



Прокопов Г.П.

К вопросу о приближенных
реализациях метода
Годунова

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Прокопов Г.П. К вопросу о приближенных реализациях метода Годунова // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 4. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-4>

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша РАН

Г.П. Прокопов

**К вопросу о приближенных реализациях
метода Годунова**

Москва, 2011 год

УДК 519.6

К вопросу о приближенных реализациях метода Годунова

Прокопов Г.П.

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Исследовано несколько вариантов приближенного расчета распада разрыва (задачи Римана), реализуемых заданием массовых скоростей образующихся волн простыми явными формулами. Проведено сравнение вариантов между собой и с точными решениями.

Работа выполнена в рамках Программы № 24 Президиума РАН.

On approximation of implementation of Godunov's method

Prokopov G.P.

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS

Several variants of approximate calculation of break-up of discontinuity (Riemann problem) are studied. They are implemented by setting mass velocities of generating waves with the help of explicit formulas. The comparison of the all variants with exact solution was carried out.

This work is supported by Presidium of RAS, program #24.

	стр.
Введение	3
§ 1. Приближенный расчет задачи Римана	4
§ 2. Симметричная задача Римана	8
§ 3. Подбор параметров для реализации схемы PAR	11
§ 4. О невыполнении УРС и поведении энтропии	14
§ 5. О модернизации и сравнении схем	17
§ 6. Традиционный вариант (TRA) приближенного расчета задачи Римана. Об ударных волнах разрежения и энтропии	21
§ 7. Сравнение приближенных вариантов с точными решениями задачи распада разрыва. Иллюстрирующие примеры	23
§ 8. Практические рекомендации	27
Заключение	29
Литература	30

Введение

Газовая динамика – благодатный раздел науки, успешно использующий методы математического моделирования. Примерами газодинамических объектов, представляющих большой теоретический и практический интерес, являются ударные волны, волны разрежения, контактные границы, на которых могут соседствовать среды с совершенно различными уравнениями состояния (УРС). Как правило, в процессе расчетов эти объекты движутся и могут взаимодействовать между собой, порождая достаточно сложную общую картину течения, которая не всегда может быть предсказана заранее.

Все это предъявляет высокие требования к методам численного решения весьма разнообразных газодинамических задач. Одним из таких методов, получившим большую известность и популярность, является метод Годунова [1,2]. Один из определяющих факторов его успеха – то, что важнейшим структурным элементом метода является массовое решение задач о распаде разрыва (называемых также задачами Римана).

Именно эта реализованная в методе Годунова идея использования точных (или приближенных) решений с кусочно-постоянными начальными данными получила широкое распространение и для других гиперболических систем (см., напр., [3]). И дала основание для названия «метод типа Годунова».

При этом стоит различать две принципиально разные ситуации, в которых приходится решать элементарные газодинамические задачи о распаде разрыва. Первая – когда речь идет о границах, например, контактных границах, где соседствуют две среды с сильно отличающимися параметрами. При этом, если граница подвижна, то требуется и получение достаточно

надежных значений скоростей ее движения. В таких ситуациях требуется рассчитывать распад разрыва достаточно точно.

Вторая ситуация – когда в ходе расчета приходится решать задачу о распаде разрыва для общей границы двух соседних ячеек сетки из одной счетной области. Тогда все параметры сред по две стороны границы, как правило, близки между собой. Естественно, что это позволяет для расчета распада разрыва успешно использовать приближенные методы. И, как показывает вычислительный опыт, *допускается* и достаточно значительное различие параметров.

Развитие вычислительной техники усиливает интерес к приближенным методам. Возросшие ее возможности позволяют проводить расчеты на подробных сетках, что создает благоприятные условия для их применения. Поэтому неудивительно, что появились и продолжают появляться работы, предлагающие алгоритмы приближенного решения задач Римана (некоторые из них представлены в [3]).

Одной из таких работ, содержащей описание экономичного алгоритма, является [4]. Его исследованию и дальнейшему развитию посвящены [5]-[10].

Настоящая работа в определенной степени подводит итог этих исследований и ставит своей основной целью сравнение различных вариантов приближенного расчета и их дальнейшее развитие.

Конечно, она не претендует на «энциклопедическую» полноту, а рассматривает лишь ограниченный круг достаточно близких схем.

§ 1. Приближенный расчет задачи Римана

1.1. Для полноты изложения нам придется кратко описать алгоритм приближенного расчета распада разрыва, хотя это уже неоднократно делалось (см., напр., [5], с.4-6).

В точной постановке задача Римана представляет расчет конфигурации, которая возникает при взаимодействии газодинамических потоков с произвольными постоянными параметрами:

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1, \quad u = u_1, \quad p = p_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 \quad \text{при } x < 0 \\ \rho = \rho_2, \quad u = u_2, \quad p = p_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_2 \quad \text{при } x > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ρ - плотность, u - скорость, p - давление, ε - внутренняя энергия единицы массы газа. При этом величины ρ, p, ε связаны так называемым уравнением состояния (УРС), например, в форме:

$$p = p(\rho, \varepsilon) \quad (1.2)$$

В простейшем случае это идеальный газ или так называемое двучленное уравнение состояния:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \quad \text{или} \quad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + c_0^2(\rho - \rho_0) \quad (1.3)$$

Хорошо известно (см., напр., [2], с.106-107), что при распаде произвольного разрыва (1.1) образуется контактный разрыв (КР) и две волны, которые распространяются влево и вправо от него. Каждая из этих волн может быть

либо ударной (УВ), либо волной разрежения (ВР). В случае ударной волны речь идет о движущемся фронте разрыва, за которым параметры газа постоянны и связаны определенными соотношениями. В случае волны разрежения ситуация иная: возникает область переменного течения, в которой параметры газа постоянны вдоль прямолинейных лучей, и к этой зоне разрежения примыкает область постоянного течения, аналогичная области за фронтом ударной волны.

В качестве примера на рис.1 изображена одна из таких возможных конфигураций с левой ударной волной и правой волной разрежения.

1.2. В обсуждаемом приближенном методе, предложенном в [4] (для краткости он будет называться схемой С), используется упрощенная схема распада разрыва. Она во всех случаях включает три разрыва: контактный, левый и правый (называть их волнами было бы не всегда правильно) и представлена на рис.2.

Постоянным значениям параметров присвоим индексы в соответствии с номерами секторов. В силу условий на контактном разрыве

$$p_3 = p_4 = P, \quad u_3 = u_4 = U \quad (1.4)$$

Используем выражения законов сохранения массы, импульса и энергии на левом и правом разрывах. Введем скорости D_1 и D_2 движения этих разрывов и массовые скорости (плотности потока вещества) через поверхности разрыва

$$a_1 = \rho_1(u_1 - D_1), \quad a_2 = \rho_2(D_2 - u_2) \quad (1.5)$$

(В [4] использовались другие обозначения для этих величин).

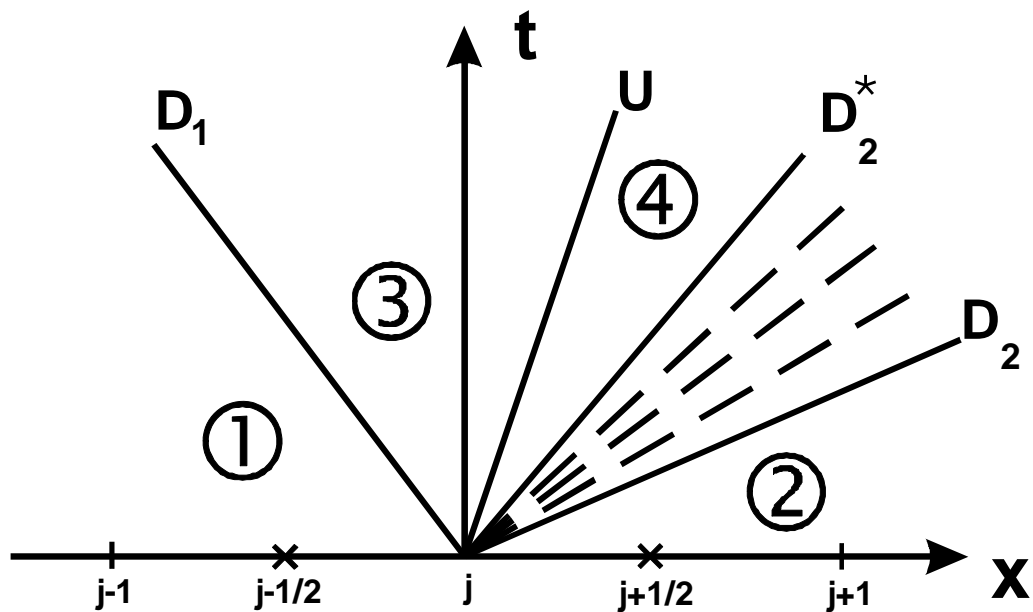


Рис. 1.

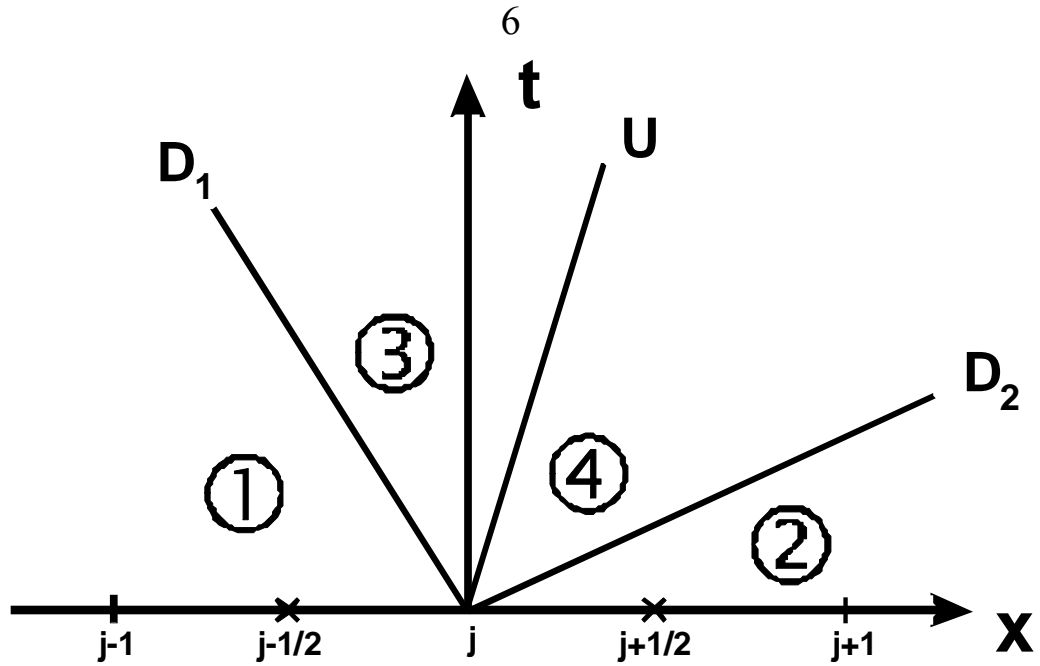


Рис. 2.

