



Чечеткин В.М., Сычугов К.Р.

Исследование  
магниторотационной  
неустойчивости и аккреции в  
кеплеровском диске с  
помощью численной схемы  
HLLD

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Чечеткин В.М., Сычугов К.Р. Исследование магниторотационной неустойчивости и аккреции в кеплеровском диске с помощью численной схемы HLLD // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 73. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-73>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ  
МАТЕМАТИКИ имени М.В.КЕЛДЫША

В.М. Чечеткин, К.Р. Сычугов

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОРОТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И  
АККРЕЦИИ В КЕПЛЕРОВСКОМ ДИСКЕ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ  
HLLD

Москва 2010

## **В.М. Чечеткин, К.Р. Сычугов**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОРОТАЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И АККРЕЦИИ В КЕПЛЕРОВСКОМ ДИСКЕ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ HLLD**

Проведен линейный анализ магниторотационной неустойчивости в дифференциально вращающемся астрофизическом диске в локальной потсановке, выведен закон дисперсии для альфвеновских волн в двумерной геометрии.

Получены приближенные численные решения МГД-уравнения для малого плоского участка кеплеровского диска. Исследована зависимость коэффициента турбулентной вязкости от начальных параметров. Для решения использовался численный алгоритм, основанный на численной схеме HLLD.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки совместно с Советом по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (грант МК-390.2010.2) и по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-64468.2010.2, а также РФФИ (проект № 09-02-00502а).

## **V.M. Chechetkin, C.R. Sychugov**

### **THE REASERCH OF MAGNETOROTATIONAL INSTABILITY AND ACCRETION IN KEPLERIAN DISK BASED ON HLLD RIEMAN SOLVER.**

The liniar analysis of the local MRI evolution in differentially rotating media of astrophysical disk was caried out. The dispersion law for axysymmetrical approach have been obtained.

The MHD equations was solved numericalaly for small two-dimentional neighbourhood of selected point in keplerian disk. Dependence of turbulent viscosity parameter on initial conditions have been analysed.

This work was supported by the Ministry of Education and Science jointly with the Council for Grants of the President of the Russian Federation for State Support of young russian scientists, state support of leading scientific schools and Russian Foundation for Basic Research.

## **Содержание**

<b>1. Введение</b>	<b>2</b>
<b>2. Вывод уравнений для возмущений</b>	<b>3</b>
<b>2.1 Линеаризация системы уравнений</b>	<b>3</b>
<b>2.2 Дисперсионное соотношение и условие устойчивости</b>	<b>5</b>
<b>3. Методы численного моделирования</b>	<b>10</b>
<b>4. Результаты расчетов и их анализ</b>	<b>11</b>
<b>4.1 Аккреция</b>	<b>15</b>
<b>5. Заключение</b>	<b>19</b>

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию развития магниторотационной неустойчивости (далее – МРН) в намагниченном кеплеровском диске. Неустойчивость приводит к развитию турбулентных течений в диске, которые, в свою очередь, обеспечивают турбулентную вязкость течения. Именно турбулентная вязкость считается основным возможным механизмом передачи углового момента в диске, в результате чего возникает аккреция вещества на гравитирующее тело. Молекулярная вязкость в таких дисках мала и не может обеспечить наблюдаемых темпов аккреции. МРН дифференциально вращающихся течений была предсказана Велиховым в 1959 году [1].

Угловая скорость вращения в кеплеровском диске убывает с ростом радиуса, что обеспечивает необходимое условие развития магниторотационной неустойчивости [2]. С точки зрения обычной газодинамики диск, вращающийся по кеплеровскому закону устойчив, так как в отсутствие магнитного поля условие устойчивости заключается в неубывании произведения квадрата радиуса и угловой скорости  $\Omega$ . Это означает, что неустойчивость в таком диске может быть только при наличии магнитного поля, причем замечательным фактом является то, что само поле может быть слабым.

В лабораторных условиях очень сложно воспроизвести поведение астрофизической плазмы, которая обладает крайне высокой проводимостью. В связи с развитием вычислительных мощностей и появлением новых алгоритмов для расчета магнитогидродинамических течений, появилась возможность поставить численный эксперимент для исследования МРН в аккреционных дисках. Одной из проблем при численном моделировании аккреционных дисков является несоответствие низкой температуры диска, фиксируемой в наблюдениях, с температурой, получаемой в расчетах, где турбулентная вязкость приводит к сильному нагреву диска. Чтобы обойти эту проблему в данной работе принята модель изотермического диска. Это позволяет отвлечься от проблемы перехода магнитной и кинетической энергии в тепловую.

Для расчетов взята малая двумерная область диска (производные по углу обращены в ноль) на большом расстоянии от центрального гравитирующего тела. Сами расчеты проводились на вычислительном комплексе МВС-100К Межведомственного Суперкомпьютерного Центра РАН.

## 2. Вывод уравнений для возмущений

Система уравнений идеальной изотермической МГД в цилиндрических координатах система имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left( c_\tau^2 \rho + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \\ - \frac{1}{4\pi\rho} \left( (\mathbf{B} \nabla) B_r - \frac{B_\varphi^2}{r} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( c_\tau^2 \rho + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \\ - \frac{1}{4\pi\rho} \left( (\mathbf{B} \nabla) B_\varphi + \frac{B_r B_\varphi}{r} \right) = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( c_\tau^2 \rho + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \nabla) B_z + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z B_r - v_r B_z) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_z B_r - v_r B_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) = 0, \quad (7)$$

где  $P = c_\tau^2 \rho$  давление в изотермическом случае,  $\Phi(R) = -GM/R$  – гравитационный потенциал,  $R$  – расстояние до центра ( $R^2 = r^2 + z^2$  в цилиндрической системе),  $(\mathbf{v} \nabla) = v_r \partial / \partial r + (v_\varphi / r) \partial / \partial \varphi + v_z \partial / \partial z$  – производная вдоль линии тока.

### 2.1 Линеаризация системы уравнений

Для линеаризации отделим возмущения от основного течения. Скорость течения представится в виде основного кеплеровского течения  $\Omega_K(r) \times \mathbf{r}$  и «возмущенной» добавки, а фоновым магнитным полем будет однородное поле  $B_{z0}$ .

