



Сарычев В.А., Гутник С.А.

Динамика осесимметричного
спутника-гиростата.
Исследование положений
равновесия и их
устойчивости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Исследование положений равновесия и их устойчивости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 11. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-11>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук**

В.А. Сарычев, С.А. Гутник

**Динамика осесимметричного спутника-гиростата.
Исследование положений равновесия
и их устойчивости**

Препринт №11 за 2011г.

Москва – 2011

Аннотация

В.А. Сарычев, С.А. Гутник. **Динамика осесимметричного спутника-гиростата. Исследование положений равновесия и их устойчивости.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 28 страниц, 23 рисунка, библиография: 4 наименования.

Исследована динамика осесимметричного спутника-гиростата, движущегося в центральном ньютоновом силовом поле по круговой орбите. Определены все положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат и проведен анализ условий их существования. Найдены все бифуркационные значения параметров системы, при которых изменяется число положений равновесия. Показано, что число положений равновесия спутника-гиростата не может быть меньше 8 и не превышает 16. Исследована эволюция областей выполнения достаточных условий устойчивости положений равновесия спутника-гиростата.

Ключевые слова: осесимметричный спутник-гиростат, гравитационный момент, положения равновесия, устойчивость, точки бифуркации.

V.A. Sarychev, S.A. Gutnik. **Dynamics of an axisymmetric gyrostat satellite. Study of equilibria and their stability.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 28 Pages, 23 Figures, 4 References.

Dynamics of an axisymmetric gyrostat satellite moving along a circular orbit in the central Newtonian gravitational field is investigated. All equilibrium orientations of the gyrostat satellite in the orbital coordinate system are determined. Boundaries of domains in the space of parameters which correspond to fixed number of equilibria are determined. It is shown that the number of equilibria of the gyrostat satellite not be less than 8 and not more than 16. Parameter dependence of domains, where sufficient conditions of stability are verified, is investigated.

Key words: axisymmetric gyrostat satellite, gravitational torque, equilibria, stability, bifurcation points

1. Уравнения движения

Рассматривается задача о движении осесимметричного спутника-гиростата, представляющего собой твердое тело с расположенными внутри него статически и динамически уравновешенными роторами. Считается, что угловые скорости вращения роторов относительно корпуса спутника постоянны и центр масс спутника-гиростата движется по круговой орбите.

Для записи уравнений движения вводятся две правые декартовы системы координат с началом в центре масс O спутника-гиростата:

$OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OZ направлена вдоль радиуса-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника-гиростата; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O .

$Oxyz$ – связанная со спутником-гиростатом система координат; Ox, Oy, Oz – главные центральные оси инерции спутника-гиростата.

Направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат выражаются через самолетные углы тангажа (α), рыскания (β) и крена (γ) с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \alpha \cos \beta, \\
 a_{12} &= \cos(y, X) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
 a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \beta, \\
 a_{22} &= \cos(y, Y) = \cos \beta \cos \gamma, \\
 a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \beta \sin \gamma, \\
 a_{31} &= \cos(x, Z) = -\sin \alpha \cos \beta, \\
 a_{32} &= \cos(y, Z) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда уравнения движения спутника-гиростата относительно его центра масс записываются в следующем виде [1-3]:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - B)qr - 3(C - B)a_{32}a_{33} + h_3q - h_2r &= 0, \\
 B\dot{q} + (A - C)rp - 3(A - C)a_{33}a_{31} + h_1r - h_3p &= 0, \\
 C\dot{r} + (B - A)pq - 3(B - A)a_{31}a_{32} + h_2p - h_1q &= 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= (\dot{\alpha} + 1)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + a_{21}, \\
 q &= (\dot{\alpha} + 1)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + a_{22}, \\
 r &= (\dot{\alpha} + 1)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + a_{23}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В уравнениях (2), (3) A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r – безразмерные делением на ω_0 проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz ; $h_1 = \bar{h}_1 / \omega_0$, $h_2 = \bar{h}_2 / \omega_0$, $h_3 = \bar{h}_3 / \omega_0$; $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3$ – проекции вектора гиросtatического момента на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите. Точкой обозначено дифференцирование по $\tau = \omega_0 t$, t – время.

Для системы уравнений (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}[(A - C)a_{31}^2 + (B - C)a_{32}^2] + \\ & + \frac{1}{2}[(B - A)a_{21}^2 + (B - C)a_{23}^2] - (h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23}) = const. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Положения равновесия спутника-гиростата

Положив в (2) и (3) $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ ($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ – постоянные величины), получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} (C - B)(\bar{a}_{22}\bar{a}_{23} - 3\bar{a}_{32}\bar{a}_{33}) + h_3\bar{a}_{22} - h_2\bar{a}_{23} &= P = 0, \\ (A - C)(\bar{a}_{23}\bar{a}_{21} - 3\bar{a}_{33}\bar{a}_{31}) + h_1\bar{a}_{23} - h_3\bar{a}_{21} &= Q = 0, \\ (B - A)(\bar{a}_{21}\bar{a}_{22} - 3\bar{a}_{31}\bar{a}_{32}) + h_2\bar{a}_{21} - h_1\bar{a}_{22} &= R = 0, \end{aligned}$$

позволяющие определить положения равновесия спутника-гиростата в орбитальной системе координат. Здесь $\bar{a}_{ij} = a_{ij}(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$P\bar{a}_{11} + Q\bar{a}_{12} + R\bar{a}_{13} = 0, P\bar{a}_{21} + Q\bar{a}_{22} + R\bar{a}_{23} = 0, P\bar{a}_{31} + Q\bar{a}_{32} + R\bar{a}_{33} = 0,$$

которую можно представить в виде [2, 3]

$$\begin{aligned} 4(A\bar{a}_{21}\bar{a}_{31} + B\bar{a}_{22}\bar{a}_{32} + C\bar{a}_{23}\bar{a}_{33}) + h_1\bar{a}_{31} + h_2\bar{a}_{32} + h_3\bar{a}_{33} &= 0, \\ A\bar{a}_{11}\bar{a}_{31} + B\bar{a}_{12}\bar{a}_{32} + C\bar{a}_{13}\bar{a}_{33} &= 0, \\ (A\bar{a}_{11}\bar{a}_{21} + B\bar{a}_{12}\bar{a}_{22} + C\bar{a}_{13}\bar{a}_{23}) + h_1\bar{a}_{11} + h_2\bar{a}_{12} + h_3\bar{a}_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Далее для упрощения черточки над выражениями для направляющих косинусов будут опущены.

В данной работе проводится исследование положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата, когда, например, $A \neq B = C$. В этом случае система (5) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} 4(A - B)a_{21}a_{31} + h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{31} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{21} + h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражения для направляющих косинусов из (1), можно получить систему трех уравнений с неизвестными $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Другой более удобный для исследования способ замыкания уравнений (6) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для системы уравнений (6) и (7) ставится следующая задача: при заданных параметрах $A - B, h_1, h_2, h_3$ (прямая задача) требуется определить девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия осесимметричного спутника-гиростата.

Возможны следующие два случая:

Случай 1

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, \\ 4(A - B)a_{21}a_{31} + h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\ h_2a_{12} + h_3a_{13} &= 0, \\ a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0; \end{aligned} \quad (8)$$

Случай 2

$$\begin{aligned} a_{31} &= 0, \\ (A - B)a_{11}a_{21} + h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13} &= 0, \\ h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\ a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\ a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим вначале систему (8). Из третьего и четвертого уравнений получаем $a_{12} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$, $a_{13} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$. Учитывая, что

$$a_{22} = -a_{13}a_{31}, \quad a_{23} = a_{12}a_{31}, \quad a_{32} = a_{13}a_{21}, \quad a_{33} = -a_{12}a_{21},$$

$$h_2a_{32} + h_3a_{33} = a_{21}(h_2a_{13} - h_3a_{12}) = \mp a_{21}\sqrt{h_2^2 + h_3^2},$$

систему (8) можно представить следующим образом:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad a_{13} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}},$$

$$a_{22} = -a_{13}a_{31}, \quad a_{23} = a_{12}a_{31},$$

$$a_{32} = a_{13}a_{21}, \quad a_{33} = -a_{12}a_{21}, \quad (10)$$

$$4(A - B)a_{21}a_{31} + h_1a_{31} \mp a_{21}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} = 0,$$

$$a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1.$$

Определив направляющие косинусы a_{21} и a_{31} из последних двух уравнений, можно получить все решения системы (8).

Используя аналогичный подход, систему (9) можно представить в следующем виде:

$$a_{12} = -a_{21}a_{33}, \quad a_{13} = a_{21}a_{32},$$

$$a_{22} = a_{11}a_{33}, \quad a_{23} = -a_{11}a_{32},$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad a_{33} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \quad (11)$$

$$(A - B)a_{11}a_{21} + h_1a_{11} \pm a_{21}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} = 0,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1.$$

Рассмотрим более подробно последние два уравнения системы (10)

$$4a_{21}a_{31} + ma_{31} \mp na_{21} = 0, \quad (12)$$

$$a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

или

$$16a_{21}^4 + 8ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 16)a_{21}^2 - 8ma_{21} - m^2 = 0, \quad (13)$$

$$a_{31} = \frac{\pm na_{21}}{4a_{21} + m}.$$

В (12) и (13) введены безразмерные параметры $m = \frac{h_1}{A-B}$, $n = \frac{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}{A-B}$. Из

системы (13) следует, что первое уравнение может иметь не более 4 действительных корней a_{21} , зависящих от параметров m, n . С учетом второго уравнения число действительных решений системы (13) не может превышать 8.

Проведем геометрическое исследование свойств системы (12). Первое уравнение этой системы для обоих знаков перед последним членом в левой части представляет собой уравнения гипербол, две ветви которых проходят через начало системы координат $(a_{21} = 0, a_{31} = 0)$ в плоскости переменных a_{21}, a_{31} , а второе уравнение описывает в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (12) зависит от характера пересечений гипербол и окружности. Ясно, что две ветви гипербол, которые проходят через начало координат, заведомо пересекаются с окружностью в четырех точках. Если и две другие ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гиперболы с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют два кратных корня). На рис. 1, 2, 3 представлены три различных варианта взаимного расположения ветвей гипербол и окружности. Таким образом, система (12), а, следовательно, и система (10), имеет либо восемь, либо четыре решения.

