



Сарычев В.А., Гутник С.А.

Динамика осесимметричного  
спутника под действием  
гравитационного и  
аэродинамического  
моментов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 12. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-12>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской Академии наук**

**В.А. Сарычев, С.А. Гутник**

**Динамика осесимметричного спутника под действием  
гравитационного и аэродинамического моментов**

**Препринт №12 за 2011г.**

**Москва – 2011**

### Аннотация

В.А. Сарычев, С.А. Гутник. **Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 28 страниц, 23 рисунка, библиография: 5 наименований.

Исследуется динамика вращательного движения осесимметричного спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Определены все равновесные ориентации спутника в орбитальной системе координат, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия.

**Ключевые слова:** осесимметричный спутник, гравитационный момент, аэродинамический момент, равновесные ориентации, точки бифуркации, устойчивость.

V.A. Sarychev, S.A. Gutnik. **Dynamics of an axisymmetric satellite under influence of gravitational and aerodynamic torques.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 28 Pages, 23 Figures, 5 References.

Dynamics of attitude motion of an axisymmetric satellite moving along a circular orbit under influence of gravitational and aerodynamic torques is investigated. All equilibrium orientations of the satellite in the orbital coordinate system are determined and sufficient conditions of stability of equilibria are investigated.

**Key words:** axisymmetric satellite, gravitational torque, aerodynamic torque, equilibria, bifurcation points, stability

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника–твёрдого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Введем две правые прямоугольные системы координат.

$OXYZ$  – орбитальная система координат. Ось  $OZ$  направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника. Ось  $OX$  направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс  $O$  спутника.

$Oxyz$  – связанная со спутником система координат;  $Ox, Oy, Oz$  – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат  $Oxyz$  относительно орбитальной системы координат углами тангажа ( $\alpha$ ), рыскания ( $\beta$ ) и крена ( $\gamma$ ). Тогда направляющие косинусы осей  $Ox, Oy, Oz$  в орбитальной системе координат задаются выражениями [1]

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(x, X) = \cos \alpha \cos \beta, \\
 a_{12} &= \cos(y, X) = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{13} &= \cos(z, X) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\
 a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin \beta, \\
 a_{22} &= \cos(y, Y) = \cos \beta \cos \gamma, \\
 a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos \beta \sin \gamma, \\
 a_{31} &= \cos(x, Z) = -\sin \alpha \cos \beta, \\
 a_{32} &= \cos(y, Z) = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\
 a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,
 \end{aligned} \tag{1}$$

а уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(h_2a_{13} - h_3a_{12}) &= 0, \\
 B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(h_3a_{11} - h_1a_{13}) &= 0, \\
 C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(h_1a_{12} - h_2a_{11}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\
 q &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\
 r &= (\dot{\alpha} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma = \bar{r} + \omega_0a_{23}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В уравнениях (2), (3)

$$h_1 = -\frac{Qa}{\omega_0^2}, \quad h_2 = -\frac{Qb}{\omega_0^2}, \quad h_3 = -\frac{Qc}{\omega_0^2};$$

$A, B, C$  - главные центральные моменты инерции спутника;  $p, q, r$  - проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси  $Ox, Oy, Oz$ ;  $\omega_0$  - угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите;  $Q$  - действующая на спутник сила сопротивления;  $a, b, c$  - координаты центра давления спутника в системе координат  $Oxyz$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Уравнения (2) получены при следующих предположениях:

- 1) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха;
  - 2) влияние атмосферы на поступательное движение спутника пренебрежимо мало;
  - 3) увлечением атмосферы вращающейся Земли пренебрегается.
- Предположение 1) достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой сферической.

Для системы (2)-(3) справедлив обобщенный интеграл энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\overline{A}p^2 + \overline{B}q^2 + \overline{C}r^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] + \\ & + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \omega_0^2(h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}) = const. \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Положения равновесия спутника

Положив в (2) и (3)  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$ , где  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  - постоянные величины, получим при  $A \neq B \neq C$  уравнения

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - h_2a_{13} + h_3a_{12} &= P = 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - h_3a_{11} + h_1a_{13} &= Q = 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - h_1a_{12} + h_2a_{11} &= R = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие после подстановки выражений для направляющих косинусов (1) определить неизвестные величины  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ . В последующем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$Pa_{11} + Qa_{12} + Ra_{13} = 0, Pa_{21} + Qa_{22} + Ra_{23} = 0, Pa_{31} + Qa_{32} + Ra_{33} = 0,$$

которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} &= 0, \\ 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) &= 0, \\ (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) вместе с условиями ортогональности для направляющих косинусов

$$\begin{aligned}
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, & a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, & a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

образует алгебраическую систему девяти уравнений для определения всех направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника в орбитальной системе координат.

Система уравнений (6)-(7) решена для некоторых частных случаев. В [2, 3] для случая, когда центр давления аэродинамических сил расположен на одной из главных центральных осей инерции спутника ( $h_1 \neq 0, h_2 = h_3 = 0$ ), были определены все положения равновесия спутника. Для каждой равновесной ориентации получены как достаточные, так и необходимые условия устойчивости. Исследована эволюция областей устойчивости в зависимости от двух безразмерных параметров задачи. Более сложный случай, когда центр давления аэродинамических сил лежит в одной из главных центральных плоскостей инерции спутника ( $h_1 \neq 0, h_2 = 0, h_3 \neq 0$ ), рассмотрен в [4]. Здесь также определены все положения равновесия спутника в зависимости от трех безразмерных параметров задачи, получены достаточные условия устойчивости положений равновесия.

Аналитическое решение задачи определения положений равновесия спутника в общем случае ( $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$ ) невозможно. В [3], используя идеи работы [5], показано, что система уравнений (6)-(7) может быть сведена к одному алгебраическому уравнению 12-го порядка с действительными коэффициентами, довольно сложно зависящими от четырех безразмерных параметров задачи. Каждому действительному корню алгебраического уравнения соответствуют два положения равновесия спутника. Так как число действительных корней алгебраического уравнения не превышает 12, то из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите, находящийся под действием гравитационного и аэродинамического моментов, может иметь не более 24 положений равновесия.

Основное внимание здесь будет уделено нерассмотренному ранее частному случаю исследования положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. Пусть  $A \neq B = C, h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$ . Тогда система (6), упрощаясь, примет вид

$$\begin{aligned}
 (A - B)a_{21}a_{31} &= 0, \\
 3(A - B)a_{11}a_{31} + h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\
 (A - B)a_{11}a_{21} - h_1a_{21} - h_2a_{22} - h_3a_{23} &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Из системы уравнений (8) и условий ортогональности (7) получаем следующие два случая:

### Случай 1

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= 0, \\
 3(A-B)a_{11}a_{31} + h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\
 h_2a_{22} + h_3a_{23} &= 0, \\
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
 a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

### Случай 2

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= 0, \\
 h_2a_{32} + h_3a_{33} &= 0, \\
 (A-B)a_{11}a_{21} - h_1a_{21} - h_2a_{22} - h_3a_{23} &= 0, \\
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1, \\
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1, \\
 a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\
 a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\
 a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
 a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим вначале систему (9). Из третьего и пятого уравнений системы (9) получаем  $a_{22} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ ,  $a_{23} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ . Учитывая свойства определителя матрицы направляющих косинусов, получаем

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= a_{23}a_{31}, \quad a_{13} = -a_{22}a_{31}, \quad a_{32} = -a_{11}a_{23}, \quad a_{33} = a_{11}a_{22}, \\
 h_2a_{32} + h_3a_{33} &= \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда система (9) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
a_{12} &= a_{23}a_{31}, & a_{13} &= -a_{22}a_{31}, \\
a_{21} &= 0, & a_{22} &= \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, & a_{23} &= \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \\
a_{32} &= -a_{23}a_{11}, & a_{33} &= a_{22}a_{11}, \\
3(A-B)a_{11}a_{31} \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} + h_1a_{31} &= 0, \\
a_{11}^2 + a_{31}^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим теперь систему (10). Из второго и шестого уравнения этой системы получаем  $a_{32} = \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ ,  $a_{33} = \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -a_{33}a_{21}, & a_{13} &= a_{32}a_{21}, & a_{22} &= a_{33}a_{11}, & a_{23} &= -a_{32}a_{11}, \\
h_2a_{22} + h_3a_{23} &= \mp a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2}
\end{aligned}$$

