}^m, w_s \geq 0, j = \overline{1, r}, s = \overline{1, n}$ представляют некоторое другое решение, удовлетворяющее (15.10) а), б). Представим:

$$\lambda_j = \tilde{\lambda}_j + \eta_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad w_s = \tilde{w}_s + \xi_s, \quad s = \overline{1, n}. \quad (16.8)$$

Пусть $j \in J^*$, тогда из (15.10) б) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_j^\top a_j &= \tilde{\lambda}_j^\top a_j + \eta_j^\top a_j \leq \sigma_j^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_j^\top a_j &= \eta_j^\top \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \lambda_j \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_j^\top \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \tilde{\lambda}_j + \alpha_j^2 &\leq 0, \quad j \in J^*, \end{aligned} \quad (16.9)$$

где

$$\alpha_j^2 = \eta_j^\top \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \eta_j \quad (16.10)$$

— неотрицательные числа.

Подставляя (16.8) в (15.10) а), находим:

$$\left(\sum_{s=1}^n \tilde{w}_s G_s \right) \tilde{\lambda}_j + \left(\sum_{s=1}^n \xi_s G_s \right) \tilde{\lambda}_j + \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \eta_j = a_j.$$

Так как $\tilde{\lambda}_j$, \tilde{w}_s удовлетворяют (15.10) а), то отсюда следует:

$$\left(\sum_{s=1}^n \xi_s G_s \right) \tilde{\lambda}_j + \left(\sum_{s=1}^n w_s G_s \right) \eta_j = 0. \quad (16.11)$$

Для каждого $j \in J^*$ умножим (16.11) слева на $\tilde{\lambda}_j^\top$ и вычтем из (16.9). В результате получим:

$$\tilde{\lambda}_j^\top \left(\sum_{s=1}^n \xi_s G_s \right) \tilde{\lambda}_j \geq \alpha_j^2, \quad j \in J^*. \quad (16.12)$$

Обозначим ΔW разность значений функционалов на решениях λ_j , w_s и $\tilde{\lambda}_j$, \tilde{w}_s :

$$\Delta W = \sum_{s=1}^n \xi_s. \quad (16.13)$$

Умножим теперь (16.12) на числа $\mu_j \geq 0$, определенные условием теоремы, просуммируем по всем $j \in J^*$ и вычтем из (16.13):

$$\sum_{s=1}^n \xi_s \left(1 - \sum_{j \in J^*} \mu_j (\tilde{\lambda}_j^\top G_s \tilde{\lambda}_j) \right) \leq \Delta W - \sum_{j \in J^*} \mu_j \alpha_j^2. \quad (16.14)$$

Используя условия (16.7) б) теоремы, находим:

$$\Delta W \geq \sum_{\substack{s=1 \\ \tilde{w}_s=0}}^n \xi_s \left(1 - \sum_{j \in J^*} \mu_j (\tilde{\lambda}_j^\top G_s \tilde{\lambda}_j) \right) + \sum_{j \in J^*} \mu_j \alpha_j^2.$$

Первая сумма не содержит членов с индексами s , для которых $\tilde{w}_s > 0$. Для индексов s , для которых $\tilde{w}_s = 0$, необходимо $\xi_s \geq 0$ (так как $w_s \geq 0$), и выражение в скобках под знаком первой суммы также неотрицательно согласно (16.7). Откуда следует: $\Delta W \geq 0$. Это и доказывает справедливость утверждения теоремы. \square

Как следствие нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 16.3. Пусть $\tilde{\lambda}_j, \tilde{w}_s, j = \overline{1, r}, s = \overline{1, n}$, — оптимальное решение задачи (15.10), удовлетворяющее достаточным условиям теоремы 16.2 с константами $\mu_j, j \in J^*$. Рассмотрим другую задачу (15.10), в которой ограничения (15.10) б) имеют вид:

$$\lambda_j^\top a_j \leq \gamma \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, r}, \quad (16.15)$$

где $\gamma > 0$ — заданное число.

Тогда, оптимальное решение этой задачи $\bar{\lambda}_j, \bar{w}_s$ определяется следующими формулами:

$$\bar{\lambda}_j = \gamma \tilde{\lambda}_j, \quad j = \overline{1, r}, \quad \bar{w}_s = \tilde{w}_s / \gamma, \quad j = \overline{1, n}. \quad (16.16)$$

Доказательство. Решение $\bar{\lambda}_j, \bar{w}_s$ удовлетворяет ограничениям (15.10) а) и (16.15). Равенство в (16.15) достигается только для $j \in J^*$. При этом $\bar{\lambda}_j, \bar{w}_s$ будут удовлетворять условиям (16.7) теоремы 16.2, если определить постоянные, входящие в (16.7), следующими соотношениями:

$$\bar{\mu}_j = \mu_j / \gamma^2, \quad j \in J^*.$$

Тем самым, решение (16.16) удовлетворяет всем условиям теоремы 16.2 и является оптимальным. \square

§ 17. Алгоритм решения задачи при оценке одного параметра

В этом разделе описывается метод решения задачи (15.10) в случае, когда $r = 1$. Предлагаемая вычислительная процедура основана на постановке некоторой задачи обобщенной линейной импульсной коррекции, которая эффективно решается вариантом симплекс-метода, описанном в § 12 гл. III. Найденное решение задачи ОЛИК после тривиального пересчета определяет решение задачи (15.10).

Определим матрицы $m \times n_s - D_s$ следующими формулами:

$$D_s = H_s^\top (\mathcal{P}_s^{-1})^{1/2} / \sqrt{c_s}. \quad (17.1)$$

Здесь используется понятие корня квадратного из симметричной неотрицательно определенной матрицы. Из (15.4), (15.5) следует:

$$D_s D_s^\top = G_s, \quad (17.2)$$

где G_s — матрицы, заданные для задачи (15.10).