Определим границы в плоскости параметров m, n , разделяющие области с различным числом решений системы (12). Бифуркационными точками являются точки плоскости m, n , принадлежащие одновременно ветвям гипербол, не проходящих через начало координат, и окружности; в бифуркационных точках касательные к гиперболе и окружности совпадают. Условие совпадения касательных имеет вид

$$\frac{da_{31}}{da_{21}} = -\frac{4a_{31} \mp n}{4a_{21} + m} = -\frac{a_{21}}{a_{31}}$$

или

$$4(a_{21}^2 - a_{31}^2) + ma_{21} \pm na_{31} = 0. \quad (14)$$

Подставив выражение для a_{31} из (13) во второе уравнение (12) и уравнение (14), получим систему

$$\begin{aligned} \frac{n^2 a_{21}^2}{(4a_{21} + m)^2} &= 1 - a_{21}^2, \\ \frac{mn^2}{(4a_{21} + m)^2} &= -(4a_{21} + m). \end{aligned} \quad (15)$$

Разделив левую (правую) часть первого уравнения этой системы на левую (правую) часть второго уравнения, получим после несложных преобразований соотношение $a_{21} = -4^{-1/3} m^{1/3}$. Подставив, наконец, выражение для a_{21} во второе уравнение системы (15), приходим к уравнению астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 4^{2/3}. \quad (16)$$

Внутри области $m^{2/3} + n^{2/3} < 4^{2/3}$ существуют восемь решений системы (12), на кривой (16) существуют также восемь решений, среди которых имеются две пары совпадающих решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь последние два уравнения системы (11), записав их с использованием параметров m и n в виде

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} + ma_{11} \pm na_{21} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1, \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} a_{21}^4 + 2ma_{21}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{21}^2 - 2ma_{21} - m^2 &= 0, \\ a_{11} &= \frac{\mp na_{21}}{a_{21} + m}. \end{aligned} \quad (18)$$

Применив использованный выше при исследовании системы (12) подход, можно показать, что и для системы (17) границей, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 1. \quad (19)$$

Проведенные вычисления показывают, что границы (астроиды), разделяющие области с различным числом решений для систем (12) и (17), не зависят от знака перед последним членом в первом уравнении этих систем.

На рис.4 представлены астроиды (16) и (19), выделяющие в плоскости m, n три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата. В области $m^{2/3} + n^{2/3} \leq 1$ существуют 16 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 1, m^{2/3} + n^{2/3} \leq 4^{2/3}$ существуют 12 решений, в области $m^{2/3} + n^{2/3} > 4^{2/3}$ существуют 8 решений.

3. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Системы уравнений (13), (18) с учетом соотношений (10), (11) определяют все решения системы (6), (7) и, тем самым, все положения равновесия осесимметричного спутника-гиростата, выраженные через направляющие косинусы. Примем во внимание, что первые уравнения в системах (13) и (18) зависят от переменной $a_{21} = \sin \beta$. Каждому действительному корню a_{21} первого уравнения (13) соответствуют два значения направляющего косинуса $a_{31} = -\sin \alpha \cos \beta$. Из выражений для $a_{21} = \sin \beta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) и a_{31} можно определить $\sin \alpha$. Используя первое, второе и третье уравнения в (1) легко полу-

чить выражения для $\cos \alpha$, $\sin \gamma$, $\cos \gamma$. Зная $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$, $\sin \gamma$, $\cos \gamma$, можно однозначно определить углы α , β , γ . Аналогичные рассуждения справедливы для системы 18.

Для получения достаточных условий устойчивости положения равновесия $\alpha = \alpha_0 = const$, $\beta = \beta_0 = const$, $\gamma = \gamma_0 = const$, удовлетворяющего системе уравнений (6), (7), воспользуемся обобщенным интегралом энергии (4), который для осесимметричного спутника-гиростата ($B = C$) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}(A - B)(3a_{31}^2 - a_{21}^2) - \\ & -(h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23}) = const. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть

$$\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}, \quad \beta = \beta_0 + \bar{\beta}, \quad \gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma},$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ – малые отклонения от положения равновесия $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$. Тогда интеграл энергии (20) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\{3(B - A)(a_{31}^2 - a_{11}^2)\bar{\alpha}^2 + \\ & + [(B - A)(1 + 3\sin^2 \alpha_0)\cos 2\beta_0 + h_1 a_{21} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23}]\bar{\beta}^2 - \\ & - 2a_{21}(h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0)\bar{\beta}\bar{\gamma} + (h_2 a_{22} + h_3 a_{23})\bar{\gamma}^2\} + \Sigma = const. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь символ Σ обозначает члены выше второго порядка малости относительно $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$.

В случае 1 $a_{11} = \cos \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$ и, следовательно, $\cos \alpha_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (8) получаем соотношения

$$\begin{aligned} & 4(A - B)\sin \beta_0 \cos \beta_0 + h_1 \cos \beta_0 - \sin \beta_0(h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) = 0, \\ & h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Исключив с помощью (22) выражения $h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0$ и $h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0$ из интеграла энергии (21), получим более простое выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{3}{2}(B - A)\bar{\alpha}^2 \cos^2 \beta_0 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{h_1 + 4(A - B)\sin^3 \beta_0}{\sin \beta_0} \bar{\beta}^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{[h_1 + 4(A - B)\sin \beta_0]\cos^2 \alpha_0}{\sin \beta_0} \bar{\gamma}^2 + \Sigma = const. \end{aligned} \quad (23)$$

Из теоремы Ляпунова следует, что решение $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ устойчиво, если квадратичная форма (23) является определенно-положительной. Из (23) получаем достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника-гиростата в случае 1

$$\begin{aligned} A - B &< 0, \\ [h_1 + 4(A - B)\sin^3 \beta_0]\sin \beta_0 &> 0, \\ [h_1 + 4(A - B)\sin \beta_0]\sin \beta_0 &> 0 \end{aligned}$$

или, после перехода в последних двух неравенствах к параметру m ,

$$\begin{aligned} A - B &< 0, \\ (m + 4\sin^3 \beta_0)\sin \beta_0 &< 0, \\ (m + 4\sin \beta_0)\sin \beta_0 &< 0. \end{aligned} \tag{24}$$

В случае 2 $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$ и, следовательно, $\sin \alpha_0 = 0$. Из второго и третьего уравнений системы (9) получаем соотношения

$$\begin{aligned} h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 &= 0, \\ (A - B)\sin \beta_0 \cos \beta_0 + h_1 \cos \beta_0 - \sin \beta_0(h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Исключив из (21) с помощью соотношений (25) выражения $h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0$ и $h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0$, получим более простое выражение интеграла энергии

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{3}{2}(A - B)\bar{\alpha}^2 \cos^2 \beta_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{h_1 + (A - B)\sin^3 \beta_0}{\sin \beta_0} \bar{\beta}^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{[h_1 + (A - B)\sin \beta_0]\cos^2 \alpha_0}{\sin \beta_0} \bar{\gamma}^2 + \Sigma = const. \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда из (26) достаточные условия устойчивости положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата в случае 2 примут вид

$$\begin{aligned} A - B &> 0, \\ [h_1 + (A - B)\sin^3 \beta_0]\sin \beta_0 &> 0, \\ [h_1 + (A - B)\sin \beta_0]\sin \beta_0 &> 0 \end{aligned}$$

или, после введения параметра m ,

$$\begin{aligned} A - B &> 0, \\ (m + \sin^3 \beta_0)\sin \beta_0 &> 0, \\ (m + \sin \beta_0)\sin \beta_0 &> 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Отметим справедливость следующих неравенств:

при $0 < \sin \beta_0 < 1$

$$m + 4 \sin \beta_0 > m + 4 \sin^3 \beta_0,$$

$$m + \sin \beta_0 > m + \sin^3 \beta_0;$$

при $-1 < \sin \beta_0 < 0$

$$m + 4 \sin \beta_0 < m + 4 \sin^3 \beta_0,$$

$$m + \sin \beta_0 < m + \sin^3 \beta_0.$$

Учитывая полученные неравенства, достаточные условия устойчивости (24) и (27) можно представить в более простом виде.

В случае 1 ($A - B < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются в областях

$$0 < \sin \beta_0 < 1, \quad m + 4 \sin \beta_0 < 0 \quad (28.1)$$

и

$$-1 < \sin \beta_0 < 0, \quad m + 4 \sin \beta_0 > 0. \quad (28.2)$$

В случае 2 ($A - B > 0$) достаточные условия устойчивости выполняются в областях

$$0 < \sin \beta_0 < 1, \quad m + \sin^3 \beta_0 > 0 \quad (29.1)$$

и

$$-1 < \sin \beta_0 < 0, \quad m + \sin^3 \beta_0 < 0. \quad (29.2)$$

Следует отметить, что при значениях параметра m по модулю больше 4 для случая 1 и при значениях параметра m по модулю больше 1 для случая 2 условия устойчивости (28) и (29) определяются лишь знаком параметра m и не зависят от значения $\sin \beta_0$. Кроме того, условия устойчивости для случая 1, когда $A - B < 0$, и для случая 2, когда $A - B > 0$, не могут выполняться одновременно.

4. Численное исследование положений равновесия и их устойчивости

Проведем анализ эволюции полученных положений равновесия и соответствующих им достаточных условий устойчивости при изменении параметров m и n . Рассмотрим поведение решений в плоскости $n, \sin \beta_0$ при фиксированных значениях m . Каждое положение равновесия для случая 1 (случая 2) определяется выбором одного из корней алгебраического уравнения системы (13) (системы (18)) и выбором знака направляющего косинуса $a_{31}(a_{11})$.

Рассмотрим подробнее свойства алгебраических уравнений (13) и (18). Коэффициенты этих уравнений зависят от параметров m и n , которые, в свою очередь, зависят от четырех параметров осесимметричного спутника-

гиростата $A-B, h_1, h_2, h_3$. Проекция вектора гиростатического момента и инерционный параметр $A-B$, а также безразмерные параметры m и n , принимают любые значения. Знак параметра n совпадает со знаком $A-B$. В выражениях для коэффициентов при четных степенях a_{21} алгебраических уравнений в (13), (18) параметры m и n входят во второй степени, а коэффициенты при нечетных степенях этих уравнений пропорциональны параметру m ; отсюда следует, что изменение знаков величин m и n при сохранении их абсолютных значений не влияет на абсолютную величину корней алгебраических уравнений. При изменении знака параметра m происходит лишь изменение знаков корней алгебраических уравнений, а при изменении знака параметра n корни алгебраических уравнений остаются неизменными. Следовательно, численное нахождение корней систем (13), (18) для получения равновесных решений достаточно проводить при положительных значениях параметров m и n , а соответствующие решения для отрицательных значений m будут получаться изменением знака вычисленных корней при положительных m на противоположные; графики ветвей решений для отрицательных значений m будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих положительных значений m относительно оси абсцисс.

Графики ветвей решений для отрицательных значений n будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих значений m при положительных значениях n относительно оси ординат.

Точки пересечения прямых $n = const$ с астроидами (16) и (19) лежат на границах областей с постоянным числом действительных решений и, соответственно, постоянным числом положений равновесия осесимметричного спутника-гиростата. Значения $n = (1 - m^{2/3})^{3/2}$ и $n = (4^{2/3} - m^{2/3})^{3/2}$ соответствуют точкам касания прямых $n = const$ и кривых (16), (19). В этих точках происходит слияние ветвей решений, когда исчезают четыре решения (становятся мнимыми два корня). Точки пересечения графиков решений с осью ординат определяются аналитически и равны в случае 1 $a_{21} = \pm 1$ и $a_{21} = -\frac{m}{4}$, а для случая 2 - $a_{21} = \pm 1$ и $a_{21} = -m$.

Достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника в силу перечисленных свойств алгебраических уравнений (13), (18) будут изменяться в зависимости от знаков параметров m и n следующим образом: при изменении знака параметра n изменяется знак $A-B$ и, соответственно, изменяются достаточные условия устойчивости для случаев 1 и 2 на противоположные. При $A-B > 0$ ($n > 0$) условия устойчивости (29) для случая 2 при изменении знака параметра m (знака h_1) не изменятся в силу того, что знаки направляющего косинуса $a_{21} = \sin \beta_0$, удовлетворяющего уравнению (18), и знака параметра m изменяются одновременно. При $A-B < 0$ достаточные условия устойчивости для случая 1 могут выполняться при $n < 0$. При изменении

знака параметра m (знака h_1) в этом случае знаки и абсолютные значения коэффициентов квадратичной формы (23) не изменятся и, соответственно, не изменятся условия устойчивости (28). Достаточные условия устойчивости равновесных решений (28), (29) для случаев 1 и 2 не зависят от значений параметров h_2 и h_3 .

Вычисления проводились при значениях m , равных 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 20; решения для отрицательных значений m , равных -0,25; -0,5; -0,75; -1; -2; -3; -4, -5, получались зеркальным отображением относительно оси абсцисс решений, полученных для положительных m . Значения n изменялись в диапазоне от -6 до 6. Результаты вычислений представлены на рис.5-23. Как видно из этих рисунков, графики решений можно разделить на три типа, соответствующие трем диапазонам изменения параметра m . Графики первого типа соответствуют значениям $0 < |m| < 1$, графики второго типа соответствуют значениям $1 < |m| < 4$, и графики третьего типа соответствуют значениям $|m| > 4$. На рисунках пунктирной линией обозначены ветви равновесных решений, для которых выполняются достаточные условия устойчивости (28), (29).

Графики решений при $m = 0$, $m = \pm 1$, $m = \pm 4$ являются бифуркационными. При этих значениях параметра m (см. рис.9. 12. 19, 22) происходит смена числа действительных корней систем уравнений (13), (18) и, соответственно, числа положений равновесия осесимметричного спутника - гиростата.

В случае $m = 0$ (рис.5) корни уравнений (13) определяются из соотношений $a_{21}^2 = 0$, $16a_{21}^2 = 16 - n^2$ при $n^2 \leq 16$, корни уравнений (18) определяются из соотношений $a_{21}^2 = 0$, $a_{21}^2 = 1 - n^2$ при $n^2 \leq 1$. Условия устойчивости выполняются только для равновесных решений в случае 2 ($n > 0$), для случая 1 условия устойчивости несовместны.

Для графиков первого типа ($0 < |m| < 1$) существуют все 16 равновесных решений (рис. 6-8, 16-18). Приведем более подробное описание поведения найденных положений равновесия для графиков первого типа на примере случая $m = 0,25$ (рис.6). Как видно из рисунка, при $|n| < n_1 \approx 0,468$ существуют 16 равновесных решений. Из них 8 решений (4 действительных корня полинома (13)) соответствуют случаю 1 и 8 решений (4 действительных корня полинома (18)) соответствуют случаю 2. При значениях $n_1 \approx \pm 0,468$ прямые $n = \pm n_1$ имеют одну общую точку с кривой (19). В этой общей точке происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 2, при этом 4 решения случая 2 перестают существовать. В интервале $n_1 < |n| < n_2 \approx 3,093$ имеем 12 положений равновесия. Прямые $n = \pm n_2$ имеют одну общую точку с кривой (16), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При $|n| > n_2$ существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений). Тогда случаю 1 на рис.6 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые.

Случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости выполняются в случае 2 ($n > 0$) для равновесных решений, принадлежащих нижней положительной кривой (29.1) и нижней отрицательной кривой (29.2) в правой полуплоскости. В случае 1 ($n < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений уравнения (16), принадлежащих верхней отрицательной кривой в левой полуплоскости. Условия устойчивости не выполняются только для одной точки на этой кривой при $n = 0$, левая часть условия (28.2) обращается в нуль.

Слияние ветвей равновесных решений для других графиков первого типа при $m = \pm 0,5$ (рис.7, 17) для случая 1 происходит в точках $n \approx \pm 2,598$, для случая 2 - в точках $n \approx \pm 0,225$, при $m = \pm 0,75$ (рис.8, 18) для случая 1 - в точках $n \approx \pm 2,205$ и для случая 2 - в точках $n \approx \pm 0,073$.

При $m = 1$ (рис. 9) происходит вырождение нижних отрицательных ветвей решений для случая 2 в точку, случай двух кратных корней $\sin \beta_0 = -1$. Слияние ветвей решений для случая 1 происходит при $n \approx 1,874$. При $m = 1$ существуют две устойчивые ветви решений – нижняя положительная для случая 2 в правой полуплоскости и верхняя отрицательная для случая 1 в левой полуплоскости. Случай $m = -1$ рассматривается аналогично.

Характер графиков второго типа, соответствующих интервалам $1 < m < 4$, (рис.10, 11) и $-4 < m < -1$, (рис. 20, 21) рассмотрим на примере варианта $m = 2$ (рис.10). При $|n| < 0,9$ существуют 12 равновесных решений, из них 8 решений соответствуют случаю 1 и 4 решения случаю 2. Прямые $n = \pm 0,9$ имеют одну общую точку с кривой (16), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При $|n| > 0,9$ существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений). Случаю 1 на рис.10 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые. Случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости выполняются в случае 2 ($n > 0$) для равновесных решений, принадлежащих нижней положительной кривой (29.1) в правой полуплоскости. В случае 1 ($n < 0$) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений принадлежащих верхней отрицательной кривой в левой полуплоскости.

Слияние ветвей равновесных решений для других графиков второго типа для случая 1 происходит в точках $n \approx \pm 0,292$ ($m = \pm 3$, рис.11, 21).

При $m = 4$ (рис. 12) происходит вырождение нижних отрицательных ветвей решений для случая 1 в точку, соответствующую случаю двух кратных корней $\sin \beta_0 = -1$ при $n = 0$. При $m = 4$ существуют две устойчивые ветви решений – нижняя положительная для случая 2 в правой полуплоскости

и верхняя отрицательная для случая 1 в левой полуплоскости. Случай $m = -4$ рассматривается аналогично.

Характер кривых третьего типа при $|m| > 4$ (рис. 13 - 15, 23) соответствует характеру описания кривых при $m = \pm 4$ за исключением существования двух кратных корней $\sin \beta_0 = -1$ в точке $n = 0$. На примере случая $m = 5$ (рис. 13) представлен график третьего типа.

На поле рисунков 6, 10, 13 нанесены указатели 1 и 2, отмечающие кривые равновесных решений для случая 1 и случая 2 соответственно.

Как видно из рисунков, при возрастании параметров m и n равновесные решения приближаются к тривиальным положениям равновесия, когда $\sin \beta_0 = 0$.

Численные результаты показывают, что для случая 2 при $n > 0$ и при $0 < |m| < 1$ существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях $|m| \geq 1$ существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия). Для случая 1 при $n < 0$ и $|m| > 0$ всегда существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия).

5. Заключение

Результаты исследования положений равновесия и достаточных условий их устойчивости для осесимметричного спутника-гиростата качественно соответствуют результатам анализа, проведенного авторами для общего случая спутника-гиростата [3], где, в частности, показана эволюция равновесных решений, которые определяются действительными корнями алгебраического уравнения 12-го порядка с коэффициентами, зависящими от трех проекций гиростатического момента и безразмерного инерционного параметра системы.

По постановке и методу решения к рассмотренной здесь задаче наиболее близка работа А. Анчева [4]. Следует отметить, что формулы (10), (11) совпадают с результатами статьи [4] с точностью до обозначений. Однако в [4] отсутствует определение областей, ограниченных астроидами (16) и (19). Определение числа положений равновесия проведено лишь при $n = 0$. Исследование положений равновесия и достаточных условий их устойчивости в общем случае (при любых m, n) в [4] также не проводилось.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ - 6700.2010.1) и Португальского фонда по науке и технике.

Литература

1. *В.А. Сарычев*. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Серия «Исследование космического пространства», т.11, М.: ВИНТИ, 1978, 224 с.
2. *В.А. Сарычев, С.А. Гутник*. К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // Космич. исслед., 1984, т.22, №3, с.323-326.
3. *В.А. Сарычев, С.А. Гутник*. Исследование положений равновесия спутника-гиростата // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990, №84, 31 с.
4. *A. Anchev*. Equilibrium orientations of symmetric gyrostat satellites with a specified internal angular momentum // Bulgarian Academy of Sciences. Theoretical and Applied Mechanics. 1973, Year IV, No.1, pp.85-93.

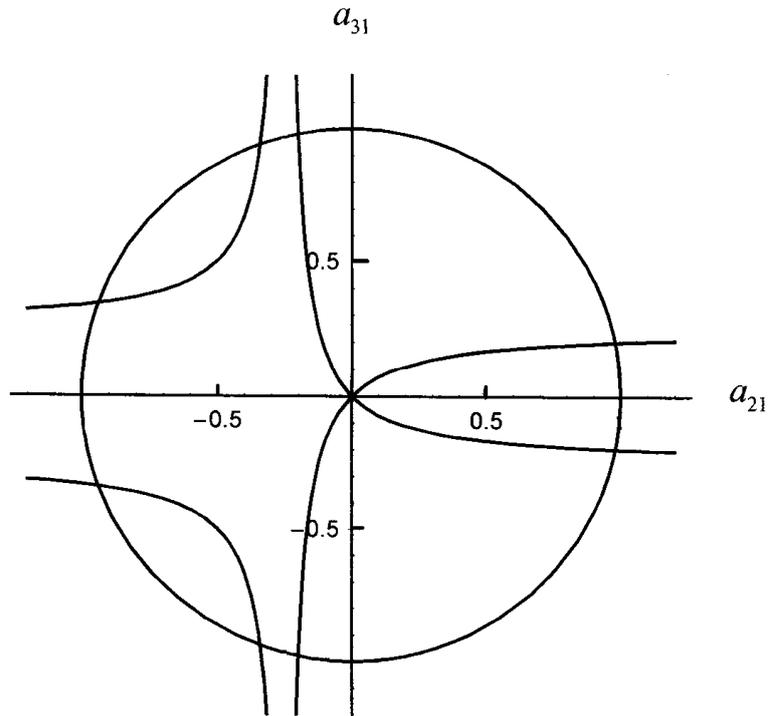


Рис.1. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = 1$)