1.3. Реализация алгоритма начинается с назначения массовых скоростей a_1, a_2 . Она будет описана ниже.

После этого согласно формулам (1.5) вычисляются

$$D_1 = u_1 - a_1/\rho_1, \quad D_2 = u_2 + a_2/\rho_2 \quad (1.6)$$

Если $D_1 \geq 0$, то назначаем $(P, U, R, E)_* = (p_1, u_1, \rho_1, \varepsilon_1)$.

Если $D_2 \leq 0$, то назначаем $(P, U, R, E)_* = (p_2, u_2, \rho_2, \varepsilon_2)$

И на этом расчет распада разрыва заканчивается.

В остальных случаях из формул для упомянутых законов сохранения получаются следующие, которые станут основой для приближенного расчета распада разрыва:

$$U = (u_2 a_2 + u_1 a_1 - p_2 + p_1) / (a_1 + a_2) \quad (1.7)$$

$$P = [p_2 a_1 + p_1 a_2 + a_1 a_2 (u_1 - u_2)] / (a_1 + a_2) \quad (1.8)$$

Если $U \geq 0$, то полагаем:

$$1/R = 1/\rho_3 = 1/\rho_1 - (P - p_1)/a_1^2 \quad (1.9)$$

$$E = \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + (P^2 - p_1^2) / (2a_1^2) \quad (1.10)$$

Если $U < 0$, то полагаем:

$$1/R = 1/\rho_4 = 1/\rho_2 - (P - p_2)/a_2^2 \quad (1.11)$$

$$E = \varepsilon_4 = \varepsilon_2 + (P^2 - p_2^2) / (2a_2^2) \quad (1.12)$$

Таким образом, результатом алгоритма является выбор в ходе расчета нужного сектора в конфигурации, изображенной на рис.2, в соответствии со скоростями разрывов U, D_1, D_2 , и значений величин $(P, U, R, E)_*$ давления, скорости, плотности и внутренней энергии в нужном секторе:

$$(P, U, R, E)_* = \begin{cases} (p_1, u_1, \rho_1, \varepsilon_1), & \text{если } D_1 \geq 0 \\ (p_2, u_2, \rho_2, \varepsilon_2), & \text{если } D_2 \leq 0 \\ (P, U, \rho_3, \varepsilon_3), & \text{если } D_1 < 0 \leq U \\ (P, U, \rho_4, \varepsilon_4), & \text{если } U < 0 < D_2 \end{cases} \quad (1.13)$$

Они называются условно «большими величинами» и используются затем при расчете потоков через соответствующие границы ячеек сетки в методе Годунова.

1.4. Теперь перейдем к обещанному описанию назначения массовых скоростей a_1, a_2 . Простейшим вариантом является так называемый «акустический» (или «звуковой»):

$$a_1 = \rho_1 c_1, \quad a_2 = \rho_2 c_2 \quad (1.14)$$

В упомянутой схеме S , изложенной в [4], для назначения массовых скоростей используются формулы:

$$a_1 = \rho_1 [u_1 - \min(u_1 - c_1, u_2 - c_2)] \quad (1.15)$$

$$a_2 = \rho_2 [\max(u_2 + c_2, u_1 + c_1) - u_2]$$

или
$$a_1 = a_2 = \max(\rho_1 c_1, \rho_2 c_2) \quad (1.16)$$

Здесь c_1, c_2 - скорости звука. В случае простейших уравнений состояния (1.3) они определяются формулами:

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad \text{или} \quad c = \sqrt{\gamma(p + p_0) / \rho}, \quad p_0 = \rho_0 c_0^2 / \gamma \quad (1.17)$$

Основным предметом исследований будет обобщенный вариант с назначением массовых скоростей формулами:

$$a_1 = \rho_1 [c_1 + \lambda_1 (u_1 - u_2)], \quad a_2 = \rho_2 [c_2 + \lambda_2 (u_1 - u_2)] \quad (1.18)$$

Будем называть его «параметрическим» (PAR).

Он содержит два *безразмерных* параметра λ_1, λ_2 . Алгоритм их назначения будет описан в § 3.

«Акустический» (acoustic) вариант (1.14), который для краткости будем именовать АСО, реализуется в качестве частного случая (1.18) назначением

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (1.19)$$

Формулы (1.15) назначения массовых скоростей в схеме S могут быть записаны в виде:

$$a_1 = \rho_1 \cdot \max(c_1; c_2 + u_1 - u_2)$$

$$a_2 = \rho_2 \cdot \max(c_2; c_1 + u_1 - u_2)$$

Формулы (1.16) используются в случае конфигураций с ударными волнами:

$$a_1 = \rho_2 c_2, \quad \text{если } \rho_2 c_2 > \rho_1 (c_2 + u_1 - u_2) > \rho_1 c_1$$

$$a_2 = \rho_1 c_1, \quad \text{если } \rho_1 c_1 > \rho_2 (c_1 + u_1 - u_2) > \rho_2 c_2$$

Схема S в некоторых случаях совпадает, а в некоторых – отличается от варианта, который будем называть «комфортным» (COM) с назначением

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } u_1 - u_2 \leq 0 \\ 1, & \text{если } u_1 - u_2 > 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

1.5. Считаю целесообразным также включить в рассмотрение традиционный вариант приближенного расчета распада разрыва, восходящий еще к монографии [2]. Назовем его TRA. Его рассмотрению посвящен § 6.

Наконец, для сравнения и контроля точности приближенных методов необходимо привлекать точное решение задачи о распаде разрыва.

Назовем его G^* и рассмотрим в § 7.

§ 2. Симметричная задача Римана

2.1. В методических целях целесообразно иногда рассматривать упрощенную задачу с симметричными данными для распада разрыва:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad p_1 = p_2, \quad \rho_1 = \rho_2, \quad c_1 = c_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (2.1)$$

Она затрагивает практически все принципиальные вопросы, но имеет более простые формулы.

Если ввести обозначения

$$z = u_1 - u_2, \quad \mu = (u_1 - u_2)/(2c_1) \quad (2.2)$$

То формулы (1.18) приобретают вид:

$$a = a_1 = a_2 = \rho_1(c_1 + \lambda z) = \rho_1 c_1(1 + 2\lambda\mu) \quad (2.3)$$

(Безразмерный параметр μ можно было бы ввести и формулой $\mu = z/c_1$, но для сохранения преемственности с [5] и во избежание путаницы выбрано именно (2.2).)

Ограничимся пока случаем идеального газа. Тогда

$$p = \rho c^2/\gamma, \quad p_1 = \rho_1 c_1^2/\gamma \quad (2.4)$$

и формулы (1.7)-(1.12) принимают вид:

$$U = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad P = p_1 + \frac{az}{2} = p_1 \left[1 + \gamma\mu(1 + 2\lambda\mu) \right] \quad (2.5)$$

$$1/R = 1/\rho_1 \cdot \left[1 - \frac{z\rho_1}{2a} \right] = 1/\rho_1 \cdot \left[1 - \frac{\mu}{1 + 2\lambda\mu} \right] \quad (2.6)$$

$$E = \varepsilon_1 + \frac{P^2 - p_1^2}{2a^2} = \varepsilon_1 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)\mu}{2(1 + 2\lambda\mu)} \left(\frac{1}{1 + 2\lambda\mu} + \frac{\mu\gamma}{2} \right) \right] \quad (2.7)$$

2.2. Обратимся к анализу этих формул. Прежде всего, обнаруживается, что в случае сильных волн разрежения возможно получение отрицательных значений давления P . Как уже отмечалось, если $z < 0$, варианты АСО, С и СОМ реализуются при $\lambda = 0$. Тогда

$$P = p_1(1 + \gamma\mu); \quad P \leq 0 \text{ при } \mu \leq \mu_{кр} = -\frac{1}{\gamma} \quad (2.8)$$

Обычно с этим недостатком справляются, назначая для P минимальное значение fix :

$$P = fix, \quad \text{если } P < fix, \quad (0 \leq fix \leq 1) \quad (2.9)$$

Такой способ действий, однако, имеет серьезные недостатки и позже (в § 4) мы вернемся к обсуждению этого вопроса.

2.3. Аналогичный недостаток при $\lambda = 0$ обнаруживается и в формуле (2.6) для плотности R в случае ударных волн $z > 0$. Вместо очевидного $R > \rho_1$ получается $R < 0$, если $\mu > 1$.

Следовательно, в случае $z > 0$ формула (2.6) может использоваться только при выполнении ограничения $\mu < 1$, а при его невыполнении $\mu \geq 1$ следует отказаться от «акустического» приближения, используя что-то лучшее. К этой ситуации, которую можно назвать «фиаско акустического приближения», вернемся в § 5.

В качестве «спасения» можно, как это, например, делается в схеме С, назначить массовые скорости формулами

$$a = \rho_1 (c_1 + z) = \rho_1 c_1 (1 + 2\mu), \quad (2.10)$$

т.е. реализовать вариант СОМ с $\lambda = 1$.

Тогда согласно формуле (2.6)

$$\frac{\rho_1}{R} = 1 - \frac{z}{2(c_1 + z)} = \frac{2c_1 + z}{2(c_1 + z)} = \frac{1 + \mu}{1 + 2\mu} \quad (2.11)$$

Следовательно, $R > \rho_1$ при любом $\mu > 0$. Из (2.7) очевидно, что и $E > \varepsilon_1$.

