ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 72 за 2010 г.

Брюно А.Д., Парусникова А.В.

Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Парусникова А.В. Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 72. 27 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-72

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

ЛОКАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2010 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно, А.В. Парусникова. Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

В данной работе рассматривается пятое уравнение Пенлеве. Методами степенной геометрии ищутся асимптотические разложения его решений при $x \to 0$. Получено 27 семейств разложений решений уравнения. 19 из них получены из разложений решений шестого уравнения Пенлеве. Среди остальных 8 семейств одно было известно раньше, ещё одно может быть получено из разложения решения третьего уравнения Пенлеве. Новыми являются 3 семейства полуэкзотических разложений, 2 семейства сложных разложений и семейство степенно-логарифмических разложений.

A.D. Bruno, A.V. Parusnikova. Local expansions of solutions of the fifth Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2010.

The article is devoted to the study of the fifth Painlevé equation. The aim of the present work is to find all asymptotic expansions of solutions of the equation when $x \to 0$. We do this by means of Power Geometry. 27 families of expansions are obtained. 19 of them are obtained from the corresponding expansions of solutions of the sixth Painleve equation. One of the rest expansions has been already known, one more can be obtained from the expansion of solution of the third Painleve equation. We have obtained the following new expansions: 3 families of halfexotic expansions, 2 families of complicated expansions and one family of power-logarythmic expansions.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: abruno@keldysh.ru, parus-a@mail.ru
сайт: www.keldysh.ru

1 Общие свойства пятого уравнения Пенлеве

1.1 Постановка задачи

Пятое уравнение Пенлеве [11] имеет вид:

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \quad (1.1)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры, x — независимая, y — зависимая комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Уравнение (1.1) имеет две особые точки $x = 0$ и $x = \infty$.

В этой работе при $x \to 0$ мы ищем для решений уравнения (1.1) все разложения вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (1.2)$$

где $c_r, c_s, r, s \in \mathbb{C}$, суммирование идёт по s таким, что $\mathrm{Re}\ s > \mathrm{Re}\ r$, $\mathrm{Re}\ s$ возрастают.

Различаем 3 типа разложений (1.2):

Тип 1. *Степенные разложения*, где c_r и c_s— постоянные.

Тип 2. *Степенно-логарифмические разложения*, где c_r— постоянный коэффициент, c_s— многочлены от $\ln x$.

Тип 3. *Сложные разложения*, где c_r и c_s— степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$,

а также разложения вида

$$y = \sum_r{}' c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \quad (1.3)$$

где $c_r, c_s, r, s \in \mathbb{C}$, в первой сумме содержится более одного слагаемого, суммирование идёт по r таким, что $\mathrm{Re}\ r$ фиксирована, второе суммирование идёт по s таким, что $\mathrm{Re}\ s > \mathrm{Re}\ r$, $\mathrm{Re}\ s$ возрастают.

Различаем 3 типа разложений (1.3):

Тип 4. *Экзотические разложения*: мнимые части r в $\sum'$ ограничены либо сверху, либо снизу, имеется бесконечно много показателей s с фиксированной действительной частью $\mathrm{Re}\ s$, и на комплексной плоскости выпуклая оболочка точек r и s из (1.3) содержится в угле с вершиной в точке r. У этого угла один из граничных лучей параллелен мнимой оси и раствор угла меньше π.

Тип 5. *Полуэкзотические разложения*: мнимые части r в $\sum'$ ограничены и сверху, и снизу, а в $\sum'$ содержится конечное число слагаемых.

Тип 6. *Сверхэкзотические разложения*: мнимые части r в $\sum'$ не ограничены ни сверху, ни снизу.

Представим уравнение (1.1) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $x^2y(y-1)$ и перенесём все члены уравнения в правую часть. Получим уравнение

$$f(x,y) \stackrel{def}{=} -x^2y(y-1)y'' + x^2\left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right)(y')^2 - xy(y-1)y' +$$
$$+(y-1)^3(\alpha y^2+\beta) + \gamma xy^2(y-1) + \delta x^2y^2(y+1) = 0. \qquad (1.4)$$

1.2 Многоугольник $\mathbf{\Gamma(f)}$ при $\alpha\beta\gamma\delta \neq \mathbf{0}$

Согласно [1], для решения нашей задачи при $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ изобразим носитель $\mathbf{S}(f)$ левой части уравнения (1.4), его выпуклую оболочку $\Gamma(f)$, её рёбра $\Gamma_j^{(1)}$ (рис. 1) и нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(1)}$ к рёбрам (рис. 2). Многоугольник $\Gamma(f)$ является равнобедренной трапецией. Она симметрична относительно прямой $q_2 = 5/2$.

1.3 Симметрия

Теорема 1. *Уравнение* (1.1) *инвариантно относительно замены*

$$(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (\tilde{x}, \frac{1}{\tilde{y}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}). \qquad (1.5)$$

1.4 Подстановка $y = 1 + z$

Сделав в уравнении (1.4) замену $y = 1+z$, получим уравнение:

$$g(x,z) \stackrel{def}{=} -x^2zz'' - x^2z^2z'' + \frac{3}{2}x^2z(z')^2 + x^2(z')^2 - xzz' - xz^2z' +$$
$$+\alpha z^3(z+1)^2 + \beta z^3 + \gamma xz(z+1)^2 + 2\delta x^2(z+1)^2 + \delta x^2z(z+1)^2 = 0. \quad (1.6)$$

2 Случай $\alpha \neq 0$

2.1 Многоугольник преобразованного уравнения при $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta \neq \mathbf{0}$

Изобразим носитель $\tilde{\mathbf{S}}(g)$ левой части уравнения (1.6), его выпуклую оболочку $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(g)$, её вершины $G_j^{(0)}$, рёбра $G_j^{(1)}$ (рис. 3) и нормальные конусы $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$, $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(1)}$ к вершинам и рёбрам соответственно (рис. 4). Многоугольник $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(g)$ является параллелограммом.

Внешние нормали $\tilde{N}_j$ к рёбрам $G_j^{(1)}$ — это

$\tilde{N}_1 = (1,0)$, $\tilde{N}_2 = (1,1)$, $\tilde{N}_3 = (-1,0)$, $\tilde{N}_4 = (-1,-1)$.

Нормальные конусы $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{U}}_j^{(0)}$ рёбер $G_j^{(1)}$ и вершин $G_j^{(0)}$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 > 0, p_2 = 0\} = \{\lambda \tilde{N}_1, \lambda > 0\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_2^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 > 0, p_1 = p_2\} = \{\lambda \tilde{N}_2, \lambda > 0\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_3^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 < 0, p_2 = 0\} = \{\lambda \tilde{N}_3, \lambda > 0\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 < 0, p_2 = p_1\} = \{\lambda \tilde{N}_1, \lambda > 0\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{U}}_1^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 > 0, 0 < p_2 < p_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_2 > 0, p_2 < p_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_1 < 0, p_1 < p_2 < 0\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)} = \{P = (p_1, p_2) \mid p_2 < 0, p_1 < p_2\}.
\end{gathered}$$

Поскольку мы рассматриваем случай $x \to 0$, то получаем конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0\}$, а значит, нас интересуют только вершины $G_1^{(0)}, G_4^{(0)}$ и рёбра $G_3^{(1)}, G_4^{(1)}$.

2.2 Разложения решений, соответствующие вершине $G_1^{(0)}$

Вершине $G_1^{(0)}$ с координатами $(2, 0)$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение $2\delta x^2 = 0$, согласно замечанию 1.1 из [1], оно не даёт решений.

2.3 Разложения решений, соответствующие вершине $G_4^{(0)}$

Вершине $G_4^{(0)}$ с координатами $(0, 2)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_4^{(0)}(x, y) \stackrel{def}{=} -x^2 z z'' + x^2 (z')^2 - x z z' = 0. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *После деления на* 2 *и замены* $y = z$ *уравнение* (2.2.1) *из* [4], *которое имеет вид*

$$-2x^2 y^2 y'' + 2x^2 y (y')^2 - 2x y^2 y' = 0,$$

перейдёт в уравнение (2.1).

Таким образом, мы можем получить первый член и узнать характер разложения, соответствующего вершине $G_4^{(0)}$.

