[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/default.asp) • [Препринт № 3 за 2011 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-3)

Рябенький В.С.

Управление в реальном времени активным уменьшением шума в трехмерной подобласти с помощью синхронной разведки шумом

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рябенький В.С. Управление в реальном времени активным уменьшением шума в трехмерной подобласти с помощью синхронной разведки шумом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 3. 24 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-3

§ 1. Обозначения и предварительная словесная постановка задачи управления

1.1. Область, в которой распространяется звук

Пусть задано число $T > 0$, и в каждый момент времени t, $0 \le t \le T$, задана ограниченная связная область $\Omega(t)$ в пространстве (t, x, y, z), внешнюю границу которой обозначим $\partial\Omega_{ex}(t)$, а внутреннюю – $\partial\Omega_{in}(t)$. При этом допускается, что форма и даже связность области $\Omega(t)$ зависят от времени, так что граница $\partial_{in}\Omega(t)$ при некоторых $t \in [0, T]$ может быть пустым множеством.

Пусть $\Omega(t)$ разделена на две подобласти $\Omega^{+}(t)$ и $\Omega^{-}(t)$. Для простоты будем считать, что граница $\Gamma = \bar{\Omega}^{+} \bigcap \bar{\Omega}^{-}$ не зависит от времени.

1.2. Уравнение и краевые условия

Пусть в области $\Omega(t)$, $0 \le t \le T$, евклидова пространства точек (t, x, y, z) определено некоторое скалярное поле $u(t, x, y, z)$. В частности, это может быть акустическое поле. Мы условимся для наглядности называть функцию $u(t, x, y, z)$, $(t, x, y, z) \in \Omega(t)$, акустическим полем и в общем случае.

Предположим, что $u(t, x, y, z)$ удовлетворяет некоторому уравнению

$$Lu = f(t, x, y, z), \quad (t, x, y, z) \in \Omega(t), \tag{1}$$

где L– некоторый линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, характеризующими среду распространения звука в точке (t, x, y, z), а $f(t, x, y, z)$ – плотность источников звука в точке (t, x, y, z).

Пусть $u(t, x, y, z)$ удовлетворяет линейным однородным начальным условиям, а также некоторым линейным однородным краевым условиям:

$$lu\big|_{t=0} = 0; \qquad lu\big|_{\partial\Omega(t)} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что условие $lu\big|_{\partial\Omega(t)} = 0$ связывает значения $u(t, x, y, z)$ только при каждом заданном значении t. Относительно смешанной начально-краевой задачи (1), (2) будем считать, что в рассматриваемом классе U функций $u(t, x, y, z)$ она имеет одно и только одно решение при любой $f(t, x, y, z)$ из рассматриваемого класса F функций $f(t, x, y, z)$.

§ 2. Разностная модель распространения звука

2.1. Введем в евклидовом пространстве (t, x, y, z) сетку точек $m = \left(m_t\tau, m_x h, m_y h, m_z h\right)$, где $\tau > 0$ и $h > 0$ – шаги по времени и пространству соответственно. Совокупность точек m, лежащих строго внутри области Ω, обозначим M. Каждой точке $m \in M$ сопоставим уравнение вида

$$\sum_{n\cup N_{m_1}} a_{mn}u_n = f_m, \qquad m \in M\,, \tag{3}$$

где N_m – множество, состоящее из следующих девяти точек $n, n \in N_m$:
$n = \left(m_t\tau, m_xh, m_yh, m_zh\right)$; $n = \left((m_t \pm 1)\tau, m_xh, m_yh, m_zh\right)$;
$n = \left(m_t\tau, (m_x \pm 1)h, m_yh, m_zh\right)$,
$n = \left(m_t\tau, m_xh, (m_y \pm 1)h, m_zh\right)$, $n = \left(m_t\tau, m_xh, m_yh, (m_z \pm 1)h\right)$.
Коэффициенты a_{mn}, $n \in N_m$, а также правые части f_m заданы, причем $a_{mn} = 1$, если $n = \left((m_t + 1), m_xh, m_yh, m_zh\right)$, т.е. разностная схема (3) – явная и разрешенная относительно u_n на верхнем по времени слое $t = \left(m_t + 1\right)\tau$.

Решения $u_N = \{u_n\}$ уравнения (3) определены на множестве точек $N = \bigcup N_m$.

Дополним уравнение (3) некоторыми линейными однородными граничными условиями, связывающими значения u_n решения уравнения (3) в некоторых точках $n \in N$, $n = \left(m_t\tau, n_xh, n_yh, n_zh\right)$, лежащих на гиперплоскости $h\ t = m_t\tau$ на расстоянии менее $2h$ от граничных поверхностей $\partial\Omega_{ex}$ и $\partial\Omega_{in}$. Будем предполагать, что среди этих условий есть начальное условие $u_n = 0$, если $n_t = 0$ или $n_t = 1$.

Обозначим через U_N линейное пространство всех функций $u_N = \{u_n\}$, $n \in N$, удовлетворяющих начальным и краевым линейным однородным условиям, а затем дополним уравнение (3) следующим включением

$$u_N \in U_N\,. \tag{4}$$

Включение (4) играет, таким образом, роль граничного условия.

Предположим, что полученная разностная краевая задача (3), (4) имеет единственное решение при любой правой части f_m, $m \in M$. Более того, предположим, что разностная схема (3), (4) аппроксимирует дифференциальную задачу (1), (2) и устойчива. Тогда, как известно, имеет место сходимость решения u_N задачи (3), (4) к решению $u(t,x,y,z)$ задачи (1), (2). В силу этого свойства разностную краевую задачу (3), (4) можно рассматривать как некоторую разностную модель задачи (1), (2) о распространении звука, зависящую от τ и h и все более точную по мере уменьшения шагов сетки τ и h. Будем считать, что шаги τ и h фиксированы, но настолько малы, что схема (3), (4) описывает процесс (1), (2) с пренебрежимо малой погрешностью.

2.2. Некоторые обозначения

Разобьем сеточное множество M на два непересекающихся подмножества M^+ и M^-, отнеся к M^+ те и только те точки m, которые лежат внутри подобласти Ω^+:

$M^+ = \left\{ m \in M \bigcap \Omega^+ \right\}, \qquad M^- = M \setminus M^+$.

Разобьем задачу (3), (4) на задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^+ = f_m^+, \qquad m \in M$$

$$u_N^+ \in U_N, \qquad f_m^+ = \begin{cases} f_m, & \text{если } m \in M^- \\ 0, & \text{если } m \in M^+ \end{cases} \tag{5}$$

и на задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = f_m^-, \qquad m \in M$$

$$u_N^- \in U_N, \tag{6}$$

$$f_m^- = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^- \\ f_m, & \text{если } m \in M^+. \end{cases}$$

Обозначим

$N^+ = \bigcup N_m,\ m \in M^+;\quad N^- = \bigcup N_m,\ m \in M^-;\ \gamma = N^+ \bigcap N^-\ \ g_m$.

Множество γ будем называть сеточной границей между подобластями N^+ и N^- области N.