2.4. Обратим внимание еще на одну особенность поведения схемы С и СОМ в случае сильных ударных волн. Из формулы (2.11) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R/\rho_1 = 2 \quad (2.12)$$

Между тем из курсов газовой динамики хорошо известна ударная адиабата [см. ниже формулу (6.1)], согласно которой должно быть

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R/\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1) \quad (2.13)$$

Нетрудно видеть, что $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 2$, если $\gamma = 3$. Для $\gamma = 1.4$ получается $(\gamma + 1)/(\gamma - 1) = 6$.

Именно это обстоятельство и вызвало к жизни схему PAR, которая в общем виде будет рассматриваться в следующем §3.

Для рассматриваемой симметричной задачи в случае сильных ударных волн из (2.6) следует, что

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \rho_1/R = 1 - 1/2\lambda \quad (2.14)$$

Следовательно, нужное требование (2.13) достигается так:

$$1 - \frac{1}{2\lambda} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad \text{Отсюда } \lambda = \frac{\gamma + 1}{4} \quad (2.15)$$

Таким и следует задавать параметр λ при реализации PAR для симметричной задачи (2.1) в случае ударных волн $z > 0$.

2.5. Обратимся теперь к случаю волн разрежения $z < 0$. Формула для массовой скорости (2.3) должна обеспечивать ее положительность ($a > 0$). Очевидно, что при $z \rightarrow -\infty$ это возможно только при $\lambda = 0$. Именно такой выбор и делается в вариантах С, АСО и СОМ.

Однако, специфика задачи Римана такова, что рассматривать $z \rightarrow -\infty$ нет необходимости. Как известно (см., напр., [2], с.112) имеют физический смысл только

$$z > z_* , \quad z_* = -\frac{2c_1}{\gamma-1} - \frac{2c_2}{\gamma-1} \quad (2.16)$$

Для обсуждаемой симметричной задачи

$$z_* = -4c/(\gamma-1), \quad \mu_* = -2/(\gamma-1) \quad (2.17)$$

Если же $z \leq z_*$, то образуется вакуум с $P=0$.

В случае $z < 0$ массовые скорости могут вводиться с помощью формулы (см. [2], с.109):

$$a = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \rho_1 c_1 (1 - P/p_1) / \left[1 - (P/p_1)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] \quad (2.18)$$

При достижении вакуума $P=0$ получается

$$a = \rho_1 c_1 \frac{\gamma-1}{2\gamma} \quad (2.19)$$

Полагая, что при этом $z = z_*$ с учетом (2.3) получаем

$$1 - \lambda \cdot \frac{4}{\gamma-1} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \quad (2.20)$$

Отсюда следует, что целесообразно задавать

$$\lambda = \frac{\gamma^2-1}{8\gamma}, \quad a = \rho_1 c_1 \left(1 + \frac{\gamma^2-1}{8\gamma} z \right) \quad (2.21)$$

для случая $z < 0$ в симметричной задаче.

2.6. Заслуживает внимания еще следующий факт. Условие $P=0$ согласно формуле (2.5) имеет вид квадратного уравнения относительно μ :

$$1 + \gamma\mu + 2\gamma\lambda\mu^2 = 0 \quad (2.22)$$

Его корни вычисляются по формуле:

$$\mu_{\pm} = \left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 8\gamma\lambda} \right) / (4\gamma\lambda) \quad (2.23)$$

Если $\lambda = \frac{\gamma^2-1}{8\gamma}$, то $\mu_- = -\frac{2}{\gamma-1}$, $\mu_+ = -\frac{2}{\gamma+1}$ (2.24)

При этом на отрезке $-\frac{2}{\gamma-1} \leq \mu \leq \frac{2}{\gamma+1}$ получается $P \leq 0$, что потребует коррекции (2.9).

2.7. Обратим теперь внимание на следующее. Пока мы не интересовались вопросом об энергии E , определяемой формулой (2.7).

Рассмотрим назначение (2.24) для крайних значений μ_- и μ_+ .

Поскольку $P(\mu_-) = P(\mu_+) = 0$, получаем:

$$a_- = a(\mu_-) = \rho_1 c_1 \left(1 + \frac{\gamma^2-1}{8\gamma} \mu_- \right) = \rho_1 c_1 \cdot \frac{\gamma-1}{2\gamma} \quad (2.25)$$

$$a_+ = a(\mu_+) = \rho_1 c_1 \left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{8\gamma} \mu_+ \right) = \rho_1 c_1 \cdot \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$$

и, соответственно, по формулам (2.7):

$$E(\mu_-) = \frac{p_1}{\rho_1} \left[\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{4\gamma^2}{2\gamma(\gamma^2 - 1)} \right] = -\frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)^2} \frac{p_1}{\rho_1} \quad (2.26)$$

$$E(\mu_+) = \frac{p_1}{\rho_1} \left[\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{4\gamma^2}{2\gamma(\gamma + 1)^2} \right] = \frac{1 + 4\gamma - \gamma^2}{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2} \frac{p_1}{\rho_1}$$

Следовательно, $E(\mu_-) < 0$, $E(\mu_+) > 0$ (последнее при $\gamma < 1 + \sqrt{5}$).

Это означает, что на части отрезка $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ энергия положительна, а на части – отрицательна. В последнем случае придется прибегнуть к корректировке: $E = 0$, если $E < 0$, аналогично тому, как это делалось для давления P . Точка, для которой $E = 0$, находится внутри упомянутого отрезка, т.е. обращение в нуль P и E не согласовано.

2.8. Представляет, конечно, интерес: возможно ли согласование этих моментов, когда $P = 0$ и $E = 0$ одновременно. Для этого необходимо одновременное выполнение условий:

$$1 + \gamma\mu(1 + 2\lambda\mu) = 0 \quad (2.27)$$

$$a^2 = p_1^2 / (2\varepsilon_1) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \rho_1^2 c_1^2$$

С учетом формулы (2.3) получаем

$$(1 + 2\lambda\mu)^2 = (\gamma - 1) / (2\gamma)$$

Следовательно, $1 + 2\lambda\mu = \pm \sqrt{(\gamma - 1) / (2\gamma)}$. При выборе знака «+» имеем

$$\mu = \mu^* = -\sqrt{\frac{2}{(\gamma - 1)\gamma}}, \quad \lambda = \lambda^* = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)\gamma}{8}} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right) \quad (2.28)$$

Требование $\lambda > 0$ выполнено.

Таким образом, назначение $\lambda = \lambda^*$ обеспечивает согласованное получение $P = 0$, $E = 0$, но только при единственном значении $\mu = \mu^*$, вычисляемом по формулам (2.28).

Для краткости присвоим этому варианту обозначение PAS вместо PAR. Однако то, что такой результат достигнут только при специальном значении $\mu = \mu^*$, т.е. $z = u_1 - u_2$, конечно, снижает практический интерес к нему.

§ 3. Подбор параметров для реализации схемы PAR

3.1. Обратимся теперь к случаю произвольных параметров взаимодействующих сред (1.1). В целях получения расчетных формул для практического использования и в условиях двух различных сред справа и

слева от разрыва будем считать $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Для упрощения изложения будем считать, что это – идеальные газы.

Массовые скорости будем задавать формулами

$$a_1 = \rho_1(c_1 + \lambda_1 z), \quad a_2 = \rho_2(c_2 + \lambda_2 z) \quad (3.1)$$

Поскольку вместо (2.5)-(2.7) придется работать с общими формулами (1.7)-(1.12), воспользуемся их преобразованием, описанным в [9], с.6:

$$P - p_1 = q_1 = (p_2 - p_1 + a_2 z) a_1 / (a_1 + a_2) \quad (3.2)$$

$$P - p_2 = q_2 = (p_1 - p_2 + a_1 z) a_2 / (a_1 + a_2) \quad (3.3)$$

$$\rho_1 / \rho_3 = 1 - \rho_1 q_1 / a_1^2, \quad \rho_2 / \rho_4 = 1 - \rho_2 q_2 / a_2^2 \quad (3.4)$$

Тогда для случая сильных ударных волн (при $z \rightarrow +\infty$) будем иметь:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \rho_1 / \rho_3 = 1 - \frac{\lambda_2 \rho_2}{(\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2) \lambda_1} = \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1} \quad (3.5)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \rho_2 / \rho_4 = 1 - \frac{\lambda_1 \rho_1}{(\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2) \lambda_2} = \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1} \quad (3.6)$$

Рассматриваем их как два уравнения для определения параметров λ_1, λ_2 при назначении (3.1).

Поскольку $1 - (\gamma - 1)/(\gamma + 1) = 2/(\gamma + 1)$, можно переписать (3.5) и (3.6) в виде:

$$\rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \lambda_2 = \frac{\gamma_1 + 1}{2} \rho_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\gamma_2 + 1}{2} \rho_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (3.7)$$

Следовательно,
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{(\gamma_2 + 1) \rho_1}{(\gamma_1 + 1) \rho_2}}$$

Если ввести обозначения:

$$b_1 = \sqrt{\rho_1(\gamma_1 + 1)/2}, \quad b_2 = \sqrt{\rho_2(\gamma_2 + 1)/2}, \quad (3.8)$$

то $\lambda_1 = b_1 \xi / \rho_1$, $\lambda_2 = b_2 \xi / \rho_2$, $\xi = b_1 b_2 / (b_1 + b_2)$ (3.9)

Для практики расчетов представляет специальный интерес случай одной среды $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда (3.8)-(3.9) могут быть записаны в виде:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1 + \sqrt{\rho_2}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1 + \sqrt{\rho_2}}} \quad (3.10)$$

В симметричном случае $\rho_1 = \rho_2$ получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = (\gamma + 1)/4$, т.е. прежний результат (2.15).

3.2. Теперь обратимся к случаю $z < 0$. Как уже было описано в § 2, его имеет смысл рассматривать только при условии:

$$z > z_* = -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \quad (3.11)$$

Условные массовые скорости могут вводиться с помощью формул (см. [2], с.109):

$$a_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} \rho_1 c_1 \left(1 - \frac{P}{p_1}\right) / \left[1 - \left(\frac{P}{p_1}\right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}}\right]$$

и аналогичной для a_2 с заменой индекса 1 на 2. При достижении вакуума ($P=0$)

$$a_1 = \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} \rho_1 c_1, \quad a_2 = \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} \rho_2 c_2$$

Поскольку при этом $z = z_*$, приходим к условиям:

$$a_1 = \rho_1 (c_1 + \lambda_1 z_*) = \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} \rho_1 c_1, \quad a_2 = \rho_2 (c_2 + \lambda_2 z_*) = \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} \rho_2 c_2$$

Они и определяют значения λ_1 и λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{(\gamma_1 + 1)c_1}{2\gamma_1} / (-z_*), \quad \lambda_2 = \frac{(\gamma_2 + 1)c_2}{2\gamma_2} / (-z_*) \quad (3.12)$$

В случае одной среды $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ получаем:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma^2 - 1}{4\gamma} \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

В симметричной задаче $\lambda_1 = \lambda_2 = (\gamma^2 - 1)/(8\gamma)$, как и было определено (2.21).