Из теоремы 2.1 этой работы и теоремы 2.2.1 [4] следует

Теорема 2.2. *Вершине* $G_4^{(0)}$ *соответствует двухпараметрическое по* c_r *и* r *семейство степенных разложений решений исходного уравнения* (1.4) *при* $x \to 0$

$$\mathcal{A}_0: \; y = 1 + c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{2.2}$$

где $\operatorname{Re} r \in (0,1)$, $s \in \{r + lr + m(1-r),\; l, m \in \mathbb{Z},\; l, m \geq 0,\; l + m > 0\}$, *произвольная постоянная* $c_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, c_s *— однозначно определённые константы.*

2.4 Разложения решений, соответствующие ребру $G_4^{(1)}$, при $\gamma\delta \neq 0$

Рассмотрим ребро $G_4^{(1)}$ многоугольника $\tilde{\Gamma}(f)$ (рис. 3). Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_4^{(1)}(x, z) \stackrel{def}{=} -x^2 z z'' + x^2 (z')^2 - x z z' + \gamma x z + 2\delta x^2 = 0 \tag{2.3}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \{\lambda(-1,-1), \lambda > 0\}$. Следовательно, ищем решение в виде $z = c_1 x$.

Подставив $z = c_1 x$ в укороченное уравнение (2.3), получаем

$$2\delta x^2 + \gamma c_1 x^2 = 0,$$

откуда $c_1 = -\dfrac{2\delta}{\gamma}$, $z = -\dfrac{2\delta}{\gamma} x$.

Посчитаем первую вариацию от $\hat{g}_4^{(1)}$:

$$\frac{\delta \hat{g}_4^{(1)}(x, z)}{\delta z} = -x^2 z \frac{d^2}{dx^2} - x^2 z'' + 2x^2 z' \frac{d}{dx} - x z \frac{d}{dx} - x z' + \gamma x. \tag{2.4}$$

Вычислим оператор $\mathcal{L}(x)$ — значение первой вариации (2.4) при $z = c_1 x$:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2\delta}{\gamma} x^3 \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2\delta}{\gamma} x^2 \frac{d}{dx} + \frac{2\delta}{\gamma} x + \gamma x.$$

Применим оператор $\mathcal{L}(x)$ к x^k, получим:

$$\mathcal{L}(x) x^k = \frac{2\delta}{\gamma} \left(k(k-1) - k + 1 + \frac{\gamma^2}{2\delta} \right) x^{k+1}.$$

Следовательно, характеристический многочлен $\nu(k) = (k-1)^2 + \dfrac{\gamma^2}{2\delta}$ (его корни $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-\dfrac{\gamma^2}{2\delta}}$). Конус задачи $\mathcal{K} = \{k : \operatorname{Re} k \geq 1,\; k \neq 1\}$.

Если $\operatorname{Re} k_{1,2} = 1$, имеем два критических числа. Этот сучай будет разобран в пункте 2.7.

При $\operatorname{Re} k_{1,2} \neq 1$ введём обозначение $a = \left(\operatorname{sgn} \operatorname{Re}\sqrt{-\dfrac{\gamma^2}{2\delta}}\right)\sqrt{-\dfrac{\gamma^2}{2\delta}}$, получим одно критическое число $k = 1 + a$. Имеем следующие 2 случая:

1 случай.

Если $a \notin \mathbb{N}$, то получаем семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_1: \ y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s x^s, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{K} = \{s : s = l + m + ma, \ l, m \in \mathbb{Z}, \ l, m \geq 0, \ l + m > 0\}$, c_{a+1} — произвольная константа, остальные коэффициенты c_s — однозначно определены.

При $a \in \mathbb{Q}$ разложение (2.5) сходится по теореме 1.7.2 [4].

2 случай.

Если $a \in \mathbb{N}$, то получаем семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{H}_2: \ y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \tag{2.6}$$

где $c_s, 1 \leq s \leq a$ постоянные, $c_s, s \geq a + 2$— многочлены от $\ln x$ с однозначно определёнными коэффициентами, c_{a+1} — многочлен от логарифма, который содержит одну произвольную постоянную.

Например, если $a = 1$, то

$$y = 1 - \frac{2\delta}{\gamma}x + \left(\mathcal{C} + \frac{(\alpha+\beta)\gamma^2}{2}\ln x\right)x^2 + \sum_{s=3}^{\infty} c_s x^s,$$

где c_s — многочлены от $\ln x$ с однозначно определёнными коэффициентами, $\mathcal{C}$ — произвольная постоянная.

Семейства разложений (2.5), (2.6) однопараметрические.

2.5 Нахождение нестепенных асимптотик, соответствующих ребру $G_4^{(1)}$

Поскольку $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \{\lambda(-1,-1), \lambda > 0\}$, делаем преобразование

$$z = xu, \tag{2.7}$$

тогда $z' = u + xu', z'' = 2u' + xu''$. Подставим (2.7) в уравнение (2.3):

$$\hat{g}_4^{(1)}(x, u) = x^2(2\delta - x^2uu'' + x^2(u')^2 - xuu' + \gamma u) = 0. \tag{2.8}$$

Сделаем в (2.8) логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln x, \tag{2.9}$$

тогда $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\dot u}{x}$, $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{\ddot u - \dot u}{x^2}$ (здесь и далее точка обозначает дифференцирование по переменной ξ). Сократив на $e^{2\xi} \neq 0$, получим:

$$\hat\varphi_4^{(1)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} 2\delta - u\ddot u + (\dot u)^2 + \gamma u = 0. \tag{2.10}$$

На рис. 5 изображён носитель уравнения (2.10), его выпуклая оболочка, её вершины $\Upsilon_j^{(0)}$, рёбра $\Upsilon_j^{(1)}$.

Т.к. $\xi = \ln x,\ x \to 0$, то $\xi \to \infty$, значит, конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}$ и нас интересуют только вершины $\Upsilon_1^{(0)}, \Upsilon_2^{(0)}$ и рёбра $\Upsilon_1^{(1)}, \Upsilon_2^{(1)}$. Укороченные уравнения $\hat s_1^{(0)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} 2\delta = 0$, $\hat s_2^{(0)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} \gamma u = 0$, соответствующие вершинам $\Upsilon_1^{(0)}, \Upsilon_2^{(0)}$ многоугольника, являются алгебраическими, следовательно, согласно замечанию 1.1 [1], разложений не дают.

Ребру $\Upsilon_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat s_1^{(1)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} 2\delta + \gamma u = 0$, оно даёт ранее уже учтённое решение $u = -2\delta/\gamma$.

Рассмотрим ребро $\Upsilon_2^{(1)}$. Ему соответствуют укороченное уравнение

$$\hat s_2^{(1)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} -u\ddot u + (\dot u)^2 + \gamma u = 0, \tag{2.11}$$

$r = 2$, значит, ищем решение в виде $u = c\xi^2$. Получаем, что $c = -\gamma/2$, $u = -\gamma\xi^2/2$, конус задачи $\mathcal{K} = \{k:\ k < 2\}$.

Посчитаем первую вариацию от (2.11):

$$\frac{\delta \hat s_2^{(1)}(\xi, u)}{\delta u} = -\ddot u - u\frac{d^2}{d\xi^2} + \gamma + 2\dot u\frac{d}{d\xi}. \tag{2.12}$$

Вычислим оператор $\mathcal{L}(\xi)$ — значение первой вариации (2.12) при $u = -\gamma\xi^2/2$:

$$\mathcal{L}(\xi) = \gamma\left(2 + \frac{\xi^2}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d}{d\xi}\right).$$

Характеристический многочлен этого оператора $\nu(k) = k^2 - 5k + 4$ (его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 4$). k_1 является критическим числом, k_2 не попадает в конус задачи, следовательно, критическим числом не является.

Поскольку базисом носителя уравнения будут векторы $M_1 = (2, 0)$ и $M_2 = (0, 1)$, а критическое число k нечётно, то согласно [1], разложение идёт по целым степеням ξ. Получаем семейство разложений по степеням ξ:

$$\mathcal{H}_3 : y = 1 + e^{\xi}\left(-\frac{\gamma}{2}\xi^2 + \mathcal{C}\xi + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s}{\xi^s}\right),$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы, $\mathcal{C}$— произвольная комплексная постоянная.