Заметим, что

$$u_N = u_N^+ + u_N^-. \tag{7}$$

2.3. Предположение

Будем предполагать, что пространство U_N и граница γ согласованы так, что для каждой функции u_N, $u_N \in U_N$, имеют место также включения

$$\Theta_N(N^+) u_N \in U_N; \quad \Theta_N(N^-) u_N \in U_N, \tag{8}$$

а следовательно, и включение

$$\Theta_N(\gamma) u_N \in U_N. \tag{9}$$

Здесь $\Theta_Y(X)$ – характеристическая функция подмножества $X \subset Y$.

2.4. Постановка задач активного управления

Наряду с задачей (3), (4) рассмотрим задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m, \qquad m \in M$$

$$z_N \in U_N, \tag{10}$$

где $m \in M$, функция – параметр.

Определение 1. Функцию g_m, $m \in M$, будем называть активным управлением решением u_N задачи (3), (4), вызывающим переход от решения $u_N \in U_N$ исходной задачи (3), (4) к решению $z_N \in U_N$ управляемой задачи (10).

Теорема 1. Пусть z_N, $z_N \in U_N$, – произвольный элемент пространства U_N. Существует, и притом только одно, активное управление $g_m, m \in M$, переводящее решение u_N задачи (3), (4) в решение z_N задачи (10).

Доказательство. Очевидно, что z_N является решением задачи (10) в том и только в том случае, если

$$g_m = \sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n - f_m, \quad m \in M . \tag{11}$$

Это замечание устанавливает не только существование и единственность искомого управления $g_m, m \in M$, но и явно задает $g_m, m \in M$, в виде формулы (11), где z_N – заданный управляемый процесс.

Теорема 2. Зададим функции $z_N^{(k)}, k = 1,2$, соответственно формулами

$$z_n^{(1)} = \begin{cases} u_n^+, & \text{если} \quad n \in N^- \\ u_n, & \text{если} \quad n \in N \setminus N^- = N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{12}$$

$$z_n^{(2)} = \begin{cases} u_n^+, & \text{если} \quad n \in N^- \\ u_n^- + 2u_n^+, & \text{если} \quad n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{13}$$

и функцию $z_N^{(\varepsilon)}$ – формулой

$$z_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} u_n^+ + \varepsilon u_n^-, & \text{если} \quad n \in N^- \\ \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^+ + u_n^-, & \text{если} \quad n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}, \tag{14}$$

где ε – вещественное число, отличное от нуля, $\varepsilon \neq 0$. Тогда активные управления $g_m^{(1)}, g_m^{(2)}$ и $g_m^{(\varepsilon)}, m \in M$, переводящие решение u_N задачи (3), (4) в решения $z_N^{(1)}, z_N^{(2)}$, и $z_N^{(\varepsilon)}$, имеют соответственно следующий вид:

$$g_m^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \ m \in M^- \\ -\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n^- \right], & \text{если} \ m \in M^+ \end{cases} \tag{12*}$$

$$g_m^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \ m \in M^- \\ -\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n \right], & \text{если} \ m \in M^+ \end{cases} \tag{13*}$$

$$g_m^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \ m \in M^- \\ (\varepsilon - 1) \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) (u_n^- + \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^+) \right], & \text{если} \ m \in M^+ \end{cases}, \tag{14*}$$

где

$$\Theta_N(X)z_n = \begin{cases} z_n, & \text{если } n \in X \\ 0, & \text{если } n \notin X, \quad n \in N \end{cases}.$$

Заметим, что функции $g_m^{(k)}$ и $g_m^{(\varepsilon)}$ могут отличаться от нуля, только если $m \in M^+$ и одновременно N_m пересекается с γ.

Обсудим содержательный смысл теоремы 2, а затем докажем эту теорему. Выполнение (12) в случае активного управления (12*) означает полную защиту акустического поля $z_N^{(1)}$ в точках $n \in N^-$ от влияния источников звука f_m, локализованных в точках $m \in M^+$, при сохранении поля $z_n^{(1)} = u_n$ неизменным в точках $n \in N \setminus N^- = N^+ \setminus \gamma$ дополнительной к N^- подобласти.

Выполнение (13) в случае активного управления (13*) означает полную защиту акустического поля $z_N^{(2)}$ в точках $n \in N^-$ от влияния источников $f_m, m \in M^+$, локализованных на M^+, при удвоении влияния источников $f_m, m \in M^-$, на поле в точках $n \in N \setminus N^-$.

Выполнение (14) при активном управлении (14*) означает уменьшение в ε^{-1} раз влияния источников $f_m, m \in M^+$, на поле $z_N^{(\varepsilon)}$ в точках $n \in N^-$ и одновременное усиление во столько же раз влияния источников $f_m, m \in M^-$, на поле в точках n дополнительной к N^- подобласти $N \setminus N^- = N^+ \setminus \gamma$.

Заметим еще, что в случае отсутствия источников звука f_m в точках $m \in M^-$, т.е. в случае $u_n^- \equiv 0, n \in N$, равенства (12) и (13) совпадают и приобретают вид

$$z_n^{(1)} \equiv z_n^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \in N^- \\ u_n, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}. \tag{15}$$

Управления (12*) и (13*) в этом случае можно интерпретировать как полную защиту тишины в точках $n \in N^-$ при сохранении акустического поля в точках $n \in N^+ \setminus \gamma$ дополнительной к N^-сеточной подобласти $N \setminus N^- = N^+ \setminus \gamma$.

Отметим еще для дальнейшего, что в случае $f_m = 0, m \in M^-$, т.е. в случае $u_n^+ \equiv 0$, $n \in N$, имеет место $u_n \equiv u_n^-$, и условие (14) принимает вид

$$z_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} \varepsilon u_n, & \text{если } n \in N^- \\ u_n, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}. \tag{16}$$

Это означает, что управление (14*) в данном случае уменьшает шум u_n в точках $n \in N^-$ в ε^{-1} раз, сохраняя при этом поле $z_n^{(\varepsilon)} = u_n, \quad n \in N^+ \setminus \gamma$, в точках $n \in N \setminus N^-$ дополнительной подобласти. Доказательству теоремы 2 предпошлем следующие две леммы.

Лемма 1. Решение v_N^- задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^- = g_m^-, \qquad m \in M \tag{17}$$

$$v_N^- \in U_N \quad , \tag{18}$$

где

$$g_m^- = \begin{cases} 0, & \text{если } \ m \in M^- \\ -\sum a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n^- \right], & \text{если } \ m \in M^+ \end{cases} ,$$

задается следующей формулой:

$$v_n^- = \begin{cases} -u_n^-, & \text{если } \ n \in N^- \\ 0, & \text{если } \ n \in N^+ \backslash \gamma \end{cases} . \tag{19}$$

Напомним, что функция $u_n^-, n \in N$, введена выше.