3.3. Получение дальнейших результатов связано с реализацией условия вакуума $P=0$. Вместо квадратного уравнения (2.22) в общем случае придется иметь дело с уравнением:

$$(c_1 + \lambda_1 z)c_2/\gamma_2 + (c_2 + \lambda_2 z)c_1/\gamma_1 + (c_1 + \lambda_1 z)(c_2 + \lambda_2 z)z = 0 \quad (3.13)$$

Это кубическое уравнение общего вида. В популярном справочнике [11] на с.138 можно найти полную сводку формул для его решения. Но эти формулы слишком громоздки (по пословице «овчинка не стоит выделки»).

Однако оказалось, что реализация варианта PAS в целях согласования условий $P=0$ и $E=0$, предложенная в §2, возможна и в общем случае.

В силу предполагаемых требований $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ назначим

$$a_1^2 = \frac{p_1^2}{2\varepsilon_1} = \frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1} \rho_1^2 c_1^2, \quad a_2^2 = \frac{p_2^2}{2\varepsilon_2} = \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2} \rho_2^2 c_2^2 \quad (3.14)$$

Следовательно, для назначения λ_1^*, λ_2^* получаем условия:

$$c_1 + \lambda_1^* z^* = \sqrt{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}} c_1, \quad c_2 + \lambda_2^* z^* = \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}} c_2$$

Из них будем иметь:

$$\lambda_1^* = c_1 \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_1 - 1}{2\gamma_1}}\right) / (-z^*), \quad \lambda_2^* = c_2 \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right) / (-z^*) \quad (3.15)$$

А для назначения z^* воспользуемся вместо (3.13) уравнением $P=0$ в виде:

$$p_2 a_1 + p_1 a_2 + a_1 a_2 z^* = 0.$$

Используя формулы (3.14), получаем для z^* :

$$z^* = -\left(\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2}\right) = -\left(\frac{\rho_1 c_1^2}{\gamma_1 a_1} + \frac{\rho_2 c_2^2}{\gamma_2 a_2}\right)$$

Следовательно:

$$z^* = -\sqrt{\frac{2}{\gamma_1(\gamma_1-1)}}c_1 - \sqrt{\frac{2}{\gamma_2(\gamma_2-1)}}c_2 \quad (3.16)$$

3.4. Таким образом, только при $z = z^*$ (как в симметричном случае) назначение $\lambda_1 = \lambda_1^*, \lambda_2 = \lambda_2^*$ формулами (3.15)-(3.16) обеспечивает согласование условий $P=0$ и $E=0$ в случае произвольных параметров (1.1) задачи Римана.

Это и есть реализация PAS в общем случае для $z < 0$.

Обратим внимание, что формулы (3.15)-(3.16) – того же типа, что и (3.11), (3.12). В случае одной среды $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ формулы упрощаются. И, конечно, совпадают с (2.28) в случае симметричной задачи.

§ 4. О невыполнении УРС и поведении энтропии

4.1. Нетрудно убедиться, что во всех рассмотренных вариантах схем (C, ASCO, COM, PAR, PAS) для получаемых величин P, R, E уравнение состояния идеального газа может быть выполнено только случайно. Удивительного в этом ничего нет, поскольку при конструировании формул (1.7)-(1.12) оно не учитывалось. Как к этому относиться?

Величины P, R, E играют лишь вспомогательную роль для вычисления по ним газодинамических потоков через границы соседних ячеек расчетной сетки, на которой считается задача.

4.2. Один из возможных подходов может быть таким. Конструируем «эквивалентную среду», которая уравнению состояния удовлетворяет и сохраняет значения потоков. Такой подход рассматривался в работе автора [5] и затем был продолжен в [6]. Он сводит задачу к некоторому квадратному уравнению. В [5] это уравнение выписывалось для скорости, а в [6] – для давления. Это позволило в случае идеального газа или двучленного УРС (1.3) выписать простые условия, при которых уравнение имеет одно, два или не имеет решений.

Введем для потоковых величин обозначения:

$$F_1 = RU, \quad F_2 = RU^2 + P, \quad F_3 = RU\left(E + U^2/2\right) + PU \quad (4.1)$$

Квадратное уравнение для получения давления \hat{P} «эквивалентной среды» в случае идеального газа имеет вид (см. [6], с.19):

$$(\gamma + 1)\hat{P}^2 - 2F_2\hat{P} - (\gamma - 1)(F_2^2 - 2F_1F_3) = 0 \quad (4.2)$$

Если ввести обозначения

$$\omega = 2F_1F_3/(F_2)^2, \quad DIS = 1 + (\gamma^2 - 1)(1 - \omega) \quad (4.3)$$

то оказывается, что в случае

$$\omega > \gamma^2 / (\gamma^2 - 1) \quad (4.4)$$

уравнение (4.2) не имеет действительных решений, т.е. «эквивалентной среды» не существует. В свою очередь, условие (4.4) записывается в виде:

$$R^2 U^2 [2(\gamma^2 - 1)E - U^2] - P(\gamma^2 P + 2RU^2) > 0.$$

Оно особенно упрощается в случае $P=0$ и тогда принимает вид:

$$\omega > \gamma^2 (\gamma^2 - 1), \quad \text{если } P=0 \text{ и } 0 < U^2 < 2(\gamma^2 - 1)E \quad (4.5)$$

4.3. В случае симметричной задачи (2.1) согласно формуле (2.5) скорость $U = (u_1 + u_2)/2$. Следовательно, $U = 0$, если $u_1 = -u_2$, и может принимать любые значения, если $u_1 + u_2 \neq 0$.

Как показано в [8], (см.с.149), схема С положительно определена по плотности и энергии. Поэтому ситуация (4.5) может возникнуть, согласно (2.8) для схемы С, а также тождественных с ней в этом случае схемах АСО и СОМ, использующих при $z < 0$ значение $\lambda = 0$, если окажется, что $\mu < -1/\gamma$.

В качестве второго примера: именно такая ситуация (4.5) может складываться, согласно (2.26), на той части отрезка, на которой $P \leq 0$ и $E > 0$, в схеме PAR при $\lambda \neq 0$.

Несуществование «эквивалентной среды» означает, что полученные «большие величины» P, U, R, E представляют *фикцию*. В известном словаре русского языка [12] на с.1128 читаем: «Фикция – положение, построение, которому *ничто не соответствует* в действительности, но которым пользуются как допущением с какой-нибудь определенной целью».

По мнению автора, таких ситуаций желательно избегать. Такая точка зрения высказывалась в [5] на с.1596 и в [9] на с.9. К сказанному следует добавить, что возможны еще и ситуации, когда «эквивалентная среда» существует, но ее энтропия меньше, чем у исходных данных. Это еще увеличивает отрезок «неблагополучия», где ситуация неразумна с физической точки зрения и может привести к неблагоприятным последствиям при расчете газодинамической задачи.

4.4. Вопрос об энтропии вообще заслуживает серьезного обсуждения и возникал неоднократно. В частности в [6]-[7] уже отмечалось, что невыполнение УРС порождает проблему исследования энтропии, вычисляемой по полученным параметрам P, R, E . В [8] делается выбор в пользу ее определения не по давлению и плотности в привычном виде энтропийной функции

$$\sigma(p, \rho) = p\rho^{-\gamma}, \quad (4.6)$$

а по внутренней энергии и плотности

$$s(\varepsilon, \rho) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \cdot \rho^{-\gamma} = (\gamma - 1)\varepsilon\rho^{1-\gamma} \quad (4.7)$$

В случае выполнения УРС проблемы нет: $\sigma \equiv s$.

Проведенное в [7] и [8] исследование обнаружило весьма любопытный факт. Оказывается, для энтропии (4.7), вычисляемой по внутренней энергии и плотности, *исключается* ее убывание в случае назначения массовых

скоростей a_1, a_2 не ниже массовой скорости «звуковой» волны в случае волны разрежения и не ниже *точного* значения массовой скорости в случае ударной волны. Напротив, для энтропии (4.6), вычисляемой по давлению и плотности, *убывание возможно*.

4.5. Ввиду принципиальной важности этого факта такое исследование сейчас будет представлено в несколько ином техническом оформлении для обобщенного варианта PAR. Однако ввиду его громоздкости ограничимся случаем симметричной задачи.