Перейдя к переменной x, семейство запишем как

$$\mathcal{H}_3 : y = 1 + x\left(-\frac{\gamma}{2}\ln^2 x + \mathcal{C}\ln x + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s}{\ln^s x}\right).$$

Если $\mathcal{C} = 0$, то разложение идёт по чётным степеням $\ln x$.

2.6 Нахождение сложных решений, соответствующих нестепенным асимптотикам

Найдём дальнейшее разложение. Посчитаем первую вариацию от (2.3):

$$\frac{\delta \hat{h}_4^{(1)}}{\delta z} = -x^2 z'' - x^2 z\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2 z'\frac{d}{dx} - xz\frac{d}{dx} - xz' + \gamma x.$$

Сделав преобразование (2.7) и логарифмическое преобразование (2.9), получим оператор

$$\tilde{N}(\xi, u) = e^{\xi}\left(-u\frac{d^2}{d\xi^2} + (2u + 2\dot{u})\frac{d}{d\xi} - \ddot{u} - 2\dot{u} - u + \gamma\right). \tag{2.13}$$

Подставим в оператор (2.13) решение $u = -\gamma\xi^2/2$, оставим лишь те слагаемые (2.13), которые при подстановке будут давать максимальную (вторую) степень по ξ. Характеристический многочлен будет равен $\nu(k) = (k-1)^2$, он имеет один корень $k = 1$ кратности 2, который не лежит в конусе задачи $\mathcal{K} = \{k : \ k > 1\}$, поэтому критических чисел у укороченного решения нет. Согласно [1], получаем семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3 : \ y = 1 + \left(-\frac{\gamma}{2}\ln^2 x + \mathcal{C}\ln x + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{c_s}{\ln^s x}\right)x + \sum_{p=2}^{\infty}\varphi_p x^p, \tag{2.14}$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы, $\mathcal{C}$— произвольная комплексная постоянная, φ_p — ряды по убывающим степеням $\ln x$ с однозначно опеределёнными комплексными коэффициентами.

2.7 Полуэкзотические разложения

Если в уравнении (2.8) сделаем замену $v = x^i$, то есть

$$\frac{du}{dx} = i\frac{du}{dv}\frac{v}{x}, \ \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(-v^2\frac{d^2u}{dv^2} + i(i-1)v\frac{du}{dv}\right),$$

получим уравнение

$$2\delta + v^2 u\frac{d^2u}{dv^2} + v\frac{du}{dv} - v^2\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \gamma u = 0. \tag{2.15}$$

Носитель уравнения (2.15) — это вертикальный отрезок. Рассмотрим его верхний конец — вершину $\tilde{G}_1^{(0)}$, ей соответствует укороченное уравнение

$$v^2 u\frac{d^2u}{dv^2} + v\frac{du}{dv} - v^2\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 0,$$

которому удовлетворяет двухпараметрическое семейство решений $v = c_r v^r$, произвольные постоянные $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c_r \in \mathbb{C}$. Найдём дальнейшие члены разложения. В уравнении (2.15) сделаем замену $u = c_r x^r + w$, после которой уравнение перейдёт в

$$2\delta + c_r v^{r+2}\frac{d^2w}{dv^2} + c_r r^2 v^r w + v^2 w\frac{d^2w}{dv^2} + c_r v^{r+1}\frac{dw}{dv} + vw\frac{dw}{dv} - 2c_r r v^{r+1}\frac{dw}{dv} -$$

$$-v^2\left(\frac{dw}{dv}\right)^2 + \gamma c_r v^r + \gamma w = 0. \tag{2.16}$$

Выпуклая оболочка носителя уравнения (2.16) изображена на рис. 7 (на рисунке $r > 0$). Рёбра многоугольника $\Phi_j^{(1)}$, вершины $\Phi_j^{(0)}$. Вершине $\Phi_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$c_r v^{r+2}\frac{d^2w}{dv^2} + c_r r^2 v^r w + c_r v^{r+1}\frac{dw}{dv} - 2c_r r v^{r+1}\frac{dw}{dv} = 0,$$

которому удовлетворяет семейство решений $w = c_r v^r$, учтённое раньше. Вершине $\Phi_2^{(0)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение, которое не даёт решений. Ребро $\Phi_1^{(1)}$ имеет внешнюю нормаль $(1, r)$, следовательно, также не подходит, т.к. даст решение вида $w = \tilde{c}v^r$.

Рассмотрим ребро $\Phi_2^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$c_r v^{r+2}\frac{d^2w}{dv^2} + c_r r^2 v^r w + c_r v^{r+1}\frac{dw}{dv} - 2c_r v^{r+1} r + \gamma c_r v^r = 0,$$

его решение $w = -\gamma/r^2$, следующий член разложения — это $\dfrac{\gamma^2 - 2\delta r^2}{4c_r r^4}v^{-r}$, причём полученное разложение обращает уравнение (2.15) в тождество. Итак, ребру $G_4^{(1)}$ соответствует двухпараметрическое семейство полуэкзотических разложений

$$\mathcal{H}_4:\ y = 1 + \left(c_r x^{ir} - \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\gamma^2 - 2\delta r^2}{4c_r r^4}x^{-ir}\right)x + \sum_{\mathrm{Re}\ s>1} c_s x^s,\ r \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ c_r \in \mathbb{C}. \tag{2.17}$$

Найдём полуэкзотические разложения, у которых первые члены разложения равны $1-\dfrac{2\delta}{\gamma}x$, т.е. продолжим вычисления, начатые в пункте 2.4 (исследуем случай $\gamma^2/(2\delta)\in\mathbb{R}$).

В уравнении (2.15) сделаем замену $u=-\dfrac{2\delta}{\gamma}+t$, получим уравнение

$$-\frac{2\delta}{\gamma}v^2t''+v^2tt'-\frac{2\delta}{\gamma}t'+vtt'-v^2(t')^2+\gamma t=0. \qquad (2.18)$$

Носитель уравнения (2.18) — это вертикальный отрезок. Рассмотрим его нижний конец — вершину $\tilde{G}_2^{(1)}$ с координатами $(0,1)$. Ей соответствует укороченное уравнение

$$-\frac{2\delta}{\gamma}v^2t''-\frac{2\delta}{\gamma}t'+\gamma t=0,$$

которому при $\gamma^2/(2\delta)\in\mathbb{R}$ удовлетворяют два однопараметрических семейства решений $t_{1,2}=Cv^{\pm\frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}}}$. Полученные разложения обращают уравнение (2.18) в тождество. Итак, ребру $G_4^{(1)}$ соответствуют два однопараметрических семейства полуэкзотических разложения исходного уравнения

$$\mathcal{H}_1^\tau:\ y=1+\left(-\frac{2\delta}{\gamma}+Cx^{i\tau\frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}}}\right)x+\sum_{\mathrm{Re}\ s>1}c_sx^s,\ c_r\in\mathbb{C},\ \gamma^2/(2\delta)\in\mathbb{R}. \quad (2.19)$$

2.8 Сводка разложений

Теорема 2.3. *В случае* $\gamma\ \delta\neq 0$ *при* $x\to 0$ *получаем семейство степенных разложений* $\mathcal{H}_1$ (2.5), *семейство степенно-логарифмических разложений* $\mathcal{H}_2$ (2.6), *семейство сложных разложений* $\mathcal{H}_3$ (2.14), *три семейства полуэкзотических разложений* $\mathcal{H}_1^\tau$ (2.19), $\mathcal{H}_4$ (2.17). *Семейства* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1^\tau$, $\mathcal{H}_2$ *и* $\mathcal{H}_3$ *— однопараметрические, а семейство* $\mathcal{H}_4$ *двухпараметрическое (по* c_r *и* r*).*

2.9 Нахождение точных решений, соответствующих ребру $G_1^{(1)}$

Укороченное уравнение (2.3), соответствующее ребру $G_4^{(1)}$, можно решить явно.