систему (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -a_{33}a_{21}, & a_{13} &= a_{32}a_{21}, \\
a_{22} &= a_{33}a_{11}, & a_{23} &= -a_{32}a_{11}, \\
a_{31} &= 0, & a_{32} &= \pm \frac{h_3}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, & a_{33} &= \mp \frac{h_2}{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}, \\
(A-B)a_{11}a_{21} \pm a_{11}\sqrt{h_2^2 + h_3^2} - h_1a_{21} &= 0, \\
a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Введем безразмерные параметры  $m = \frac{h_1}{A-B}$ ,  $n = \frac{\sqrt{h_2^2 + h_3^2}}{A-B}$ . Тогда последние два уравнения системы (11) запишутся в более простом виде

$$\begin{aligned}
3a_{11}a_{31} + ma_{31} \pm na_{11} &= 0, \\
a_{11}^2 + a_{31}^2 &= 1
\end{aligned} \tag{13}$$

или

$$\begin{aligned}
9a_{11}^4 + 6ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 9)a_{11}^2 - 6ma_{11} - m^2 &= 0, \\
a_{31} &= \frac{\mp na_{11}}{m + 3a_{11}}.
\end{aligned} \tag{14}$$



Решив систему (13) или (14), можно из первых семи уравнений системы (11) определить оставшиеся направляющие косинусы.

Первое уравнение системы (13) для обоих знаков перед последним членом в левой части представляет собой уравнения четырех гипербол, две ветви которых проходит через начало системы координат ( $a_{11} = 0$ ,  $a_{31} = 0$ ) в плоскости переменных  $a_{11}$ ,  $a_{31}$ , а второе уравнение определяет в этой плоскости единичную окружность. Число действительных решений системы (13), а, следовательно, и системы (11) зависит от характера пересечений гипербол и окружности. Ясно, что две ветви гипербол, которые проходят через начало координат, всегда пересекаются с окружностью в четырех точках. Если и две другие ветви гипербол пересекаются с окружностью, то имеем еще четыре решения. В случае касания ветвей гипербол с окружностью четыре решения сливаются в два (существуют две пары кратных корней). Таким образом, система (13), а, следовательно, и система (11) имеет либо восемь, либо четыре решения. На рис. 1, 2, 3 представлены три различных варианта взаимного расположения ветвей гипербол и окружности.

Возможно и более детальное исследование свойств системы (13). Определим границы в плоскости  $m$ ,  $n$ , разделяющие области с различным числом решений. Из приведенных выше рисунков следует, что точками бифуркации являются точки плоскости  $m$ ,  $n$ , через которые проходят одновременно ветви гипербол и окружность и где касательные к этим кривым совпадают. Условие совпадения касательной к двум ветвям гипербол и окружности имеет вид

$$\frac{da_{31}}{da_{11}} = -\frac{3a_{31} \pm n}{3a_{11} + m} = -\frac{2a_{11}}{2a_{31}}$$

или

$$3(a_{31}^2 - a_{11}^2) - ma_{11} \pm na_{31} = 0. \quad (15)$$

Подставив выражение для  $a_{31}$  из (14) во второе уравнение (13) и уравнение (15), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{n^2 a_{11}^2}{(3a_{11} + m)^2} &= 1 - a_{11}^2, \\ \frac{mn^2}{(3a_{11} + m)^2} &= -(3a_{11} + m). \end{aligned} \quad (16)$$

Исключив  $n^2$  из системы уравнений (16), после несложных преобразований получим соотношение  $a_{11} = -3^{-1/3} m^{1/3}$ . Подставив, наконец, выражение для  $a_{11}$  во второе уравнение (16), приходим к уравнению астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 3^{2/3}. \quad (17)$$

Внутри области  $m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$  существуют восемь решений; при переходе через кривую (17), являющуюся бифуркационной, происходит изменение числа решений на четыре; в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$  существуют четыре решения.

Рассмотрим теперь последние два уравнения системы (12), записав их с использованием параметров  $m$  и  $n$  в виде

$$\begin{aligned} a_{11}a_{21} - ma_{21} \pm na_{11} &= 0, \\ a_{11}^2 + a_{21}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

или

$$\begin{aligned} a_{11}^4 - 2ma_{11}^3 + (m^2 + n^2 - 1)a_{11}^2 + 2ma_{11} - m^2 &= 0, \\ a_{21} &= \frac{\pm na_{11}}{m - a_{11}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Применив предложенный выше при исследовании системы (13) подход, можно показать, что и для системы (18) бифуркационной кривой, отделяющей область существования восьми решений от области существования четырех решений, также является астроида

$$m^{2/3} + n^{2/3} = 1. \quad (20)$$

На рис.4 представлены астроида (17) и (20), выделяющие в плоскости  $m, n$  три области с различным числом положений равновесия осесимметричного спутника, подверженного действию гравитационного и аэродинамического моментов. В области  $m^{2/3} + n^{2/3} < 1$  существуют 16 решений, в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 1$ ,  $m^{2/3} + n^{2/3} < 3^{2/3}$  существуют 12 решений, в области  $m^{2/3} + n^{2/3} > 3^{2/3}$  существуют 8 решений.

### 3. Достаточные условия устойчивости положений равновесия

Интеграл (4) для осесимметричного спутника ( $B = C$ ) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2(A - B)(3a_{31}^2 - a_{21}^2) - \\ - \omega_0^2(h_1a_{11} + h_2a_{12} + h_3a_{13}) = const. \end{aligned} \quad (21)$$

Представим  $\alpha, \beta, \gamma$  в виде  $\alpha = \alpha_0 + \bar{\alpha}$ ,  $\beta = \beta_0 + \bar{\beta}$ ,  $\gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma}$ ,

где  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  – малые отклонения от положения равновесия  $\alpha = \alpha_0 = const$ ,  $\beta = \beta_0 = const$ ,  $\gamma = \gamma_0 = const$ , удовлетворяющего системе уравнений (7), (8). Тогда интеграл энергии (21) может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[A\bar{p}^2 + B(\bar{q}^2 + \bar{r}^2)] + \frac{1}{2}\omega_0^2(A_{\alpha\alpha}\bar{\alpha}^2 + A_{\beta\beta}\bar{\beta}^2 + A_{\gamma\gamma}\bar{\gamma}^2 + \\ & + 2A_{\alpha\beta}\bar{\alpha}\bar{\beta} + 2A_{\alpha\gamma}\bar{\alpha}\bar{\gamma} + 2A_{\beta\gamma}\bar{\beta}\bar{\gamma}) + \Sigma = const. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\Sigma$  обозначает члены выше второго порядка малости относительно  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= 3(A-B)\cos 2\alpha_0 \cos^2 \beta_0 + h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}, \\ A_{\beta\beta} &= -(A-B)(1 + 3\sin^2 \alpha_0)\cos 2\beta_0 + h_1 a_{11} - \\ & - (h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0)\cos \alpha_0 \sin \beta_0, \\ A_{\gamma\gamma} &= h_2 a_{12} + h_3 a_{13}, \\ A_{\alpha\beta} &= A_{\beta\alpha} = 7(A-B)a_{21}a_{31}\cos \alpha_0 = 0, \\ A_{\alpha\gamma} &= A_{\gamma\alpha} = -(h_2 a_{33} - h_3 a_{32}), \\ A_{\beta\gamma} &= A_{\gamma\beta} = -(h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0)a_{11}. \end{aligned} \quad (23)$$

Достаточные условия устойчивости положения равновесия  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0, \gamma = \gamma_0$  (положительная определенность квадратичной формы (22)) имеют вид

$$A_{\alpha\alpha} > 0, \quad A_{\beta\beta} > 0, \quad A_{\beta\beta}A_{\gamma\gamma} - (A_{\beta\gamma})^2 > 0. \quad (24)$$