Делаем замену:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho', \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}_0 = (0, r \Omega_{\text{к}}(r), 0), \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}', \quad \mathbf{B}_0 = (0, 0, B_{z0}).\end{aligned}$$

Слагаемое  $\partial\Phi/\partial r$  во втором уравнении системы отвечает радиальной компоненте гравитационной силы. Оно уравновешивается центробежной силой:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial r} &\equiv r \Omega_{\text{к}}^2, \\ -\frac{v_{\varphi}^2}{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} &= -2 \Omega_{\text{к}} v'_{\varphi} - \frac{(v'_{\varphi})^2}{r}.\end{aligned}$$

Вертикальной компонентой силы гравитации можно пренебречь ввиду малости  $z$ :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} \equiv z \Omega_{\text{к}}^2 \rightarrow 0$$

В уравнения, описывающие возмущения, таким образом, войдет только сила Кориолиса  $2(\mathbf{\Omega}_{\text{к}} \times \mathbf{v}')$ . Результирующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial v'_r}{\partial r} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v'_r}{\partial t} - 2 \Omega_{\text{к}} v'_{\varphi} + \frac{c_{\tau}^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial r} + \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \left( \frac{\partial B'_z}{\partial r} - \frac{\partial B'_r}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v'_{\varphi}}{\partial t} + \Omega_{\text{к}} v'_r \left( 2 + \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} \right) - \frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial B'_{\varphi}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} + \frac{c_{\tau}^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B'_r}{\partial t} - B_{z0} \frac{\partial v'_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B'_z}{\partial t} + B_{z0} \frac{\partial v'_r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial B'_{\varphi}}{\partial t} - B_{z0} \frac{\partial v'_{\varphi}}{\partial z} - B'_r \Omega_{\text{к}} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

является аналогом уравнений для  $\Lambda$  магнитогидродинамических волн, если из нее убрать слагаемые, связанные с вращением (см. [4]). Отсюда можно предположить, что закон дисперсии для одинаковых типов волн в нашей системе

будет похож на дисперсию в отсутствии вращения. Однако, это не совсем так. В частности, вращение всей системы будет влиять на направление распространения альфвеновских волн. При выводе уравнений (8) слагаемые, обратнопропорциональные радиусу не были учтены, что равносильно переходу к двумерным декартовым координатам  $(r, z)$  на больших расстояниях от гравитирующего центра.

## 2.2 Дисперсионное соотношение и условие устойчивости

Для нахождения закона дисперсии воспользуемся стандартной процедурой. Система (8) линейна и однородна с постоянными по времени коэффициентами, значит решение можно искать в виде плоских волн:

$$\begin{aligned}\rho' &= \delta\rho e^{-i(\omega t - k_r r - k_z z)}, \\ \mathbf{v}' &= \delta\mathbf{v} e^{-i(\omega t - k_r r - k_z z)}, \\ \mathbf{B}' &= \delta\mathbf{B} e^{-i(\omega t - k_r r - k_z z)},\end{aligned}$$

где  $\delta\mathbf{v} = (\delta v_r, \delta v_\varphi, \delta v_z)$  и  $\delta\mathbf{B} = (\delta B_r, \delta B_\varphi, \delta B_z)$  – векторные амплитуды возмущений скорости и поля.

При подстановке такой формы решения в (8) получается система линейных алгебраических уравнений для амплитуд волн  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$ ,  $\delta\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}-i\omega\delta\rho + i(k_r\delta v_r + k_z\delta v_z) &= 0, \\ -i\omega\delta v_r - 2\Omega_K\delta v_\varphi + i\frac{c_\tau^2 k_r}{\rho_0}\delta\rho + i\frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}(k_r\delta B_r - k_z\delta B_z) &= 0, \\ -i\omega\delta v_\varphi + \Omega_K\left(2 + \frac{d\ln\Omega_K}{d\ln r}\right)\delta v_r - i\frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}k_z\delta B_\varphi &= 0, \\ i\omega\delta v_z - i\frac{c_\tau^2 k_z}{\rho_0}\delta\rho &= 0, \\ i\omega\delta B_r + ik_z B_{z0}\delta v_r &= 0, \\ i\omega\delta B_\varphi + ik_z B_{z0}\delta v_\varphi - \Omega_K\frac{d\ln\Omega_K}{d\ln r}\delta B_r &= 0, \\ -i\omega\delta B_z + ik_r B_{z0}\delta v_r &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения можно записать в векторной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\omega\delta\rho + i(\mathbf{k}\delta\mathbf{v}) = 0, \\ -i\omega\delta\mathbf{v} + 2(\boldsymbol{\Omega}_k \times \delta\mathbf{v}) + \mathbf{e}_\varphi\Omega_k \frac{d\ln\Omega_k}{d\ln r} \delta v_r + \frac{c_T^2}{\rho_0} \mathbf{k} \delta\rho + \\ \quad + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{B}_{z0} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B})) = 0, \\ -i\omega\delta\mathbf{B} - (\mathbf{k} \times (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{z0})) - \mathbf{e}_\varphi\Omega_k \frac{d\ln\Omega_k}{d\ln r} \delta B_r = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Неустойчивыми будут те волны, у которых мнимая часть  $\omega$  больше нуля. Для простоты рассмотрим только альфвеновские волны. В таких волнах отсутствуют возмущения плотности. Перепишем систему (9) с учетом этого условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\rho = 0, \quad (\mathbf{k}\delta\mathbf{v}) = 0, \\ -i\omega\delta\mathbf{v} + 2(\boldsymbol{\Omega}_k \times \delta\mathbf{v}) + \mathbf{e}_\varphi\Omega_k \frac{d\ln\Omega_k}{d\ln r} \delta v_r + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{B}_{z0} \times (\mathbf{k} \times \delta\mathbf{B})) = 0, \\ -i\omega\delta\mathbf{B} - (\mathbf{k} \times (\delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{z0})) - \mathbf{e}_\varphi\Omega_k \frac{d\ln\Omega_k}{d\ln r} \delta B_r = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Система (10) накладывает ограничения на направления волновых векторов, а так же векторов скорости и поля:

$$\begin{array}{l} 1. \delta\mathbf{v} \perp \mathbf{k}, \quad 2. \delta\mathbf{v} \perp \mathbf{B}_{z0}, \\ 3. \mathbf{k} \perp \mathbf{e}_\varphi, \quad 4. \delta\mathbf{v} \sim (\delta\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_k) + \mathbf{C}, \end{array} \quad (11)$$

где  $\mathbf{C}$  – произвольный вектор в плоскости  $r\varphi$ , не зависящий от  $\delta\mathbf{v}$ , и имеющий размерность скорости. Последнее условие связано с наличием вращения. Покажем, что условия (11) накладывают следующее ограничение на волновой вектор:

$$k_r = 0. \quad (12)$$

В отсутствии вращения следует учитывать только первые три условия из (11). Из них следует, что вектор  $\mathbf{k}$  может быть направлен как угодно в плоскости  $rz$  (то есть  $k_r$  может быть отличен от нуля). Из первых двух условий следует, что  $\delta\mathbf{v}$  будет перпендикулярен плоскости  $rz$ , то есть  $\delta v_r = 0$ . Радиальная компонента скорости не будет равна нулю только в том случае, когда вектор



$\mathbf{k}$  направлен по оси  $z$ . Но в нашем случае диск вращается, что приводит к возникновению силы Кориолиса, которая «поворачивает» вектор возмущения скорости  $\delta\mathbf{v}$  в экваториальной плоскости диска. Это означает, что наличие ненулевой компоненты скорости  $\delta v_\varphi \neq 0$  приводит к появлению радиальной компоненты:  $\delta v_r \neq 0$ . В итоге приходим к противоречию, что говорит о неверности предположения  $k_r \neq 0$ .