Сделаем замену (2.7), сократим на x^2, сделаем логарифмическую замену (2.9), получим уравнение (2.10) (все эти преобразования мы уже проделывали раньше):

$$2\delta-u\ddot{u}+(\dot{u})^2+\gamma u=0,$$

сделаем замену $\dot u = p$, тогда $\ddot u = p\dfrac{dp}{du}$, получим

$$2\delta - up\frac{dp}{du} + p^2 + \gamma u = 0,$$

положим $p^2 = q$, тогда $2pp' = q'$, получим:

$$2\delta - \frac{u}{2}\frac{dq}{du} + q + \gamma u = 0. \tag{2.20}$$

Решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.20), будет $q = cu^2$, решение уравнения (2.20) найдём методом вариации постоянных (подставим $q = c(u)u^2$), получим, что $q = \left(C - \dfrac{2\gamma}{u} - \dfrac{2\delta}{u^2}\right)u^2$, возвращаясь к переменной u, получаем, что $\dot u = \pm\sqrt{Cu^2 - 2\gamma u - 2\delta}$, то есть задача сведена к решению такого уравнения:

$$\frac{du}{\pm\sqrt{Cu^2 - 2\gamma u - 2\delta}} = d\xi. \tag{2.21}$$

Рассмотрим следующие 3 случая:

1 случай.

$C = 0$, тогда, проинтегрировав (2.21), получаем

$$\mp\frac{1}{\gamma}\sqrt{-2\gamma u - 2\delta} = \xi + C_1,$$

откуда $u = -\dfrac{\delta}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{2}(\xi + C_1)^2$,

$$z = -\frac{\delta}{\gamma}x - \frac{\gamma}{2}(\ln x + C_1)^2 x,$$

то есть при $C \neq 0$ получаем явный вид начальных членов сложного разложения $\mathcal{H}_3$, см. формулу (2.14), при $C = 0$ получаем явный вид начальных членов степенного разложения $\mathcal{H}_1$, см. (2.5).

2 случай.

Дискриминант квадратного трёхчлена, стоящего под знаком корня, равен нулю, то есть $C = -\dfrac{\gamma^2}{2\delta}$, тогда, проинтегрировав (2.21), получаем $\pm i\dfrac{\sqrt{2\delta}}{\gamma}\ln(u + \dfrac{2\delta}{\gamma}) = \xi + C_2$, откуда $u = -\dfrac{2\delta}{\gamma} + Cx^{\left(\pm i\frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}}(\xi + C_2)\right)}$, то есть

$$z = -\frac{2\delta}{\gamma}x + Cx^{\left(1 \pm i\frac{\gamma}{\sqrt{2\delta}}\right)},$$

то есть получаем явный вид начальных членов полуэкзотических разложений $\mathcal{H}_1^\tau$, см. (2.19).

3 случай.

Рассмотрим случай, когда $C \neq 0$ и дискриминант не равен нулю. Перепишем уравнение (2.21) в виде

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{2\gamma}{C}u - \frac{2\delta}{C}}} = \pm\sqrt{C}d\xi. \tag{2.22}$$

Поскольку $\delta \neq 0$ по условию, $C \neq 0$ и дискриминант не равен нулю, то у квадратного трёхчлена, стоящего под корнем, будет 2 различных ненулевых корня. Обозначим их a и b. Сделаем замену $t^2 = \dfrac{u-a}{u-b}$ (подстановку Эйлера), тогда $u = b + \dfrac{b-a}{t^2-1}$, получим, переходя к переменной t, что

$$\frac{-2dt}{t^2-1} = \pm\sqrt{C}d\xi.$$

Проинтегрировав, имеем, что

$$\ln\frac{t+1}{t-1} = \pm(\xi + C_3)\sqrt{C},$$

обозначим $\varkappa_j = \exp\left((-1)^j(\xi + C_3)\sqrt{C}\right)$, $j = 1, 2$, тогда $t = \dfrac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$, то есть $u_j = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{4}(\varkappa_j + \varkappa_j^{-1})$, т.к. $\varkappa_1 = \varkappa_2^{-1}$, получаем, что $u_1 = u_2 = u$, итак,

$$u = \frac{\gamma}{C} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\gamma}{C}\right)^2 + \frac{2\delta}{C}}(x^{\sqrt{C}}e^{C_3\sqrt{C}} + x^{-\sqrt{C}}e^{-C_3\sqrt{C}}). \tag{2.23}$$

Следовательно,

$$z = \frac{\gamma}{C}x + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\gamma}{C}\right)^2 + \frac{2\delta}{C}}(x^{\sqrt{C}}C_4 + x^{-\sqrt{C}}C_4^{-1})x, \ C_4 \neq 0.$$

При $C < 0$ получаем явный вид начальных членов полуэкзотического разложения $\mathcal{H}_4$ (2.17). В формуле (2.17) $r^2 = -C$.

3 Случай $\gamma \neq 0, \delta = 0$

В случае $\delta = 0$ выпуклая оболочка носителя уравнения (1.6) изображена на рис. 7. Мы ищем разложения решений при $x \to 0$, значит, нас интересуют лишь разложения, соотвествующие вершинам $G_1^{(0)}, G_4^{(0)}$ и рёбрам $G_3^{(1)}, G_4^{(1)}$ многоугольника. Первый член и характер разложений, соответствующих вершинам $G_1^{(0)}, G_4^{(0)}$ и рёбру $G_3^{(1)}$, не изменится по сравнению со случаем $\gamma\delta \neq 0$.

Теперь мы будем искать разложения, соответствующие ребру $G_4^{(1)}$.

3.1 Разложения решений, соответствующие ребру $G_4^{(1)}$

Ребру $G_4^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_4^{(1)}(x,z) \stackrel{def}{=} -x^2zz'' + x^2(z')^2 - xzz' + \gamma xz = 0 \tag{3.1}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} = \{\lambda(-1,-1), \lambda > 0\}$. Т.к. $x \to 0$, $r = 1$. Поэтому ищем решение в виде $z = c_1x$. Подставив$r = 1$, $z = c_1x$ в укороченное уравнение (2.3), получаем $\gamma c_1 x = 0$, откуда $c_1 = 0$, $z = 0$. Второе приближение, посчитанное на решении, будет равно нулю, поэтому степенных разложений, соответствующих ребру $G_4^{(1)}$ не будет.

3.2 Нахождение нестепенных асимптотик

В уравнении (3.1) сделаем замену (2.7) и сократим на x^2, затем сделаем логарифмическую замену (2.9), получим уравнение (2.10) при $\delta = 0$:

$$\hat{g}_4^{(1)}(\xi,u) \stackrel{def}{=} -u\ddot{u} + (\dot{u})^2 + \gamma u = 0. \tag{3.2}$$

Изобразим носитель уравнения (3.2), его выпуклую оболочку (отрезок), её вершины $\Upsilon_2^{(0)}$, $\Upsilon_3^{(0)}$, рёбро $\Upsilon_2^{(1)}$ на рис. 8.

Нас интересуют только $\xi \to \infty$, т.к. $\xi = \ln x$, $x \to \infty$. Укороченное уравнение $\hat{s}_2^{(0)}(\xi,u) \stackrel{def}{=} \gamma u = 0$, соответствующее вершине $\Upsilon_2^{(0)}$ многоугольника, является алгебраическим, следовательно, согласно замечанию 1.1 из [1], разложений не даёт.

Вершине $\Upsilon_3^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{s}_3^{(0)}(\xi,u) \stackrel{def}{=} -u\ddot{u} + (\dot{u})^2 = 0,$$

ищем его решение в виде $u = c_r\xi^r$, получаем, что $r = 0$, такие решения уже учтены.

Рассмотрим ребро $\Upsilon_2^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение (2.11), дальнейшие вычисления идентичны проделанным с уравнением (2.11) в случае $\gamma\delta \neq 0$. Поэтому получаем, что ребру $G_4^{(1)}$ в случае $\gamma \neq 0, \delta = 0$ также соответствует семейство сложных разложений (2.5) при подстановке $\delta = 0$.

3.3 Сводка разложений

Теорема 3.1. *В случае $\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ при $x \to 0$ получаем семейство сложных разложений $\mathcal{H}_3$* (2.14), *и семейство полуэкзотических разложений $\mathcal{H}_4$* (2.17) (*в эти формулы надо подставить $\delta = 0$*). *Семейство $\mathcal{H}_3$ — однопараметрическое, а семейство $\mathcal{H}_4$ двухпараметрическое (по c_r и r).*

По сравнению со случаем $\gamma\delta \neq 0$ пропадут семейства степенных, степенно-логарифмических и два семейства полуэкзотических разложений.