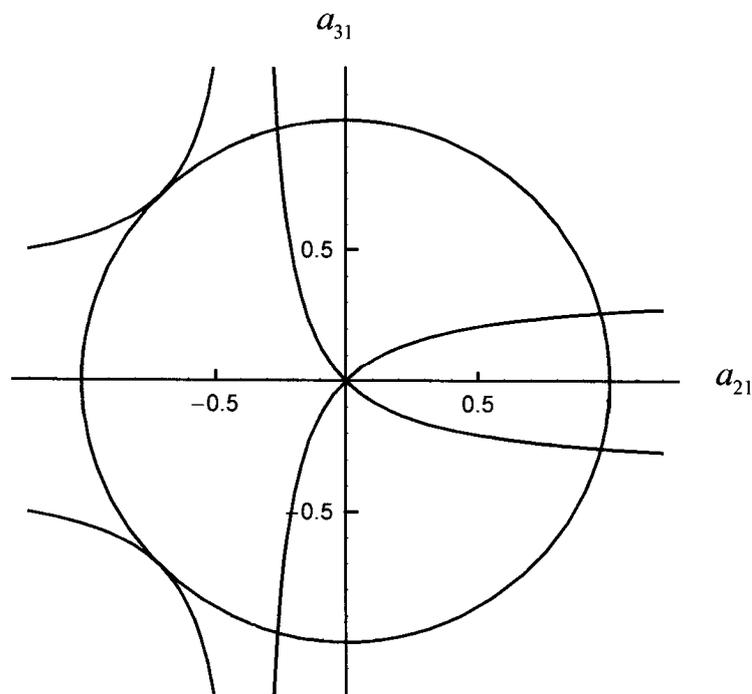


Рис.2. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = \sqrt{2}$)

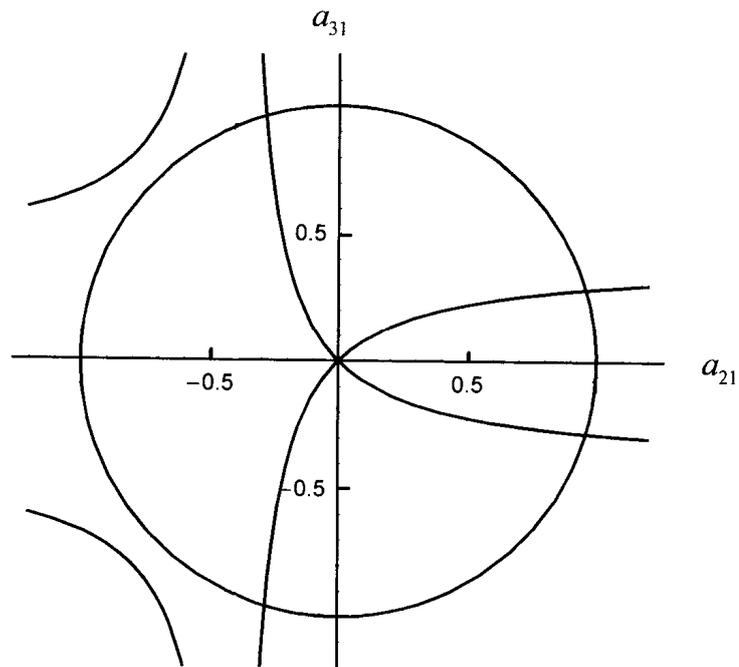


Рис.3. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ($m = n = 1, 6$)