Таким образом, волновой вектор в альфвеновской волне во вращающейся системе может быть направлен только по оси  $z$  – это и есть условие (12). Следует отметить, что полученное ограничение на волновой вектор обусловлено, помимо наличия вращения, двумерностью задачи. Действительно, если  $\mathbf{k}$  имеет ненулевую  $\varphi$ -компоненту, то вектор скорости при этом будет перпендикулярен плоскости, проходящей через  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_{z0}$ . Значит,  $\delta v_r$  не будет равно нулю при  $k_r \neq 0$ . Но это справедливо только тогда, когда  $k_r$  и  $k_\varphi$  отличны от нуля одновременно: если  $k_r = 0$ , а  $k_\varphi \neq 0$ , то опять получим противоречие. В итоге можно сделать следующий вывод: в альфвеновской волне во вращающейся системе либо все три компоненты волнового вектора отличны от нуля, либо отлична от нуля только  $z$ -компонента. Этот эффект вызван силой Кориолиса, которая не дает по отдельности «исчезнуть» одной из компонент скорости:  $\delta v_r$  или  $\delta v_\varphi$ .

В нашем случае альфвеновские волны будут распространяться только вдоль оси  $z$ . Займемся нахождением закона дисперсии для таких волн. Для этого перепишем систему (10) в покомпонентной форме, с учетом (12):

$$\delta\rho = 0, \quad \delta v_z = 0, \quad \delta B_z = 0, \quad (13)$$

$$i\omega\delta v_r + 2\Omega_{\text{к}}\delta v_\varphi + i\frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}k_z\delta B_r = 0, \quad (14)$$

$$i\omega\delta v_\varphi - \Omega_{\text{к}}\left(2 - \frac{d\ln\Omega_{\text{к}}}{d\ln r}\right)\delta v_r - i\frac{B_{z0}}{4\pi\rho_0}k_z\delta B_\varphi = 0, \quad (15)$$

$$\delta B_r = -\frac{k_z B_{z0}}{\omega}\delta v_r, \quad (16)$$

$$i\omega\delta B_\varphi + ik_z B_{z0}\delta v_\varphi + \Omega_{\text{к}}\frac{d\ln\Omega_{\text{к}}}{d\ln r}\delta B_r = 0, \quad (17)$$

Пока мы нигде не использовали явное выражение для кеплеровской угловой скорости (??). Это позволит найти условие устойчивости для диска, скорость

вращения которого меняется по произвольному закону. Решая систему уравнений, находим дисперсионное соотношение:

$$\omega - \frac{\alpha^2}{\omega} - 2\Omega_{\text{к}} \frac{2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} \right) - \frac{\alpha^2}{\omega^2}}{\omega - \frac{\alpha^2}{\omega}} = 0,$$

где для краткости введено обозначение:

$$\alpha = k_z v_a,$$

где  $v_a = \frac{B_{z0}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$  – альфвеновская скорость (фазовая скорость альфвеновской

волны – см. [4]). Величина  $\alpha$  имеет размерность частоты, она определяет влияние магнитного поля на дисперсионное соотношение, а следовательно, и на устойчивость всей системы. Последнее уравнение легко сводится к биквадратной форме:

$$\omega^4 - 2 \left( 2\Omega_{\text{к}}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} \right) + \alpha^2 \right) \omega^2 + 2\alpha^2 \Omega_{\text{к}}^2 \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} + \alpha^4 = 0. \quad (18)$$

Для того, чтобы система не раскачивалась, необходимо, чтобы  $\omega^2$  было положительным. Корни уравнения (18):

$$(\omega^2)_{\pm} = \alpha^2 + 2\Omega_{\text{к}}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} \right) \pm 2\Omega_{\text{к}} \sqrt{\alpha^2 + \Omega_{\text{к}}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} \right)^2}. \quad (19)$$

Корень  $(\omega^2)_+$  всегда положительный, и условие устойчивости после простых алгебраических преобразований запишется так:

$$\alpha^2 > -2\Omega_{\text{к}}^2 \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r}, \quad (20)$$

или, расписывая  $\alpha$ :

$$k_z^2 > -\frac{2\Omega_{\text{к}}^2}{v_a^2} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r}.$$

Из последнего видно, что при отрицательных  $L$  всегда найдутся достаточно большие длины волн  $\lambda_z = k_z^{-1}$ , такие, что неравенство будет нарушаться. Причем величина напряженности поля  $B_{z0}$  может быть сколь угодно большой, при этом неустойчивые моды будут просто сдвигаться в длинноволновую область. Полученное условие устойчивости:

$$\frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} > 0,$$

или

$$\frac{d\Omega_{\text{к}}}{dr} > 0 \quad (21)$$

широко известно в теории магниторотационной неустойчивости (см., например, [2]). Здесь это условие получено применительно к альфвеновским волнам, в которых отсутствуют возмущения плотности. Но если диск неустойчив согласно условию (21), то альфвеновские волны, раскачиваясь, приведут к появлению других типов волн.

Для кеплеровского диска:

$$\Omega_{\text{к}} \frac{d \ln \Omega_{\text{к}}}{d \ln r} = -\frac{3}{2} \Omega_{\text{к}} < 0, \quad (22)$$

это означает, что в нашем случае система неустойчива, и малые отклонения от равновесного состояния могут стать причиной возникновения турбулентных течений. Как уже отмечалось ранее, согласно условию устойчивости для вращательных течений в обычной гидродинамике кеплеровский диск будет устойчив:

$$\frac{d(r^2 \Omega_{\text{к}})}{dr} > 0.$$

Такое свойство кеплеровского течения – устойчивость в гидродинамическом смысле и неустойчивость с точки зрения МГД – делает подобное течение интересным для изучения роли магниторотационной неустойчивости в развитии турбулентности.

Из соотношения (19) можно найти длины волн, которые будут «раскачиваться» быстрее всего. В дальнейшем это будет полезно для сравнения численных расчетов с аналитическими расчетами. Подставим выражения для  $L$  из кеплеровского закона (22), и введем обозначения  $x(\alpha) = (\omega^2)_-$ :

$$x(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{2} \Omega_{\text{к}}^2 - 2 \Omega_{\text{к}} \sqrt{\alpha^2 + \frac{\Omega_{\text{к}}^2}{16}}. \quad (23)$$

В точке, где функция  $x(\alpha)$  достигает своего наименьшего значения, мнимая часть  $\omega$  будет наибольшей:

$$\frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha} = 2\alpha \left( 1 - \frac{\Omega_{\text{к}}}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\Omega_{\text{к}}^2}{16}}} \right),$$

$$\alpha_{\text{min}} = \sqrt{\frac{15}{16}} \Omega_{\text{к}}.$$

Инкремент самых быстрорастущих возмущений:

$$\gamma = \text{Im } \omega_- = \frac{3}{4} \Omega_{\text{к}}. \quad (24)$$

Отвечающие найденному  $\alpha_{\text{min}}$  критическая длина волны и волновой вектор:

$$k_{z \text{ crit}} = \frac{\alpha}{v_a} \cong \frac{\Omega_{\text{к}}}{v_a}, \quad (25)$$

$$\lambda_{\text{crit}} = \frac{k_{z \text{ crit}}}{2\pi} \cong \frac{2\pi v_a}{\Omega_{\text{к}}}.$$

Полученный результат:  $\lambda_{\text{crit}} \sim v_a/\Omega_{\text{к}}$  совпадает с тем, что получен в начале пункта 2.4 исходя из соображений размерности.