Доказательство леммы 1. Проверим, что v_N^-, задаваемая (10), является решением задачи (17), (18). Сначала убедимся, что v_N^- удовлетворяет уравнению (17) для $m \in M^-$. Действительно,

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^- = 0, \quad \text{если } \ m \in M \subset M^-, \tag{20}$$

поскольку $v_n^- = -u_n^-$ при $n \in N^-$, а функция u_N^- в силу своего определения удовлетворяет однородному разностному уравнению

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = 0, \quad \text{если } \ m \in M^- .$$

Проверим теперь, что функция v_N^- удовлетворяет уравнению (17) при $m \in M^+$. Очевидно, в силу (19)

$$v_n^- = -\Theta_N(\gamma) u_n^-, \quad \text{если } \ n \in N^+ .$$

Поэтому

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^- = -\sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n^- \right] = g_m^-, \qquad \text{если} \qquad m \in M^+ .$$

Таким образом, тождество (17) доказано. Далее, включение $v_N^- \in U_N$ имеет место, поскольку функция u_N^- принадлежит к U_N по своему определению, а вместе с включением $u_N^- \in U_N$ в силу предположения о согласовании пространства U_N и сеточной границы γ включение

$$\Theta_N(N^-) u_N^- \in U_N$$

также имеет место. Поскольку $v_N^- = -\Theta_N(N^-) u_N^-$, включение $v_N^- \in U_N$ также имеет место. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Решение v_N^+ задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^+ = g_m^+, \qquad m \in M \ , \tag{21}$$

$$v_N^+ \in U_N \ , \tag{22}$$

где

$$g_m^{+} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^{-} \\ -\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n^{+} \right], & \text{если } m \in M^{+} \end{cases}, \tag{23}$$

задается формулой

$$v_n^{+} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \in N^{-} \\ u_n^{+}, & \text{если } n \in N^{+} \setminus \gamma \end{cases}. \tag{24}$$

Доказательство леммы 2. Проверим, что функция v_N^{+}, задаваемая формулой (24), в случае задания g_M^{+} формулой (23) является решением задачи (21), (22). Докажем, что v_N^{+} удовлетворяет уравнению (21). Очевидно, что v_N^{+} удовлетворяет (21) при $m \in M^{-}$. Пусть теперь $m \in M^{+}$. Заметим, что сеточные области $N, N^{-}, N^{+}, \gamma = N^{+} \bigcap N^{-}$ связаны соотношениями

$$N = N^{-} \bigcup (N \setminus N^{-}) = N^{-} \bigcup (N^{+} \setminus \gamma),$$

причем множества N^{-} и $N^{+} \setminus \gamma$ не пересекаются. Поэтому

$$v_n^{+} = \Theta_N(N^{-}) v_n^{+} + \Theta_N(N^{+} \setminus \gamma) v_n^{+}, \quad n \in N. \tag{25}$$

В силу (24) первое слагаемое в равенстве (25) обращается в нуль. Поэтому имеют место равенства

$$v_n^{+} = \Theta_N(N^{+} \setminus \gamma) u_n^{+} = \Theta_N(N^{+}) u_n^{+} - \Theta_N(\gamma) u_n^{+}. \tag{26}$$

В силу (26) получим

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^{+} = \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(N^{+}) u_n^{+} \right] - \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n^{+} \right], \quad m \in M^{+}. \tag{27}$$

Уменьшаемое в (27) обращается в нуль в силу определения функции $u_n^{+}, \ n \in N$. Поэтому

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^{+} = g_m^{+}, \qquad m \in M^{+}.$$

Таким образом, функция (24) обращает уравнение (21) в тождество. Включение (22) для функции (24) имеет место в силу справедливости включения $u_N^{+} \in U_N$ и предположения о согласовании U_N и γ, в силу которого имеет место также $v_N = \Theta_N(N^{+} \setminus \gamma) u_n^{+} \in U_N$. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим следующие очевидные равенства

$$g_m^{(1)} = g_m^{-}, \tag{28}$$

$$g_m^{(2)} = g_m^{-} + g_m^{+}, \tag{29}$$

$$g_m^{(\varepsilon)} = (1-\varepsilon) g_m^{-} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) g_m^{+}. \tag{30}$$

Поэтому функции $z_N^{(1)}, z_N^{(2)}, z_N^{(\varepsilon)}$, задаваемые формулами (12)-(14), являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n^{(1)} = f_m + g_m^-, \quad m\in M \\ &z_N^{(1)} \in U_N \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n^{(2)} = f_m + g_m^- + g_m^+, \quad m\in M \\ &z_N^{(2)} \in U_N \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n^{(\varepsilon)} = f_m + (1-\varepsilon) g_m^- + \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) g_m^+ \\ &z_N^{(\varepsilon)} \in U_N \end{aligned} . \tag{33}$$

Ввиду линейности задач (31), (32), (33) и лемм 1 и 2 справедливы равенства

$$z_N^{(1)} = u_N + v_N^-,$$

$$z_N^{(2)} = u_N + v_N^- + v_N^+,$$

$$z_N^{(\varepsilon)} = u_N + (1-\varepsilon) v_N^- + \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) v_N^+ ,$$

которые в развернутой форме можно переписать так:

$$\begin{aligned} z_n^{(1)} &= \begin{cases} \left(u_n^- + u_n^+\right) + (-u_n^-) = u_n^+, & \text{если } n\in N^- \\ \left(u_n^- + u_n^+\right) + 0 = u_n, & \text{если } n\in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \\ z_n^{(2)} &= \begin{cases} \left(u_n^- + u_n^+\right) + (-u_n^-) + 0 = u_n^+, & \text{если } n\in N^- \\ \left(u_n^- + u_n^+\right) + 0 + u_n^+ = u_n^- + 2u_n^+, & \text{если } n\in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \\ z_n^{(\varepsilon)} &= \begin{cases} \left(u_n^- + u_n^+\right) + (1-\varepsilon)(-u_n^-) + 0 = u_n^+ + \varepsilon u_n^-, & \text{если } n\in N^- \\ \left(u_n^- + u_n^+\right) + 0 + \left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) u_n^+ = u_n^- + \frac{1}{\varepsilon} u_n^+, & \text{если } n\in N^+ \setminus \gamma \end{cases} . \end{aligned} \tag{34}$$

Формулы (34), (35) , (36) совпадают соответственно с формулами (12), (13), (14), что и доказывает теорему 2.

Замечание. Подчеркнем, что формулы (12), (13) и (14) устанавливают связь между значениями u_N^-, u_N^+ неуправляемого процесса (3), (4) и значениями соответствующего управляемого процесса $z_N^{(1)}, z_N^{(2)}$ или $z_N^{(\varepsilon)}$, но при этом значения самих функций $u_N^-, u_N^+, z_N^{(1)}, z_N^{(2)}$ и $z_N^{(\varepsilon)}$ могут оставаться неизвестными.

§ 3. Активные управления процессами в реальном времени и в условном времени

3.1. ***Определение 2.*** Будем говорить, что задача построения активного управления g_M процессом u_N, преобразующего решение u_N задачи (3), (4) в решение z_N задачи

$$\sum_{n\in N_M} a_{mn} z_n = f_m + g_m, \quad m \in M, \qquad z_N \in U_N \tag{35}$$

имеющее заданные свойства, поставлена в реальном времени, если выполнены следующие два требования:

1°. Процесс (3), (4) подлежит управлению при первом и единственном его протекании.

2°. В текущий момент времени $t = p\tau$, когда должно быть включено очередное управляющее воздействие $g_m, m \in M, m_t = p$, значения $f_m, m \in M$, при $m_t > p$, еще неизвестны.