В случае 1  $a_{21} = \sin \beta_0 = 0$ . Из второго и третьего уравнений системы (9) получаем соотношения

$$h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 = \frac{3(A-B)\cos \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin \alpha_0, \quad (25)$$

$$h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0 = 0.$$

Используя соотношения (25) и условие  $\sin \beta_0 = 0$ , получим выражения (23) в более простом виде

$$\begin{aligned} A_{\alpha\alpha} &= \frac{3(A-B)\cos^3 \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0}, \\ A_{\beta\beta} &= -(A-B)(1 + 3\sin^2 \alpha_0) + h_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0, \\ A_{\gamma\gamma} &= \frac{3(A-B)\cos \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} \sin^2 \alpha_0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = 0,$$

$$A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\alpha} = 0,$$

$$A_{\beta\gamma} = A_{\gamma\beta} = -[3(A-B)\cos \alpha_0 \cos \beta_0 + h_1] \sin \alpha_0.$$

Из (24) получаем достаточные условия устойчивости в случае 1

$$\frac{3(A-B) \cos^3 \alpha_0 + h_1 \cos \beta_0}{\cos \alpha_0} > 0,$$

$$(B-A)(1+3\sin^2 \alpha_0) + h_1 \cos \alpha_0 \cos \beta_0 > 0,$$

$$A-B < 0.$$

Вводя параметр  $m$ , получаем окончательно

$$a_{11}(m+3a_{11}^3) < 0,$$

$$3a_{11}^2 + ma_{11} - 4 < 0, \tag{27}$$

$$A-B < 0.$$

В случае 2  $a_{31} = -\sin \alpha_0 \cos \beta_0 = 0$  и, следовательно,  $\sin \alpha_0 = 0$ . Из второго и третьего уравнений системы (10) получаем соотношения

$$h_2 \cos \gamma_0 - h_3 \sin \gamma_0 = \frac{(A-B) \cos \alpha_0 \cos \beta_0 - h_1}{\cos \beta_0} \sin \beta_0, \tag{28}$$

$$h_2 \sin \gamma_0 + h_3 \cos \gamma_0 = 0.$$

С учетом соотношений (28) и условия  $\sin \alpha_0 = 0$  из (23) получаем

$$A_{\alpha\alpha} = \frac{(A-B) \cos \beta_0 (4 \cos^2 \beta_0 - 1) + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0},$$

$$A_{\beta\beta} = \frac{-(A-B) \cos^3 \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0},$$

$$A_{\gamma\gamma} = \frac{-(A-B) \cos \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0} \sin^2 \beta_0, \tag{29}$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} = 0,$$

$$A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\alpha} = \frac{-(A-B) \cos \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0}{\cos \beta_0} \sin \beta_0,$$

$$A_{\beta\gamma} = A_{\gamma\beta} = 0.$$

Достаточные условия устойчивости (24) для положения равновесия в случае 2 имеют вид

$$\cos \beta_0 [(A-B) \cos \beta_0 (4 \cos^2 \beta_0 - 1) + h_1 \cos \alpha_0] > 0,$$

$$\cos \beta_0 [-(A-B) \cos^3 \beta_0 + h_1 \cos \alpha_0] > 0,$$

$$A-B > 0.$$

Вводя параметр  $m$ , получаем

$$\begin{aligned} a_{11}[a_{11}(4a_{11}^2 - 1) + m] &> 0, \\ a_{11}(m - a_{11}^3) &> 0, \\ A - B &> 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Следует отметить, что условия устойчивости (27) для случая 1, когда  $A - B < 0$ , и условия устойчивости (30) для случая 2, когда  $A - B > 0$ , не могут выполняться одновременно.

#### 4. Исследование положений равновесия спутника и их устойчивости

Проведем анализ эволюции полученных численно положений равновесия и соответствующих им достаточных условий устойчивости при изменении параметров  $m$  и  $n$  системы. Рассмотрим, например, поведение решений в плоскости  $a_{11}$ ,  $n$  при фиксированных значениях  $m$ . Каждое положение равновесия для случая 1 (случая 2) определяется выбором одного из корней алгебраического уравнения системы (14) (системы (19)) и выбором знака направляющего косинуса  $a_{31}$  ( $a_{21}$ ).

Рассмотрим подробнее свойства алгебраических уравнений (14) и (19). Коэффициенты уравнений зависят от безразмерных параметров  $m$  и  $n$ , которые в свою очередь определяются размерными параметрами осесимметричного спутника  $A - B$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ . Проекции вектора аэродинамического момента и инерционный параметр  $A - B$ , а также безразмерные параметры  $m$  и  $n$ , принимают любые значения. Знак параметра  $n$  совпадает со знаком  $A - B$ . Так как параметры  $m$  и  $n$  входят в выражения для коэффициентов при четных степенях  $a_{11}$  алгебраических уравнений систем (14) и (19) во второй степени, а коэффициенты при нечетных степенях этих уравнений пропорциональны параметру  $m$ , то изменение знаков величин  $m$  и  $n$  при сохранении их абсолютных значений не влияет на абсолютную величину корней алгебраических уравнений. При изменении знака параметра  $m$  происходит лишь изменение знаков корней алгебраических уравнений, а при изменении знака параметра  $n$  корни алгебраических уравнений остаются неизменными. Следовательно, численное нахождение корней алгебраических систем (14), (19) для получения равновесных решений достаточно проводить при положительных значениях параметров  $m$  и  $n$ , а соответствующие решения для отрицательных значений  $m$  будут получаться изменением знака вычисленных корней при положительных  $m$  на противоположные; графики ветвей решений для отрицательных значений  $m$  будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих положительных значений  $m$  относительно оси абсцисс. Графики ветвей решений для отрицательных значений  $n$  будут получаться зеркальным отображением графиков ветвей решений для соответствующих значений  $m$  при положительных значениях  $n$  относительно оси ординат.

Точки пересечения прямых  $n = const$  с астроидами (17) и (20) лежат на границах областей с постоянным числом действительных решений и, соответственно, постоянным числом положений равновесия осесимметричного спутника. Этим точкам соответствуют значения  $n = (1 - m^{2/3})^{3/2}$  и  $n = (3^{2/3} - m^{2/3})^{3/2}$ ; при данных значениях  $n$  происходит слияние ветвей решений, когда исчезают четыре решения (становятся мнимыми два корня). Точки пересечения графиков решений с осью ординат ( $n = 0$ ) находятся аналитически и равны для случая 1  $a_{11} = \pm 1$  и  $a_{11} = -\frac{m}{3}$ , а для случая 2 -  $a_{11} = \pm 1$  и  $a_{11} = m$ .

Достаточные условия устойчивости положений равновесия спутника, в силу перечисленных свойств алгебраических уравнений (14), (19), будут изменяться в зависимости от знаков параметров  $m$  и  $n$  следующим образом: при изменении знака параметра  $n$  изменяется знак  $A - B$  и, соответственно, изменяются достаточные условия устойчивости для случаев 1 и 2 на противоположные.

При  $A - B > 0$  ( $n > 0$ ) условия устойчивости (30) для случая 2 при изменении знака параметра  $m$  (при изменении знака  $h_1$ ) не изменятся потому что знаки направляющего косинуса  $a_{11}$ , удовлетворяющего уравнению (19), и знаки параметра  $m$  изменяются одновременно. При  $A - B < 0$  достаточные условия устойчивости (27) для случая 1 могут выполняться при  $n < 0$ . При изменении знака параметра  $m$  (знака  $h_1$ ) в этом случае условия устойчивости (27) не изменятся в силу того, что знаки направляющего косинуса  $a_{11}$ , удовлетворяющего уравнению (14) и знаки параметра  $m$  изменяются одновременно. Достаточные условия устойчивости (27), (30) равновесных решений для случаев 1 и 2 не зависят от значений параметров  $h_2$  и  $h_3$ .

Вычисления проводились при положительных значениях  $m$ , равных 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 2; 3; 4; 5; 20; решения для отрицательных значений  $m$ , равных -0,25; -0,5; -0,75; -1; -2; -3; -4; -5; -20, получались зеркальным отображением относительно оси абсцисс решений, полученных для положительных  $m$ . Значения  $n$  изменялись в диапазоне от -6 до 6. Результаты вычислений представлены на рис.5-23.