Рассмотрим следующую задачу ОЛИК:

$$\sum_{s=1}^n D_s \alpha_s w_s = a, \quad \sum_{s=1}^n w_s \rightarrow \min, \quad (17.3)$$

$$\alpha_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad |\alpha_s| = 1, \quad w_s \geq 0.$$

Теорема 17.1. Пусть $(j_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{w}_1), (j_2, \tilde{\alpha}_2, \tilde{w}_2), \dots, (j_m, \tilde{\alpha}_m, \tilde{w}_m)$ — оптимальный опорный план задачи (17.3); $\tilde{J} = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ и $A_{\tilde{J}} = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ — соответствующий оптимальный опорный базис: $A_s = D_{j_s} \tilde{\alpha}_s$, $s = \overline{1, m}$. Тем самым в оптимальном плане (17.3) выполнено: $\tilde{w}_s = 0$, если $s \notin \tilde{J}$.

Определим $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ следующим соотношением:

$$\tilde{\lambda} = A_{\tilde{J}}^{-1} e, \quad e \in \mathbb{R}^m, \quad e^\top = (1, 1, \dots, 1). \quad (17.4)$$

Пусть

$$a^\top \tilde{\lambda} = \Delta, \quad \gamma = \sigma^2 / \Delta. \quad (17.5)$$

Тогда соотношения

$$w_{j_s} = \tilde{w}_s / \gamma, \quad j_s \in \tilde{J}, \quad w_s = 0, \quad s \notin \tilde{J}, \quad \lambda = \gamma \tilde{\lambda} \quad (17.6)$$

определяют оптимальное решение задачи (15.10) при $r = 1$.

Доказательство. По теореме 12.3 $\tilde{\lambda}$ и \tilde{w}_s для $s = \overline{1, m}$ удовлетворяют соотношению:

$$\left(\sum_{s=1}^m D_{j_s} D_{j_s}^\top \tilde{w}_s \right) \tilde{\lambda} = a.$$

Отсюда и из (17.2) следует, что $\tilde{w}_s, \tilde{\lambda}$ удовлетворяют условию (15.10) а). Тем самым (15.10) а) будут удовлетворять и w_s, λ из (17.6). Из (17.4), (17.5) следует, что λ удовлетворяет условию (15.10) б): $a^\top \lambda = \gamma a^\top \tilde{\lambda} = \gamma \Delta = \sigma^2$.

Кроме того, по теореме 12.3 выполнено: $\tilde{\lambda}^\top D_j D_j^\top \tilde{\lambda} \leq 1$ для всех $j = \overline{1, n}$ и $\tilde{\lambda}^\top D_j D_j^\top \tilde{\lambda} = 1$ для $j \in \tilde{J}$. Отсюда следует: $\lambda^\top D_j D_j^\top \lambda \leq 1/\gamma^2$ для всех $j = \overline{1, n}$ и $\lambda^\top D_j D_j^\top \lambda = 1/\gamma^2$ для $j \in \tilde{J}$, в частности, для $w_j > 0$.

Тем самым w_s, λ будут удовлетворять условиям теоремы 16.2 ($r=1$) о достаточных условиях оптимальности, если положить $\mu_1 = 1/\gamma^2$. Следовательно, (17.6) определяют оптимальное решение задачи (15.10) при $r = 1$. \square

Ниже, в этом параграфе мы будем обсуждать простейший (но практически важный) случай задачи (15.10) с $r = 1$ и когда в каждый момент времени может быть измерен только один параметр, т. е. фигурирующие в постановке задачи векторы z_s одномерны. Или иначе, все $n_s = 1$ и $H_s^\top \in \mathbb{R}^m$. В этом случае (17.1) принимает вид:

$$D_s = H_s^\top / \sqrt{c_s \bar{\sigma}_s} \in \mathbb{R}^m,$$

где $\bar{\sigma}_s^2$ — дисперсия ошибки измерения параметра z_s .

Рассмотрим задачу коррекции (17.3) в этом случае. Так как $\alpha_s = \pm 1$, то (17.3) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^n D_s u_s = a, \quad \sum_{s=1}^n |u_s| \rightarrow \min, \quad u_s \in \mathbb{R}, \quad (17.7)$$

где $u_s = w_s \alpha_s$, $w_s = |u_s|$.

Сопоставим задачу (17.7) с задачей о наихудшей корреляции (7.6), (7.7) гл. II. Если отождествить $\sqrt{c_s \sigma_s} = \sqrt{\mathcal{P}_{ss}}$, то задача (17.7) и задача о наихудшей корреляции оказываются в формальной записи тождественными.

Отсюда, в частности, следует замечательное совпадение. В задаче о наихудшей корреляции и в рассматриваемой проблеме некоррелированных ошибок измерений при ограниченной дисперсии оцениваемого параметра с минимизацией суммарного числа измерений выделяется (из возможной совокупности) тождественный набор измерений (выделяются измерения в те моменты времени t_s , для которых $u_s > 0$). При этом смысл величин u_s в этих задачах и смысл функционалов совершенно разный. В задаче о наихудшей корреляции $\sum_{s=1}^n |u_s|$ — среднеквадратическая величина ошибки оценки параметра $l = a^\top q$, а в задаче, рассматриваемой в этом параграфе, $\sum_{s=1}^n |u_s|$ — суммарные затраты на измерения, или, при $c_s = 1$, $s = \overline{1, n}$ — общее число измерений. В первом случае $u_s \sqrt{\mathcal{P}_{ss}}$ — компонента оценителя, во втором: $|u_s|$ — затраты на измерения в s -м сеансе, или при $c_s = 1$ — число измерений, которое надо проводить в s -м сеансе.

§ 18. Алгоритм выбора оптимальной программы измерений с ограничениями на дисперсии ошибок оценок двух параметров

В этом параграфе мы анализируем задачу (15.10) при $r = 2$. Мы покажем, что в этом случае решение этой задачи можно получить, тоже используя симплекс-метод. Для этого конструируется специальная задача ОЛИК и устанавливается соответствие между ее решениями и решениями задачи (15.10) при $r = 2$.

Для краткости рассматриваемую задачу (15.10) при $r = 2$ обозначим $Z(1, 1)$. Эта проблема порождает две задачи типа (15.10) с $r = 1$. Через $Z(1, 0)$ будем обозначать задачу (15.10), в которой учитываются ограничения (15.10) а), б) только для $j = 1$, а ограничения для $j = 2$ не учитываются. $Z(0, 1)$ — задача (15.10), в которой оставлены ограничения (15.10) а), б) только для $j = 2$. Задачи $Z(1, 0)$ и $Z(0, 1)$ мы можем

решить, сводя их к соответствующей задаче ОЛИК, методом, обоснованным в § 17.