Определение 3. Будем говорить, что задача построения активного управления решением u_N проблемы (3), (4) поставлена в условном времени, если выполнено одно из следующих двух условий 1°, 2°.

1°. Подлежащий управлению процесс u_N можно предварительно провести без вмешательства управления с целью записать и использовать полученную при этом информацию для построения управления $g_m, m \in M$, при повторной, управляемой реализации процесса.

2°. В текущий момент $t = p\tau$ уже известны значения a_{mn}, f_m и граничные условия при $m_t > p$.

Построение одного и того же активного управления, переводящего исходный процесс u_N в процесс z_N в реальном времени, вообще говоря, более трудная задача, чем та же задача в условном времени, так как она должна быть решена при дополнительных ограничениях, сформулированных в Определении 2.

Мы в этой работе будем заниматься задачами управления в реальном времени, ограничившись лишь краткими иллюстрациями Определений 2, 3.

3.2. Примеры алгоритмов защиты тишины в подобласти

Будем предполагать, что $f_m = 0$, если $m \in M^-$, так что $u_N^+ = 0$. Тогда решение u_N задачи (3), (4) имеет вид

$$u_N = u_N^- + u_N^+ = u_N^-. \tag{36}$$

Акустическое поле u_n отлично от нуля в точках $n \in N^-$ только за счет шума u_n^-, создаваемого источниками $f_m, m \in M^+$. Активное управление, полностью защищающее тишину в точках $n \in N^-$, в соответствии с теоремой 2 задается формулой

$$g_m^{(1)} = \begin{cases} 0, & m \in M^- \\ -\sum a_{mn}\left[\Theta_N(\gamma)u_n\right], & \text{если } m \in M^+ \end{cases}. \tag{37}$$

При этом управляемое поле $z_N^{(1)}$ задается формулой

$$z_n^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \in N^- \\ u_n, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}. \tag{38}$$

Укажем примеры данных о задаче (3), (4) и управляемом процессе $z_N^{(1)}$, известных к текущему моменту $t = p\tau$, $p \geq 0$, знание которых позволяет построить управление $g_m^{(1)}$ в момент $t = m_t\tau = p\tau$. Мы построим также соответствующие алгоритмы обработки этих входных данных, приводящие к искомому $g_m^{(1)}$ и позволяющие продолжать процесс при $m_t = p+1,\ p = 2, \ldots, \dfrac{T}{\tau}$.

Пример 1. Пусть в текущий момент времени $t = p\tau$ полностью задана система (3), (4), т.е. следующие данные: подмножества $M_t, M_t^+, M_t^-, N_t, N_t^+, N_t^-, \gamma$, лежащие на гиперплоскости $t = p\tau$; коэффициенты a_{mn}, правые части f_m, краевые условия (2).

Этот набор входных данных позволяет вычислить $g_m^{(1)}$ при $m_t = p$, а также возобновить исходный набор перечисленных входных данных для $m_t = p+1$. При этом предполагается, что граничные условия, выделяющие подпространство U_N и относящиеся к моменту $t = m_t\tau = (p+1)\tau$, становятся в момент $t = (p+1)\tau$ известны. Алгоритм вычисления $g_m^{(1)}, t = n_t\tau = p\tau$, состоит в следующем. По явной разностной схеме, используя уже известные при $t = (p-1)\tau$ и $t = p\tau$ значения $u_n, n_t = p-1, n_t = p$, вычисляем u_n, $n \in \gamma, n_t = p+1$. Затем вычисляем по формуле (37) значение $g_m^{(1)}, m_t = p$. Время вычисления $g_m^{(1)}$ при $m_t = p$ по указанным нетрудоемким формулам считаем пренебрежимо малым. В момент $t = p\tau$, когда $g_m^{(1)}$ уже вычислено, включаем найденное управляющее воздействие $g_m^{(1)}$, $m_t = p$. После этого осуществляется второй этап вычислений для перехода на слой $t = (p+1)\tau$. Вычисляем значения $u_n, n \in N \setminus M, n_t = p+1$, используя для этого известные по предположению значения $u_n, n \in M, n_t = p$ и уже известные в момент $t = (p+1)\tau$ граничные условия.

После того как $u_n, n \in N, n_t = p$, найдено, вычисляем по явной разностной схеме величины $u_n, n \in M \subset \setminus N,\ n_t = p+1$, что завершает переход от момента $t = p+1$. Этот второй этап вычислений для получения исходных данных при $t = (p+1)\tau$ должен быть осуществлен за время τ, то есть к моменту $t = (p+1)\tau$, включая сам этот момент..

Прежде чем рассмотреть второй пример исходных данных для построения управления $g_m^{(1)}$, введем следующее понятие приграничных данных.

3.3. Приграничные данные

Определение 4. Зададим параметр $a > 0$ и определим множество $M_{\gamma,a}$ как множество всех точек $m \in M$, которые отстоят от сеточной границы γ на расстоянии ρ, $\rho < a$. Введем $N_{\gamma,a}$, положив

$$N_{\gamma,a} = UN_m, \quad m \in M_{a,\gamma}.$$

Сеточное множество $N_{\gamma,a}$ будем называть приграничной полосой ширины $2a$.

Будем предполагать при этом, что параметр a есть достаточно малое число, при котором

$$N_{\gamma,a} \subset N.$$

Определение 5. Пусть в текущий момент времени заданы числа

$$a_{mn} \text{ и } f_m, \; m_t = p, \; m \in M_{\gamma,a} . \tag{39}$$

Пусть заданы также значения

$$z_n, n \in N_{\gamma,a} \setminus M_{\gamma,a}, \quad n_t = p . \tag{40}$$

Данные (39) и (40) будем называть приграничной, или доступной, информацией о ходе управляемого процесса $z_N = z_N^{(1)}, z_N^{(2)}$ или $z_N^{(\varepsilon)}$.

Замечание. Мы условно называем приграничную информацию (39), (40) «доступной», так как коэффициенты, характеризующие свойства среды и источники f_m в окрестности γ сравнительно легко измерить, а значения $z_n^{(1)}$, $z_n^{(2)}$, $z_n^{(\varepsilon)}$ также можно получить физическими измерениями, если они имеют смысл значений акустического (или другого физического) поля в точке n.

Пример 2. Пусть в текущий момент времени $t = p\tau$ известны краевые условия, входящие в

$$lu_N = 0, \quad \text{при } n \in N^-, \quad t = p\tau, \tag{41}$$

а также все числа

$$a_{mn}, \; f_m, \; m \in M^- \bigcup M_{\gamma a}, \quad n \in N_m \tag{42}$$

и приграничная информация (40). Опишем алгоритм построения $g_M^{(1)}, m \in M, m_t = p$, опирающийся на данные (40)-(42).