Как видно из рисунков 5-23, графики решений можно разделить на три типа, соответствующие трем диапазонам изменения параметра  $m$ . Графики первого типа соответствуют значениям  $0 < |m| < 1$ , графики второго типа соответствуют значениям  $1 < |m| < 3$ , графики третьего типа соответствуют значениям  $|m| > 3$ . На рисунках пунктирной линией обозначены ветви равновесных решений, для которых выполняются достаточные условия устойчивости (27), (30).

Графики решений при  $m = 0$ ,  $m = \pm 1$ ,  $m = \pm 3$  являются бифуркационными. В этих точках (см. рис.9, 11, 18, 20) происходит вырождение ветвей решений в точку, когда исчезают четыре решения. При указанных значениях параметра  $m$  происходит изменение типов графиков решений, связанное со сменой

числа действительных корней систем уравнений (14), (19) и, соответственно, со сменой числа положений равновесия осесимметричного спутника.

В случае  $m = 0$  (рис.5) корни уравнений (14) определяются из соотношений  $a_{11}^2 = 0$ ,  $9a_{11}^2 = 9 - n^2$  при  $|n| \leq 3$  и корни уравнений (19) из соотношений  $a_{11}^2 = 0$ ,  $a_{11}^2 = 1 - n^2$  при  $|n| \leq 1$  соответственно. Условия устойчивости (27), (30) при  $m = 0$  для случаев 1 и 2 не выполняются.

Для графиков первого типа ( $0 < |m| < 1$ ) существуют все 16 равновесных решений (рис. 6-8, 15-17). Приведем более подробное описание поведения найденных положений равновесия для графиков первого типа на примере случая  $m = 0,25$  (рис.6). Как видно из рисунка, при  $|n| < n_1 \approx 0,468$  существуют 16 равновесных решений. Из них 8 решений (4 действительных корня полинома (14)) соответствуют случаю 1 и 8 решений (4 действительных корня полинома (19)) соответствуют случаю 2. При значениях  $n_1 \approx \pm 0,468$  прямые  $n = \pm n_1$  имеют одну общую точку с кривой (20). В этой общей точке происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 2, при этом 4 решения случая 2 перестают существовать.

В интервале  $n_1 \leq n < n_2 \approx 2,184$  имеем 12 положений равновесия. Прямые  $n = \pm n_2$  имеют одну общую точку с астроидой (17), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При  $|n| > n_2$  существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений), при этом случаю 1 на рис.6 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости (30) в случае 2 ( $n > 0$ ) выполняются для равновесных решений, принадлежащих двум нижним положительным кривым, которые выходят из одной точки в правой полуплоскости. В случае 1 ( $n < 0$ ) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений уравнения (14), принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые также выходят из одной точки, как и для случая 1, но в левой полуплоскости. Эти кривые обозначены пунктирной линией.

Слияние ветвей равновесных решений для других графиков первого типа происходит при  $m = \pm 0,5$  (рис.7, 16) в точках  $n \approx \pm 1,746$  (случай 1) и  $n \approx \pm 0,225$  (случай 2), при  $m = \pm 0,75$  (рис.8, 17) в точках  $n \approx \pm 1,405$  (случай 1) и  $n \approx \pm 0,073$  (случай 2).

При  $m = 1$  (рис. 9) происходит вырождение верхних положительных ветвей решений для случая 2 в точку (случай двух кратных корней  $a_{11} = 1$ ). Слияние ветвей решений для случая 1 происходит при  $n \approx 1,1225$ . При  $m = 1$  существуют устойчивая ветвь решений – нижняя положительная для случая 2 в правой полуплоскости и две верхних отрицательных ветви для случая 1 в левой полуплоскости. Случай  $m = -1$  рассматривается аналогично с точностью

до зеркального отображения ветвей решений относительно горизонтальной оси описанного случая при  $m = 1$ .

Характер графиков второго типа, существующих в интервалах  $1 < m < 3$  (рис.10) и  $-3 < m < -1$  (рис.19), рассмотрим на примере случая  $m = 2$  (рис.10). При  $|n| < 0,345$  существуют 12 равновесных решений, из них 8 решений соответствуют случаю 1 и 4 решения - случаю 2. Прямые  $n = \pm 0,345$  имеют одну общую точку с астроидой (17), где происходит слияние ветвей равновесных решений для случая 1. При  $|n| > 0,345$  существуют лишь 8 положений равновесия (4 ветви решений); при этом случаю 1 на рис.10 соответствуют верхняя положительная и верхняя отрицательная кривые, а случаю 2 соответствуют нижняя положительная и нижняя отрицательная кривые.

Достаточные условия устойчивости (30) в случае 2 ( $n > 0$ ) выполняются для равновесных решений, принадлежащих нижней положительной кривой в правой полуплоскости. В случае 1 ( $n < 0$ ) достаточные условия устойчивости выполняются для равновесных решений, принадлежащих двум верхним отрицательным кривым, которые выходят из одной точки в левой полуплоскости. Эти кривые обозначены пунктирной линией.

При  $m = 3$  (рис. 11) происходит вырождение нижних отрицательных ветвей решений для случая 1 в точку (случай двух кратных корней  $a_{11} = -1$  при  $n = 0$ ). При  $m = 3$  существуют две устойчивые ветви решений – нижняя положительная для случая 2 в правой полуплоскости и верхняя отрицательная для случая 1 в левой полуплоскости. Случай  $m = -3$  рассматривается аналогично.

При  $|m| > 3$  существуют кривые третьего типа (рис. 12 - 14, 21 - 23) На примере  $m = 4$  (рис.12) представлен типичный график кривых третьего типа.

На поле рисунков 6, 10, 12 нанесены указатели 1 и 2, отмечающие кривые равновесных решений для случая 1 и случая 2 соответственно.

Как видно из приведенных в тексте рисунков, при возрастании параметров  $m$  и  $n$  равновесные решения приближаются к тривиальным положениям равновесия, когда  $\cos \beta_0 = 0$  ( $\beta_0 = \pm \pi/2$ ) для случая 2 и  $\cos \alpha_0 = 0$  ( $\alpha_0 = \pm \pi/2$ ) для случая 1. Положения равновесия спутника при больших значениях  $|m|$  ( $|m| = 4, 5, 20$ ; рис. 12 - 14, 21 - 23) приближаются к положениям равновесия, когда ось симметрии  $Ox$  спутника совпадает с осью  $Ox$  орбитальной системы координат, направленной вдоль касательной к круговой орбите.

Численные результаты показывают, что для случая 2 при  $n > 0$  и при  $0 < |m| < 1$ , существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения равновесия), при значениях  $|m| \geq 1$  существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия). Для случая 1 при  $n < 0$  и  $0 < |m| < 3$  также существуют две устойчивые ветви равновесных решений (четыре устойчивых положения), при значени-



ях  $|m| \geq 3$  существует одна устойчивая ветвь равновесных решений (два устойчивых положения равновесия).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ - 6700.2010.1) и Португальского фонда по науке и технике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства», т.11, М.: ВИНТИ, 1978, 224 с.
2. *Sarychev V.A., Mirer S.A.* Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2000, Vol.76, № 1, P.55-68.
3. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K.* Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2007, Vol.97, № 4, P. 267-287.
4. *Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A.* Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2008, Vol.100, № 4, P. 301-318.
5. *Сарычев В.А., Гутник С.А.* К вопросу о положениях относительного равновесия спутника-гиростата // *Космич. исслед.*, 1984, т.22, № 3. с.323-326.