### 3. Методы численного моделирования

В настоящий момент для решения задач МГД существует довольно много алгоритмов. Для моделирования сильных неоднородностей хорошо подходят численные методы, основанные на расчете распада разрыва, т.е. на вычислении потоков через границы каждой ячейки расчетной сетки. Для расчета изотермической МГД в этой работе использовался относительно новый метод, разработанный А. Мигноном в 2007 году [5]. Метод основывается на одной из модификаций схемы HLL (Harten-Lax-van Leer, [6], [7]) для адиабатического случая, и носит название «HLLD». Преимуществами нового метода является сравнительно малая численная вязкость и относительная простота реализации алгоритма. Кроме того, эта схема является явной, что значительно упрощает программирование параллельных вычислений.

Задача решалась в двумерной области с квазипериодическими граничными условиями: периодическими по всем переменным, кроме угловой скорости, для которой из-за разницы кеплеровской скорости на различных расстояниях от центра граничное условие выглядит так:

$$\begin{cases} v_{\varphi}(r_1, z) = \tilde{u}_y(r_2, z) - \frac{3}{2} \Omega_0(r_2 - r_1), \\ v_{\varphi}(r, z_1) = \tilde{u}_y(r, z_2), \end{cases}$$

где координаты  $r_1$  и  $r_2$  отвечают левой и правой границе соответственно, а  $z_1$  и  $z_2$  – нижней и верхней.

## 4. Результаты расчетов и их анализ

Для параметризации задачи было зафиксировано значение угловой скорости в центре расчетной области:  $\Omega_0 = 10^{-3}$ , начальная плотность вещества положена равной единице  $\rho_0 = 1$ . Размеры расчетной области также были выбраны равными единице  $l_x = l_z = 1$ . В предположении, что  $GM = 1$ , расстояние до центра аккреционного диска  $R_0 = 100$ . Отношение газового давления к плотности вещества, которое с точностью до показателя адиабаты равно квадрату изотермической скорости звука:  $P/\rho = c_\tau^2 = 10^{-5}$ . Полутолщина реального кеплеровского диска, при таких условиях будет равна  $h_z = c_\tau/\Omega_0 = 3.16$ , то есть расчетная область в шесть раз меньше толщины диска. Различные конфигурации аккреционных дисков в этой работе отличались друг от друга только отношением газового давления к магнитному:  $\beta = P_{\text{gas}}/P_{\text{magn}}$ . При выборе этих значений за основу была взята работа Хоули и Балбуса [8].

Модель	Сетка, $N^2$	$\beta = P_{\text{gas}}/P_{\text{magn}}$	$\lambda_{\text{crit}}$
A256.4	256 <sup>2</sup>	4 000	$4.44 \cdot 10^{-1}$
A512.64	512 <sup>2</sup>	64 000	$1.11 \cdot 10^{-1}$
A1024.1024	1024 <sup>2</sup>	1024 000	$2.78 \cdot 10^{-2}$

Таблица 1: Различные параметры в модели «А», для которых проводились вычисления при  $\Omega_0 = 10^{-3}$ ,  $\rho_0 = 1$ ,  $P/\rho = 10^{-5}$ ,  $l_x = l_z = 1$ . Для моделей с разрешениями 512<sup>2</sup> и 1024<sup>2</sup> использована аналогичная нумерация.

Увеличение параметра  $\beta$  приводит к уменьшению магнитного поля и к уменьшению критической длины волны  $\lambda_{\text{crit}}$  из формулы (25). Первая серия вычислений была проведена при  $\beta = 4000$ , которому отвечает безразмерная  $\lambda_{\text{crit}} = 0.44$ . Для того, чтобы определить, как разрешение расчетной сетки (количество расчетных ячеек) влияет на результат, были поставлены численные эксперименты с разрешениями  $N^2 = 256^2$ ,  $512^2$  и  $1024^2$ . Для последней конфигурации процесс вычисления довольно «тяжелый», поэтому для сетки  $1024^2$  были выполнены вычисления только наиболее интересных конфигураций с малыми энергиями начального магнитного поля.

На рисунке 1 изображены графики тороидальных компонент скоростей и поля в момент времени, отвечающий 2.5 оборотам для модели A256.4 (описание различных моделей указаны в таблице 1). Возмущения находятся на стадии экспоненциального роста, при котором хорошо работает линейная теория. На всех графиках четко видна одна волна с волновым вектором, параллель-

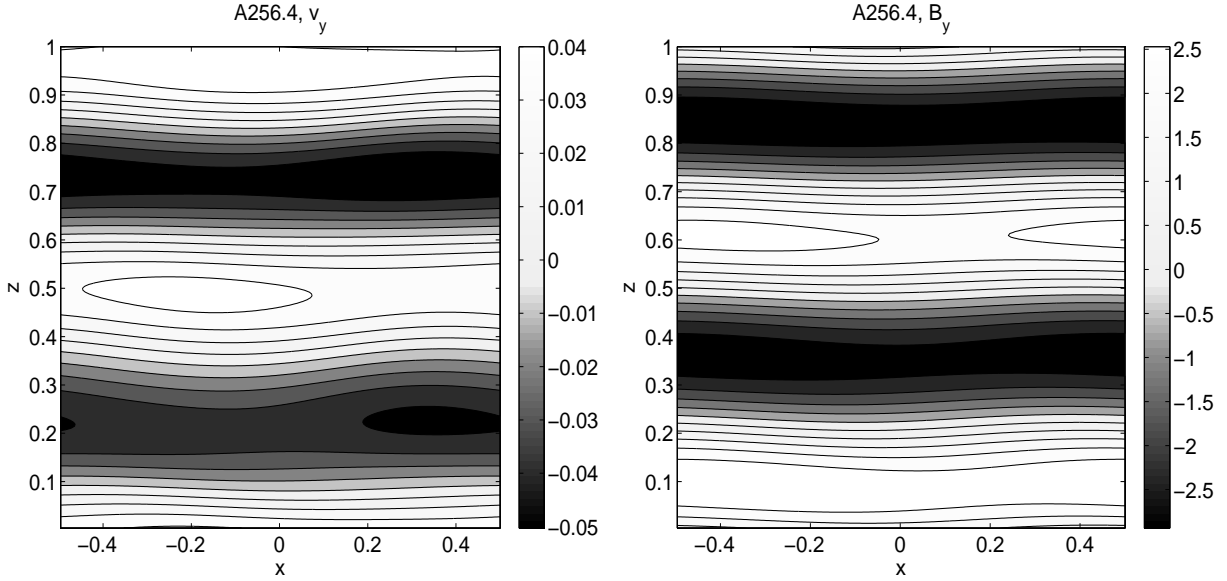


Рис. 1: Возмущения скорости азимутальных компонент скорости (*слева*) и магнитного поля (*справа*) при  $\beta = 4000$ , в момент времени  $t = 2.5$  оборота. Скорость измерена в единицах скорости звука, а поле – в единицах  $B_{z0}$ .