4 Случай $\gamma = 0, \delta \neq 0$

В случае $\gamma = 0$ выпуклая оболочка носителя уравнения (1.6) изображена на рис. 9. Мы ищем разложения решений при $x \to 0$, значит, нас интересуют лишь разложения, соотвествующие вершинам $G_1^{(0)}, G_4^{(0)}$ и рёбрам $G_3^{(1)}, G_4^{(1)}$ многоугольника. Первый член и характер разложений, соответствующих вершинам $G_1^{(0)}, G_4^{(0)}$ и рёбру $G_3^{(1)}$ не изменится по сравнению со случаем $\gamma\delta \neq 0$.

Теперь мы будем искать разложения, соответствующие ребру $G_4^{(1)}$.

4.1 Разложения решений, соответствующие ребру $G_4^{(1)}$

Ребру $G_4^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_4^{(1)}(x, z) \stackrel{def}{=} -x^2 z z'' + x^2 (z')^2 - x z z' + 2\delta x^2 = 0 \tag{4.1}$$

и нормальный конус $\tilde{U} = \{\lambda(-1, -1), \lambda > 0\}$. Т.к. $x \to 0$, $r = 1$. Поэтому ищем решение в виде $z = c_1 x$. Подставив $z = c_1 x$ в укороченное уравнение (2.3), получаем $\delta x^2 = 0$. У уравнения решений нет, поэтому степенных разложений, соответствующих ребру $G_4^{(1)}$ не будет.

4.2 Нахождение нестепенных асимптотик

В уравнении (4.1) сделаем замену (2.7), сократим на x^2, затем сделаем логарифмическую замену (2.9) и получим уравнение (2.10) при $\gamma = 0$:

$$\hat{g}_4^{(1)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} -u\ddot{u} + (\dot{u})^2 + 2\delta = 0. \tag{4.2}$$

На рис. 10 изобразим носитель уравнения (4.2), его выпуклую оболочку (отрезок), его вершины $\Upsilon_1^{(0)}$, $\Upsilon_2^{(0)}$, ребро $\Upsilon_3^{(1)}$.

Нас интересуют только $\xi \to \infty$, т.к. $\xi = \ln x$, $x \to \infty$. Укороченное уравнение $\hat{s}_1^{(0)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} 2\delta = 0$, соответствующее вершине $\Upsilon_1^{(0)}$ многоугольника, является алгебраическим, следовательно, согласно замечанию 1.1 из [1], разложений не даёт.

Вершине $\Upsilon_3^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{s}_3^{(0)}(\xi, u) \stackrel{def}{=} -u\ddot{u} + (\dot{u})^2 = 0,$$

ищем его решение в виде $u = c_r \xi^r$, получаем, что $r = 0$, такое решение мы уже учли.

Рассмотрим ребро $\Upsilon_3^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{s}_1^{(1)}(\xi,u) \stackrel{def}{=} -u\ddot{u} + (\dot{u})^2 + 2\delta = 0, \tag{4.3}$$

$\omega = 1, r = 1$, ищем решение в виде $u = c\xi$. Получаем, что $c = \pm\sqrt{-2\delta}$, $u = \pm\sqrt{-2\delta}\xi$. Конус задачи $\mathcal{K} = \{k : k < 1\}$

Посчитаем первую вариацию от (4.3):

$$\frac{\delta \hat{s}_1^{(1)}(\xi,u)}{\delta u} = -\ddot{u} - u\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{u}\frac{d}{d\xi}. \tag{4.4}$$

Вычислим оператор $\mathcal{L}(\xi)$ — значение первой вариации (4.4) при $u = c\xi$:

$$\mathcal{L}(\xi) = c\left(-\xi\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi\frac{d}{d\xi}\right).$$

Его характеристический многочлен $\nu(k) = -k^2 + 3k$ (корни $k_1 = 0$, $k_2 = 3$). k_1 является критическим числом, k_2 не попадает в конус задачи, следовательно, критическим числом не является.

Поскольку базисом носителя уравнения будут векторы $M_1 = (2,0)$ и $M_2 = (0,1)$, согласно [1], разложение идёт по целым степеням ξ, получаем семейство разложений:

$$\mathcal{H}_j^{(1)} : y = 1 + e^{\xi}\left((-1)^j\sqrt{-2\delta}\xi + \mathcal{C} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s}{\xi^s}\right), \ j = 5,6,$$

переходя к переменной x:

$$\mathcal{H}_j^{(1)} : \ y = 1 + x\left((-1)^j\sqrt{-2\delta}\ln x + \mathcal{C} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s}{\ln^s x}\right), \ j = 5,6 \tag{4.5}$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы, $\mathcal{C}$— произвольная комплексная постоянная .

4.3 Нахождение сложных решений, соответствующих нестепенным асимптотикам.

Найдём дальнейшее разложение. Посчитаем первую вариацию от (4.1):

$$\frac{\delta \hat{h}_4^{(1)}}{\delta z} = -x^2 z'' - x^2 z\frac{d^2}{dx^2} + 2x^2 z'\frac{d}{dx} - xz\frac{d}{dx} - xz' + \gamma x.$$

Сделав преобразование (2.7) и логарифмическое преобразование (2.9), получим оператор

$$\tilde{N}(\xi,u) = e^{\xi}\left(-u\frac{d^2}{d\xi^2} + (2u + 2\dot{u})\frac{d}{d\xi} - \ddot{u} - 2\dot{u} - u\right). \tag{4.6}$$

Подставив в оператор (4.6) решение $u = c\xi$, оставим лишь те слагаемые (4.6), которые при подстановке будут давать максимальную степень по ξ. Характеристический многочлен будет равен $\nu(k) = (k-1)^2$, он имеет один корень $k = 1$ кратности 2, который не лежит в конусе задачи $\mathcal{K} = \{k : k > 1\}$, поэтому критических чисел у укороченного решения нет. Таким образом получаем следующее семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_j^{(1)}: \ y = 1 + \left((-1)^j\sqrt{-2\delta}\ln x + \mathcal{C} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s}{\ln^s x}\right)x + \sum_{p=2}^{\infty}\varphi_p x^p, \ j = 5, 6, \tag{4.7}$$

где c_s — однозначно определённые комплексные константы, $\mathcal{C}$— произвольная комплексная постоянная, φ_p — ряды по $\ln x$ с однозначно опеределёнными комплексными коэффициентами.

4.4 Сводка разложений

Теорема 4.1. *В случае $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ при $x \to 0$ получаем два семейства сложных разложений $\mathcal{H}_{5,6}$* (4.7), *и семейство полуэкзотических разложений $\mathcal{H}_4$* (2.17) (в эти формулы надо подставить $\delta = 0$). *Семейства $\mathcal{H}_{5,6}$ — однопараметрические, а семейство $\mathcal{H}_4$ двухпараметрическое (по c_r и r).*

По сравнению со случаем $\gamma\,\delta \neq 0$ пропадут семейства степенных, степенно-логарифмических и два семейства полуэкзотических разложений.

4.5 Нахождение точных решений, соответствующих ребру $G_1^{(1)}$

Явно решим уравнение (2.3) в случае $\gamma = 0$. Его решение сводим к решению уравнения (2.21) при $\gamma = 0$:

$$\frac{du}{\pm\sqrt{Cu^2 - 2\delta}} = d\xi. \tag{4.8}$$

Рассмотрим следующие 2 случая:

1 случай. $C = 0$. Проинтегрировав (4.8), имеем $u = \pm\sqrt{-2\delta}\xi + C$, $z = x\left(\pm\sqrt{-2\delta}\ln x + C\right)$, получаем явный вид первых членов сложных разложений $\mathcal{H}_{5,6}$ (4.7).

2 случай. $C \neq 0$. Проинтегрировав (4.8), получаем (2.23) при $\gamma = 0$. Таким образом, $z = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2\delta}{C}}(x^{\sqrt{C}}C_4 + x^{-\sqrt{C}}C_4^{-1})x$, $C_4 \neq 0$. При $C < 0$ получаем явный вид начальных членов полуэкзотического разложения $\mathcal{H}_4$ (2.17). В формуле (2.17) $r^2 = -C$.