Обозначим $A(k)$ следующую пару функций

$$A(k) = \begin{cases} u_n, & \text{если } n \in M^- \bigcup M_{\gamma a}, \quad n_t = k \\ u_n, & \text{если } n \in N^- \bigcup N_{\gamma a}, \quad n_t = k-1 \end{cases} \tag{43}$$

В силу начальных условий (4) таблица $A(1)$ состоит из нулей. Пусть при некотором $p \geq 1$ таблица $A(p)$, уже известна. Для построения управления

$g_m^{(1)}, m \in M$, в момент $t = p\tau$ и для перехода от таблицы $A(p)$ к таблице $A(p+1)$ с целью подготовки к построению $g_m^{(1)}$, $m \in M$, в момент $t = (p+1)\tau$ осуществим следующие шаги.

1º. В момент $t = p\tau$, когда станут известны $f_m, m_t = p$, в тех точках $m \in M, m_t = p$, для которых шаблон N_m пересекается с границей γ, вычисляем $g_m^{(1)}, m \in M, m_t = p$, по формуле (12) и включаем управляющее воздействие $g_m^{(1)}, m_t = p$.

2º. Вычисляем значения

$$u_n,\ n \in N^- \setminus M, \quad n_t = p, \tag{44}$$

используя для этого первую строчку таблицы (43) и однородные граничные условия, связывающие u_n в точках $n, n_t = p$, лежащих вблизи границы $\partial\Omega_{ex}(t)$. Эти граничные условия уже известны в момент $t = p\tau$.

3º. Восполним первую строчку таблицы $A(p)$ значениями u_n в точках

$n \in N^- \setminus M, \qquad n_t = p$.

Восполним первую строчку таблицы $A(p)$ также значениями

$u_n, n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}, \qquad n_t = p$,

известными в силу (40). Восполненную таким образом таблицу $A(p)$, обозначим $\overline{A}(p)$:

$$\overline{A}(p) = \begin{cases} u_n, & \text{если } n \in N^- \bigcup N_{\gamma a},\ n_t = p \\ u_n, & \text{если } n \in N^- \bigcup N_{\gamma a},\ n_t = p-1 \end{cases}.$$

Первая строчка таблицы $\overline{A}(p)$ совпадает со второй строчкой таблицы $A(p+1)$. Первую строчку таблицы $A(p+1)$ вычисляем в силу исходного явного разностного уравнения, используя таблицу $\overline{A}(p)$.

Отметим, что вычисление таблицы $A(p+1)$ должно быть завершено в момент $t = (p+1)\tau$, когда должен быть задействован очередной управляющий импульс $f_m, m \in M, m_t = p+1$ то есть за время τ .

3.4. Привлекательность приграничных данных

Сравним исходные данные, использованные для построения $g_M^{(1)}$ в примерах 1 и 2. В примере 2 мы отказались от знания f_m, $m \notin M^+ \bigcup M_{\gamma a}$, а также от знания граничных условий, определяющих U_N и связывающих значения u_n в точках $n \in N^+$ в момент $t = p\tau$.

Взамен этой труднодоступной информации в примере 2 использована приграничная информация (40). Объем обработки входной информации также существенно сократился.

Возникает вопрос: нельзя ли придумать такой алгоритм построения $g_m^{(1)}$, который основан на использовании только приграничных условий (39), (40)?

3.5. Недостаточность приграничных данных для управления полным подавлением внешнего шума

Ввиду привлекательности приграничных данных, о которой сказано в п.3.4, естественно возникает вопрос о том, нельзя ли придумать алгоритм управлением полной защиты заданной подобласти от внешнего шума на основе обработки одной только текущей приграничной информации об управляемом процессе z_N

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \in N^- \\ u_n, & \text{если} \quad n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \quad . \tag{45}$$

Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть источники звука в защищаемой от внешнего шума подобласти N^- отсутствуют, то есть $f_m = 0$, если $m \in M^-$. Тогда приграничная информация (39), (40), известная об управляемом процессе (45) к некоторому моменту $t = p\tau$ при всех $m_t \le p$, может оказаться недостаточной для построения очередного управляющего импульса

$$g_m = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \in M^-, \quad m_t = p \\ -\sum a_{mn}\left[\Theta_N(\gamma) u_n\right], & \text{если} \quad m \in M^+, \quad m_t = p \end{cases} , \tag{46}$$

поддерживающего полную защиту подобласти N^- от внешнего шума в момент $t = (p+1)\tau$.

Замечание. Доказательство теоремы 3 не используется в дальнейшем, так что при первом чтении можно сразу перейти к § 4.

Доказательство. Построим конкретный пример, доказывающий теорему. Для этого определим множество M, отнеся к нему все те точки

$m, m = (m_t\tau, m_1 h, m_2 h, m_3 h), \quad h = 10^{-2}, \quad \tau = \frac{1}{2}h,$ которые удовлетворяют условиям

$$1 \le m_t \le 10^{-3}, \quad |n_k| \le 10^2, \quad k = 1,2,3 \ , \tag{47}$$

и рассмотрим задачу вида (3), (4)

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u'_n = f_m, \quad m \in M \tag{48}$$

$$u'_N \in U'_N \tag{49}$$

и следующую задачу также вида (3), (4)

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u^*_n = f_m, \quad m \in M \tag{50}$$

$$u^*_N \in U^*_N \quad . \tag{51}$$

Эти две задачи отличаются только условиями (49) и (51), имеющими смысл начально-краевых условий.

В качестве разностного управления (48) или совпадающего с ним уравнения (50) используем следующий девятиточечный аналог волнового уравнения

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n \equiv \tau^2\left(u_{t\bar{t}} - u_{x_1\bar{x}_1} - u_{x_2\bar{x}_2} - u_{x_3\bar{x}_3}\right)_m = f_m, \quad m\in M \ , \tag{52}$$

где выражение вида $\varphi_{x\bar{x}}\big|_M$ означает вторую разделенную разность

$$\frac{\varphi\left(x+\Delta x\right)-2\varphi(x)+\varphi\left(x+\Delta x\right)}{\left(\Delta x\right)^2} \ ,$$

которая аппроксимирует частную производную $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ в заданной точке. Правую часть f_m определим равенствами

$$f_m = \begin{cases} 1, & \text{если } m_t = 1, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0 \\ 0, & \text{если } m_t = 1, \quad |m_1|+|m_2|+|m_3| > 0 \\ 0, & \text{если } m_t > 1 \end{cases} . \tag{53}$$

Пространство U'_N определим как пространство всех функций $u'_N = \{u'_n\}$, $n\in N = \bigcup N_m$, $m\in M$, удовлетворяющих начальным условиям

$u'_n = 0$, если $n_t = 0$ или $n_t = 1$ (54)

и краевым условиям

$u_n = 0$, если $|n_k h| = 1$ при каком-нибудь $k = 1,2,3$. (55)

Пространство U^*_N определим как пространство всех функций $u^*_N = \{u^*_n\}$, которые удовлетворяют тем же начальным условиям

$u^*_n = 0$, если $n_t = 0$ или $n_t = 1$, (56)

и измененным по сравнению с (55) краевым условиям

$u^*_n = 0$, если $n_1 h = -1$ или $|n_2 h| = 1$, или $|n_3 h| = 1$ (57)

$$u^*_n\Big|_{n=(n_t\tau,\,1,\,n_2h,\,n_3h)} = u^*_n\Big|_{n=(n_t\tau;\,0{,}99;\,n_2h,\,n_3h)} \ . \tag{58}$$