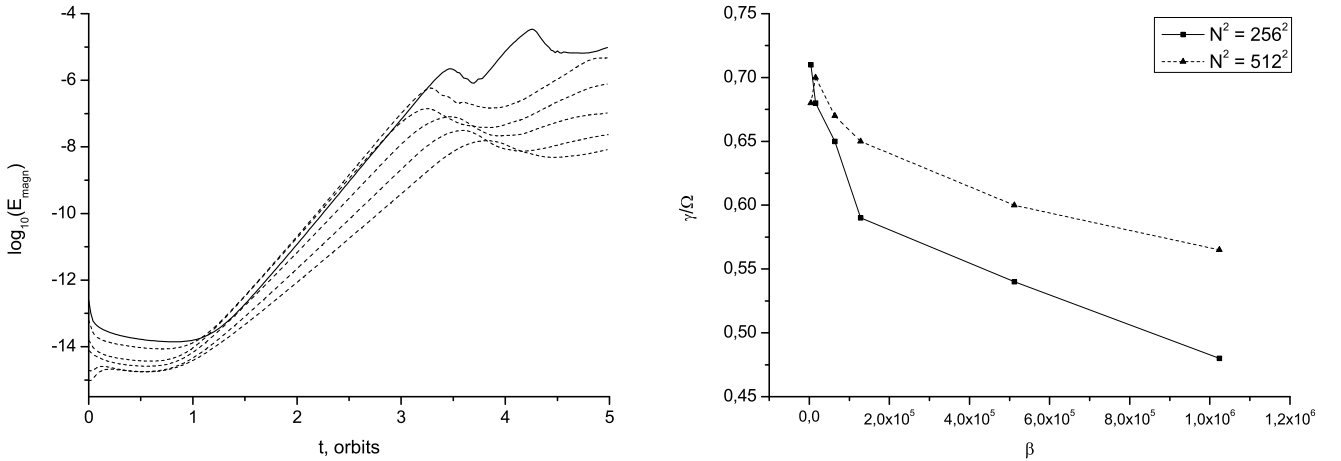


Рис. 2: *Слева*: изменение энергии магнитного поля в начальные моменты времени, для различных конфигураций из таблицы 1. Линейный участок у каждого графика соответствует экспоненциальному росту энергии возмущений. Энергия в последний момент времени растет с увеличением начального поля  $B_{z0}$ . Сплошная линия отвечает модели A256.4. *Справа*: Зависимость инкремента от параметра  $\beta$  для сеток  $256^2$  и  $512^2$ .

ным оси  $z$ . В соответствии с линейной теорией, согласно которой  $\lambda_{\text{crit}} = 0.44 l_z$  эта волна два раза укладывается в расчетную область. Длина волны, соответствующая максимальной фурье-компоненте плотности энергии  $\lambda_{\text{max}} = 0.5$ . Небольшое расхождение с теорией вызвано дискретностью преобразования Фурье, с помощью которого был найден спектр энергии. Для более подробной сетки с  $N^2 = 512^2$ , с теми же параметрами, погрешность будет меньше:  $\lambda_{\text{max}} = 0.41$ .

Как предсказывает линейная теория, в начальные моменты времени воз-

мущения будут расти экспоненциально. Это легко проверить, наблюдая за ростом энергии колебаний. На рисунке 2 изображены зависимости логарифма магнитной энергии от времени для различных моделей. Между первым и четвертым оборотом энергия растет экспоненциально с постоянным инкрементом. Этот инкремент должен быть приблизительно равен  $2\gamma = 3\Omega_0/2$  (в силу того, что энергия – квадратичная функция поля). Полученные из расчетов значения инкремента оказались несколько меньше величины  $0.75\Omega_0$  – формула (24). Инкремент падает с уменьшением начального магнитного поля (рис. 2).

Как видно, с уменьшением размера расчетных ячеек значение инкремента увеличивается, приближаясь к теоретическому. Подобное поведение можно объяснить зависимостью характерного размера возмущений от плазменного параметра:  $\lambda_{\text{crit}} \sim \beta^{-1/2}$ . С уменьшением поля характерная длина альфвеновских волн на начальной стадии развития неустойчивости будет падать, и, как будет показано в дальнейшем, аналогичное утверждение можно сделать о характерном размере турбулентности на больших временах. При больших  $\beta$  на развитие неустойчивости будет влиять конечный размер расчетных ячеек и роль численной вязкости сильно увеличится, что приводит к замедлению роста неустойчивых мод. Увеличение подробности сетки ослабляет этот эффект.

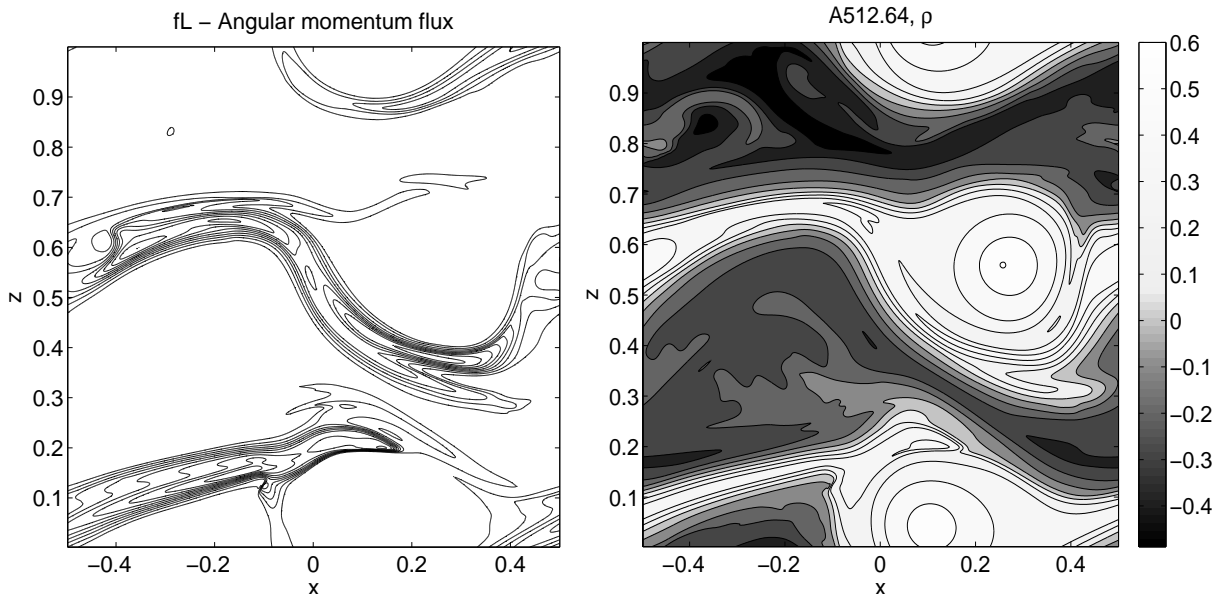


Рис. 3: Слева: Поток дополнительного углового момента, вызванного турбулентностью. Для ясности изображены только положительные значения потока. Все отрицательные значения малы по модулю, по сравнению с положительными. Справа: Распределение возмущений  $\delta\rho/\rho_0$  в модели A512.64, 60 оборотов

Стоит отметить еще один интересный эффект, описанный в [8]. Если  $\beta$  не

превышает  $128 \times 10^3$ , на больших временах можно наблюдать так называемое «двухканальное решение». Область течения поделилась на несколько крупных плоских участков с характерным для каждого из них значением плотности, полей и скоростей, причем значение плотности на разных участках может довольно сильно отличаться. Такая картина характерна для моделей с большим начальным полем. Турбулентность имеет вытянутую вдоль  $x$  структуру, течение в которой в основном происходит в плоскости  $xu$ . Причиной появления этой крупномасштабности могут быть периодические граничные условия и малый размер счетной области: в модели с  $\beta = 4 \times 10^3$  длина волны  $\lambda_{\text{crit}} = 0.11 l_z$  и альфвеновская волна помещается в область всего 10 раз, в то время как характерный масштаб турбулентности может быть больше. Тем не менее, наличие подобных крупных структур, вытянутых в плоскости  $xu$  было рассмотрено еще в работе Голдрича и Линден-Бела [10], причем в этой работе речь шла о *гидродинамических* уравнениях.