Пусть $\tilde{w}'_s, \lambda'_1, s = \overline{1, n}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(1, 0)$, а $\tilde{w}''_s, \lambda''_2, s = \overline{1, n}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(0, 1)$. Определим $\lambda''_1 \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda'_2 \in \mathbb{R}^m$ как решения соответствующих систем уравнений:

$$\left(\sum_{s=1}^n G_s \tilde{w}'_s \right) \lambda''_1 = a_2, \quad \left(\sum_{s=1}^n G_s \tilde{w}''_s \right) \lambda'_2 = a_1. \quad (18.1)$$

Лемма 18.1. i) Если $a_2^\top \lambda''_1 \leq \sigma_2^2$, то $w_s = \tilde{w}'_s, \lambda_1 = \lambda'_1$ и $\lambda_2 = \lambda''_1$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$ (15.10).

ii) Если $a_1^\top \lambda'_2 \leq \sigma_1^2$, то $w_s = \tilde{w}''_s, \lambda_1 = \lambda'_2, \lambda_2 = \lambda''_2$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$ (15.10).

Доказательство. i) Минимальное значение функционала в задаче $\mathcal{Z}(1, 1)$ не может быть меньше, чем минимальное значение функционала, как в задаче $\mathcal{Z}(1, 0)$, так и в задаче $\mathcal{Z}(0, 1)$, так как в задаче $\mathcal{Z}(1, 1)$ больше ограничений. На решении $w_s, \lambda_1, \lambda_2$, определяемом условием i) леммы, будут выполнены все ограничения (15.10) а), б) задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$. Следовательно, эти $\lambda_1, \lambda_2, w_s, s = \overline{1, n}$ определяют оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$. Доказательство ii) аналогично. \square

Следствие. Задачу $\mathcal{Z}(1, 1)$ необходимо решать только в том случае, если после решения задач $\mathcal{Z}(1, 0)$ и $\mathcal{Z}(0, 1)$ окажутся выполнены неравенства:

$$a_2^\top \lambda''_1 > \sigma_2^2 \quad \text{и} \quad a_1^\top \lambda'_2 > \sigma_1^2. \quad (18.2)$$

Перейдем к конструированию некоторой задачи ОЛИК. Пусть матрицы D_s размером $m \times n_s$ определены (17.1).

Обозначим \overline{D}_s — матрицу $2m \times 2n_s$, определяемую в блочном виде:

$$\overline{D}_s = \begin{pmatrix} D_s & O_{mn_s} \\ O_{mn_s} & D_s \end{pmatrix}, \quad (18.3)$$

где блок O_{mn_s} — прямоугольная матрица $m \times n_s$ с нулевыми элементами. Очевидно

$$\overline{D}_s \overline{D}_s^\top = \begin{pmatrix} G_s & O_{mm} \\ O_{mm} & G_s \end{pmatrix}. \quad (18.4)$$

Определим вектор $a(\nu) \in \mathbb{R}^{2m}$ следующей формулой:

$$a^\top(\nu) = ((1 - \nu)a_1^\top, \nu a_2^\top), \quad (18.5)$$

где $0 \leq \nu \leq 1$ — пока произвольное число, $a_1 \in \mathbb{R}^m, a_2 \in \mathbb{R}^m$ — векторы, заданные в исходной информации для задачи (15.10).

Рассмотрим следующее однопараметрическое семейство задач ОЛИК, которые мы для краткости будем называть задачами $\mathcal{L}(\nu)$. Определить $w_s \geq 0$, $s = \overline{1, n}$ и $\alpha_s \in \mathbb{R}^{2n_s}$, $|\alpha_s| = 1$ из следующих условий:

$$\sum_{s=1}^n \overline{D}_s \alpha_s w_s = a(\nu), \quad \sum_{s=1}^n w_s \rightarrow \min_{\alpha_s, w_s}. \quad (18.6)$$

Пусть $(j_s, \tilde{\alpha}_s, \tilde{w}_s)$, $s = \overline{1, 2m}$ — оптимальный опорный план в задаче $\mathcal{L}(\nu)$ (18.6),

$$\tilde{J} = (j_1, j_2, \dots, j_{2m}), \quad A_{\tilde{J}} = (A_1, A_2, \dots, A_{2m}), \quad A_s = \overline{D}_{j_s} \tilde{\alpha}_s.$$

Согласно теореме 12.3 гл. III, вектор $\tilde{\lambda} = A_{\tilde{J}}^{-1\top} e$, $e \in \mathbb{R}^{2m}$, $e^\top = (1, 1, \dots, 1)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \tilde{\lambda}^\top \overline{D}_j \overline{D}_j^\top \tilde{\lambda} \leq 1 \quad \text{для } j = \overline{1, n}; \\ \text{ii)} \quad & \tilde{\lambda}^\top \overline{D}_j \overline{D}_j^\top \tilde{\lambda} = 1 \quad \text{для } j \in \tilde{J}; \\ \text{iii)} \quad & \left(\sum_{s=1}^{2m} \overline{D}_{j_s} \overline{D}_{j_s}^\top \tilde{w}_s \right) \tilde{\lambda} = a(\nu). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Представим вектор $\tilde{\lambda}$ как составной вектор

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} (1 - \nu) \tilde{\lambda}_1 \\ \nu \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in \mathbb{R}^m. \quad (18.8)$$

Учитывая (18.4)–(18.8) соотношения (18.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (1 - \nu)^2 \tilde{\lambda}_1^\top G_j \tilde{\lambda}_1 + \nu^2 \tilde{\lambda}_2^\top G_j \tilde{\lambda}_2 \leq 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ \text{ii)} \quad & (1 - \nu)^2 \tilde{\lambda}_1^\top G_j \tilde{\lambda}_1 + \nu^2 \tilde{\lambda}_2^\top G_j \tilde{\lambda}_2 = 1 \quad \text{для } j \in \tilde{J}; \\ \text{iii)} \quad & \left(\sum_{s=1}^{2m} G_{j_s} \tilde{w}_s \right) \tilde{\lambda}_1 = a_1, \quad \left(\sum_{s=1}^{2m} G_{j_s} \tilde{w}_s \right) \tilde{\lambda}_2 = a_2. \end{aligned} \quad (18.9)$$