Определим теперь подмножество $M^+, M^+\in M$, отнеся к M^+ все те точки $m = \left(m_t\tau, m_1h, m_2h, m_3h\right), \quad m\in M$, для которых выполнены условия

$$1 \le m_t < 10^{-3}, \quad |m_k h| < \frac{1}{2}, \quad k = 1,2,3 .$$

Теперь автоматически определяются

$$M^- = M \setminus M^+, N^+ = \bigcup N_m, m\in M^+; N^- = \bigcup N_m, m\in M^-, \gamma = N^+ \bigcap N^- .$$

Отметим, что решения u'_N и u^*_N в точках n, $n\in N^+\setminus\gamma$, совпадают, по крайней мере, до момента $t = 100\tau = 0{,}5$. В самом деле, влияние правой части f_m,

$m \in M$, задаваемой формулой (53), которое вызывает отклонение решений u'_N и u^*_N от нуля, при $t < 0{,}5$ не достигнет границы $|x_k| = 1,\ k = 1,2,3$. Поэтому при $t < 0{,}5$ различие в граничных условиях не скажется на u'_N и u^*_N. Но при достаточно больших t, удовлетворяющих однако неравенству $t < 10$, найдутся точки $n, n \in N^+ \setminus \gamma$, в которых выполняется неравенство

$$u'_n \neq u^*_n, \quad n \in N^+ \setminus \gamma \ . \qquad (59)$$

Это можно проверить прямым вычислением решений u'_N и u^*_N с учетом влияния ошибок округления. Пусть p – наибольшее натуральное число, при котором выполняется тождество

$$u'_n \equiv u^*_n, \ \text{если} \ \ n \in N^+ \setminus \gamma, \quad n_t \le p \ . \qquad (60)$$

Тогда найдется хотя бы одна точка n, $n_t = p + 1$, $n \in N^+ \setminus \gamma$, в которой выполнено неравенство

$$u'_n \neq u^*_n, \quad n \in N^+ \setminus \gamma, \quad n_t = p + 1 \ . \qquad (61)$$

Зададим теперь число a, положив, например, $a = 0{,}1$. Тогда определится приграничная полоса $N_{\gamma a}$ и приобретут смысл приграничные данные (39), (40) для z'_N и z^*_N,

$$z'_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ n \in N^- \\ u'_n, & \text{если} \ \ n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \qquad (62)$$

$$z^*_n = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ n \in N^- \\ u^*_n, & \text{если} \ \ n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \ . \qquad (63)$$

В силу (60), (62) и (63) приграничные данные (39), (40) для z'_N и z^*_N при $n_t \le p$ совпадают. Покажем, что управления $g'_m, m \in M$, и $g^*_m, m \in M$, преобразующие u'_N и u^*_N соответственно в z'_N и z^*_N, не совпадают при $m_t = p$, так что при некотором $m, m \in M, m_t = p$ имеет место неравенство

$$g'_m \neq g^*_m, \quad m_t = p \,.$$

В самом деле, если бы имело место тождество $g'_m \equiv g^*_m, \quad m \in M, \quad m_t = p$,
то в силу уравнений

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z'_n = f_m + g'_m, \quad m \in M \ ,$$

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z^*_N = f_m + g^*_m, \quad m \in M \ ,$$

тождества (60) и равенств (62) и (63) выполнялось бы также тождество

$$z'_n \equiv z^*_n, \quad n \in N, \quad n_t = p + 1. \qquad (64)$$

Однако тождество (64) не может выполняться, так как в случае его выполнения в силу (62) и (63) имело бы место тождество

$u'_n \equiv u^*_n, \quad n \in N^+ \setminus \gamma, \quad n_t = p+1$,

которое противоречит неравенству (61).

Итак, мы установили, что очередной управляющий импульс $g'_m, m \in M$, при $m_t = p$ отличается от управляющего импульса $g^*_m, m \in M, m_t = p$. Но приграничные данные (39), (40) о функциях z'_N и z^*_N при $n_t \le p$ совпадают, а следовательно, не могут содержать информации, достаточной для определения очередного управляющего импульса. Теорема 3 доказана.

§ 4. Разведка слабым шумом

В п. 3.4 было показано, что доступные приграничные данные не содержат информации, которой достаточно для управления полным подавлением внешнего шума в защищаемой подобласти. Ослабим требование к управлению: вместо полного подавления внешнего шума в защищаемой подобласти будем добиваться уменьшения этого шума в заданное ε^{-1} число раз (во много раз при малом $\varepsilon > 0$). Тогда оказывается, что допущенный нами слабый шум в защищаемой подобласти, формируясь под влиянием всех условий, в которых протекает исходный процесс u_N, дополнит приграничную информацию (39), (40) таким образом, что очередной управляющий импульс можно будет получать с помощью некоторого алгоритма обработки одной только и доступной, пополненной за счет разведки слабым шумом приграничной информации.

В случае $|\varepsilon| > 1$ имеет место усиление шума. Ниже в п. 4.1 мы построим этот алгоритм при предположении, что $f_m = 0$, если $m \in M^-$. В п. 4.2 алгоритм будет построен в общем случае $f_m, m \in M$.

В силу теоремы 2 в случае $f_m = 0, m \in M^-$, управление

$$g_m^{(\in)} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^- \\ (\varepsilon - 1)\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn}\left[\Theta_N(\gamma)u_n\right], & \text{если } m \in M^+, \end{cases}$$

приводит к решению $z_N^{(\varepsilon)}$ задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n^{(\varepsilon)} = f_m + g_m^{(\in)}, \quad m \in M$$

$$z_N^{(\in)} \in U_N ,$$

имеющему вид

$$z_n^{(\in)} = \begin{cases} \varepsilon u_n, & \text{если } n \in N^- \\ u_n, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}.$$

Укажем алгоритм обработки приграничных входных данных в момент $t = p\tau$

$$a_{mn} \text{ и } f_m, \quad m_t = p, m \in M_{\gamma a} , \tag{65}$$

$z_n^{(\varepsilon)} = \varepsilon u_n, \quad \text{если} \;\; n \in N^- \bigcap (N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}),$ (66)

$z_n^{(\varepsilon)} = u_n, \quad \text{если} \;\; n \in N^+ \bigcap (N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}),$ (67)

приводящий к своевременному вычислению очередного управляющего импульса $g_m^{(\varepsilon)}$, $m \in M$, при $m_t = p$.

Введем обозначение

$$A(k) = \begin{cases} u_n, & n_t = k, \quad n \in M_{\gamma a} \\ u_n, & n_t = k-1, \quad n \in N_{\gamma a} \end{cases}.$$

Очевидно, из условия (4) следует, что $A(1)$ состоит только из нулей. Допустим, к моменту $t = p\tau$, $p \ge 1$, таблица $A(p)$ известна. Тогда по явной разностной схеме и известным в силу (65) в этот момент $f_m, m_t = p$, можно вычислить значения $u_\gamma, n_t = (p+1), n \in \gamma$, а затем по формуле (14*) – и управляющее воздействие $g_m^{(\varepsilon)}, m_t = p$, которое должно быть осуществлено в момент $t = p\tau$. Время на вычисление этого $g_m^{(\varepsilon)}$, $m \in M$, при известной таблице $A(p)$ считаем пренебрежимо малым. Формула (14*) при условии $f_m = 0, m \in M^-$ принимает вид

$$g_m^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 0, & \text{если} \;\; m \in M^- \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) u_n \right], & \text{если} \;\; m \in M^+ \end{cases}.$$

Опишем теперь алгоритм вычисления таблицы $A(p+1)$, позволяющей продолжить процесс управления при $t = (p+1)\tau$.