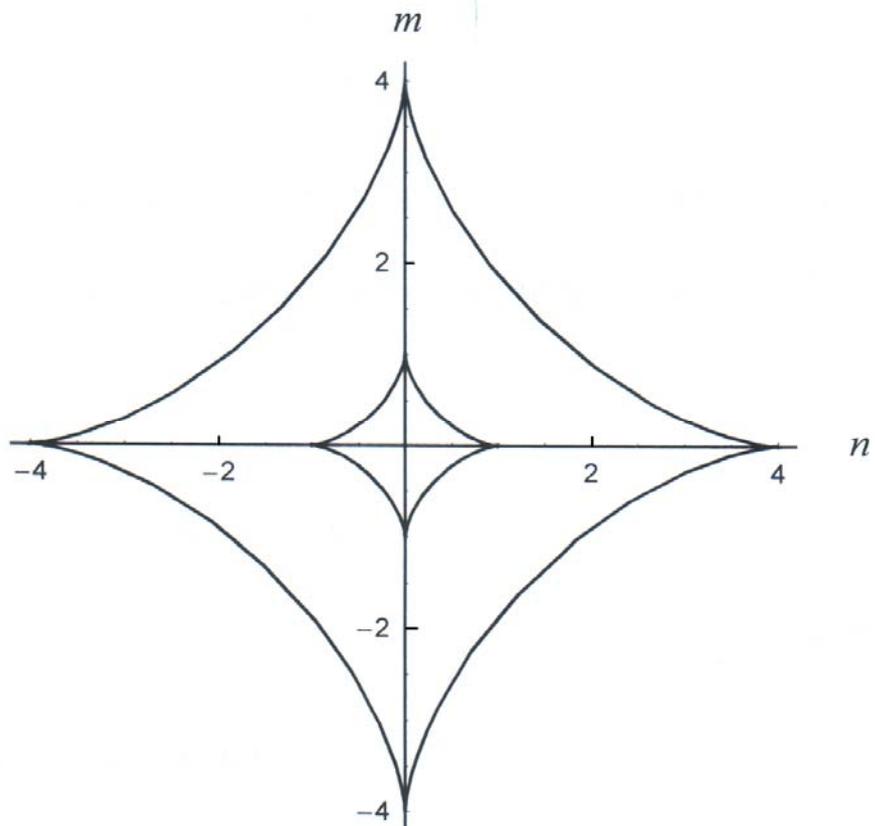
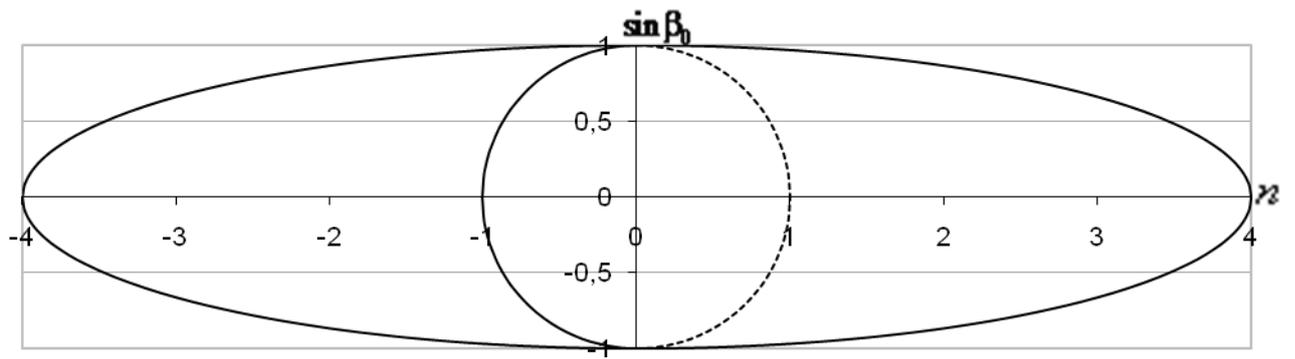
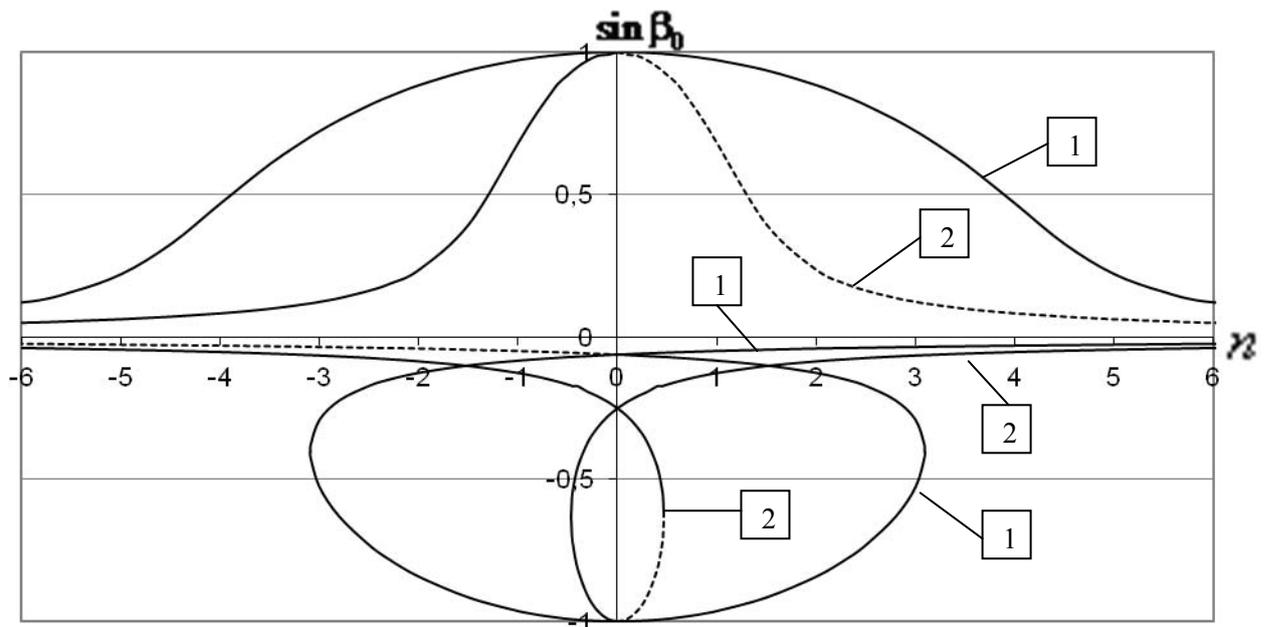
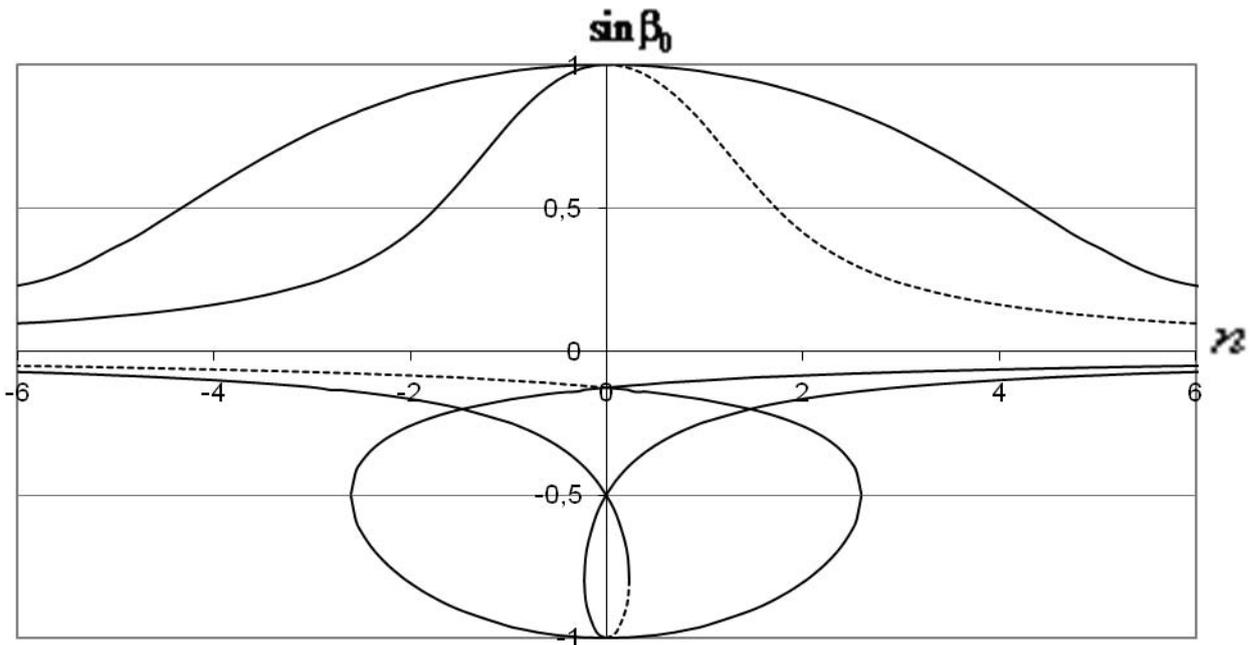
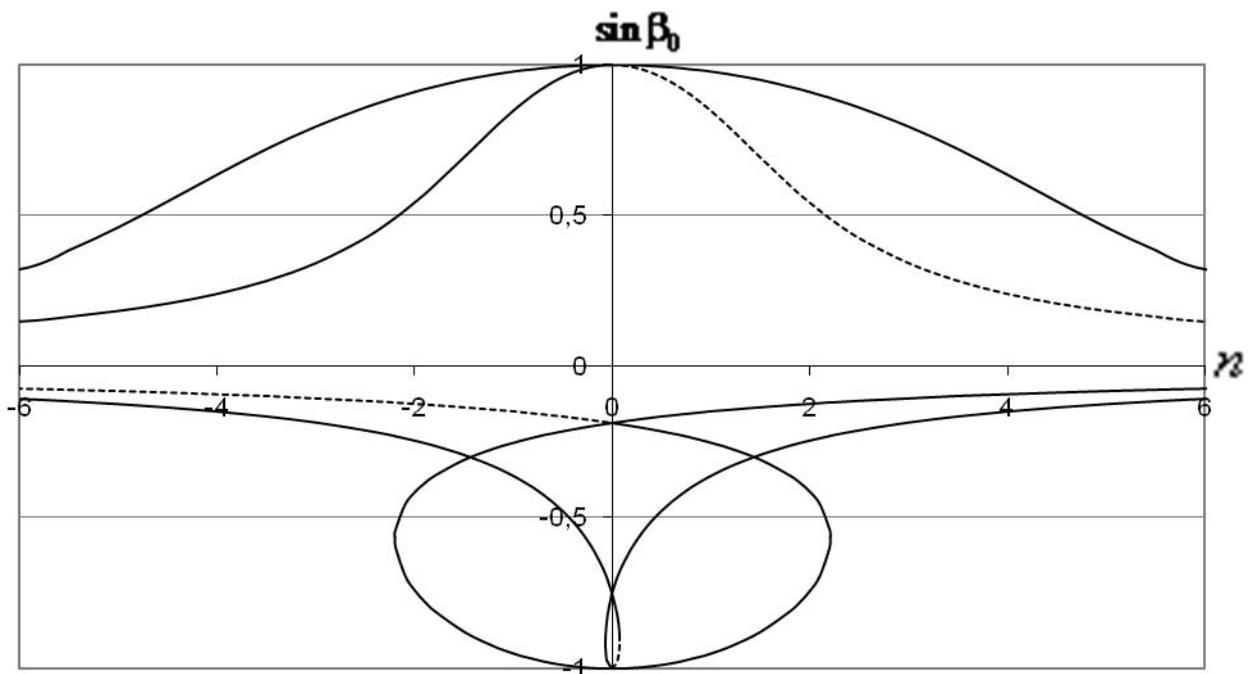
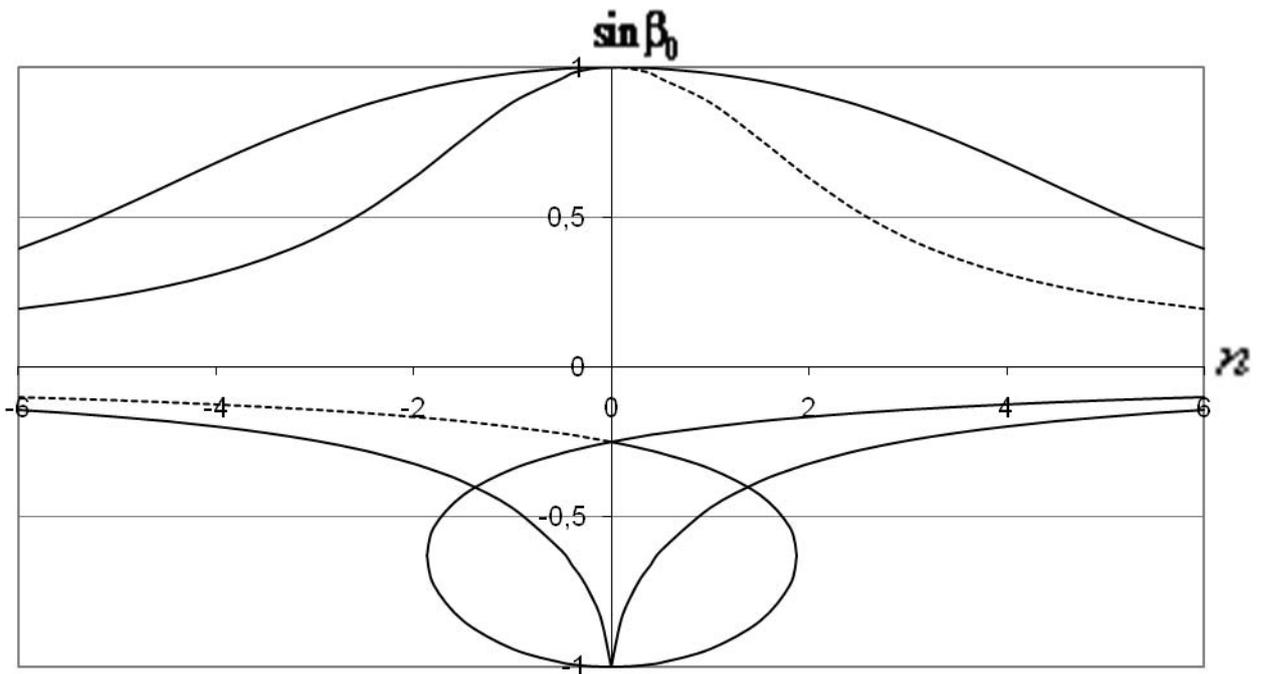
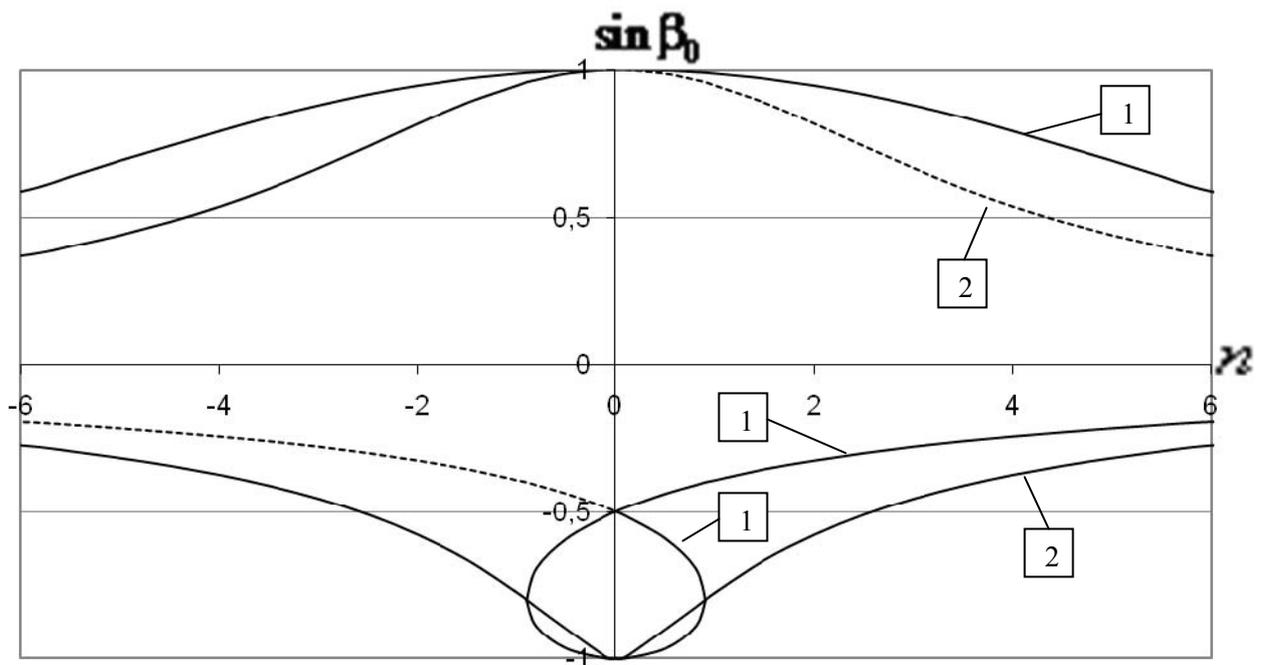
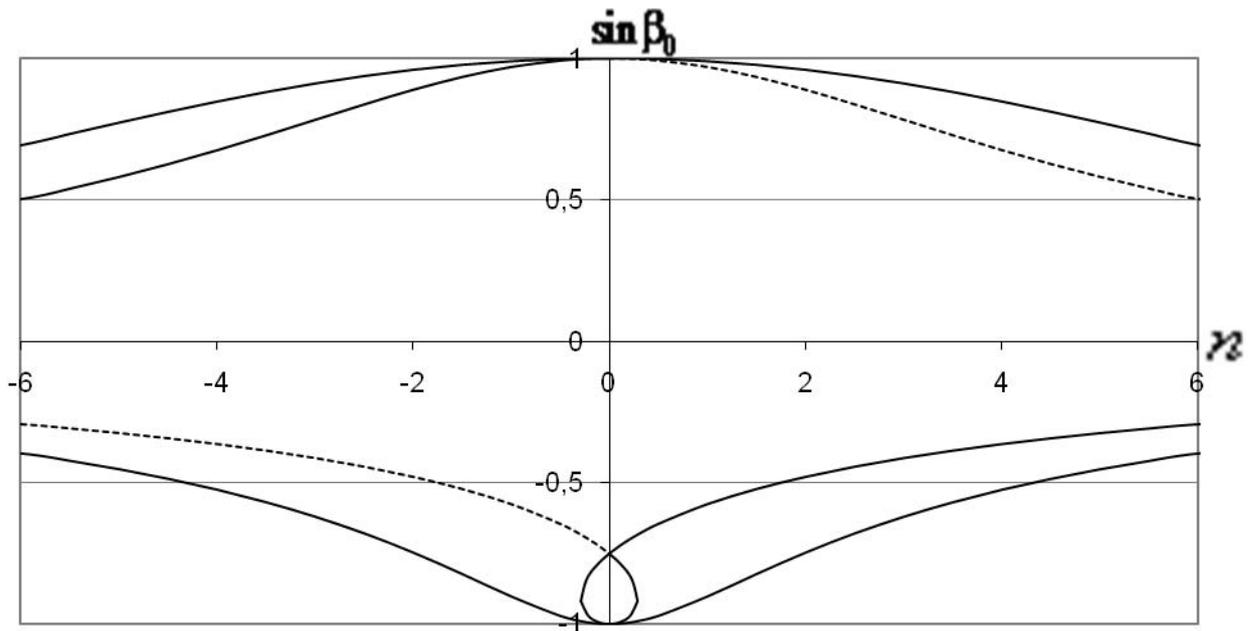
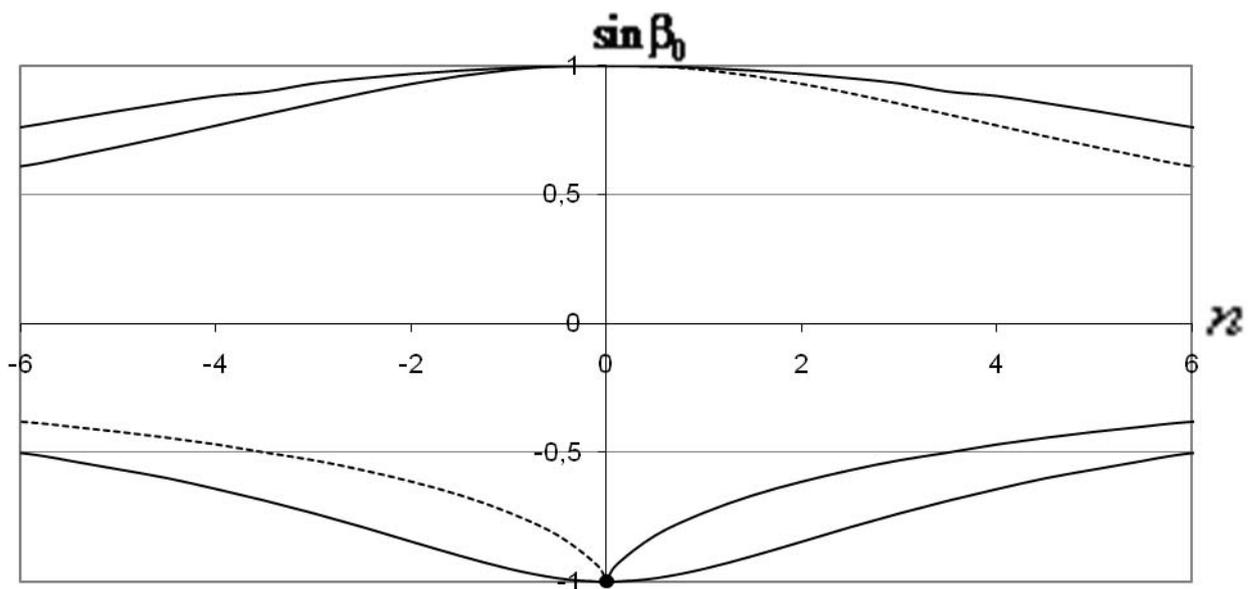