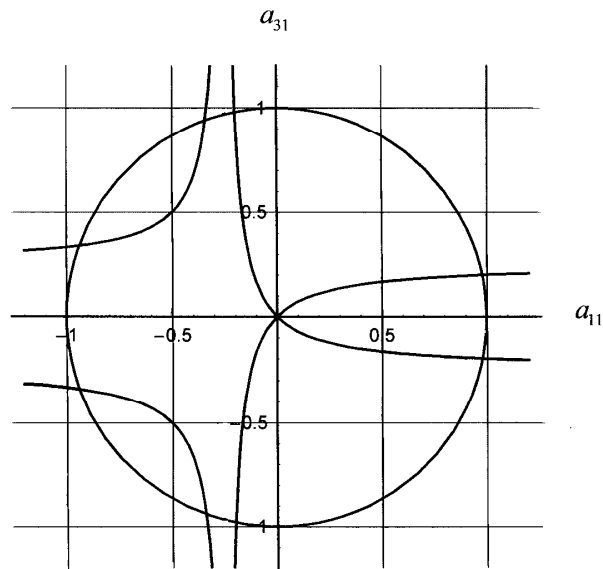


Рис.1. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 0.75$ )

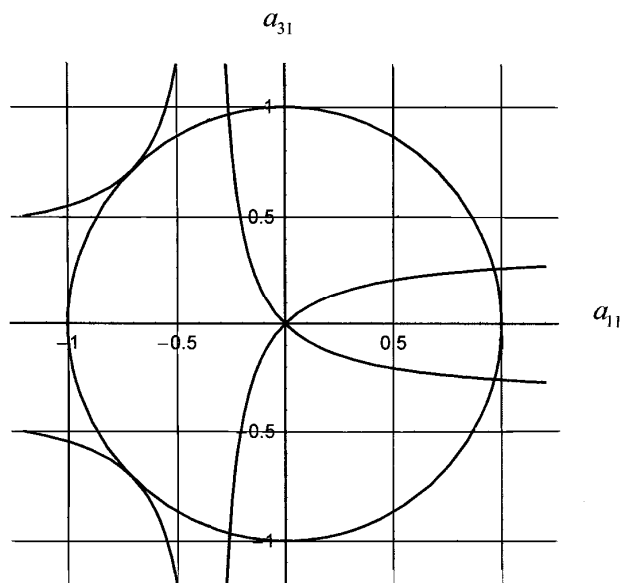


Рис.2. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 0.75\sqrt{2}$ )

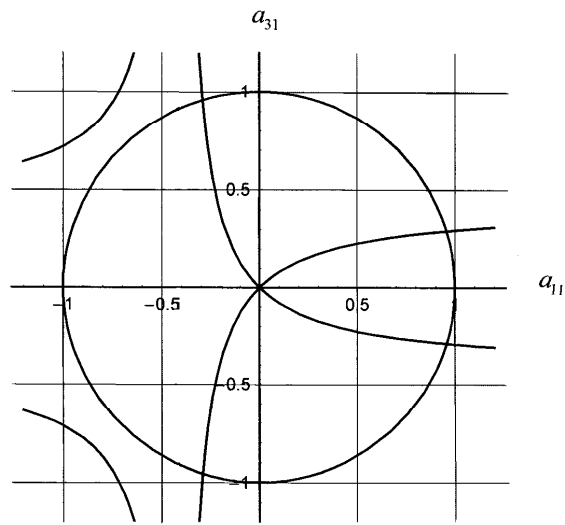


Рис.3. Взаимное расположение окружности и ветвей гиперболы ( $m = n = 1.25$ )