Вместе с задачей ОЛИК $\mathcal{L}(\nu)$ (18.6) рассмотрим две задачи ОЛИК \mathcal{L}_j , $j = 1, 2$, которые используются для решения задач $\mathcal{Z}(1, 0) - j = 1$ и $\mathcal{Z}(0, 1) - j = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j: \quad & \sum_{s=1}^n D_s \alpha_s^{(j)} w_s^{(j)} = a_j, \quad w_s^{(j)} \geq 0, \\ & \alpha_s^{(j)} \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad |\alpha_s^{(j)}| = 1, \quad W_{(j)} = \sum_{s=1}^n w_s^{(j)} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (18.10)$$

и два частных случая задачи $\mathcal{L}(\nu)$.

Задача $\mathcal{L}(0)$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n D_s \alpha'_s w_s &= a_1, & \sum_{s=1}^n D_s \alpha''_s w_s &= O_m, \\ \alpha'_s &\in \mathbb{R}^{n_s}, & \alpha''_s &\in \mathbb{R}^{n_s}, & |\alpha'_s|^2 + |\alpha''_s|^2 &= 1, \\ w_s &\geq 0, & s &= \overline{1, n}, & W_{(0)} &= \sum_{s=1}^n w_s - \min, \end{aligned} \quad (18.11)$$

где $O_m \in \mathbb{R}^m$ — нулевой вектор.

Задача $\mathcal{L}(1)$ записывается аналогично (18.11), нужно только на место a_1 поставить O_m , а на место O_m поставить a_2 .

Л е м м а 18.2. Пусть $\tilde{w}_s^{(j)}, \tilde{\alpha}_s^{(j)}$ — оптимальное решение задачи \mathcal{L}_j , $j = 1, 2$. Тогда:

i) оптимальное решение задачи $\mathcal{L}(0)$ определяется соотношениями

$$w_s = \tilde{w}_s^{(1)}, \quad \alpha'_s = \alpha_s^{(1)}, \quad \alpha''_s = O_{n_s}, \quad s = \overline{1, n}; \quad (18.12)$$

ii) оптимальное решение задачи $\mathcal{L}(1)$ определяется соотношениями

$$w_s = w_s^{(2)}, \quad \alpha'_s = O_{n_s}, \quad \alpha''_s = \tilde{\alpha}_s^{(2)}, \quad s = \overline{1, n},$$

где $O_{n_s} \in \mathbb{R}^{n_s}$ — нулевой вектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. i) Из сопоставления условий (18.10) для $j = 1$ и (18.11) очевидно, что (18.12) — решение (18.11). Так как (18.11) по сравнению с (18.10) при $j = 1$ содержит дополнительные ограничения, то оптимальное значение функционала $W_{(0)}$ в задаче (18.11) не может быть меньше оптимального значения функционала $W_{(1)}$ в задаче (18.10). Для решения (18.12) выполнено: $W_{(0)} = W_{(1)}$. Это и доказывает утверждение i) леммы. Доказательство ii) проводится аналогично.

Для каждого $0 \leq \nu \leq 1$ на оптимальном решении задачи $\mathcal{L}(\nu)$ определена величина

$$\varphi(\nu) = \frac{\tilde{\lambda}_1^\top a_1}{\sigma_1^2} / \frac{\tilde{\lambda}_2^\top a_2}{\sigma_2^2}, \quad (18.13)$$

где $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ определены (18.9) iii). Из (18.2) и леммы 18.2 следует, что

$$\varphi(0) < 1, \quad \varphi(1) > 1. \quad (18.14)$$

Рассмотрим «внешнюю» одномерную задачу определения $\nu = \nu^* \in [0, 1]$ из условия

$$\varphi(\nu^*) = 1. \quad (18.15)$$

По непрерывности $\varphi(\nu)$ и (18.14) такое решение должно существовать.

Пусть $\tilde{w}_s(\nu^*)$, $s = \overline{1, n}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{L}(\nu^*)$ и $\tilde{\lambda}_1(\nu^*)$, $\tilde{\lambda}_2(\nu^*)$ определены (18.9) iii) при $\tilde{w}_s = \tilde{w}_s(\nu^*)$. Согласно (18.13), (18.15), на этом решении выполнены равенства

$$\frac{a_1^\top \tilde{\lambda}_1(\nu^*)}{\sigma_1^2} = \frac{a_2^\top \tilde{\lambda}_2(\nu^*)}{\sigma_2^2} = \gamma. \quad \square \quad (18.16)$$

Теорема 18.1. *Оптимальное решение задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$ определяется следующими соотношениями:*

$$w_s = \gamma \tilde{w}_s(\nu^*), \quad s = \overline{1, n}, \quad \lambda_j = \tilde{\lambda}_j(\nu^*)/\gamma, \quad j = 1, 2. \quad (18.17)$$

Доказательство. Совокупность величин (18.17) — w_s , $s = \overline{1, n}$, λ_j , $j = 1, 2$:

а) удовлетворяет ограничениям (15.10) а), так как $\tilde{w}_s(\nu^*)$, $\tilde{\lambda}_j(\nu^*)$ удовлетворяет (18.9) iii);

б) удовлетворяет ограничениям (15.10) б); это непосредственно следует из (18.16).