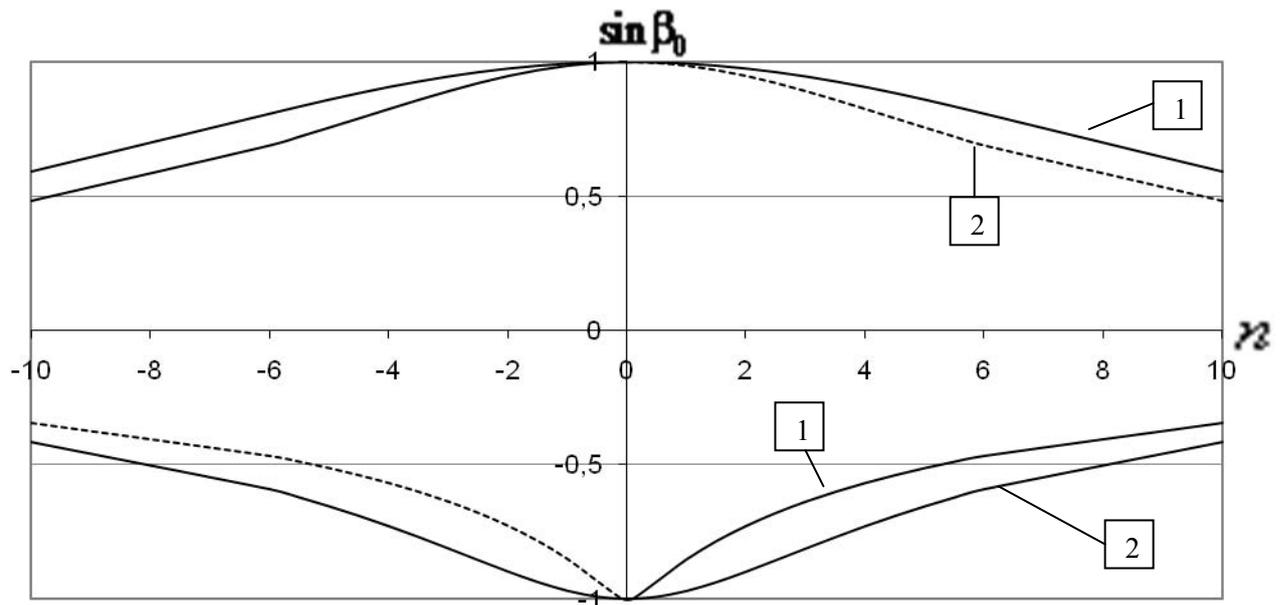
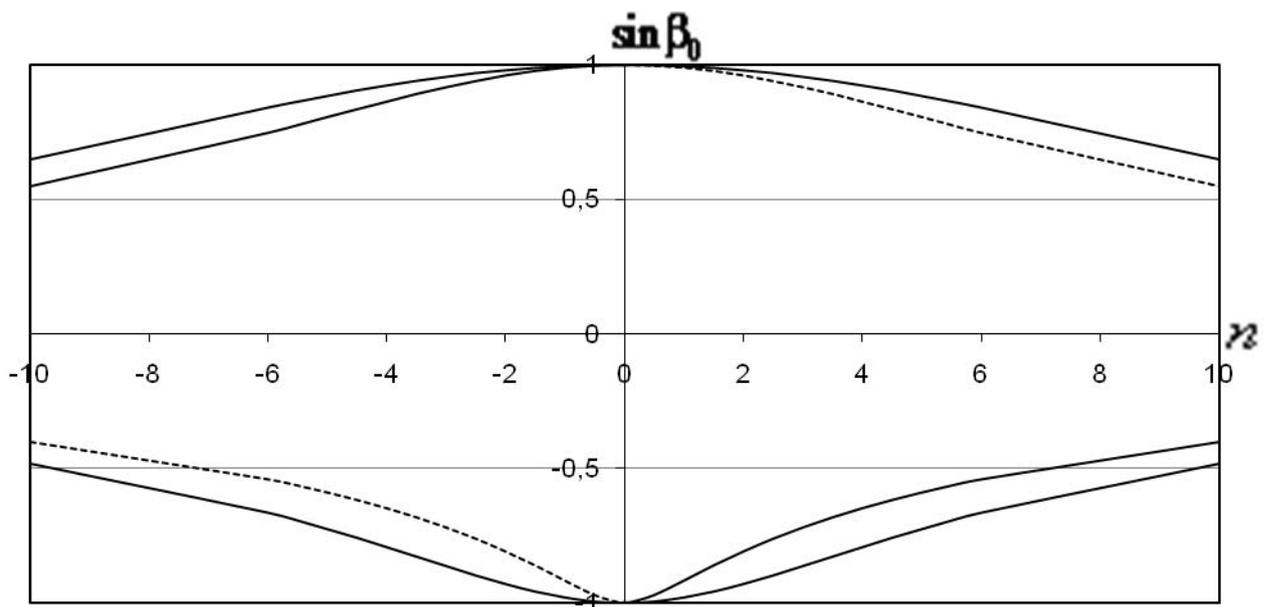
Рис.4. Области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций спутника