Будем исходить из «правых» формул (2.5)-(2.7), записанных через безразмерный параметр μ . Вместо s/s_1 и σ/σ_1 будем исследовать

$$g(\mu) = \ln(s/s_1) = \ln\left(\frac{ER^{1-\gamma}}{\varepsilon_1 \rho_1^{1-\gamma}}\right) = \ln\left(\frac{E}{\varepsilon_1}\right) - (\gamma-1) \cdot \ln\left(\frac{R}{\rho_1}\right)$$

$$f(\mu) = \ln(\sigma/\sigma_1) = \ln\left(\frac{P R^{-\gamma}}{p_1 \rho_1^{-\gamma}}\right) = \ln\left(\frac{P}{p_1}\right) - \gamma \cdot \ln\left(\frac{R}{\rho_1}\right)$$

Введем для сокращения формул обозначения

$$b = b(\mu) = 1 + 2\lambda\mu, \quad b'(\mu) = 2\lambda.$$

Тогда функции $g(\mu)$ и $f(\mu)$ приобретают вид:

$$g(\mu) = \ln[1 + (\gamma-1)\mu(1/b + \gamma\mu/2)] + (\gamma-1)\ln(1 - \mu/b)$$

$$f(\mu) = \ln(1 + \gamma\mu b) + \gamma \ln(1 - \mu/b)$$

4.6. Поскольку $f(\mu)$ имеет более простой вид, начнем с нее «для приобретения опыта». Как выяснится, нам понадобятся ее первые и вторые производные по μ .

$$f'(\mu) = \frac{\gamma b + \gamma\mu \cdot 2\lambda}{1 + \gamma\mu b} + \gamma \frac{-1/b + 2\lambda\mu/b^2}{1 - \mu/b};$$

$$\frac{1}{\gamma} f'(\mu) = \frac{b + 2\lambda\mu}{1 + \gamma\mu b} + \gamma \frac{\mu \cdot 2\lambda - b}{b(b - \mu)}.$$

Как легко видеть, $f(0) = f'(0) = 0$. Поэтому и нужна вторая производная.

$$\frac{1}{\gamma} f''(\mu) = \frac{4\lambda}{1 + \gamma\mu b} - \frac{(\gamma b + \gamma\mu \cdot 2\lambda)(b + 2\lambda\mu)}{(1 + \gamma\mu b)^2} + \frac{(2b \cdot 2\lambda - b - \mu \cdot 2\lambda)(b - 2\lambda\mu)}{(b^2 - \mu b)^2};$$

$$\frac{1}{\gamma} f''(0) = 4\lambda - \gamma - 4\lambda + 1 = 1 - \gamma < 0$$

Теперь сделаем то же для функции $g(\mu)$.

$$g'(\mu) = \frac{(\gamma-1)[1/b + \mu\gamma/2 + \mu(\gamma/2 - 2\lambda/b^2)]}{1 + (\gamma-1)\mu(1/b + \mu\gamma/2)} + (\gamma-1) \frac{-1/b + 2\lambda\mu/b^2}{1 - \mu/b}$$

$$\frac{1}{\gamma-1} g'(\mu) = \frac{b + \gamma\mu b^2 - 2\lambda\mu}{b^2 + (\gamma-1)\mu b + \mu b^2 \gamma/2} + \frac{2\lambda\mu - b}{b^2 - \mu b}$$

Поскольку $g(0) = g'(0) = 0$, вычислим вторую производную.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma-1} g''(\mu) &= \frac{2\lambda + \gamma b^2 + 2\gamma\mu b \cdot 2\lambda - 2\lambda}{b^2 + (\gamma-1)\mu b + \mu b^2 \gamma/2} - \\ &- \left[2b \cdot 2\lambda + (\gamma-1)b + (\gamma-1)\mu \cdot 2\lambda + b^2 \gamma/2 + \mu \cdot 2b \cdot 2\lambda \cdot \gamma/2 \right] \times \\ &\times (b + \gamma\mu b^2 - 2\lambda\mu) / \left[b^2 + (\gamma-1)\mu b + \mu b^2 \gamma/2 \right] + \\ &+ (2b \cdot 2\lambda - b - \mu \cdot 2\lambda)(b - 2\lambda\mu) / (b^2 - \mu b)^2 \\ \frac{1}{\gamma-1} g''(0) &= \gamma - 4\lambda - (\gamma-1) + \gamma/2 + 4\lambda + 1 = 2 + \gamma/2 > 0 \end{aligned}$$

Это и доказывает, что при достаточно *малых* значениях параметра μ функция $g(\mu)$ выпукла вниз и, следовательно, $g(\mu) > 0$ в окрестности $\mu = 0$. Напротив, функция $f(\mu)$ выпукла вверх и $f(\mu) < 0$ в окрестности $\mu = 0$. Что и требовалось доказать.

К сожалению, описывать поведение $f(\mu)$ и $g(\mu)$ при больших значениях μ слишком сложно и мы этого делать не будем.

§ 5. О модернизации и сравнении схем

5.1. Благоприятные результаты, полученные для «кинетической энтропии» (4.7), позволили предложить в [6]-[7] следующий подход. Почему бы не дополнить предлагаемые алгоритмы (сейчас это уже С, АСО, СОМ, РАВ, РАС) приближенного расчета распада разрыва (задачи Римана) завершающей операцией: после вычисления «больших величин» $(P, U, R, E)_*$ пересчитывается величина давления по УРС (идеального газа в рассматриваемом для простоты случае):

$$P^* = (\gamma - 1) R_* E_* \quad (5.1)$$

Значения потоков (4.1) считаются затем по величинам (P^*, U_*, R_*, E_*) с новым давлением. Если отличия P_* и P^* значительны (а это возможно), то фактически реализуется *другое* приближенное решение.

Столь простой в алгоритмическом плане прием позволяет снять проблему определения энтропии. Она становится однозначной, поскольку

$$s(E_*, R_*) = (\gamma - 1) R_* E_* R_*^{-\gamma} = P^* R_*^{-\gamma} = \sigma(P^*, R_*)$$

Таким модернизированным вариантам схем присвоим наименования с добавлением М.

Вариантов стало так много, что стоит подумать, как их сравнить и какому отдавать предпочтение. Конечно, надежнее всего это можно сделать, если привлечь точные решения задачи. Однако, отложив это до § 7, пока попробуем провести сравнение более простыми средствами, которые можно было бы применить при практических расчетах.

5.2. Сразу возникает естественный вопрос: «А насколько велика разница между P и P^* ?» Для поиска ответа на него будем исходить из формул общего вида для массовых скоростей:

$$a_1 = \rho_1(c_1 + \lambda_1 z), \quad a_2 = \rho_2(c_2 + \lambda_2 z) \quad (5.2)$$

и формул (1.7)-(1.12). Попытаемся исследовать величину

$$\theta = P/P^* = \frac{P}{(\gamma_1 - 1)RE} \quad (5.3)$$

Для определенности рассмотрим случай $U \geq 0$ (случай $U < 0$ исследуется совершенно аналогично). Тогда из формул (1.9)-(1.10) будем иметь

$$\theta = \frac{P[1/\rho_1 - (P - p_1)/a_1^2]}{p_1/\rho_1 + (\gamma_1 - 1)(P^2 - p_1^2)/(2a_1^2)} = \frac{P[a_1^2 - \rho_1(P - p_1)]}{p_1[a_1^2 + \rho_1(P^2 - p_1^2)(\gamma_1 - 1)/2]} \quad (5.4)$$

Согласно формуле (1.8):

$$P = \left(z + \frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} \right) / \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \quad (5.5)$$

5.3. Начнем с «акустического» варианта, для которого $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и массовые скорости $a_1 = \rho_1 c_1$, $a_2 = \rho_2 c_2$ не зависят от z . Введя безразмерную величину $P/p_1 = \xi$, можно записать (5.4) в виде:

$$\theta = \theta(\xi) = [\xi(\gamma + 1 - \xi)] / [\gamma + (\xi^2 - 1)(\gamma - 1)/2] \quad (5.6)$$

Очевидно, что $\theta(1) = 1$.

Зададим некоторое «пороговое» значение Δ ($0 < \Delta \leq 1$) и поставим вопрос так: при каких значениях ξ этот «порог» достигается? Согласно (5.6) условие

$$1 - \theta(\xi) = \Delta$$

приводит к квадратному уравнению:

$$(\xi^2 - 1)(1 - \Delta)(\gamma - 1)/2 + \gamma(1 - \Delta) - (\gamma + 1)\xi + \xi^2 = 0$$

или

$$\xi^2 [(1 - \Delta)(\gamma - 1)/2 + 1] - \xi(1 + \gamma) + (1 - \Delta)(\gamma + 1)/2 = 0 \quad (5.7)$$

Дискриминант уравнения

$$DIS = \Delta \cdot (\gamma + 1) [2\gamma - \Delta(\gamma - 1)] > 0 \quad (5.8)$$

Следовательно, уравнение (5.7) имеет два действительных положительных корня:

$$\xi_- = (\gamma + 1 - \sqrt{DIS}) / [2 + (\gamma - 1)(1 - \Delta)] \quad (5.9)$$

$$\xi_+ = (\gamma + 1 + \sqrt{DIS}) / [2 + (\gamma - 1)(1 - \Delta)]$$

При $\Delta = 0$ корни сливаются в один ($\xi_- = \xi_+ = 1$).

Для отрезка $\xi_- \leq \xi \leq \xi_+$ будем иметь:

на его концах $\xi = \xi_-$ и $\xi = \xi_+$ величина $P/P^* = 1 - \Delta$,

$$P/P^* \geq 1 - \Delta \quad \text{при} \quad \xi_- \leq \xi \leq \xi_+. \quad (5.10)$$

Это можно трактовать как «островок доверия», протяженность которого имеет порядок $\sqrt{\Delta}$, и на нем удерживается условная относительная погрешность $\theta(\xi)$ в задаваемых пределах. По мере уменьшения P погрешность увеличивается до тех пор, пока при $P=0$ не достигается значение $\theta=0$. Это происходит в тот момент, когда, согласно формуле (5.5), величина z достигает критического значения

$$z_{кр}^- = -\left(\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2}\right) \quad (5.11)$$

5.4. Напомним также об изложенной в § 2 ситуации, названной «фиаско акустического приближения» из-за «выхода из строя» формулы для плотности R . Это происходит в тот момент, когда согласно (5.4)

$$a_1^2 - \rho_1(P - p_1) = 0, \quad \text{т.е.} \quad P = p_1 + a_1^2/\rho_1 = (\gamma_1 + 1)p_1 \quad (5.12)$$

С учетом (5.5) это случится при

$$z = z_{кр}^+ = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)(\gamma_1 + 1)p_1 - \left(\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2}\right) \quad (5.13)$$

В частности, в симметричной задаче (2.1)

$$z_{кр}^+ = (2\gamma_1 p_1)/a_1 = 2c_1 \quad (5.14)$$

На рис. 3 представлен эскиз графика θ .