При этом выполнены условия:

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_1^\top G_s \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2^\top G_s \lambda_2 &\leq 1 \quad \text{для } s = \overline{1, n}, \\ \mu_1 \lambda_1^\top G_s \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2^\top G_s \lambda_2 &= 1 \quad \text{для } w_s > 0. \end{aligned}$$

Это следует из (18.9), i) и ii) при $\mu_1 = (1 - \nu)^2 \gamma^2$, $\mu_2 = \nu^2 \gamma^2$. Тем самым набор w_s , λ_j , $s = \overline{1, n}$, $j = 1, 2$ удовлетворяет условиям теоремы 16.2 и, следовательно, является оптимальным решением задачи $\mathcal{Z}(1, 1)$. \square

Замечание 1. Для случая произвольного $r \leq m$, очевидно, внутреннюю задачу ОЛИК следует конструировать с помощью матриц $m_r \times n_s r$ вида

$$\overline{D}_s = \begin{pmatrix} D_s & O_{mn_s} & O_{mn_s} \\ & D_s & \\ O_{mn_s} & O_{mn_s} & D_s \end{pmatrix}$$

и вектора $a \in \mathbb{R}^{mr}$

$$a^\top = (\beta_1 a_1^\top, \beta_2 a_2^\top, \dots, \beta_r a_r^\top),$$

где $\beta_j \geq 0$, $j = \overline{1, r}$ и $\sum_{j=1}^r \beta_j = 1$. Мы не описываем в подробностях алгоритм решения задачи в этом случае, так как в настоящее время еще нет

вычислительного опыта решения задачи даже при $r = 2$. Для $r = 1$ эффективность описанной процедуры решения задачи о выборе программы измерений путем ее сведения к задаче ОЛИК многократно была проверена.

З а м е ч а н и е 2. При решении задачи ОЛИК $\mathcal{L}(\nu)$ (18.6) для случая $r = 2$ возникает проблема выбора исходного опорного базиса для начала ее решения симплекс-методом.

Предположим, что обе задачи ОЛИК \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , определенные (18.10) решены. Тогда, в частности, определены их оптимальные опорные планы. Для задачи \mathcal{L}_1 :

$$(j_1^{(1)}, \tilde{\alpha}_1^{(1)}, \tilde{w}_1^{(1)}), \dots, (j_m^{(1)}, \tilde{\alpha}_m^{(1)}, \tilde{w}_m^{(1)})$$

и для задачи \mathcal{L}_2 :

$$(j_1^{(2)}, \tilde{\alpha}_1^{(2)}, \tilde{w}_1^{(2)}), \dots, (j_m^{(2)}, \tilde{\alpha}_m^{(2)}, \tilde{w}_m^{(2)}).$$

Определим $2m$ троек (j_s, α_s, w_s) , $s = \overline{1, 2m}$ следующим правилом:

$$j_s = j_s^{(1)}, \quad \alpha_s = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_s^{(1)} \\ O_{n_{j_s}} \end{pmatrix}, \quad w_s = (1 - \nu)\tilde{w}_s^{(1)} \quad \text{при } s = \overline{1, m},$$

$$j_s = j_{s-m}^{(2)}, \quad \alpha_s = \begin{pmatrix} O_{n_{j_s}} \\ \tilde{\alpha}_{s-m}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad w_s = \nu\tilde{w}_{s-m}^{(2)} \quad \text{при } s = \overline{m+1, 2m},$$

где $O_k \in \mathbb{R}^k$ — нулевой вектор.

Нетрудно проверить, что указанный набор $2m$ троек действительно является опорным планом задачи (18.6), а набор $2m$ векторов $A_s = \overline{D}_{j_s} \alpha_s$, $s = \overline{1, 2m}$, является опорным базисом. Попутно мы доказали утверждение о существовании опорного плана в задаче ОЛИК $\mathcal{L}(\nu)$ при условии, что существуют опорные планы для каждой из задач \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 .

КОММЕНТАРИИ

Глава I

1. Более подробное описание задачи ЛП можно найти в книгах [9, 10, 27]. Краткая сводка результатов содержится, например, в справочнике [18].

2. Вопрос об оценках близости опорного плана к оптимальному, которому мы посвятили отдельный § 3, во многих книгах вообще не рассматривается, так как в ЛП оптимальный план определяется с помощью конечного числа операций. Особое внимание к этой проблеме у нас связано с последующим применением таких оценок и задачам, рассмотренным в гл. III, в которых с помощью симплекс-метода можно получить только приближенно-оптимальное решение.

По-видимому, оценка (3.2) для канонического варианта задачи ЛП впервые указана в работе М. Л. Лидова [15], там же отмечена ее справедливость для более общих задач гл. III. Этот вывод впоследствии был повторен (к сожалению, без соответствующих ссылок) в [4]. Метод оценивания для случая, когда коэффициенты c_k , $k = \overline{1, n}$, имеют разные знаки, по-видимому, в предлагаемом препринте описан впервые.

3. Теория двойственности, лишь затронутая в § 4, играет существенную роль во многих исследованиях по математическому программированию. Однако в нашем препринте она не используется. В § 4 некоторые ее элементы приведены в связи с особой простотой геометрической интерпретации двойственной задачи.

Глава II

1. Задача о «наихудшей корреляции» (7.6), (7.7) была поставлена в варианте «схемы бортиков» в работе М. Л. Лидова [14]. Там же указано, что такая постановка соответствует случаю наилучшей корреляции между ошибками измерений. Было отмечено, что проблема минимизации сводится к задаче ЛП, решаемой симплекс-методом и приведен критерий оптимальности. Особый интерес вызвал вывод о необходимости для оптимальной оценки всего m измерений из исходной совокуп-

ности $n \gg t$ измерений и связанные с этим возможности составления программы измерений.

2. В работе Белоусова [5] задача о «наихудшей корреляции» рассмотрена в непрерывной постановке, когда исходное множество возможных измерений одного параметра непрерывно на отрезке времени $[T_0, T_1]$. В непрерывной постановке задача (7.6), (7.7) имеет вид:

$$\int_{T_0}^{T_1} \overline{H}^\top(\tau) u(\tau) d\tau = a, \quad \int_{T_0}^{T_1} |u(\tau)| d\tau = \min_u. \quad (\text{K.1})$$

В предположении, что $\overline{H}^\top(\tau)$ представима в виде векторного полинома по τ степени $m - 1$, задача (K.1) сводится к проблеме определения точек полинома Чебышева 1-го рода, в которых он принимает значения, равные по модулю единице. Знакомство с работами [5, 6] поучительно для желающих отказаться от применения симплекс-метода в аналогичных задачах. Заметим, что задача (K.1) может быть решена стандартным симплекс-методом. При этом определенная гладкость вектор-функции $\overline{H}^\top(\tau)$ может быть использована на каждой итерации для экономного метода вычисления вектора, который следует вводить в базис. Более подробно это описано в [15].