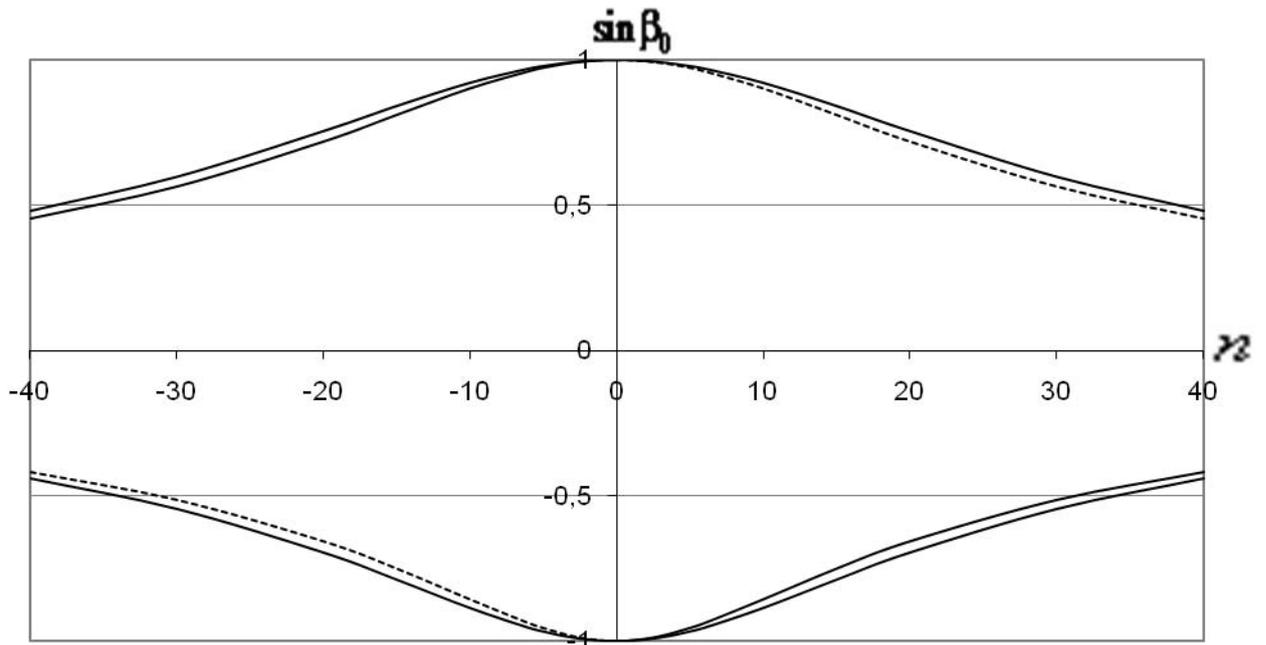
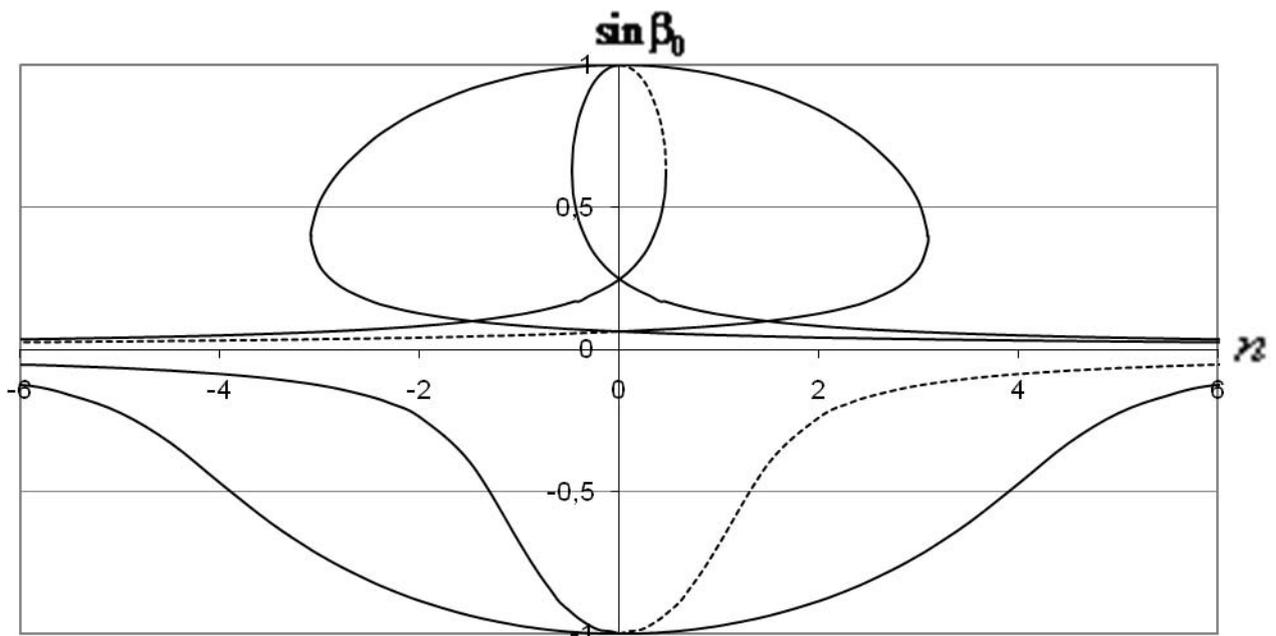
Рис.5. $m = 0$ Рис.6. $m = 0,25$

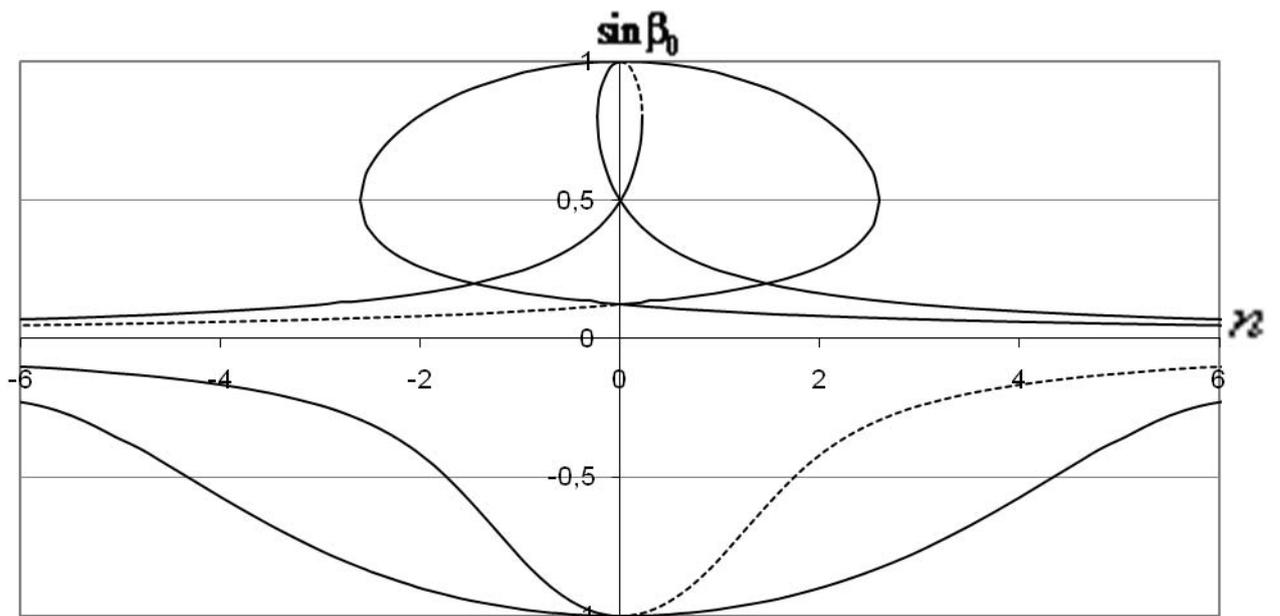
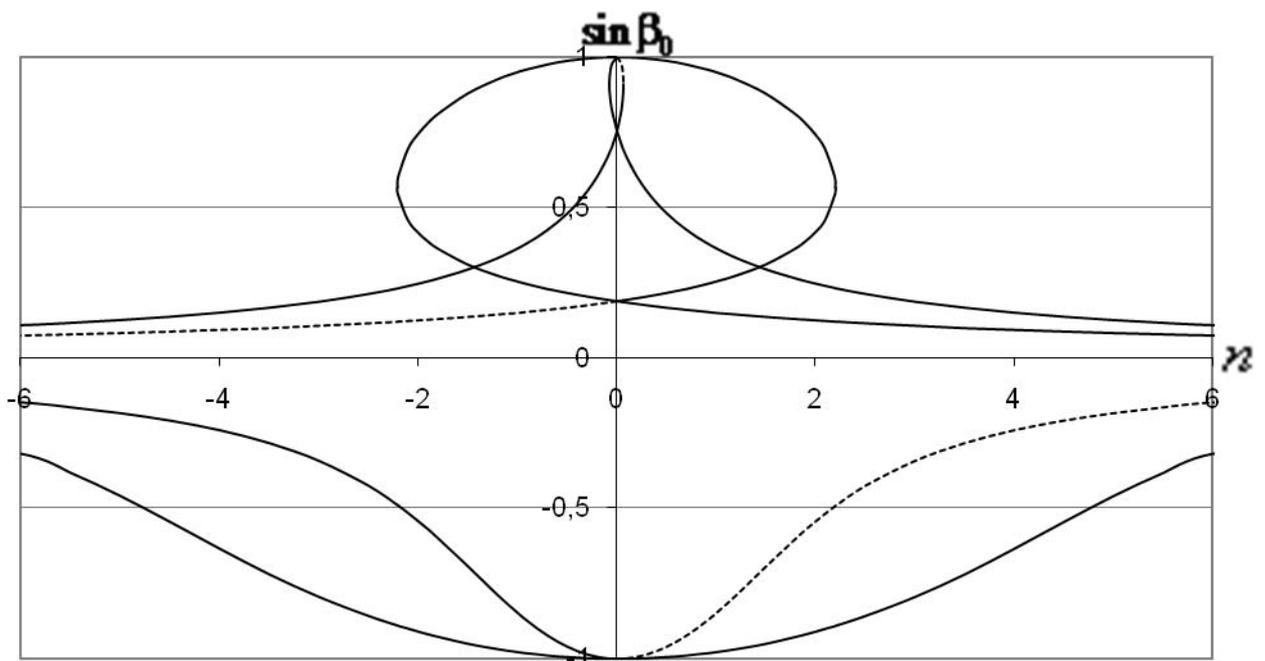
Рис.7. $m = 0,5$ Рис.8. $m = 0,75$