Шаг 1°. Измеряем в момент $t = p\tau$ значения $z_n^{(\varepsilon)}$, входящие в (46) и (47), и вычисляем

$u_n^{(\varepsilon)} = \dfrac{1}{\varepsilon} z_n^{(\varepsilon)}, \quad \text{если} \;\; n \in N^- \bigcap (N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}),$ (68)

$u_n^{(\varepsilon)} = z_n^{(\varepsilon)}, \quad \text{если} \;\; n \in N^+ \bigcap (N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}),$ (69)

и пополняем первую строчку таблицы этими значениями (48), (49) для $n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}$.

Шаг 2°. По значениям u_n, входящим в пополненную на первом шаге значениями (48), (49) строчку таблицы $A(p)$, и по второй строчке таблицы $A(p)$ вычисляем в силу разностной схемы (3), (4) первую строчку таблицы $A(p+1)$. Роль второй строчки таблицы $A(p+1)$ играет пополненная выше первая строчка таблицы $A(p)$.

Оказалось, что замена требования полного погашения шума на подобласти N^- более слабым требованием уменьшить этот шум в ε^{-1} привела к тому, что доступные приграничные данные стали достаточными для активного управления процессом защиты подобласти N^- от шума в реальном времени. Слабый шум $\varepsilon u_n, n \in N^-$, допущенный нами в подобласти N^-, формируясь под влиянием всех условий задачи, перенес на приграничную полосу информацию о задаче в целом, достаточную для управления процессом в случае $f_m = 0$, если $m \in M^-$.

4.4. Общий случай $\varepsilon \neq 0$

Откажемся теперь от ограничения $f_m = 0$ при $m \in M^-$ и рассмотрим случай произвольной функции f_m, $m \in M = M^- \bigcup M^+$.

В соответствии с теоремой 2, управляемый процесс

$$z_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} u_n^+ + \varepsilon u_n^-, & \text{если } n \in N^- \\ u_n^- + \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^+, & \text{если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{70}$$

возникает из исходного неуправляемого процесса (3), (4) под влиянием активного управления

$$g_m^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^- \\ (\varepsilon - 1) \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\Theta_N(\gamma) \left(u_n + \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^+ \right) \right], & \text{если } m \in M^+ \end{cases} . \tag{71}$$

Предположим теперь, что в текущий момент времени $t = p\tau$ становятся известны приграничные данные (39), (40):

$$\begin{array}{l} a_{mn}, f_m, m_t = p, m \in M_{\gamma a} \\ z_n^{(\varepsilon)}, \quad \text{если } n_t = p, \quad n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a} \end{array} . \tag{72}$$

Опишем теперь алгоритм своевременного, то есть в текущий момент времени $t = p\tau$, построения очередного управляющего импульса $g_m^{(\varepsilon)}, m \in M, m_t = p$, поддерживающего процесс (70). Введем функцию

$$w_n^{(\varepsilon)} \equiv u_n^- + \frac{1}{\varepsilon} u_n^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} z_n^{(\varepsilon)}, & n \in N^- \\ z_n^{(\varepsilon)}, & n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} , \tag{73}$$

которая является решением следующей разностной задачи:

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} f_m, & \text{если } m \in M^- \\ f_m, & \text{если } m \in M^+ \end{cases} \tag{74}$$

$$w_N^{(\varepsilon)} \in U_N \quad . \tag{75}$$

Введем обозначение $B(k)$, положив

$$B(k) = \begin{cases} w_n^{(\varepsilon)}, & \text{если } n_t = k, \ n \in M_{\gamma a} \\ w_n^{(\varepsilon)}, & \text{если } n_t = k - 1, \ n \in N_{\gamma a} \end{cases} .$$

Очевидно, что $B(1)$ в силу условия (4) состоит из нулей. Пусть таблица $B(k)$ уже построена в текущий момент времени $t = k\tau = p\tau$, $p \ge 1$. Тогда по явной разностной схеме (74) и известным в момент $t - p\tau$ данным (72) можно вычислить значения $w_n^{(\varepsilon)}, \quad n \in \gamma, \quad n_t = p+1$, а затем по формуле (71) с учетом (73) и управляющее воздействие $g_m^{(\varepsilon)}, m \in M, m_t = p$, которое должно быть осуществлено в момент $t = p\tau$. Время на вычисление $g_m^{(\varepsilon)}, m \in M, m_t = p$ при известной таблице $B(p)$ считаем пренебрежимо малым. Опишем теперь алгоритм вычисления таблицы $B(p+1)$, позволяющий продолжить процесс управления при $t = (p+1)\tau$.

Шаг 1º. В момент $t = p\tau$ измеряем значения $z_n^{(\varepsilon)}, n_t = p$, в точках $n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}$, а затем в силу (73) найдем значения $w_n^{(\varepsilon)}$. Восполненная таким образом первая строчка таблицы $B(p)$ принимается за вторую строчку таблицы $B(p+1)$.

Шаг 2º. По восполненной таблице $B(p)$ в силу явной разностной схемы (74), (75) вычисляем $w_n^{(\varepsilon)}, \; n_t = p+1, \; n \in M_{\gamma a}$. Результаты этих вычислений образуют первую строчку таблицы $B(p+1)$.

Вычисление таблицы $B(p+1)$ должно быть закончено к моменту $t = (p+1)\tau$, то есть за время продолжительностью τ.

Итак, алгоритм своевременной выработки очередного воздействия $g_m^{(\varepsilon)}, m \in M, m_t = p$, активного управления по одним только приграничным данным построен с помощью разведки шумом и индукции по p при любом $\varepsilon \ne 0$ и произвольной f_m, $m \in M = M^+ \bigcup M^-$.

Алгоритм, построенный нами, универсален в том смысле, что не зависит от условий вне приграничного слоя. Таким образом, приграничной информации (72), полученной с помощью разведки шумом, достаточно, чтобы управлять поддержанием процесса $z_N^{(\varepsilon)}$, который связан формулой (70) с функциями u_N^+ и u_N^-. Однако все три функции $z_N^{(\varepsilon)}$, u_N^+ и u_N^- остаются при этом неизвестными и меняются, вообще говоря, при изменении условий протекания процесса (источников, геометрии задачи граничных условий на границе N) вне приграничного слоя.