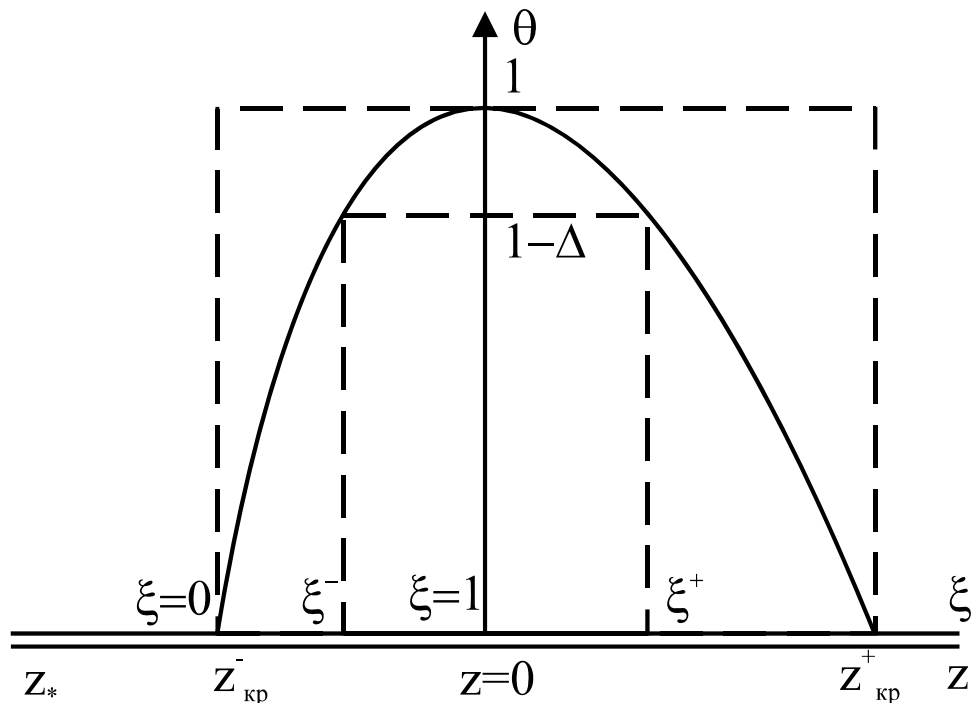


Рис. 3

Полученный противоестественный результат обнаруживает определенные признаки сходства и желание рассматривать его в качестве примера *режима с обострением*, т.е. таких режимов, в которых одна или

несколько величин за конечное время возрастают до бесконечности. Серьезный вклад в исследование и пропагандирование таких задач внес С.П.Курдюмов.

Считаем уместным и целесообразным привести цитату из воспоминаний о нем ([13], с.313) одного из сотрудников, который приписывает С.П. высказывание из его лекции:

«Режим с обострением парадоксален сам по себе: очень долго как будто ничего не происходит. Та величина, за которой мы следим, почти не меняется, и вдруг – в поразительно короткий промежуток времени происходит все самое главное. Режим с обострением бросает вызов расхожей житейской мудрости, что завтра все будет примерно так же, как сегодня. Завтра все может быть по-другому! Или завтра вообще может не быть. Имея дело с режимом с обострением, мы не можем планировать свои действия «от достигнутого», увеличивая на какой-то процент нынешние показатели. Это само по себе вызов для тех, кто планирует и прогнозирует. И неплохо бы знать, имеет ли место этот самый режим в тех системах, с которыми мы имеем дело».

Обсуждаемая ситуация названа противоестественной, во-первых, потому что речь идет о плотности, для роста которой приходится очень исхитряться из-за портящей дело ударной адиабаты, во-вторых, «завтра» не будет, если окажется, что $\mu \geq 1$; в-третьих, потому что этот самый режим именно «места не имеет». И в этом мы убедились в § 2, изменив назначение массовой скорости формулой (2.10).

5.5. Перейдем теперь к общему случаю назначения массовых скоростей (5.2) при λ_1, λ_2 , отличных от нуля. Принципиально важным отличием от «акустического» варианта является отсутствие правого ограничения $z_{кр}^+$ и возможность $z \rightarrow +\infty$. Например, для симметричной задачи из формул (2.5)-(2.7) получается

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \theta = 8\lambda(2\lambda - 1)/(\gamma - 1) = \theta^+ \quad (5.15)$$

Для варианта СОМ $\lambda = 1$, $\theta^+ = 8/(\gamma - 1)$.

Для варианта PAR $\lambda = (\gamma + 1)/4$, $\theta^+ = 4(\gamma + 1)$.

Для $z < 0$ различие вариантов – в назначении $z_{кр}^-$. Для вариантов С, АСО, и СОМ ограничение определяется условием (2.8), т.е. $z_{кр}^- = -2c_1/\gamma$.

Согласно изложенному в § 2, в симметричной задаче для варианта PAR в формуле (2.24) следует назначать $z_{кр}^-$ по *правому* краю отрезка, т.е. $z_{кр}^- = -4c_1/(\gamma + 1)$. После чего возникает описанная по поводу формулы (2.26) ситуация с энтропией.

В случае $z > 0$ особняком стоит «акустический» вариант, о чем уже было сказано достаточно.

Конечно, представляла бы интерес информация о протяженности «островка доверия» $\xi_- \leq \xi \leq \xi_+$, на котором удерживается условная точность

(5.10). Но такое исследование связано с громоздкими выкладками и выполнено не было.

Сравнение различных вариантов будет продолжено в § 7.

§ 6. Традиционный вариант (TRA) приближенного расчета задачи Римана. Об ударных волнах разрежения и энтропии

6.1. Для полноты изложения и участия в сравнении различных вариантов приближенного расчета распада разрыва рассмотрим еще один вариант, восходящий еще к монографии [2], который поэтому будем именовать традиционным (TRA).

Суть его состоит в том, что *каким-нибудь* способом рассчитывается приближенное значение давления P , называемое начальным приближением. Например, по формуле (1.8) с назначением a_1, a_2 одним из описанных уже способов. Возможны и другие алгоритмы получения приближенного значения P , например, описанные в [9].

6.2. Но после этого величины R, E вычисляются не по формулам (1.9)-(1.12), а следующим образом, описанным в [2] на с.114-115.

Пусть $U \geq 0$. Если $P > p_1$, т.е. в случае ударной волны, величина $R = R_1$ вычисляется по адиабате Гюгонио:

$$R_1 = \rho_1 \frac{(\gamma_1 + 1)P + (\gamma_1 - 1)p_1}{(\gamma_1 - 1)P + (\gamma_1 + 1)p_1} \quad (6.1)$$

А если $P < p_1$, то имеем дело с волной разрежения. Можно исходить из условия *сохранения* энтропии:

$$P/R_1^{\gamma_1} = p_1/\rho_1^{\gamma_1}, \text{ т.е. } R_1 = \rho_1 (P/p_1)^{1/\gamma_1} \quad (6.2)$$

В качестве альтернативного варианта в [2] предлагается формула

$$R_1 = \gamma_1 P / (2c_1^*)^2, \quad \text{где} \quad c_1^* = c_1 + \frac{\gamma_1 - 1}{2}(u_1 - U) \quad (6.3)$$

c_1^* представляет скорость крайней характеристики, примыкающей (в случае левой волны разрежения) к зоне 3 постоянных параметров. Однако следует иметь в виду, что (6.3) дает результат, тождественный (6.2), только в случае точного решения, т.е. доведения итерационного процесса расчета распада разрыва до сходимости!

Естественно, что случай $U < 0$ (при необходимости) рассматривается аналогично.

6.3. После вычисления плотности R величина E досчитывается по уравнению состояния. В случае идеального газа

$$E = P / [(\gamma - 1)R] \quad (6.4)$$

Далее можно, как и ранее, назначать D_1 и D_2 формулами (1.6). Однако совсем не обязательно отказываться от более правильной структуры распада разрыва, пример которой представлен на рис.1. Имеется все нужное для

получения *приближенных* границ веера характеристик в случае левой волны разрежения (если $P < p_1$):

$$D_1 = u_1 - c_1, \quad D_1^* = U - c_1^*, \quad (6.5)$$

где c_1^* вычисляется по формуле (6.3). Аналогично, в случае правой волны разрежения ($P < p_2$):

$$D_2 = u_2 + c_2, \quad D_2^* = U + c_2^*, \quad c_2^* = c_2 - \frac{\gamma_2 - 1}{2}(u_2 - U) \quad (6.6)$$

Это внесет некоторые дополнительные случаи в формулу (1.13) назначения «больших величин». Рассмотрение «вееров характеристик»

$$D_1 < \frac{x}{t} < D_1^* \quad \text{или} \quad D_2^* < \frac{x}{t} < D_2 \quad (6.7)$$

можно реализовывать приближенно. Назначение $P(x/t)$ делается, например, простейшим способом: с помощью линейной интерполяции по величине наклона нужной характеристики между p_1 и P для левой волны разрежения и p_2 и P – для правой, а затем – используя те же формулы (6.2) и (6.4). Более подробно об этом см. [9], с. 20.

6.4. Описанный «честный» досчет «больших величин» даже для грубого (например, «акустического») приближения гарантирует неубывание энтропии.

Почему это так важно? В газовой динамике неоднократно обсуждался вопрос о так называемых ударных волнах разрежения. Они не являются реальными физическими объектами, в отличие от реальных ударных волн, представляющих ударные волны сжатия. Существование таких волн отвергается именно как противоречащее закону возрастания энтропии. Появление (или открытое проявление) таких волн в расчетах газодинамических задач, в принципе, может привести к получению искаженных результатов.

В [2] на с.115-117 эта проблема обсуждалась в связи с обеспечением *единственности* искомого решения.

В [14] рассмотрены примеры расчетов волн разрежения, возникающих при выдвигании поршня из газа. Обнаружено, что при некоторых условиях вместо непрерывного решения в расчетах наблюдается появление разрывов – ударных волн разрежения, существование которых невозможно в соответствии с теоремой Цемплена. Указанный дефект приводит не только к количественному, но и качественному искажению решения.

В [14] дается возможное объяснение механизма возникновения дефекта – коэффициент схемной вязкости при определенных условиях может стать отрицательным, что и сказывается негативно на качестве разностных схем и получаемых результатах.

Как отмечается в [15] на с.7, теорема Цемплена с точки зрения теории квазилинейных уравнений представляет *постулат*, входящий в определение обобщенных решений. С помощью этого постулата из числа обобщенных решений *исключаются* также разрывные решения, которые удовлетворяя

законам сохранения массы, импульса и энергии, допускают возможность убывания энтропии для некоторой выделенной массы газа.