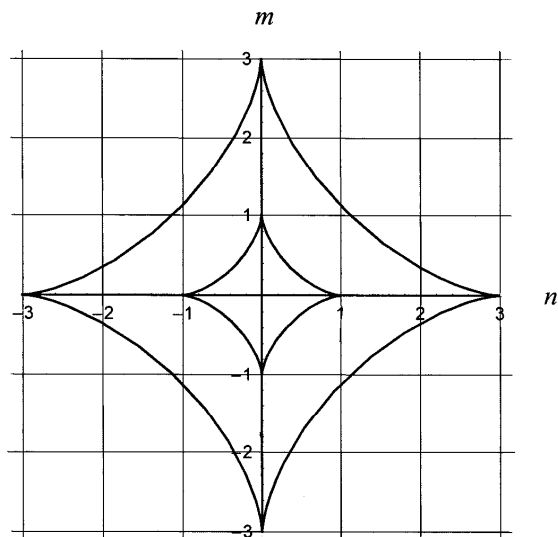
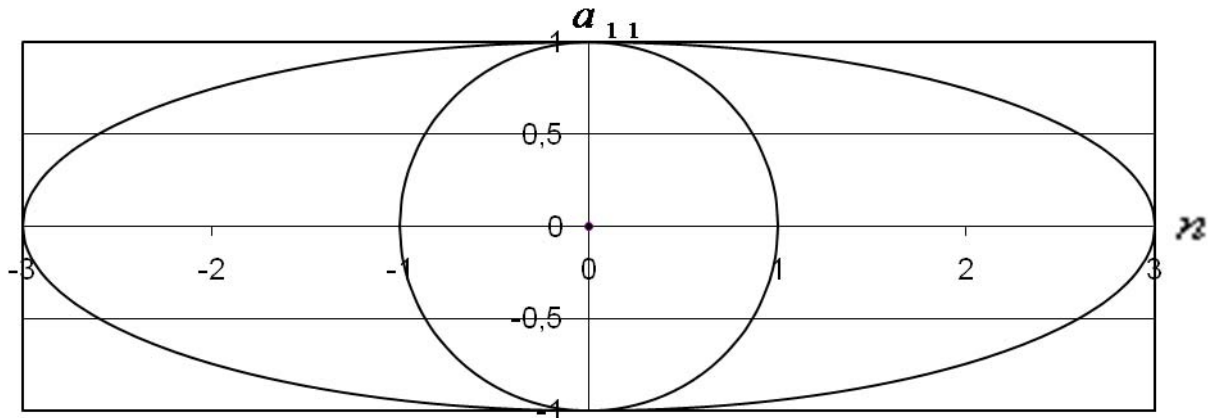
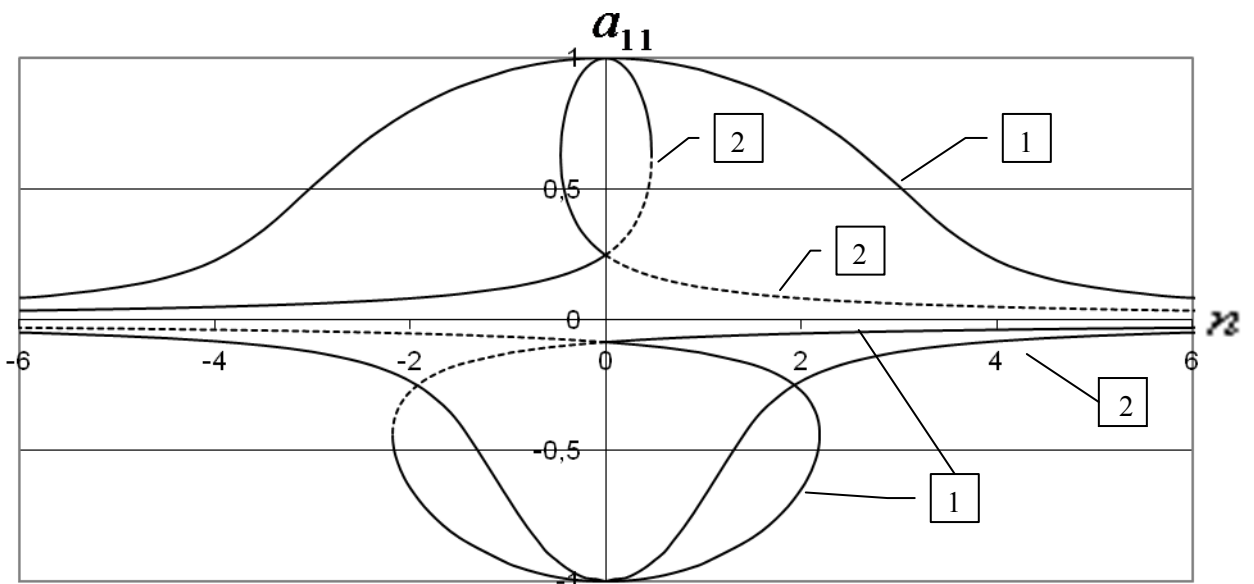
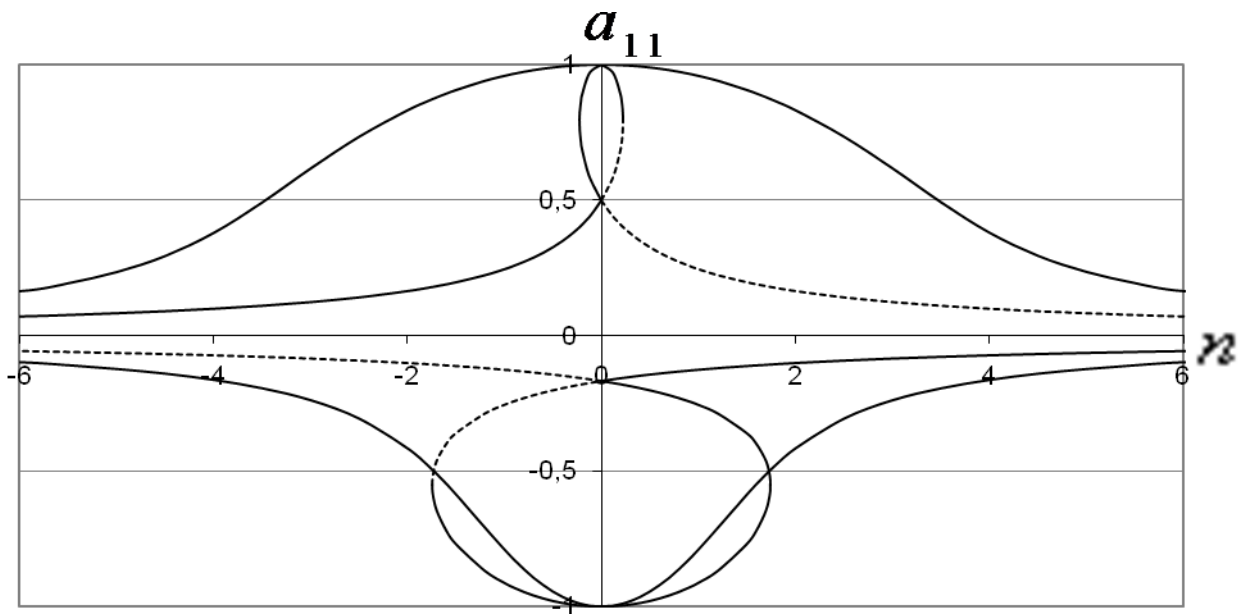
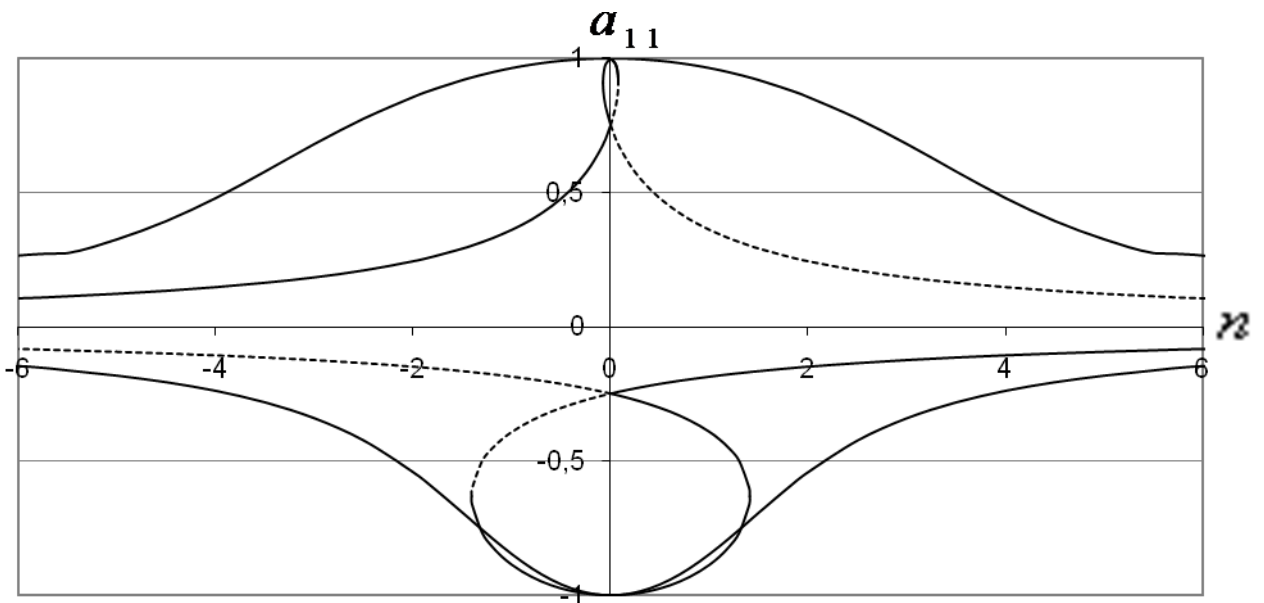
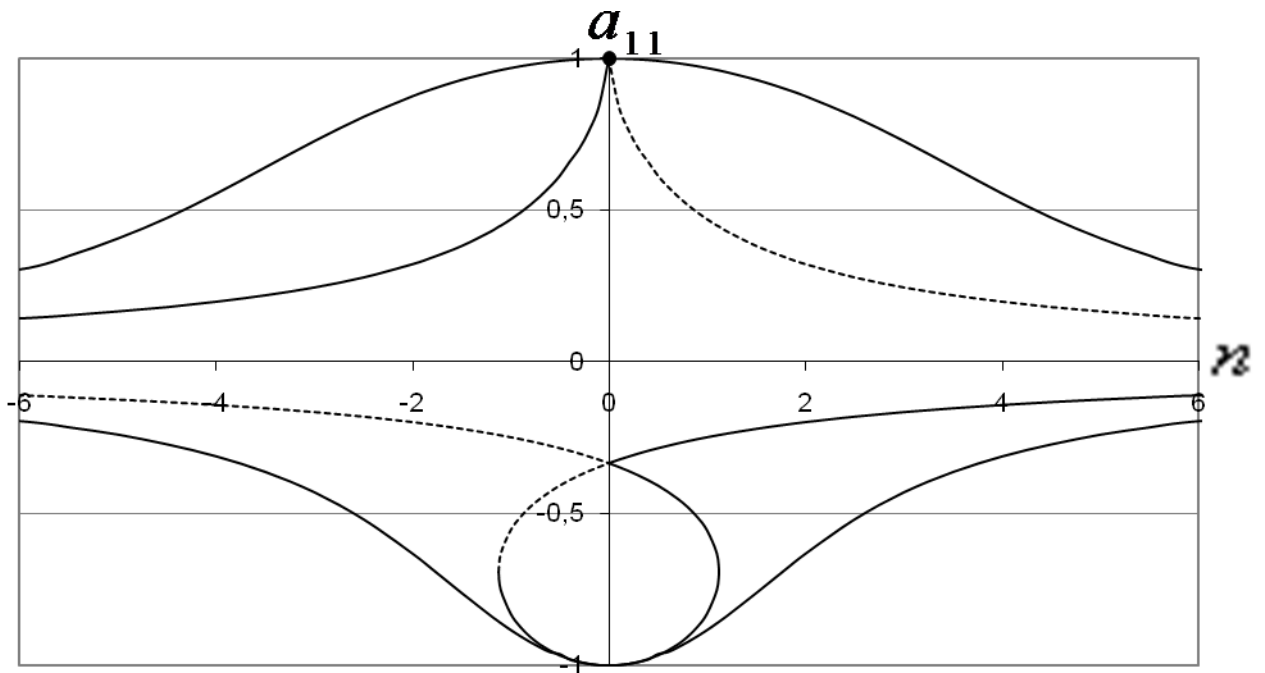
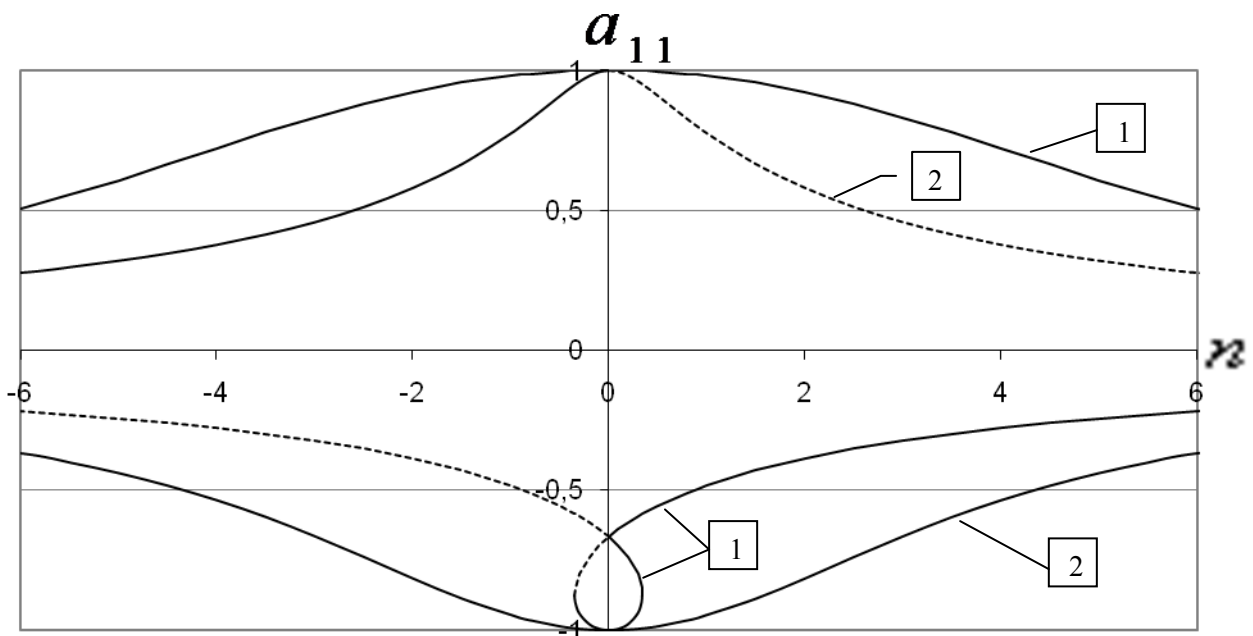
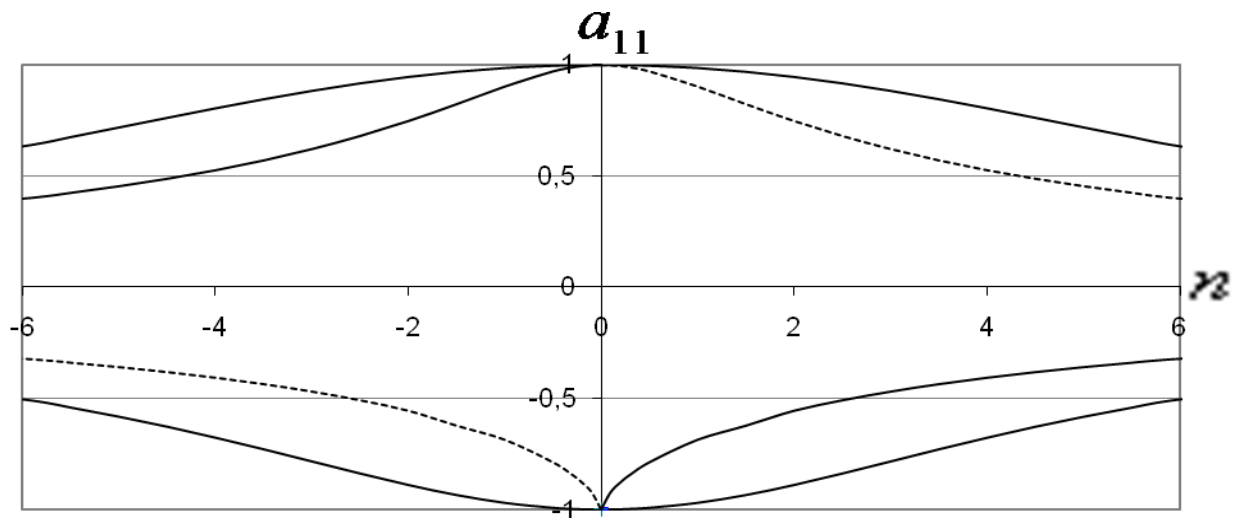
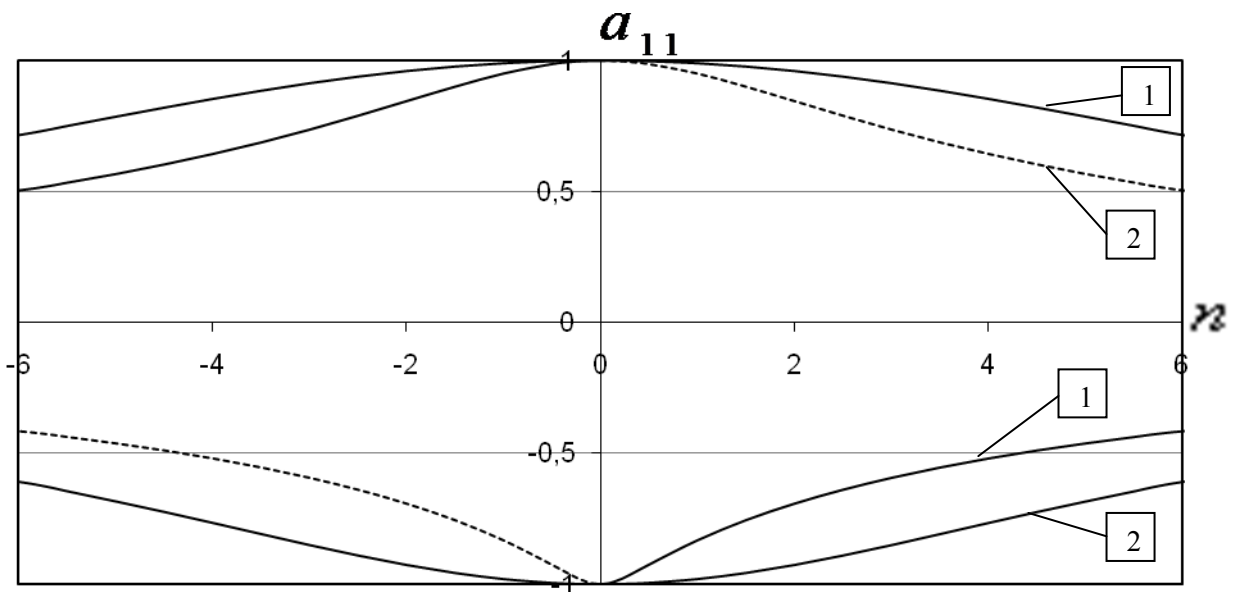