§ 5. Заключительные замечания

5.1. Замечания о методе

В работе использован метод разностных потенциалов (МРП), основные идеи и конструкции которого неявно воспроизведены в достаточном для решения поставленных задач объеме. Мы избежали ссылок на общую теорию МРП [25], [26], чтобы сделать чтение статьи независимым и более легким. Это сделано также для того, чтобы сосредоточить внимание на разнице между нестационарными задачами в условном и реальном времени и на новом понятии разведки слабым шумом, дающей достаточную и доступную информацию для подавления сильного шума в защищаемой подобласти в реальном времени. Однако за счет такого изложения конструкции $g_m^{(1)}, g_m^{(2)}, g_m^{(\varepsilon)}$, $m \in M$, могут казаться неожиданными догадками, в то время как в рамках общей теории МРП эти конструкции возникают более естественно.

Заметим, что основу управления звуком в составной области $N = N^+ \bigcap N^-$ с границей $\gamma = N^+ \bigcap N^-$ между подобластями составляет возможность метода разностных потенциалов по сумме u_γ, $u_\gamma = u_\gamma^+ + u_\gamma^-$, без знания $f_m, m \in M^+$, находить каждое слагаемое u_γ^+ и u_γ^- в отдельности. Здесь u_γ^+ и u_γ^- суть вклады источников звука $f_m, m \in M^-$, а также $f_m, m \in M^+$, локализованных на M^- и на M^+ соответственно, в создание суммарного акустического поля $u_n, n \in \gamma$, в точках границы γ.

5.2. Замечания об обобщениях

Все конструкции, результаты и доказательства этой статьи сохраняют смысл и справедливость, если считать, что в задаче (3), (4) правые части $f_m, m \in M$, а также решения $u_n, n \in N$ суть вектор-функции, а коэффициенты $a_{mn}, m \in M, n \in N_m$ – матрицы. В указанном случае разностное уравнение (3) становится системой разностных уравнений.

Заметим, что результаты статьи переносятся без принципиальных трудностей на случай явных систем разностных уравнений на криволинейных сетках и при шаблонах N_m более общего вида, чем использованный выше, а также на случай зависящей от времени границы Γ между подобластями. Эта возможность обобщений обеспечена тем, что теория МРП [25], [26] построена для систем линейных разностных уравнений общего вида на произвольных нерегулярных многомерных сетках.

Задачам активного управления звуком посвящены работы многих авторов [1-3]. Предлагаемая статья примыкает к серии статей [4-24] и к ч. VI монографии [25].

Литература

[1]. *Малюжинец Г.Д.* Нестационарная задача дифракции для волнового уравнения с компактным носителем правой части // Труды акустического института АН СССР, издание 15, 1971, с. 124-139.

[2].*Федорюк М.В.* Нестационарная проблема подавления шума. //Акустический журнал, 22 № 3 (1976), с. 339-343.

[3]. *Nelson P.A., Elliot S.J.* Active Control of sound . - San Diego: Academie Press, 1999.
[4]. *Рябенький В.С.* Разностная задача экранирования //Функциональный анализ и его приложения. 29 (1995), № 1, с.70-71.
[5]. *Рябенький В.С.* Нелинейная задача экранирования // Успехи мат. наук, 50. № 4, 146 (1995).
[6]. *Ryaben'kii, V.S.,* A nonlinear difference shielding problem //Analysis, Numerics, and Applications of Differential and Integral Equations, M. Bach, C. Constanda, G.C. Hsiao, A.-M. Sändig, and P. Werner, eds., Pitman Research Notes in Mathematics, 379, Longman, Harlow, 1998, pp. 179-182.
[7]. *Зиновьев Е.В., Рябенький В.С.,* Способ активного подавления шума, Патент Рос.Федерации, № 6G01K11/16 (01.2.281001) Гос. институт патентной информации, 1996.
[8]. *Вейцман Р.Н., Рябенький В.С.* Разностные задачи экранирования и имитации // Докл. РАН, 354 (1997), № 2, с. 151-154.
[9]. *Вейцман Р.Н., Рябенький В.С.* Разностные задачи имитации //Труды Моск. матем. об-ва., 1997, т.58.
[10]. *J. Loncaric and S. V. Tsynkov*, Optimization of Acoustic Source Strength in Problems of Active Noise Control, SIAM J. Applied Math., 63 (2003) pp. 1141-1183.
[11]. *J.Loncaric and S.V. Tsynkov*. Quadratic Optimization in the Problems of Active Control of sound, Applied Math., 52 (2005), p. 381-400
[12]. *В.С. Рябенький, С.В. Утюжников и С.В. Цынков.* Задача активного экранирования для многосвязных областей // Докл. РАН, Матем. , 411, № 2 (2006), с. 164-166.
[13]. *Ryaben'kii, V.S. and Utyuzhnikov, S.V.*, Active shielding model for hyperbolic equations, IMA Journal of Applied Mathematics, 2006, 71 (6): 924-939.
[14]. *V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov and S. V. Utyuzhnikov*, Inverse Source Problem and Active Shielding for Composite Domains, Applied Mathematics Letters, 20, № 5 (2007), pp. 511-515.
[15]. *Ryaben'kii, V.S. and Utyuzhnikov, S.V.*, Differential and finite-difference problems of active shielding, J. Applied Numerical Mathematics, 2007, 57 (4): 374-382.
[16]. *Ryaben'kii, V.S., Utyuzhnikov, S.V. and Turan, A.A.*, On the application of difference potential theory to active noise control, J. Advances in Applied Mathematics, 2008, 40 (2): 194-211.
[17]. H. *Lim, S. V. Utyuzhnikov, Y. W. Lam, A. Turan, M. Avis, V. S. Ryaben'kii and S. V. Tsynkov*, An Experimental Validation of the Noise Control Methodology Based on Difference Potentials, AIAA Journal, 47 №. 4. (2009). pp. 874-884.
[18]. *В. С. Рябенький, С. В. Утюжников, С. В. Цынков*, Разностная задача подавления шума и другие задачи управления одночастотным звуком в составной области // Доклады Российской Академии Наук,
Математика, 425, №. 4 (2009), с. 456-458.

[19]. *V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, and S. V. Utyuzhnikov*, Active Control of Sound with Variable Degree of Cancellation, Applied Mathematics Letters, 22, No. 12 (2009), pp. 1846-1851.
[20]. *Utyuzhnikov, S.V.,* Active wave control and generalized surface potentials, J. Advances in Applied Mathematics, 2009, 43 (2), pp.101-112.
[21]. *Utyuzhnikov, S.V.*, Generalized Calderon-Ryaben'kii potentials, IMA J. of Applied Mathematics, 2009, 74 (1): 128-148.
[22]. *Рябенький В.С.* Идея использования слабого шума для управления подавлением сильного шума в экранируемой подобласти в реальном времени // Доклады РАН, 2010, т. 430, № 2. с. 166-168
[23]. *В.С. Рябенький*. Модель активного экранирования заданной подобласти от шума внешних источников в текущем времени. ЖВМ и МФ. 2011. том 51, № 3, с. 1-12
[24]. *В.С. Рябенький*. Активное управление в реальном времени звуком в составной области // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 32, 2010.
[25]. *В.С. Рябенький*, Метод разностных потенциалов и его приложения //Издание 3-ье, М., Физматлит, 2010.
[26]. *В.С. Рябенький*, Метод разностных потенциалов и его приложения //Издание 2-ое, М., Физматлит, 2002.
(V.S. Ryaben’kii. Method of Difference Potentials and its Applications, Springer, 2002)