§ 7. Сравнение приближенных вариантов с точными решениями задачи распада разрыва. Иллюстрирующие примеры

7.1. Один из способов получения точного решения задачи о распаде разрыва состоит в решении уравнения для давления P , которое имеет следующий вид: (см., напр., [2], с.110)

$$F(P) = f(P; p_1, \rho_1) + f(P; p_2, \rho_2) = u_1 - u_2, \quad (7.1)$$

где для двух сред $\kappa=1$ и $\kappa=2$, предполагаемых идеальными газами, функции определяются так:

$$f(P; p_k, \rho_k) = \begin{cases} (P - p_k) / \sqrt{\rho_k \left(\frac{\gamma_k + 1}{2} P + \frac{\gamma_k - 1}{2} p_k \right)}, & \text{если } P \geq p_k \\ \frac{2}{\gamma_k - 1} c_k \left[\left(\frac{P}{p_k} \right)^{\frac{\gamma_k - 1}{2\gamma_k}} - 1 \right], & \text{если } P < p_k \end{cases} \quad (7.2)$$

Для его решения привлекаются итерационные методы. Чтобы не загромождать изложение излишне сложными формулами, в методических целях последующего сравнения приближенных алгоритмов, ограничимся частными решениями, которые могут быть выписаны явно.

7.2. В частности, таковые получаются при условиях

$$p_1 = p_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \quad (7.3)$$

Тогда в случае $u_1 - u_2 > 0$ имеем уравнение для P :

$$P - p_1 = \sqrt{P + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_1} \cdot A, \quad (7.4)$$

где

$$A = (u_1 - u_2) \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} / (1/\sqrt{\rho_1} + 1/\sqrt{\rho_2}) \quad (7.5)$$

Возведением в квадрат (7.4) сводится к квадратному уравнению, которое имеет два действительных корня разных знаков и положительный является искомым решением:

$$P = p_1 + \frac{A^2}{2} + A \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} p_1} \quad (7.6)$$

7.3. Далее, в случае $u_1 - u_2 < 0$ при тех же условиях (7.3) получаем для P уравнение:

$$\left[\left(\frac{P}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right] \cdot \frac{2(c_1 + c_2)}{\gamma - 1} = u_1 - u_2$$

Его решение

$$P = p_1 \left[1 + \frac{(\gamma - 1)(u_1 - u_2)}{2(c_1 + c_2)} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \quad (7.7)$$

существует при выполнении условия

$$u_1 - u_2 > -\frac{2(c_1 + c_2)}{\gamma - 1}, \quad (7.8)$$

что уже неоднократно отмечалось ранее.

7.4. После вычисления P другие величины (в частности, R и E), характеризующие точное решение, могут быть досчитаны по тем формулам, которые были описаны в предыдущем § 6 для варианта TRA.

Мы намерены привести несколько примеров, удовлетворяющих условиям (7.3), с тем, чтобы проиллюстрировать возможности описанных приближенных методов, включая сравнение их результатов с точными решениями (7.5)-(7.6) или (7.7).

Подчеркнем сразу, что как уже отмечалось в § 5, приближенные методы объявляют зоной вакуума с давлением $P=0$ области «болота»:

$$u_1 - u_2 < -\alpha_{кр} (c_1 + c_2) \quad (7.9)$$

Значения $\alpha_{кр}$ при $\gamma = 1.4$ составляют

$$\alpha_{кр} = 1/\gamma = 0.715 \text{ для АСО, С и СОМ,} \quad \alpha_{кр} = \frac{2}{\gamma + 1} = 0.833 \text{ для PAR}$$

вместо $\alpha_{кр} = \alpha_* = \frac{2}{\gamma - 1} = 5$ для «точного» решения.

7.5. В качестве первого примера рассмотрим распад разрыва с начальными данными:

$$u_1 - u_2 = -2.0, \quad p_1 = p_2 = 0.4, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \gamma = 1.4 \quad (7.10)$$

Для него $c_1 = c_2 = \sqrt{0.56} = 0.74833$, $\mu = -1.3363$.

Результаты, полученные для описанных приближенных методов, представлены в таблице 1. Ее столбцы соответствуют вариантам АСО (тождественному в этом случае С и СОМ, поскольку $\lambda = 0$), PAR, PAS и точному решению G^* . Строки таблицы содержат полученные значения указанных величин.

В качестве комментария к таблице 1 стоит отметить, что во всех случаях происходило «попадание в болото» и поэтому пришлось делать коррекцию (2.9) давления P . Чтобы «не загрязнять» таблицу, это делалось с помощью $fix=0$ (в скобках приведены полученные отрицательные значения P). Естественно поэтому, что строки P/P^* и σ/σ_1 содержат нулевые значения.

«Сюрпризом» стало убывание энтропии ($S/s_1 < 1$) в варианте PAS. Это нельзя считать и неожиданностью: в конце § 4 было специально оговорено, что доказательство неубывания S/s_1 предполагает достаточно малые значения параметра μ . Однако в других вариантах убывания не произошло!

Таблица 1. ($u_1 - u_2 = -2.0$, $\gamma = 1.4$)

	ACO (C, COM)	PAR	PAS	G^*
λ	0.	0.08571	0.16457	
a	0.74833	0.57690	0.41918	
P	0. (-0.348)	0. (-0.177)	0. (-0.019)	0.04536
R	0.42802	0.45415	0.30521	0.21122
E	0.85714	0.75962	0.54476	0.53691
P^*	0.14675	0.13800	0.06448	
P/P^*	0.	0.	0.	
S/s_1	1.20356	1.04164	0.87563	1.
σ/σ_1	0.	0.	0.	1.

А между тем в этом случае именно вариант PAS дал наиболее близкие к точным (приведенным в столбце G^*) значения P, R, E .

7.6. Теперь наступил удобный момент напомнить, что (7.10) представляют начальные данные для расчета одномерной нестационарной задачи – теста 6 из [6]. Он был рассчитан в трех вариантах – с использованием величин P_*, P^* и «точного» распада разрыва. И дал практически не различающиеся результаты распределения газодинамических величин по пространственной координате на момент выхода образовавшихся волн к границам расчетной области (см. [6], с. 14). И это, несмотря на значительные различия величин, представленных в таблице 1 для начального момента времени $t=0$ (и, естественно, на некотором начальном интервале расчета).

Таблица 2. ($u_1 - u_2 = -0.2$, $\gamma = 1.4$)

	ACO (C, COM)	PAR	PAS	G^*
λ	0.	0.08571	0.16457	
a	0.74833	0.73119	0.71542	
P	0.32517	0.32688	0.32846	0.33091
R	0.88212	0.87969	0.87736	0.87332
E	0.95155	0.95029	0.95147	0.94726
P^*	0.33575	0.33439	0.33392	
P/P^*	0.96847	0.97755	0.98366	
S/s_1	1.00050	1.00029	1.00259	1.
σ/σ_1	0.96896	0.97784	0.98621	1.

В таблице 2 представлены результаты расчета, который отличается от описанного только одним параметром: $u_1 - u_2 = -0.2$. В нем никаких «сюрпризов» не наблюдается.

Таким образом, можно рассчитывать на работоспособность всех рассматривавшихся вариантов приближенного метода в случае относительно небольших различий параметров в начальных данных.

7.7. Теперь рассмотрим пример распада разрыва с ударными волнами. В методических целях исследуем пример с начальными данными из теста 7* (см. [9], с.12):

$$u_1 - u_2 = 4.0, \quad p_1 = p_2 = 4.0, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \gamma = 9 \quad (7.11)$$

Для него $c_1 = c_2 = 6$, $\mu = 4/12 = 0.3333$.

Вопрос о физическом содержании параметра $\gamma = 9$ обсуждать не будем, имея в виду, что при локальной аппроксимации сложных УРС двучленными УРС появление таких значений вполне возможно.

Таблица 3. ($u_1 - u_2 = 4.0$, $\gamma = 9$)

	ACO	C≡COM	PAR	G^*
λ	0.	1.	2.5	
a	6.	10.	16.	12.81025
P	16.	24.	36.	29.6205
R	1.5	1.25	1.14285	1.06947
E	12.4635	4.8069	2.1837	3.46205
P^*	149.562	48.0687	19.9531	
P/P^*	0.1070	0.4993	1.8042	
S/s_1	0.9726	1.6129	1.4997	4.0458
σ/σ_1	0.10404	0.8053	2.7059	4.0458

В таблице 3 представлены результаты, аналогичные описанным выше (в таблицах 1 и 2). Столбцы таблицы отвечают трем вариантам приближенного расчета со значениями параметра λ , выписанными в первой строке: «акустическому» с $\lambda = 0$, варианту С, который в этом случае тождественен «комфортному» (COM) с $\lambda = 1$, и «параметрическому» с $\lambda = (\gamma + 1)/4 = 2.5$.

Комментируя таблицу 3, можно отметить, что «акустический» вариант, хотя и не «терпит фиаско» (поскольку $z < 2c_1$), но дает весьма грубые результаты.

Для него, а также для C≡COM энтропия σ/σ_1 убывает. А вот для варианта PAR оба значения энтропии S/s_1 и σ/σ_1 оказались большими 1.

В последнем столбце G^* представлены значения распада разрыва для точного решения и точное значение массовой скорости УВ.

Конечно, приведенные примеры лишь иллюстрируют работоспособность описанных приближенных методов. Их детальное сравнение возможно лишь в процессе производственной эксплуатации.

§ 8. Практические рекомендации

8.1. Самое большое огорчение для автора – тот факт, что для всех описанных вариантов приближенного метода с назначением массовых скоростей существуют протяженные участки «болота»:

$$u_1 - u_2 < -\alpha_{кр} (c_1 + c_2) \quad (8.1)$$

Попадание на них приводит к получению по формуле (1.8) значения P , которое нуждается в корректировке (2.9). А это, как уже объяснялось, является серьезным недостатком.

Положение это, конечно, не безвыходное, и может быть исправлено применением модернизации схем, использованием традиционного подхода (ТРА) или другими приемами.

8.2. В случаях, если попадания в «болото» удалось избежать (а такие случаи составляют абсолютное большинство ситуаций, возникающих при расчете газодинамических задач), определенное суждение о точности результата дает величина θ , определенная формулой (5.3). Если она выходит за пределы, назначенные «пороговым» значением Δ , возможны два противоположных способа действий.

Один способ состоит в привлечении более точного расчета распада разрыва, используя полученный результат в качестве начального приближения.

Второй способ состоит в том, чтобы «смириться» с полученным приближенным результатом («ничего не делать – авось обойдется»). Как показывает вычислительный опыт, такой подход вполне оправдывает себя во многих ситуациях, и к этому есть свои основания. Они состоят в том, что каждая «неблагополучная» ситуация (если возникает) существует в течение небольшого интервала времени и «размазывается», не приводя к катастрофическим (или хотя бы визуально обнаруживаемым) последствиям. Приводимые (например, в [4], [6]) примеры получения близких результатов при расчете тестовых задач для приближенных методов и «точного» (условно говоря) расчета распада разрыва подтверждают это.