3. Работа П. Е. Эльясберга и Б. Ц. Бахшияна [23], по-видимому, была одной из первых, в которых задача о «наихудшей корреляции» была применена к проблеме оценивания, связанной с проектированием полетов космических аппаратов (КА). В [23] вычислены минимаксные оценки точности определения параметров, характеризующих сближение КА с Марсом, на основе исходной совокупности измерений дальности КА от Земли на интервалах времени различной длины.

4. После публикации [14] стали появляться различные обобщения задачи минимаксного оценивания. В. Н. Почукаев вычислил $\max_R M(\hat{l} - l)^2$ при условии $|R_{ij}| \leq \theta \leq 1$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Л. Ю. Белоусов [6] определил гарантированную дисперсию ошибки оценки в случае, когда весь набор измерений разбивается на k групп, и ошибки измерений, принадлежащих различным группам, не коррелированы, а внутри каждой группы ошибки коррелированы наихудшим образом.

Проблеме вычисления $\max M(\hat{l} - l)^2$ посвящена значительная часть книги Б. Ц. Бахшияна, Р. Р. Назирова, П. Е. Эльясберга [4]. В [4] этот максимум, называемый гарантированной оценкой, вычисляется, исходя из достаточно общих предположений о множестве, которому может принадлежать истинная матрица ковариации \mathcal{P} . Кроме того, в [4] учитывается возможная неопределенность в знании математических ожиданий

ошибок измерений $M\rho$. Изящная постановка и решение этой проблемы содержится также в работе П. Е. Эльясберга [25].

В § 8 мы рассмотрели не самый общий вариант этой проблемы. Дадим некоторые пояснения: во-первых, более детальное описание требует знания большого объема исходной числовой информации, которую, обычно, трудно получить. Здесь возникают почти такие же трудности, как и при попытке однозначного определения матрицы \mathcal{P} , которое требуется в классических задачах. Во-вторых, по нашему мнению, не следует слишком далеко отрывать в комплексной минимаксной проблеме задачу вычисления максимума ошибки оценки от более сложной задачи определения оптимального оценителя. Постепенная детализация (и тем самым усложнение) постановок задач, по-видимому, должна сопровождаться разработкой и опробованием эффективных алгоритмов определения оптимальных оценок.

В связи с этим следует еще раз упомянуть работу Л. Ю. Белоусова [6], в которой для минимаксной проблемы, содержащей две группы измерений с взаимно некоррелированными ошибками, предложен метод минимизации, близкий по духу к описанному нами в § 9. В [6] также предлагается исходную задачу свести (другим, чем в § 9 путем) к задаче ЛП с параметром (внутренняя задача) и внешней одномерной проблеме выбора параметра, оптимизирующего решение.

Близкий, но несколько иной подход к проблеме оценивания при неизвестной матрице ковариаций был развит в работах И. Н. Бажинова и В. Н. Почукаева [1].

5. Случай, когда априори представляется возможность проведения измерений на непрерывном отрезке времени полета КА является типичным. Непрерывная постановка задачи, близкая к рассмотренной в § 8, предложена и исследована в работе М. Л. Лидова [17]. Исходное множество измерений задается k функциями $z_r(t)$, $r = \overline{1, k}$, $t = [0, T]$. Ошибки измерений различных функций не коррелированы, а ошибки измерений $\rho_r(t)$ функции $z_r(t)$ содержат две составляющие:

$$\rho_r(t) = \rho_{r1}(t) + \rho_{r2}(t),$$

$\rho_{r1}(t)$ — белый шум, $\rho_{r2}(t)$ — коррелированный случайный процесс, автокорреляционная функция которого известна не точно, а выполнены условия, аналогичные (8.3). В оптимальном решении такой задачи возникают интервалы времени, где оценитель $\Phi(t)$ равен нулю (измерения на этих интервалах проводить не следует), и интервалы, где $|\Phi(t)| > 0$.

Рассмотренные в [17] примеры позволяют проследить эволюцию решения от классического случая (все измерения используются для оцен-

ки), до случая, когда в решении выделяется конечное число моментов времени измерений. Такая эволюция происходит при изменении отношения интенсивности белого шума к ширине интервала неопределенности значений корреляционных функций.

6. Вопросы получения минимаксных апостериорных оценок исследовались в работе А. И. Шеховцова [22]. В [22] предполагалось, что ошибки измерений принадлежат n -мерному параллелепипеду Π , так как это было рассмотрено при анализе «схемы бортиков» в § 7.

Глава III

1. Задача о линейной импульсной коррекции параметров траектории первоначально возникла и исследовалась в связи с описанными в § 10 задачами терминального управления полетом КА. В работе А. К. Платонова [19] на основе геометрических соображений доказано, что оптимальное решение реализуется не более, чем k импульсами (k — размерность пространства корректируемых параметров). Прикладные проблемы, анализируемые в [19] требовали, в основном, решения задачи коррекции для случая $k = 2$. Для $k = 2$ оказалось возможным решать эти задачи с помощью геометрических графических методов, подобных описанному в § 13.

2. Возможность применения для линейной импульсной коррекции варианта симплекс-метода была обнаружена в работе М. Л. Лидова [15]. В связи с установленной в [15] аналогией между задачей коррекции и задачей о выборе оптимальной программы измерений (гл. IV) была предложена постановка и метод решения задачи ОЛИК вариантом симплекс-метода. В [15] проведено сравнительное сопоставление задачи ОЛИК и ЛП. Существенную роль при этом играла указанная в [15] геометрическая интерпретация задачи ОЛИК и симплекс-метода, описанная в § 13 этого препринта. В [15] исследовались и более общие постановки: в частности, рассматривалась задача коррекции для попадания в эллипсоидальную область и ее аналог — задача о выборе программы измерений при наличии априорной информации.