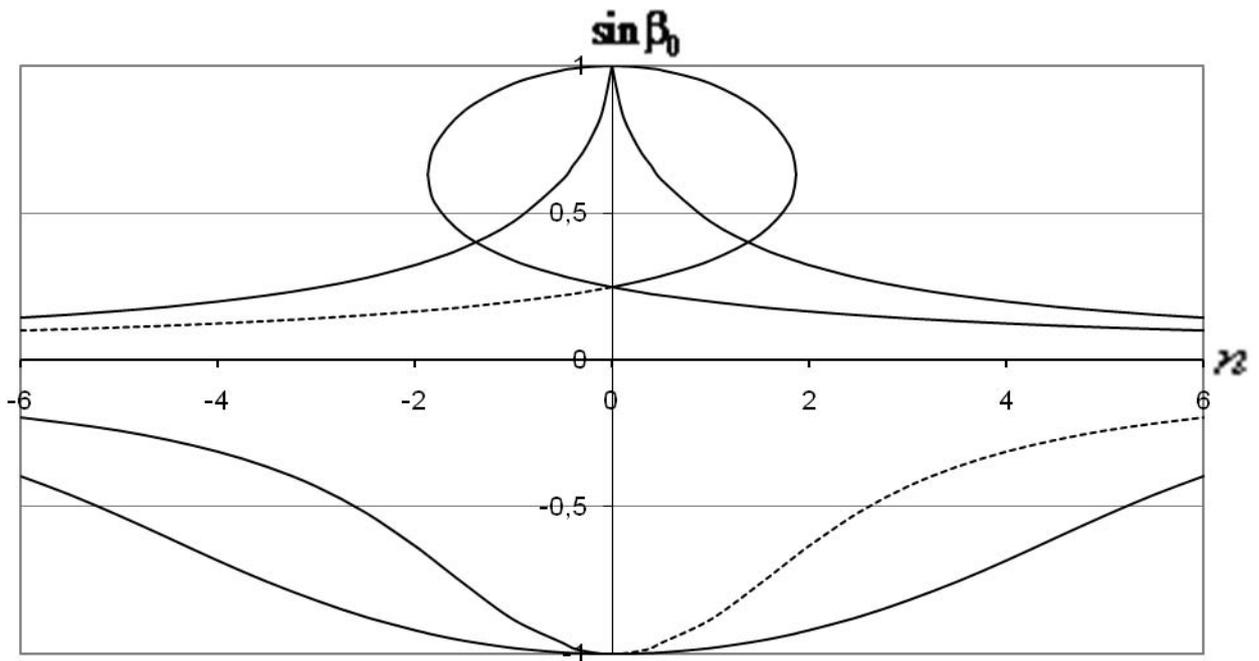
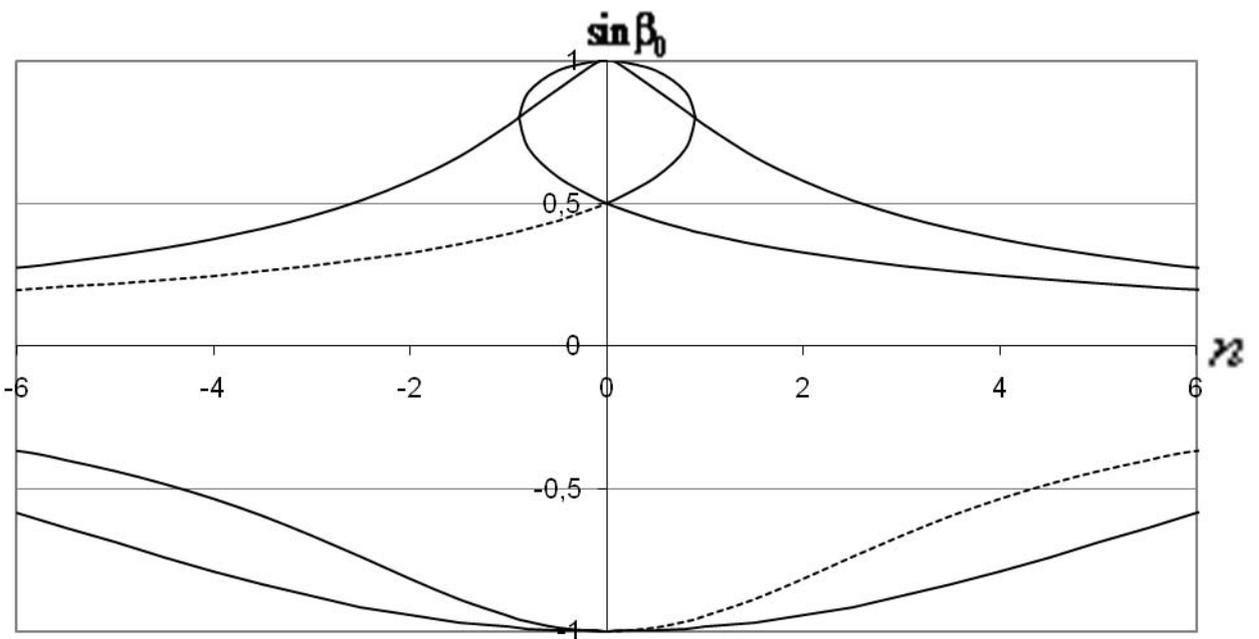
Рис.9. $m = 1$ Рис.10. $m = 2$

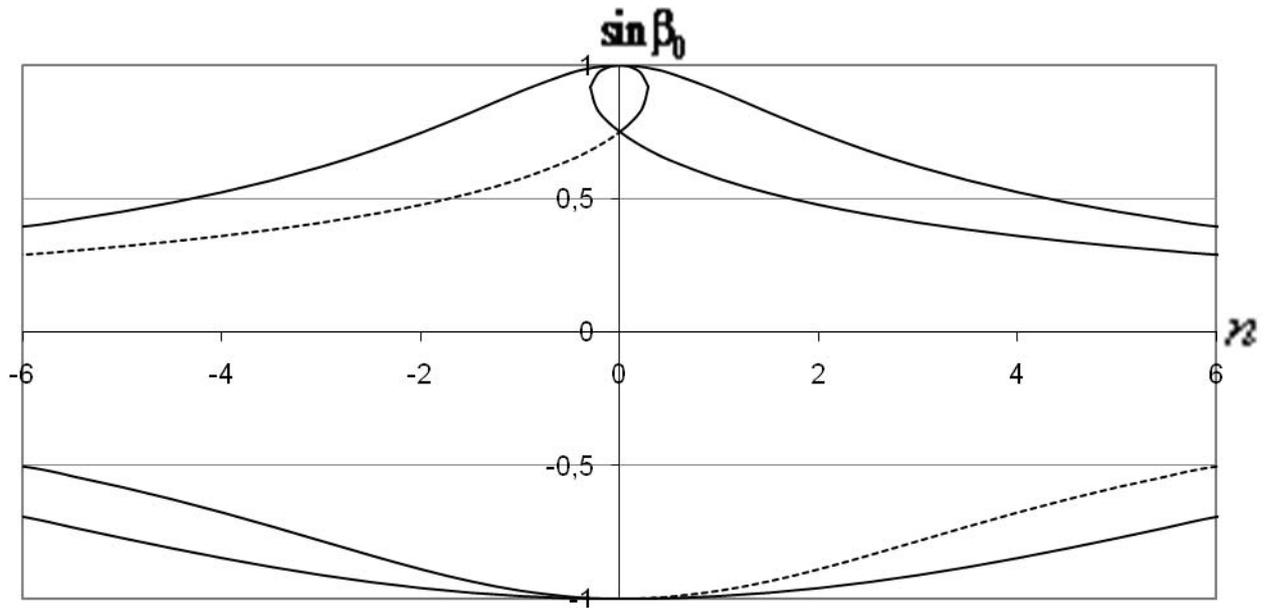
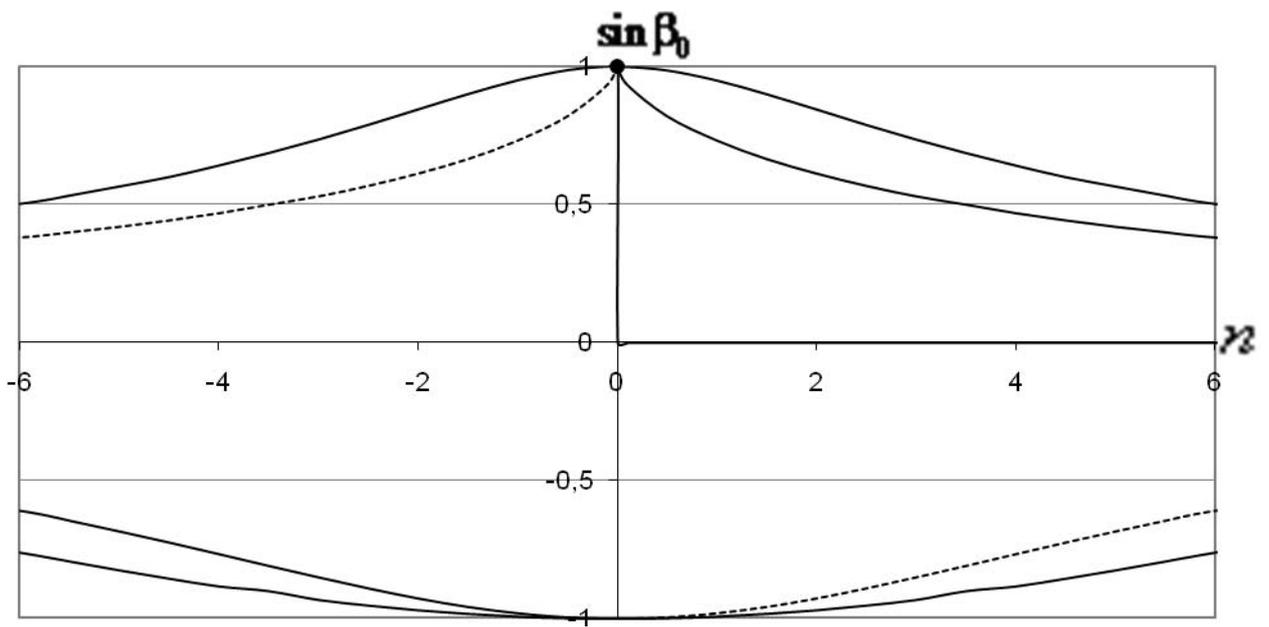
Рис.11. $m = 3$ Рис.12. $m = 4$

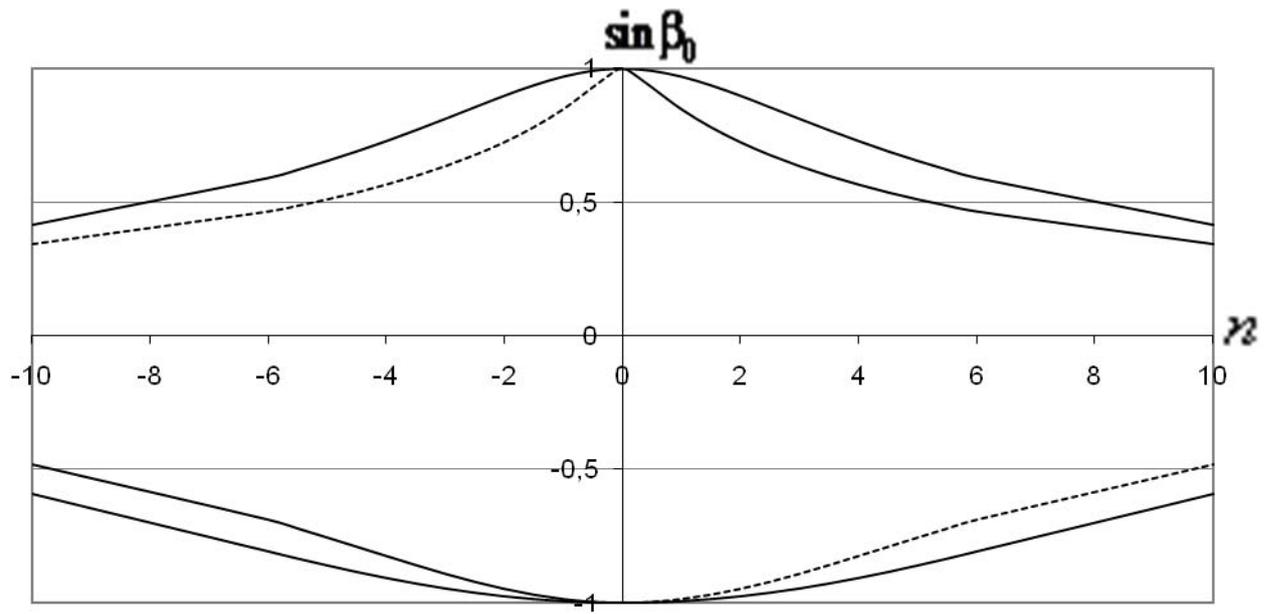
Рис.13. $m = 5$ Рис.14. $m = 6$

Рис.15. $m = 20$ Рис.16. $m = -0,25$

Рис.17. $m = -0,5$ Рис.18. $m = -0,75$

Рис.19. $m = -1$ Рис.20. $m = -2$

Рис.21. $m = -3$ Рис.22. $m = -4$

Рис.23. $m = -5$