5 Разложения решений, соответствующие ребру $G_3^{(1)}$

Рассмотрим ребро $G_3^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_3^{(1)}(x,y) \overset{def}{=} -x^2zz'' - x^2z^2z'' + \frac{3}{2}x^2z(z')^2 + x^2(z')^2 - xzz' - xz^2z' +$$

$$+\alpha z^3(z+1)^2 + \beta z^3 = 0. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1: *После деления на* $2y$ *и замены* $(y,a,c) = (-z,-\alpha,\beta)$ *уравнение* (2.3.1) *из* [4], *которое имеет вид*

$$2x^2y(y')^2 - 3x^2y^2(y')^2 - 2xy^2y' + 2xy^3y' - 2x^2y^2y'' +$$

$$+2x^2y^3y'' - 2ay^4 + 2cy^4 + 4ay^5 - 2ay^6 = 0,$$

перейдёт в уравнение (5.1).

Таким образом, мы можем получить первый член и узнать характер разложения, соответствующего ребру $G_3^{(1)}$.

Из теоремы 5.1 этой работы и теоремы 2.3.1 [4] следует

Теорема 5.2 *Ребру* $G_3^{(1)}$ *соответствуют следующие семейства разложений решений исходного уравнения (1.4):*

При $x \to 0, \alpha \neq 0$ *существуют два двухпараметрических семейства экзотических разложений , определённые формулой*

$$\mathcal{B}_0^\tau: \quad y = 1 - \frac{\rho^2}{a\sin^2[\ln(Cx)^{i\rho/2}] + b\cos^2[\ln(Cx)^{i\rho/2}]} + \sum_{\mathrm{Re}\ s\geq 0} c_s x^s =$$

$$= 1 - x^\rho\left(c_\rho + \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{c}_k x^{k\rho}\right) + \sum_{\mathrm{Re}\ s\geq 0} c_s x^s, \tag{5.2}$$

где $\rho \neq 0$ *— произвольная чисто мнимая постоянная,* $s \in \{\rho + l\rho + m(1-\rho),\ l,\ m \geq 0,\ l+m > 0,\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im})$, a *и* b *— это корни квадратного уравнения* $2\alpha t^2 - (\rho^2 - 2\alpha - 2\beta) + \rho^2 = 0$, c_ρ *и* C *— ненулевые произвольные комплексные постоянные, связанные между собой,* $\tilde{c}_k$ *и* c_s *однозначно определённые комплексные постоянные.*

При этом, семейства разложений $y^{-1}(x)$ *для семейств* $\mathcal{B}_0^+$ *и* $\mathcal{B}_0^-$ *совпадают.*

При $x \to 0, \alpha\cdot\beta \neq 0,\ \alpha+\beta \neq 0$ *существуют однопараметрические семейства разложений с постоянными коэффициентами* $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{B}_j^\tau$, $j = 1,\ 2$, $\tau = \pm 1$. *В зависимости от значений* $\theta_1 = \sqrt{2\beta} - \sqrt{-2\alpha}$ *и* $\theta_2 = \sqrt{2\beta} + \sqrt{-2\alpha}$ *семейства разложений определены одной из приведённых ниже формул.*

Если $\mathrm{Re}\ \theta_j = 0$, *семейства* $\mathcal{B}_j^\tau$ *определяются формулой*

$$\mathcal{B}_j^\tau: \quad y = (-1)^{j+1}\sqrt{-\beta/\alpha} + \sum_s c_{sj}x^s = \frac{(-1)^{j+1}\sqrt{-\beta/\alpha}}{1 + C_1 x^{\tau\theta_j}} + \sum_{\mathrm{Re}\ s \geq 1} c_{sj}x^s, \quad (5.3)$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_j,\ l,\ m \geq 0,\ l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, C_1 *— произвольная комплексная постоянная, остальные коэффициенты* c_{sj} *постоянны и однозначно определены.*

Пусть $\mathrm{Re}\ \theta_j \neq 0$, *обозначим* $k_j = \theta_j \cdot \mathrm{sgn}(\mathrm{Re}\ \theta_j)$.

Если $\mathrm{Re}\ \theta_j \neq 0,\ \theta_j \notin \mathbb{Z}$, *то семейство* $\mathcal{B}_j$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_j: \quad y = (-1)^{j+1} + \sum_s c_{sj}x^s, \quad (5.4)$$

где $s \in \{l + mk_j,\ l,\ m \geq 0,\ l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $c_{k_j j}$ *— произвольная комплексная постоянная,остальные коэффициенты* c_{sj} *постоянны и однозначно определены.*

Если $\mathrm{Re}\ \theta_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *то семейство* $\mathcal{B}_j$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_j: \quad y = (-1)^{j+1} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{sj}(\ln x)x^s, \quad (5.5)$$

где c_{sj} *при* $s < k_j$ *—постоянные,* $c_{k_j j} = a_{k_j j} + b_{k_j j}\ln x$, $a_{k_j j}$ *— произвольная постоянная, коэффициент* $b_{k_j j}$ *постоянный и однозначно определённый, остальные коэффициенты* c_{sj} *при* $s > k_j$ *— многочлены от* $\ln x$, *коэффициенты которых однозначно определены.*

В случае $C_1 = 0$ *разложение (5.3) идёт по целым степеням* s, *это семейство разложений обозначается* $\mathcal{B}_j$. *Оно совпадает с подсемейством семейства (5.4) при* $c_{k_j j} = 0$, *т.е. при* $m = 0$.

При $\alpha\beta \neq 0,\ \alpha + \beta \neq 0,\ x \to 0$ *существуют однопараметрические семейства сложных разложений:*

$$\mathcal{B}_3: \ y = \varphi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m x^m,$$

$$\varphi_0 = 1 - \frac{2}{\alpha + \beta}\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x} = \frac{2(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^2(\ln x + C_3)^2 + 2\alpha}, \quad (5.6)$$

где $c_{-3},\ C_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *остальные* c_s *постоянны и однозначно определены,* φ_m *— ряды по убывающим степеням логарифмов.*

При $\alpha\beta \neq 0,\ \alpha + \beta = 0,\ x \to 0$ существует семейство $\mathcal{B}_2$, определённое формулой (5.5) или (5.4). Также существуют однопараметрические семейства сложных разложений $\mathcal{B}_4$ и $\mathcal{B}_5$, которые определяются формулами

$$\mathcal{B}_j:\ y = \varphi_{0j} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{mj} x^m,$$

$$\varphi_{0j} = 1 + (-1)^j \frac{1}{-\alpha} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{-2\alpha} \ln x + C_4},\ j = 4, 5,\ (5.7)$$

где $c_{-2j} = C_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, остальные c_{sj} постоянны и однозначно определены, φ_{mj} — ряды по убывающим степеням логарифмов.

При $\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ x \to 0$ существует однопараметрические семейства разложений $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_6^\tau$, которые определяются формулой

$$y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s x^s,$$

$$\mathrm{K} = \{s : s = \rho + l\rho + m,\ l, m \geq 0, l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}, \rho = \pm\sqrt{-2\alpha},\quad (5.8)$$

где $c_\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, остальные c_s постоянны и однозначно определены. Если $\mathrm{Re}\,\rho > 0$, то получаем семейство степенных разложений $\mathcal{B}_6$, если $\mathrm{Re}\rho = 0$, то получаем семейства экзотических разложений $\mathcal{B}_6^\tau$, $\tau = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\rho)$. Семейства $\mathcal{B}_6^\tau$ также представимы в виде

$$\mathcal{B}_6^\tau:\ y = 1 - \frac{1}{1 - c_\rho x^\rho} + \sum_{\mathrm{Re} s \geq 1} c_s x^s. \quad (5.9)$$

6 Разложения решений, соответствующие ребру $G_3^{(1)}$ в случае $\alpha = 0$

Рассмотрим ребро $G_3^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} -x^2 z z'' - x^2 z^2 z'' + \frac{3}{2} x^2 z (z')^2 + x^2 (z')^2 - x z z' - x z^2 z' + \beta z^3 = 0. \quad (6.1)$$

Теорема 6.1: *После деления на $2y$ и замены $(y, c) = (-z, -\beta)$ уравнение* (3.4.1) *из* [4], *которое имеет вид*

$$2x^2 y (y')^2 - 3x^2 y^2 (y')^2 - 2x y^2 y' + 2x y^3 y' - 2x^2 y^2 y'' + 2x^2 y^3 y'' + 2c y^4 = 0,$$

перейдёт в уравнение (6.1).