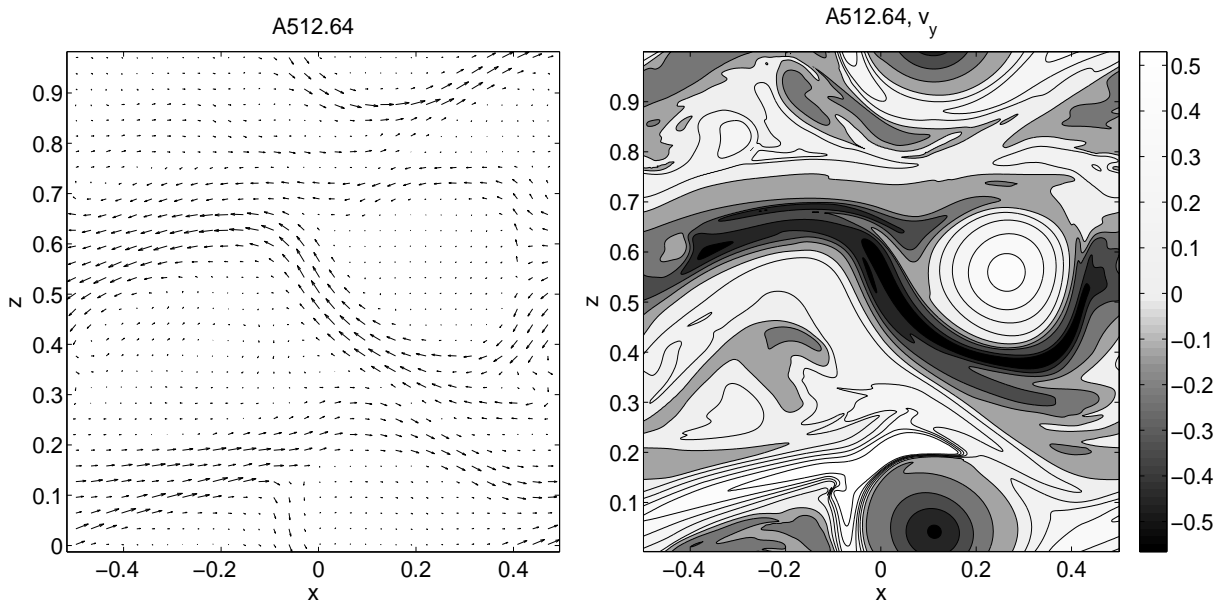


Рис. 4: Слева: возмущения вектора скорости в плоскости  $xz$ , модель A512.64, 60 оборотов. Максимальный по модулю вектор равен  $0.61 c_\tau$ . Справа: возмущения  $\delta u_y / c_\tau$  в модели A512.64, 60 оборотов

Кроме того, повышая  $\beta$  вплоть до  $512 \times 10^3$  или  $1024 \times 10^3$ , увидим что характерная вытянутая вдоль  $x$  структура течения сохраняется, что говорит в пользу того, что периодические граничные условия не сильно влияют на картину течения. На рисунке 6 изображены графики тороидальной компоненты магнитного поля для моделей A1024.512 и .1024, на примере которых хорошо видна крупномасштабность течения.

Крупномасштабность возмущений может быть объяснена наличием силь-



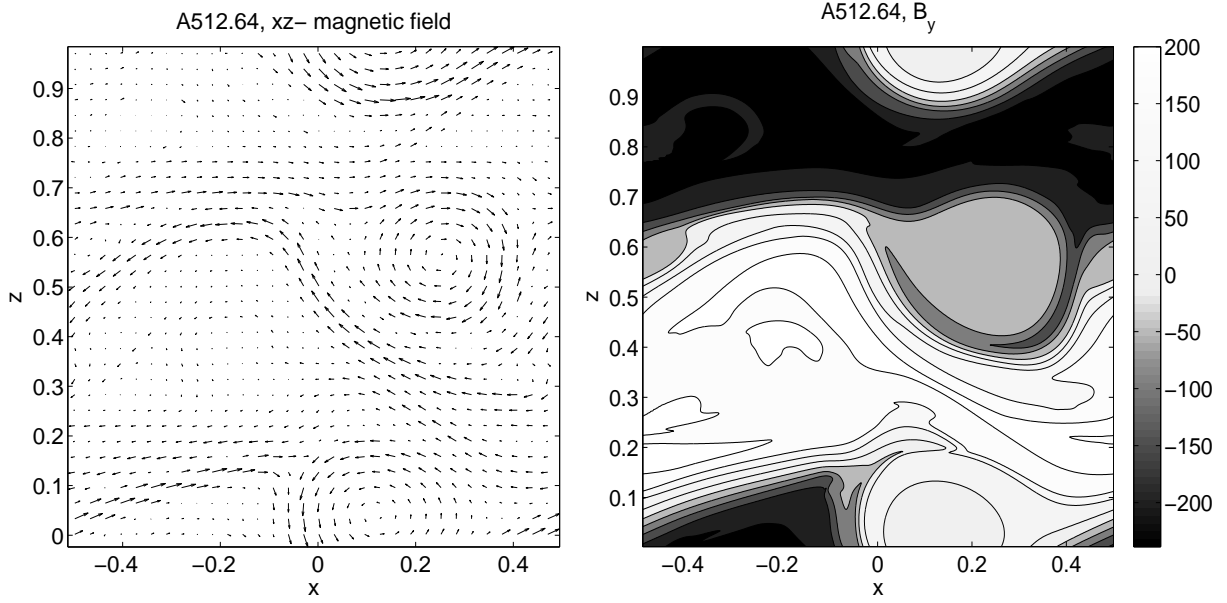


Рис. 5: Распределение возмущений полоидального магнитного поля в модели A512.64, 60 оборотов (слева). Максимальное достигаемое по модулю значение  $122 B_{z0}$ . Справа – возмущения  $\delta B_y / B_{z0}$  в этой же модели, измерены в единицах  $B_{z0}$ .