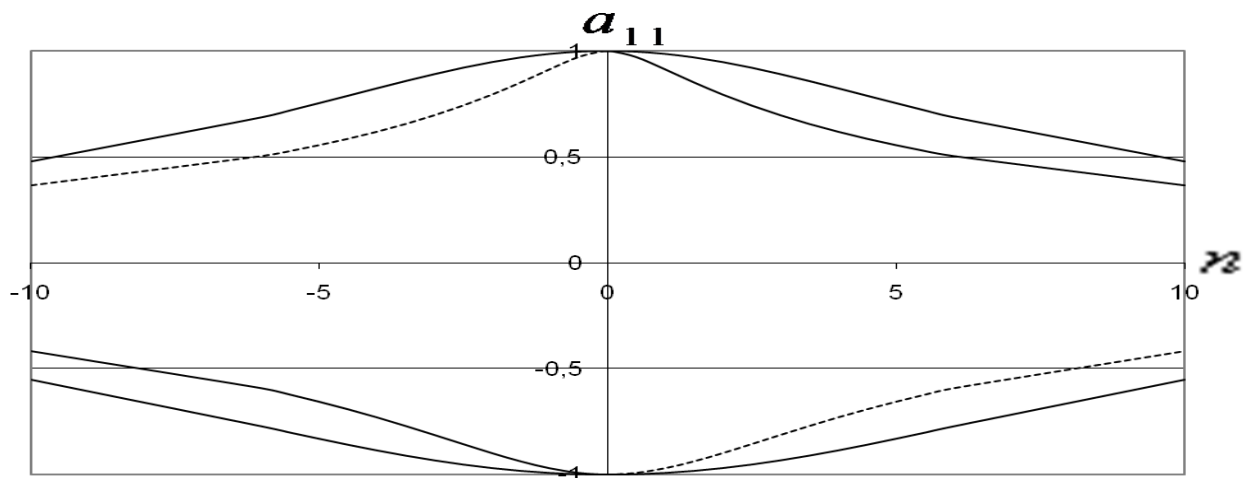
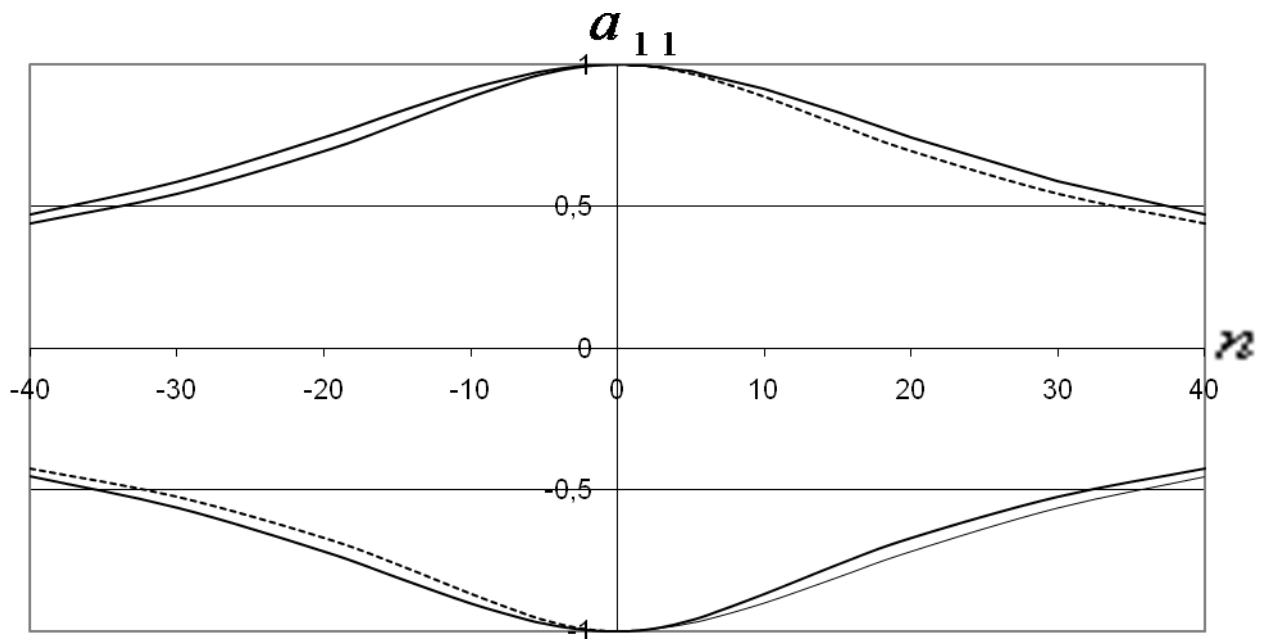
Рис.4. Области существования 16, 12 и 8 равновесных ориентаций осесимметричного спутника