Таким образом, мы можем получить первый член и узнать характер разложения, соответствующего ребру $G_3^{(1)}$.

Из теоремы 6.1 этой работы и теоремы 3.4.1 [4] следует

Теорема 6.2 *Ребру $G_3^{(1)}$ соответствуют следующие семейства разложений решений исходного уравнения (1.4):*

При $x \to 0$ и $\alpha = 0$ существует два двухпараметрических (по C и ρ) семейства экзотических разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами

$$\mathcal{B}_7^\tau: \ y = 1 - \frac{\rho^2}{2\beta - \rho^2} \frac{1}{\sin^2[\ln(Cx)^\gamma]} + \sum_{\mathrm{Re}\ s \geq 1} c_s x^s, \tag{6.2}$$

где $\rho \neq 0$ — произвольная чисто мнимая постоянная, $\rho^2 \neq 2\beta$, $\tau = \mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\rho)$, $s \in \{\rho + l\rho + m(1-\rho),\ l, m \geq 0,\ l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $2\gamma = i\rho$, C — произвольная ненулевая комплексная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены. Семейства обратных разложений $y^{-1}(x)$ для семейств $\mathcal{B}_7^+$ и $\mathcal{B}_7^-$ совпадают.

При $x \to 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ существует два однопараметрических по c_ρ семейства степенных разложений решений

$$\mathcal{B}_{8,9}: \ y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_{\mathrm{Re}\ s \geq 1} c_s x^s, \tag{6.3}$$

где ρ — произвольная чисто мнимая постоянная, $\rho^2 = 2\beta$, $\mathrm{Im}\rho > 0$ для семейства $\mathcal{B}_8$, $\mathrm{Im}\,\rho < 0$ для семейства $\mathcal{B}_9$, $s \in \{\rho + l(1-\rho) + m,\ l, m \geq 0,\ l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, c_ρ — произвольная ненулевая комплексная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

При $x \to 0$, $\alpha = \beta = 0$ существует однопараметрическое по c_0 семейства степенных разложений с постоянными однозначно определёнными коэффициентами c_s

$$\mathcal{B}_{10}: \ y = c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s x^s, \tag{6.4}$$

где $c_0 \neq 0, 1$ — произвольная постоянная.

7 Разложения решений, соответствующие вершине $G_3^{(0)}$ в случае $\alpha = 0$

Рассмотрим вершину $G_3^{(0)}$. Ей соответствует укороченное уравнение

$$\hat{g}_3^{(1)}(x, y) \stackrel{def}{=} -x^2 z^2 z'' + \frac{3}{2} x^2 z (z')^2 - x z^2 z' + \beta z^3 = 0. \tag{7.1}$$

Теорема 7.1: *После деления на $2y$ и замены $(y, c) = (-z, -\beta)$ уравнение (3.4.1) из [4], которое имеет вид*

$$2x^2y^3y'' - 3x^2y^2(y')^2 + 2xy^3y' + 2cy^4 = 0,$$

перейдёт в уравнение (7.1).

Таким образом, мы можем получить первый член и узнать характер разложения, соответствующего вершине $G_3^{(0)}$.

Из теоремы 7.1 этой работы и теоремы 3.2.1 [4] следует

Теорема 7.2 *Вершине $G_3^{(1)}$ при $x \to 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ соответствует однопараметрическое по c_r семейство степенных разложений решений исходного уравнения (1.4):*

$$\mathcal{A}_1: \ y = 1 + c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{7.2}$$

где $r = -\mathrm{sgn}(\ \mathrm{Re}\ \sqrt{-2\beta})\sqrt{-2\beta}$, $s \in \{r - lr + m,\ l, m \geq 0,\ l + m > 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, c_r — произвольная ненулевая комплексная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

8 Сводка результатов

Новые результаты для разложений решений пятого уравнения Пенлеве при $x \to 0$ соответствуют ребру $G_4^{(1)}$ многоугольника $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(g)$ уравнения (1.6).

Перечислим полученные разложения:

-семейство $\mathcal{H}_1$ степенных разложений, которое существует при $\gamma\delta \neq 0$, $\dfrac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} = -s^2$, $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, оно было известно раньше [10]. Если разложение $\mathcal{H}_1$ идёт по целым или рациональным степеням x, оно сходится по теореме 1.7.2 [4];

-семейства $\mathcal{H}_1^\tau$ полуэкзотических разложений, которые существуют при $\gamma\delta \neq 0$, $\dfrac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} = s^2$, $s \in \mathbb{R}$ — новые;

-семейство $\mathcal{H}_2$ степенно-логарифмических разложений, которое существует при $\gamma\delta \neq 0$, $\dfrac{\gamma}{\sqrt{2\delta}} = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ —новое;

- семейство $\mathcal{H}_3$ сложных разложений, которое существует при $\gamma \neq 0$, оно может быть получено из известного раньше разложения решения третьего уравнения Пенлеве [5], [6];

-семейство $\mathcal{H}_4$ полуэкзотических разложений, которое существует при $|\gamma| + |\delta| \neq 0$ —новое;

-семейства $\mathcal{H}_5$, $\mathcal{H}_6$ сложных разложений, которое существует при $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$.

Итак, всего получено 8 семейств разложений, соответствующих ребру $G_4^{(1)}$.

Также при $\alpha \neq 0$ получены семейства разложений $\mathcal{B}_0^\tau$, $\mathcal{B}_{1,2}$, $\mathcal{B}_{1,2}^\tau$, $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_{4,5}$, $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_6^\tau$.

При $\alpha = 0$ получены семейства разложений $\mathcal{B}_7^\tau$, $\mathcal{B}_{8,9}$, $\mathcal{B}_{10}$ и семейство $\mathcal{A}_1$.

Получено семейство разложений $\mathcal{A}_0$, которое существует при любых значениях параметров уравнения.

Разложения $\mathcal{B}_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$, $\mathcal{B}_k^\tau$, $k = 1, 2, 6, 7$, $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ получены из соответствующих разложений решений шестого уравнения Пенлеве.

Случай $\gamma = \delta = 0$ в данной работе не рассматривается — при таких значениях параметров пятое уравнения Пенлеве может быть проинтегрировано явно, что сделано, например, в [4].

Об асимптотические разложениях решений при $x \to \infty$ можно прочитать в работах [7], [8], [9], [10]. В работах [7], [9] также вычислены экспоненциальные добавки к ним.

Литература

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. т. 59, № 3, С. 31-80.

2. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. Т.406. № 6. С. 730-733.

3. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. // ДАН. 2007. Т.416. № 6. С. 583-587.

4. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Труды ММО. 2010. т. 71.

5. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №51. 30 С.

6. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 10. 26 С.

7. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. № 39. 25 С.

8. *Парусникова А.В.* Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Тезисы докладов XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов". М., 2009.

9. *Парусникова А.В.* Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Сборник тезисов докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, 2010. С.145-146.

10. *Gromak V.I., Laine I., Shimomoura S.*, Painleve Differential Equations in the Complex Plane// Walter de Gruter. Berlin, New York, 2002. 303 p.

11. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение// Матем. Энциклопедия.-М.: Советская энциклопедия, 1984. Т.4, С.233-234.