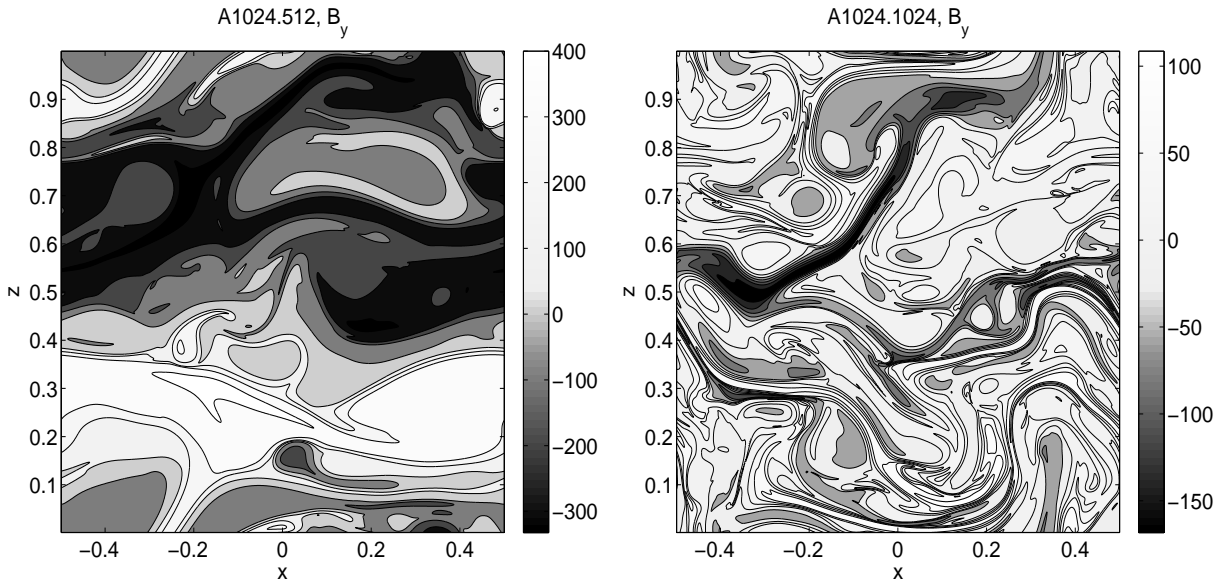


Рис. 6: Распределение возмущений  $\delta B_y / B_{z0}$ , для  $\beta \simeq 0.5 \times 10^3$  (слева) и  $\beta \simeq 10^3$  (справа),  $t = 30$  оборотов.

ных магнитных полей на поздних стадиях развития турбулентности, в сотни раз превышающих начальное поле  $B_{z0}$ . Этот вывод можно сделать основываясь на линейной зависимости длин альфвеноских волн от величины магнитного поля.

#### 4.1 Аккреция

Целью изучения магниторотационной неустойчивости является подробное изучение механизмов аккреции. Аккреционные диски образуются в основном в

двойных звездных системах, одна из звезд в которых компактна (например, черная дыра или нейтронная звезда). Вещество с большой звезды притягивается на компактный объект, и при наличии ненулевого углового момента образуется газовый диск. Если в установившемся газовом диске отсутствуют механизмы переноса углового момента от центра к периферии, то никакой аккреции не будет. Для того, чтобы вещество начало падать на компактную звезду в кеплеровском диске должно присутствовать трение между слоями вещества, движущимися с разной угловой скоростью. Величина молекулярной вязкости в таких условиях пренебрежимо мала и не может привести к наблюдаемым темпам аккреции, поэтому основным механизмом появления вязкости в таких дисках считается турбулентность (см. [11]).

Турбулентные напряжения входят в уравнения Рейнольдса для среднего течения как градиент тензора

$$\nabla_i w_{ij} = \nabla_i \left( \overline{\rho v_i v_k} - \frac{B_i B_j}{4\pi} \right),$$

где  $v_i$  и  $B_i$  – возмущения скорости и поля в турбулентном потоке. Так как найти возмущения аналитически в каждой точке не представляется возможным, по аналогии с молекулярной вязкостью вводят коэффициент турбулентной вязкости и записывают тензор турбулентных напряжений так же, как тензор вязких напряжений в уравнении Навье-Стокса. Для кеплеровского диска интересующая нас  $r\varphi$ - компонента:

$$w_{r\varphi} = -\eta_t r \frac{\partial \Omega_k}{\partial r}, \quad (26)$$

где  $\eta_t$  – коэффициент турбулентной вязкости, который можно записать через характерные масштаб и скорость турбулентности:

$$\eta_t = \frac{1}{3} \rho v_t l_t.$$

Так как  $v_t$  и  $l_t$  нам тоже неизвестны, то произведение этих параметров заменяют на известное нам произведение скорости звука и толщины диска, умножая все это на безразмерный параметр  $\alpha$ :

$$\eta_t = \frac{1}{3} \rho \alpha (c_\tau 2h), \quad (27)$$

где  $h = c_\tau / \Omega_k$  – полутолщина кеплеровского диска. В этом заключается так называемая модель  $\alpha$ -диска, предложенная Шакурой и Сюняевым в 1972-73

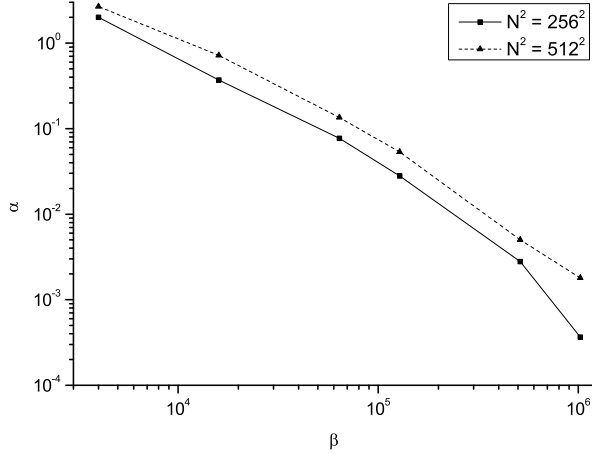


Рис. 7: Зависимость  $\alpha$  от  $\beta$  в логарифмическом масштабе по обоим осям, для сеток  $256^2$  и  $512^2$

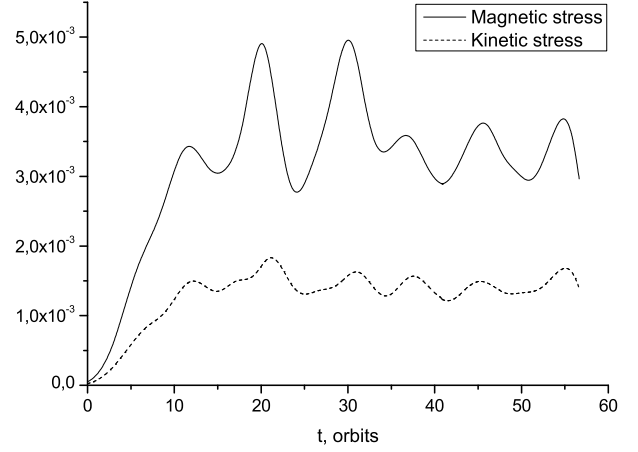


Рис. 8: Развитие магнитных и кинетических напряжений со временем в модели A512.512. Пунктиром обозначена кинетическая часть тензора  $w_{r\varphi}$ .