В книге [4], § 6.7 отмечено, что задачи типа ОЛИК входят в класс проблем, ранее поставленных в книге Данцига [10] и названных *обобщенными задачами линейного и выпуклого программирования*. Линейные задачи такого типа — это задачи, описанные нами в общем виде в п. 14.2 § 14. Некоторые общие вопросы, связанные с такими задачами изложены в [4] § 6.7. Работа [15] явилась основой для постановки и решения ряда прикладных задач. В связи с этим следует отметить работу [8] и работу Б. Ц. Бахшияна и А. А. Суханова [3].

Глава IV

1. В постановку задачи о выборе оптимальной программы измерений, рассмотренную в этой главе входят несколько целочисленных параметров, характеризующих ее сложность:

а) размерность пространства состояний — m ;

б) размерность векторов z_s , измеряемых в отдельных сеансах, — n_s , $s = \overline{1, n}$;

в) число оцениваемых параметров — r .

По-видимому, впервые такая задача для $m = 2$, $n_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, $r = 1$ была поставлена и исследована геометрическими методами на плоскости в работе Г. Е. Elfving [28] в 1952 г. Поэтому иногда эту задачу называют [26] задачей Элфинга.

2. В 1970 г. В. Г. Ершов [11] рассмотрел эту задачу в случае $n_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, $r = 1$ и произвольных m . В [11] путем записи задачи в виде (15.10) была получена оценка сверху $N \leq m$ для числа N сеансов измерений в оптимальной программе. Б. Ц. Бахшиян [2] обнаружил указанное нами в § 17 «замечательное совпадение» в описании задач «о наихудшей корреляции» и «о выборе программы измерений» при $n_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, $r = 1$, и, тем самым, указал на возможность решения второй задачи с помощью симплекс-метода ЛП.

3. Возможность решения задачи о выборе программы измерений в случае $n_s > 1$, $r = 1$, путем ее сведения к некоторой задаче ОЛИК была показана в работе М. Л. Лидова [15].

4. Алгоритм решения задачи для вариантов с $r > 1$ описан в [29]. Конструирование задачи ОЛИК (18.3)–(18.6) является не следствием каких-либо общих принципов, а неформальным изобретением. В связи с этим возникает нерешенная проблема разработки соответствующих «общих принципов». Оценка (16.4) для случая $r > 1$, $n_s > 1$, формально нова, хотя, в отличие от разработки алгоритма, ее получение не требует новых идей по сравнению с [12], где $n_s = 1$.

5. Задача о выборе оптимальной программы измерений (15.6)–(15.8) имеет непрерывный аналог. Пусть в произвольный момент времени $t \in [0, T]$ допускается проведение измерения вектора $z(t) \in \mathbb{R}^k$, $z^*(t) = H^\top(t)q + \rho(t)$; $q, H(t) \in \mathbb{R}^m$.

Непрерывную постановку можно получить формально более строгим путем [17], исходя из предположения, что $\rho(t)$ — векторный белый шум: $M\rho(t)\rho^\top(t) = c(t)\mathcal{P}(t)\delta(t - s)$, либо путем непрерывной аппроксимации дискретной задачи [13]. При этом в обоих случаях возникает

следующая проблема вариационного исчисления:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } D_j &= a_j^\top \left(\int_0^T G(t)u(t) dt \right)^{-1} a_j \leq \sigma_j^2, \quad j = \overline{1, r}, \\
 \text{б) } 0 &\leq u(t), \\
 \text{в) } \int_0^T u(t) dt &= \min_u.
 \end{aligned} \tag{К.2}$$

Обратно, из (К.2) можно получить частный случай дискретной задачи (15.6)–(15.8), если искать $u(t)$ в виде:

$$u(t) = \sum_{s=1}^n w_s \delta(t_s),$$

где $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ — набор моментов времени, достаточно плотно заполняющий интервал $[0, T]$, $\delta(t_s)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t_s , $G_s = G(t_s)$.

В реальных системах нельзя за счет увеличения «затрат» на измерения уменьшить интенсивность белого шума до величины меньше некоторой предельной. Это физическое условие приводит к тому, что в (К.2) вместо б) следует ввести ограничение

$$\text{б)'} \quad 0 \leq u(t) \leq u_m,$$

где u_m — заданный параметр.

Такая задача для $r = 1$ была впервые решена в работе Н. Н. Козлова [13]. Затем в работе М. Л. Лидова и Н. М. Тесленко [16] был предложен и проверен надежный алгоритм решения такой задачи методом спуска по параметру u_m . Вычислив ее решение для одного значения u_m , оказывается нетрудно определить решение для близких значений $u_m + \Delta$, где $|\Delta|$ — достаточно малое число. Процедура начинается при достаточно больших значениях u_m . При $u_m \rightarrow \infty$ эта задача сводится к дискретной, которая эффективно решается симплекс-методом так, как это описано в гл. IV препринта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бажин И. К., Почукаев В. Н. Оптимальное планирование навигационных измерений в космическом полете. — М: Машиностроение, 1976.
- [2] Бахшиян Б. Ц. Выбор оптимальных моментов независимых траекторных измерений // Космические исследования. — 1970. — Т. 8, № 1.
- [3] Бахшиян Б. Ц., Суханов А. А. Выбор оптимального состава астроизмерений для определения орбит искусственных спутников // Космические исследования. — 1977. — Т. 15, № 1.
- [4] Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. Определение и коррекция движения. — М.: Наука, 1980.
- [5] Белоусов Л. Ю. Определение оптимальных моментов измерений // Космические исследования. — 1969. — Т. 7, № 1.
- [6] Белоусов Л. Ю. О задаче квадратичного программирования в вопросах оптимального планирования траекторных измерений // Космические исследования. — 1971. — Т. 9, № 6.
- [7] Белоусов Л. Ю. Чебышевское приближение как решение задачи многоцелевого планирования при произвольно коррелированных ошибках измерений // Космические исследования. — 1982. — Т. 20, № 6.
- [8] Владимиров В. П., Александров Е. В. Задача коррекции с ограничением на число импульсов // Космические исследования. — 1980. — Т. 18, № 2.
- [9] Гасс С. Линейное программирование. — М.: ИЛ, 1961.
- [10] Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. — М.: Прогресс, 1966.
- [11] Ершов В. Г. Об оптимизации программы траекторных измерений // Космические исследования. — 1970. — Т. 8, № 1.
- [12] Ершов В. Г. Оптимальная программа траекторных измерений // Космические исследования. — 1971. — Т. 9, № 1.
- [13] Козлов Н. Н. Об оптимизации процесса траекторных измерений // Космические исследования. — 1971. — Т. 9, № 1.
- [14] Лидов М. Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. — 1964. — Т. 2, № 5.
- [15] Лидов М. Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений и алгоритмы их решения // Космические исследования. — 1971. — Т. 9, № 5.
- [16] Лидов М. Л., Тесленко Н. М. Оптимизация решения некоторых задач управления полетом космических аппаратов методом спуска по параметру // В сб.: Математическое обеспечение космических экспериментов. — М.: Наука, 1978.
- [17] Лидов М. Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке // Космические исследования, — 1984. — Т. 22, № 4.
- [18] Математика и кибернетика в экономике. Словарь-справочник. — М.: Экономика, 1975.
- [19] Платонов А. К. Исследование свойств корректирующих маневров в межпланетных полетах // Космические исследования. — 1966. — Т. 4, № 5.