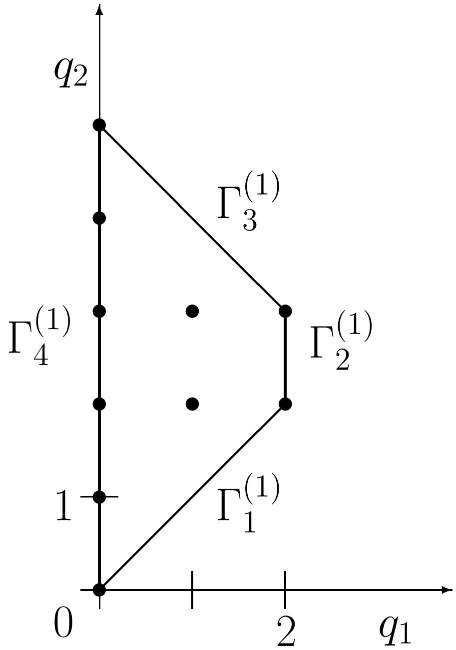

Рис. 1

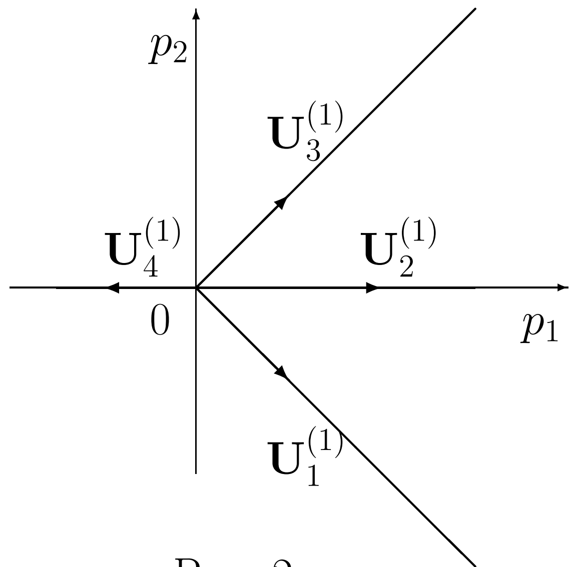

Рис. 2

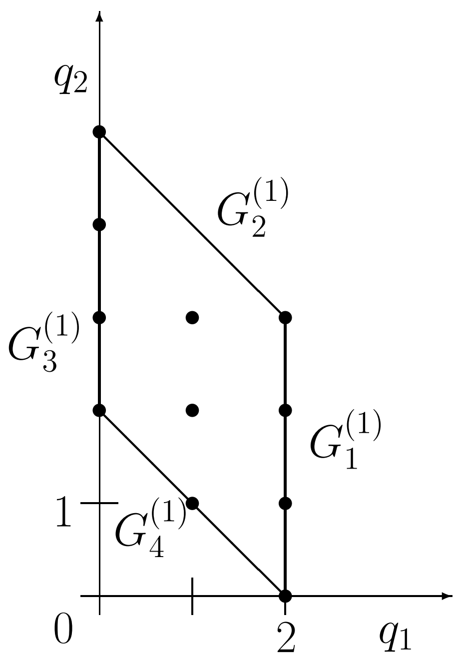

Рис. 3

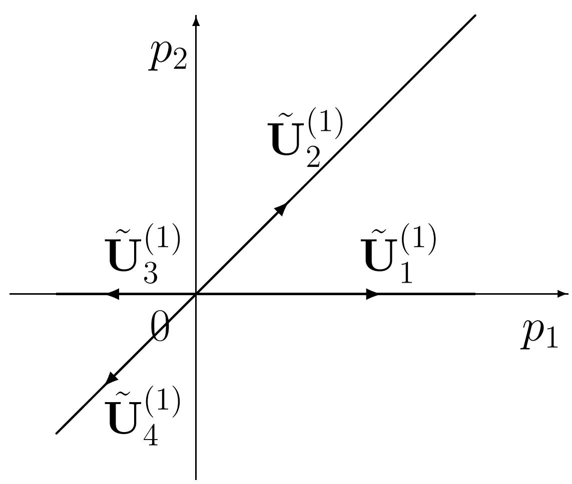

Рис. 4

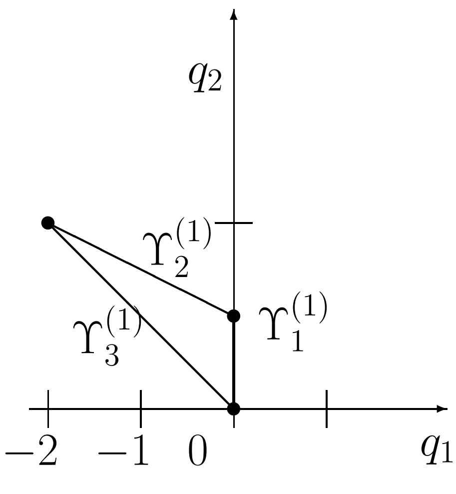

Рис. 5

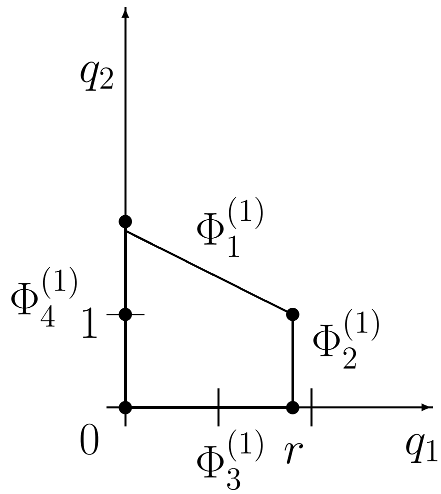

Рис. 6

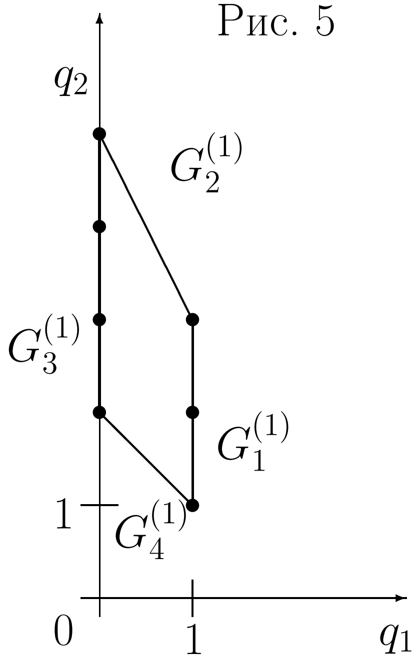

Рис. 7

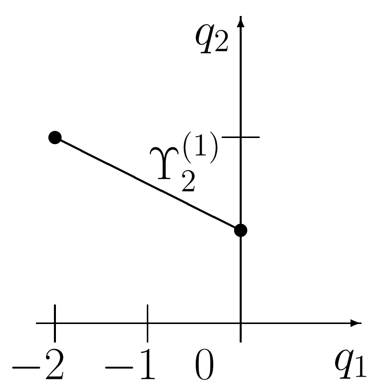

Рис. 8

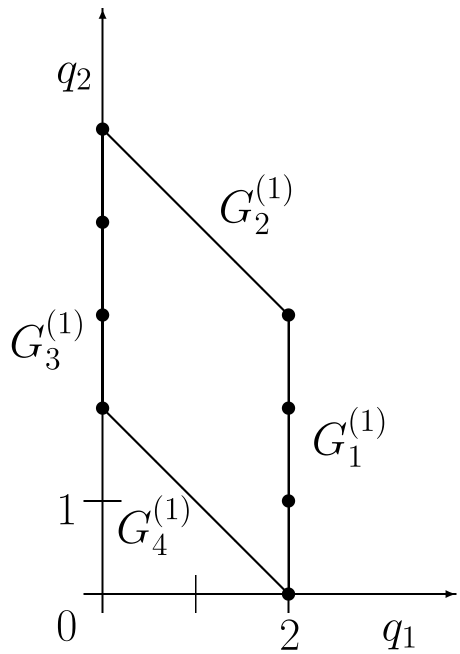

Рис. 9

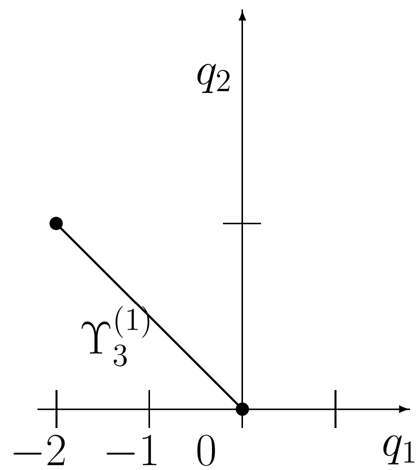

Рис. 10