годах (см., например, [12]). Подставляя в (26) выражения для кеплеровской скорости и турбулентную вязкость из (27), получим простое выражение для тензора напряжений:

$$w_{r\varphi} = \frac{2}{3} \rho \alpha \frac{c_\tau}{\Omega_K} \frac{3}{2} \Omega_K = \alpha \rho c_\tau^2 = \alpha p_0, \quad (28)$$

где  $p_0$  – начальное (среднее) газовое давление.

При численном решении задачи о развитии турбулентности численно, возмущения скорости и полей для нас поностью известны. Таким образом можно вычислить параметр  $\alpha$  как отношение тензора напряжений к среднему давлению:

$$\alpha = \frac{\overline{\rho v_r v_\varphi - \frac{B_r B_\varphi}{4\pi}}}{p_0}. \quad (29)$$

Полученные в результате вычислений значения  $\alpha$  меняются с изменением параметра  $\beta$ . Зависимость имеет характер  $\sim \beta^{-1}$ , что и следовало ожидать, так как  $\alpha$  квадратично по полю (формула 29). Кроме того, эта величина меняется с изменением сетки: увеличивая разрешение с  $256^2$  до  $512^2$ ,  $\alpha$  возрастает примерно в два раза, как и энергия. Зависимость параметра от  $\beta$  и  $N^2$  изображена на рисунке 7. Зависимость коэффициента турбулентной вязкости от начальных параметров позволяет сделать предположение о том, что вводить единый параметр  $\alpha$  для всего астрофизического диска не целесообразно.

Установлено, что при всех параметрах  $\beta$  магнитная часть тензора  $w_{r\varphi}$  в несколько раз больше кинетической. На рисунке 8 изображены сглаженные

функции, отвечающие двум слагаемым в формуле (29), второе слагаемое взято вместе со знаком «минус». Для изображенного случая магнитная часть более чем в два раза превышает кинетическую. С увеличением начального поля эта разница только возрастает.

Во всех расчетах средние по расчетной области кинетические и магнитные напряжения получились положительными. По отношению к первым это говорит еще и о том, что угловой момент будет отводиться к периферии диска, так как первое слагаемое в числителе (29) есть не что иное как поток углового момента:  $F = \rho v_r v_\varphi$ . Фактически, это означает, что отрицательные возмущения угловой скорости «падают» на центр диска, а положительные – выносятся к периферии.

Интересно узнать, как будет вести себя показатель турбулентной вязкости с понижением начального давления. Чтобы длины волн при этом оставались постоянными, нужно пропорционально уменьшать квадрат скорости звука, так как согласно (25):

$$\lambda_{\text{crit}} \sim \frac{v_a}{\Omega_{\text{к}}} = \frac{B_{z0} c_\tau}{\Omega_{\text{к}} \sqrt{4\pi p_0}}.$$

За основу была взята модель с  $\beta = 512 \times 10^3$ , давление и звук уменьшались в  $\varkappa = 4, 16$  и  $64$  раза и проводились вычисления. В базовой модели, с сеткой  $256^2$  параметр  $\alpha = 3.8 \times 10^{-3}$ . При понижении давления получим соответственно  $2.3 \times 10^{-3}$ ,  $5.6 \times 10^{-3}$  и  $1.8 \times 10^{-2}$ . На первый взгляд, такой результат противоречит ожидаемой линейной зависимости параметра  $\alpha$  от  $\varkappa$ , о чем говорит формула (29). Нелинейная зависимость связана с тем, что для сохранения числа длин волн, помещающихся в область  $l_x = l_z = 1$ , мы делим  $c_\tau^2$  на тот же коэффициент  $\varkappa$ , что и давление. Стоит заметить, что при уменьшении скорости звука уменьшается и толщина реального кеплеровского диска  $h \sim c_\tau$ . В результате, при больших  $\varkappa$  ни о каком кеплеровском диске в нашей модели речи нет, так как полутолщина  $h$  становится в несколько раз меньше расчетной области. Полученный результат показывает, что величина начального магнитного поля, а точнее отношение магнитного давления к газовому играет существенную роль в дисковой аккреции. Повышение магнитного поля, или понижение давления приводят к росту турбулентной вязкости, и, соответственно, к увеличению темпов аккреции.

## 5. Заключение

Нет сомнений, что магнитное поле играет ключевую роль в развитии дисковой аккреции. Уменьшение начального поля влечет за собой снижение темпов отвода углового момента от центра к периферии. При полном отсутствии поля кеплеровский диск устойчив относительно малых возмущений, в то время как турбулентность в газовом диске считается одним из основных механизмов возникновения аккреции. Эта тенденция прослеживается в зависимости показателя  $\alpha$  турбулентной вязкости от значения плазменного параметра.

В ходе вычислений выявлено несколько интересных особенностей решения нелинейной системы МГД-уравнений применительно к конфигурациям, подверженным магниторотационной неустойчивости. Во-первых, зависимость показателя роста возмущений и скорость отвода углового момента от величины начального магнитного поля. Во-вторых, следует отметить крупномасштабность турбулентных течений по отношению к размеру расчетной области, связанную с большими значениями турбулентного магнитного поля. Помимо этого, энергия возмущений в численной модели растет с увеличением числа расчетных ячеек на единицу длины области – этот эффект требует отдельного рассмотрения.

Двумерность модели накладывает некоторые ограничения на развитие турбулентности в газовом диске. Например, это проявляется в том, что альфвеновские волны в двумерной модели на начальной стадии развития неустойчивости распространяются исключительно вдоль оси вращения. В дальнейшем планируется решать задачу о магниторотационной неустойчивости в полости трехмерной геометрии.

## Список литературы

- [1] Velikhov, E. P. (1959). "Stability of an Ideally Conducting Liquid Flowing Between Cylinders Rotating in a Magnetic Field". Soviet Physics JETP 36: 1398–1404
- [2] Steven A. Balbus & John F. Hawley, A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. I. Linear Analysis. ApJ, vol. 376, July 20, 1991, p. 214-233
- [3] Steven A. Balbus, An Exact, Three-Dimensional, Time-Dependent Wave Solution in Local Keplerian Flow. 2006 ApJ 652 1020
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, том 8 – Электродинамика сплошных сред, Физматлит, 2006г .
- [5] A. Mignone A simple and accurate Riemann solver for isothermal MHD, J. Comput. Phys. 225 (2007) 1427-1441.
- [6] A. Harten, P. D. Lax, B. van Leer, On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, SIAM Rev. 25 (1983) 35.
- [7] T. Miyoshi, K. Kusano, A multi-state HLL approximate Riemann solver for ideal magnetohydrodynamics, J. Comput. Phys. 208 (2005) 315.
- [8] John F. Hawley & Steven A. Balbus, A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. III. Long-term Evolution in a Shearing Sheet, The Astrophysical Journal, 400:595-609, 1992 December 1.
- [9] P. Goldreich, D. Lynden-Bell, I. Gravitational stability of uniformly rotating disks, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 130, p.97.
- [10] P. Goldreich, D. Lynden-Bell, II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 130, p.125.
- [11] В. М. Липунов, Астрофизика нейтронных звезд, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
- [12] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, Black holes in binary systems. Observational appearance, Astron. Astrophys., Vol. 24, p. 337 - 355, 1973.