- [20] Смоляк С. А., Титоренко Б. П. Устойчивые методы оценивания. — М.: Статистика, 1980.
- [21] Хьюбер П. Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984.
- [22] Шеховцов А. И. Метод обработки измерений при ограниченной информации о законе распределения их ошибок // В сб.: Определение движения космических аппаратов. — М.: Наука, 1975.
- [23] Эльясберг П. Е., Бахшиян Б. Ц. Определение траектории полета космического аппарата при отсутствии сведений о законе распределения ошибок измерений // Космические исследования. — 1969. — Т. 7, № 1.
- [24] Эльясберг П. Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? как ее обрабатывать? — М.: Наука, 1983.
- [25] Эльясберг П. Е. Априорная гарантированная оценка точности определения орбиты космического аппарата методом наименьших квадратов // Космические исследования. — 1984. — Т. 22, № 5.
- [26] Эльясберг П. Е. Определение движения по результатам измерений. — М.: Наука, 1976.
- [27] Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория, методы, приложения). — М.: Наука, 1939.
- [28] Elfving G. E. Optimum allocation in linear regression theory // Ann. Math. Statist. — 1952. — V. 23, № 2.

Дополнительная литература

- [29] Лидов М. Л. Эффективный алгоритм решения задачи о выборе оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценки нескольких параметров // Космические исследования. — 1985. — Т. 23, № 4.
- [30] Лидов М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения // Космические исследования. — 1986. — Т. 24, № 2.
- [31] Лидов М. Л., Бакума Л. Н. Определение оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценок трех параметров движения суточного спутника // Космические исследования. — 1986. — Т. 24, № 4.
- [32] Лидов М. Л., Ляхова В. А. Численное решение минимаксной задачи оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений // Космические исследования. — 1987. — Т. 25, № 1.
- [33] Лидов М. Л. Игровая задача оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений // Механика и научно-технический прогресс. — М.: Наука, 1987. — Т. 1.
- [34] Лидов М. Л. Алгоритм оценивания параметров движения в задаче с немоделируемыми ускорениями // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 1.
- [35] Лидов М. Л. О длительности сеансов наблюдений при слабом влиянии белого шума // Космические исследования. — 1988. — Т. 26, № 2.
- [36] Лидов М. Л., Бакума Л. Н. Применение алгоритма оптимальной коррекции для решения задач оценивания с немоделируемыми ускорениями // Космические исследования. — 1988. — Т. 26, № 3.
- [37] Лидов М. Л., Жирнов В. А. Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции // Космические исследования. — 1988. — Т. 26, № 4.
- [38] Лидов М. Л. Оценивание параметров движения при действии немоделируемых ускорений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — М.: Наука, 1989. — Т. 186.

[39] Л и д о в М. Л., М а т а с о в А. И. Об одном обобщении задачи о «наихудшей корреляции» // Космические исследования. — 1989. — Т. 27, № 3.

[40] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями // Космические исследования. — 1991. — Т. 29, № 1.

[41] Л и д о в М. Л. О модификации симплекс-метода линейного программирования в случае вырождения // Космические исследования. — 1991. — Т. 29, № 4.

[42] Л и д о в М. Л., Б а х ш и я н Б. Ц., М а т а с о в А. И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания // Космические исследования. — 1991. — Т. 29, № 5.

[43] Л и д о в М. Л. К задаче гарантирующего оценивания // Космические исследования. — 1991. — Т. 29, № 6.

[44] Л и д о в М. Л. Опыт численного решения задач оценивания и стохастического управления в гарантирующей постановке // Известия РАН. Сер. Техническая кибернетика. — 1993. — № 4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава I. Линейное программирование (ЛП)	8
§ 1. Постановка задачи линейного программирования (канонический вариант)	8
§ 2. Симплекс-метод решения задачи ЛП	9
§ 3. Оценки близости решения к оптимальному в процессе итераций	13
§ 4. Задачи, приводимые к каноническому виду. Двойственная задача	15
Глава II. Минимаксное оценивание	22
§ 5. Основные понятия и исходная постановка задачи	22
§ 6. Оценивание методом наименьших квадратов (МНК)	23
§ 7. Задача о наихудшей корреляции	25
§ 8. Некоторые более общие постановки минимаксной проблемы оценивания	27
§ 9. Использование методов линейного программирования для решения минимаксных задач оценивания	29
Глава III. Обобщенная линейная импульсная коррекция	37
§ 10. Физическая постановка задачи о линейной импульсной коррекции параметров траектории	37
§ 11. Общая постановка задачи ОЛИК	40
§ 12. Вариант симплекс-метода для задачи ВОЛИК	44
§ 13. Геометрическая интерпретация для задачи линейного программирования и задачи ОЛИК	48
§ 14. Некоторые обобщения	57
Глава IV. Задача о выборе программы измерений	63
§ 15. Постановка задачи и схема измерений	63
§ 16. Некоторые свойства решения и достаточные условия оптимальности	66
§ 17. Алгоритм решения задачи при оценке одного параметра	70
§ 18. Алгоритм выбора оптимальной программы измерений с ограничениями на дисперсии ошибок оценок двух параметров	72
Комментарии	78
Список литературы	84