Конечно, надеяться, что так бывает всегда, не следует, а, напротив, использовать возможности контролировать ситуацию.

8.3. Например, с точки зрения практики расчетов представляется целесообразным не противопоставление приближенных решений (какое «лучше?»), а параллельное проведение расчетов с использованием их различных возможных вариантов. Сравнение их результатов может позволить делать выводы либо о приемлемой точности определения нужных характеристик процесса или конструкции, либо, напротив, о необходимости их уточнения.

Как правило, целью расчетов является именно получение таких характеристик, а «мелкие подробности» и недостатки играют роль второстепенную.

Возросшие возможности вычислительной техники в плане организации работы многосеточных методов, использования многопроцессорных вычислений, подробных расчетных сеток значительно облегчают достижение нужных практических результатов.

И в то же время создают благоприятные возможности для получения таких результатов с меньшими вычислительными затратами за счет использования приближенных методов.

8.4. Из рассмотренных вариантов назначения массовых скоростей автор отдает предпочтение варианту PAR по следующим причинам. Во-первых, он обеспечивает правильное асимптотическое поведение плотности R на сильных ударных волнах и волнах разрежения. Во-вторых, обладает более широким диапазоном применимости (хотя и для него область «болота» (8.1) достаточно велика).

Конечно, это не исключает применения и других вариантов приближенного расчета распада разрыва и даже их возможного преимущества при определенных условиях.

Если читателю кажется, что расчетные формулы для варианта PAR сложнее и, следовательно, более вычислительно затратны, чем для других вариантов, следует иметь в виду следующее. *Предварительное вычисление* нескольких коэффициентов, *хранение* и использование их в течение расчета всей счетной области с одним уравнением состояния практически полностью снимает этот вопрос.

8.5. Изложенное касается прежде всего простейших уравнений состояния (УРС) – идеального газа и двучленного (1.3).

В случае уравнения состояния (1.2) в форме достаточно сложной функциональной зависимости давления от плотности и внутренней энергии успешно используется предложенный А.В.Забродиным прием локальной аппроксимации его двучленным уравнением состояния, описанный, напр., в [3] на с.177.

Автор обращает внимание на «решительные» меры, которые считаются в [3] допустимыми (и называются «регуляризацией») в случае невыполнения требований к вычисляемым параметрам (например, назначать показатель адиабаты γ «чуть» большим 1, если он оказывается меньше 1). А тогда почему бы в случае получения $c_0^2 < 0$ (или $p_0 < 0$) не заменять его на $c_0^2 = 0$ (или $p_0 = 0$)? Для «безавостности» расчетных формул – вместо того, чтобы кропотливо их *совершенствовать*, не допуская таких ситуаций. Кто не рискует, тот не пьет шампанское?!

8.6. Разнообразным технологиям решения задачи Римана посвящена специальная монография [17], которая обычно служит источником тестов для апробирования предлагаемых приближенных методов.

В [18]-[19] описаны достаточно сложные технологии расчета распада разрыва, основанные на численном интегрировании римановых инвариантов и адиабаты Пуассона для некоторых конкретных уравнений состояния. Такие технологии позволяют получать достаточно точное решение поставленной задачи, но и вычислительные затраты их столь значительны, что они вряд ли могут быть рекомендованы для массового применения.

В случае, рассмотренном в [18], оказалось, что если аппроксимировать табличные данные для уравнения состояния не дробно-линейными функциями, как описано в [18], а линейными, то численного интегрирования удастся избежать и получить результат аналитически в явных формулах. Это существенно упрощает реализацию алгоритма. Соответствующее описание можно найти в работе [10].

8.7. Описанные алгоритмы с назначением массовых скоростей могут рассматриваться как *универсальные* для получения приближенного решения задач о распаде разрыва в случае *произвольных* уравнений состояния. И поэтому представляют несомненный интерес для практики решения «производственных» газодинамических задач.

Уравнения состояния могут задаваться, в частности, и в табличной форме.

Как известно из курсов термодинамики (см, напр., [20], с.60-67), произвольное уравнение состояния должно удовлетворять термодинамическому тождеству:

$$TdS = d\varepsilon + pd(1/\rho) \quad (8.2)$$

Из него следует, что температура T является интегрирующим множителем при определении энтропии S (правда, это далеко не всегда удается практически реализовать на уровне явных формул). И накладывает ограничение, называемое условием термодинамической согласованности.

В связи с этим заслуживает быть отмеченным следующий факт. С использованием (1.9) формула (1.10) для внутренней энергии может быть записана в виде

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + (P + p_1)/2 \cdot (1/\rho_3 - 1/\rho_1) = 0 \quad (8.3)$$

Ее можно трактовать как дискретную реализацию (8.2) через левую волну.

Аналогичным образом обстоит дело и с формулами (1.11)-(1.12) для правой волны.

Заключение

Концепция *низкоэнтропийного* сжатия оболочечных мишеней для моделирования динамики лазерных термоядерных мишеней в недавнем прошлом составляла один из интереснейших разделов прикладной вычислительной науки и продолжает оставаться актуальной.

В обзоре [16] на с.9 можно прочесть следующее: «Как известно, неправильный расчет энтропии особенно опасен при численном моделировании обжатия оболочечных мишеней в задачах управляемого

термоядерного синтеза. Если энтропии в счете набирается слишком «много», то оболочка «отказывается» работать, - в расчете топливо не доводится до загорания. Если же в расчете энтропия растет слабее, чем в реальности, то численная модель оболочки «сжимается» чересчур легко, что приводит к слишком оптимистическим выводам о качестве мишени».

Далее в обзоре [16] излагается в качестве примера: «было предсказано, что, вложив симметрично в мишень лазерную энергию в 10^4 Дж, можно получить от термоядерного горения сжатой смеси в 80 раз большую энергию. Недавно (имеется в виду 1988 год) американский лазер дал энергию $1.8 \cdot 10^4$ Дж в ультрафиолете; термоядерной же энергии в мишени выделилось в 600 раз меньше, чем вкладывалось, - не более 28 Дж... Это наводит на мысль, что расчет вторичных ударных волн проводился неадекватно, что привело к заниженным значениям энтропии и, как следствие, к завышенным значениям плотности топлива, достаточным для начала термоядерной реакции».

Такова, возможно, цена вопроса об энтропии! Позволим себе повторить уже приводившуюся в [5] выдержку из того же обзора [16], с.7 о трудностях правильного моделирования изменения энтропии, поскольку на разностной сетке гладкие волны сжатия формально неотличимы от размазанных ударных фронтов. Между тем, в то время как на *гладких* участках энтропия должна *сохраняться, на фронтах разрывов она должна расти.*

Заметим, что именно эту «заботу» берет на себя аккуратный расчет распада разрыва, старательно различающий случаи $z < 0$ и $z > 0$, и желательно, чтобы приближенный расчет не искажал результаты этой «заботы».

Дополнительное требование неубывания энтропии позволяет в классе всех возможных решений газодинамических уравнений выделить *единственное физически реализуемое*, отбросив решения с термодинамически *аномальным* поведением, вроде ударных волн разрежения.

Автор полагает, что именно при приближенных реализациях расчета распада разрыва такие требования могут быть нарушены в первую очередь, и поэтому на них обращено особое внимание.

Автор выражает благодарность коллегам М.С.Гавреевой и А.В.Северину за помощь в оформлении работы.

Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.// Матем. сб., 1959, 47, вып.3., с.271-306.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976, 400 с.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений//М., ФИЗМАТЛИТ, 2001, 608 с.

4. Сафронов А.В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газовой динамики на основе соотношений на разрывах.// Космонавтика и ракетостроение. 2006, вып.2(43), с.152-158.
5. Прокопов Г.П. Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах.// ЖВМ и МФ, 2007, 47, №9, с.1591-1601.
6. Прокопов Г.П., Северин А.В. Экономичная реализация метода Годунова.// Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2009, №29, 24 с.
7. Прокопов Г.П., Северин А.В. Об экономичной реализации метода Годунова на основе приближенного решения задач о распаде разрыва.// Сборник научных трудов «Высокопроизводительные вычисления в задачах механики и физики», ISBN 978-5-98354-005-7, с.134-142.
8. Сафронов А.В. Разностный метод решения уравнений гидродинамики на основе энтропийно согласованного приближенного решения задачи Римана.//там же, с.143-149.
9. Прокопов Г.П. О приближенных реализациях метода Годунова.// Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2007, №15, 28 с.
10. Прокопов Г.П. Реализация метода Годунова при табличном задании уравнений состояния.// Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2008, №3, 28с.
11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ.// Гостехиздат, М.
12. Ушаков Д.Н. Большой толковый словарь современного русского языка.// М., Альма-Принт, 2005.
13. Мне нужно быть. Памяти Сергея Павловича Курдюмова./Ред.-сост. З.Е.Журавлева.//М.: КРАСАНД, 2010, 480 с.
14. Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Рогожкин Д.В. Об ударных волнах разрежения в вычислительной газовой динамике.// Математическое моделирование, 2008, том 20, №1, с.48-60.
15. Годунов С.К. Воспоминания о разностных схемах.//Междунар. Симпозиум «Метод Годунова в газовой динамике». США, Мичиганский университет, май 1997, Новосибирск, Научная книга, 1997.
16. Забродин А.В., Софронов И.Д., Ченцов Н.Н. Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений. (Обзор)// Вопросы атомной науки и техники. Серия: Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988, вып. 4, с.3-22.
17. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Method for Fluid Dynamics.// Springer Verlag, Second Edition, 1999, 594 p.
18. Чарахчян А.А. Об алгоритмах расчета распада разрыва для схем С.К.Годунова.// ЖВМ и МФ, 2000, 40, №5, с.782-796.
19. Моисеев Н.Я., Мухамадиева Т.А. Метод Ньютона для решения задачи о распаде произвольного разрыва в средах с уравнениями состояния общего вида.// ЖВМ и МФ, 2008, т.48, №6, с.1102-1110.
20. Зоммерфельд А. Термодинамика и статическая физика.// М., Изд-во Инстр.лит., 1955, 480с.