Рис.5.  $m = 0$ Рис.6.  $m = 0,25$

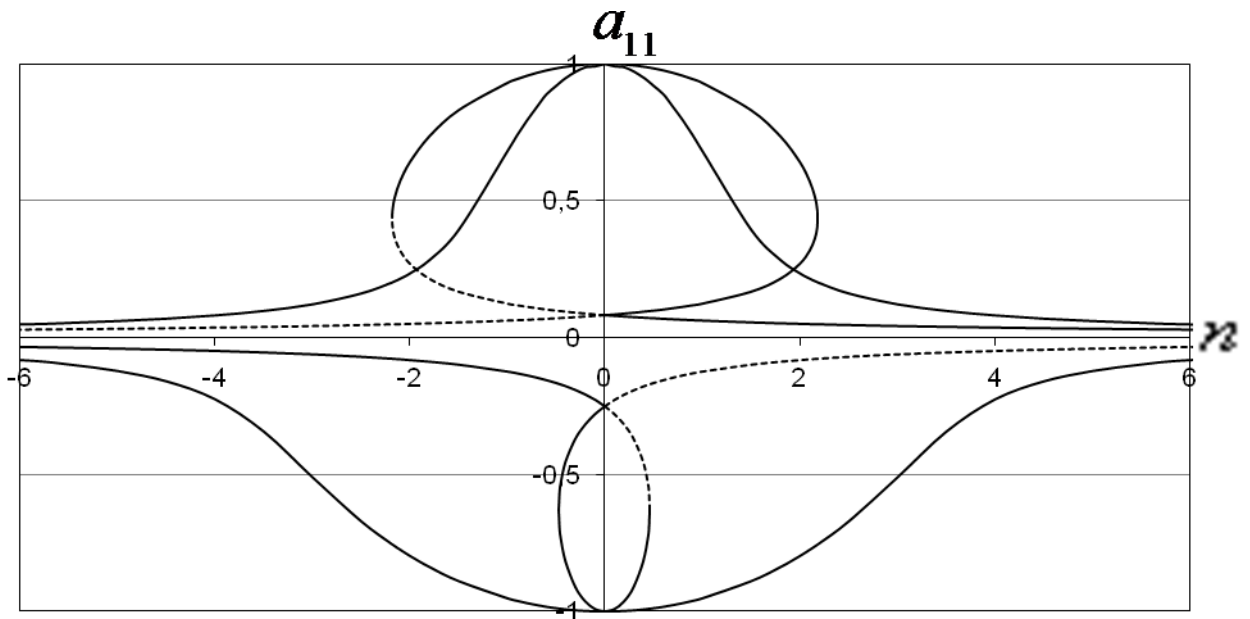
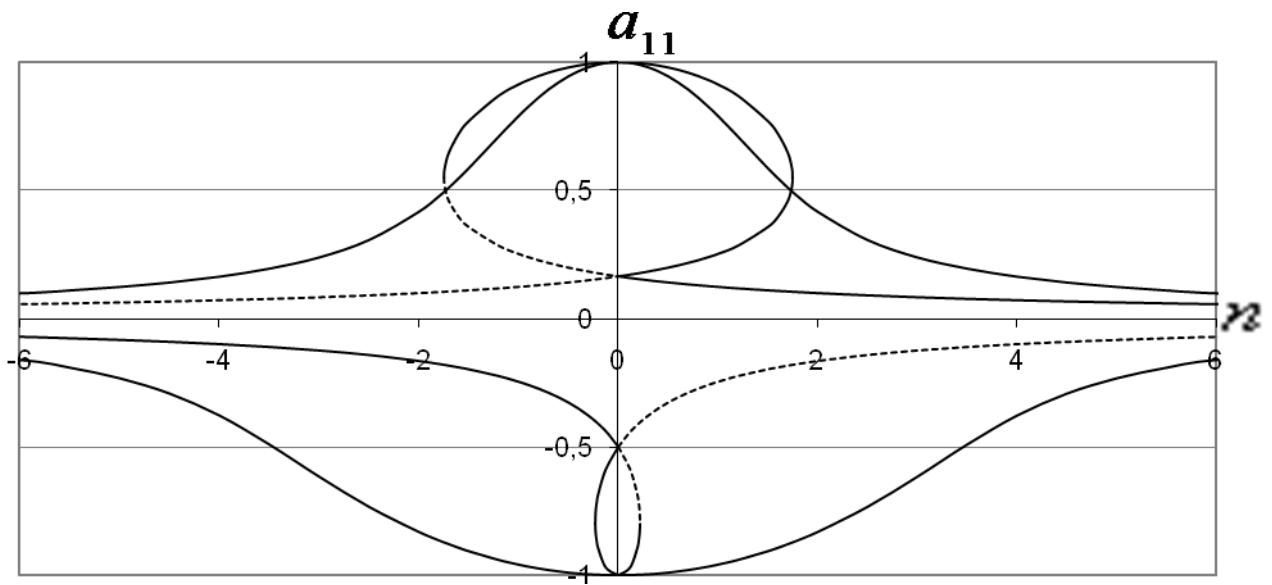
Рис.7.  $m = 0,5$ Рис.8.  $m = 0,75$

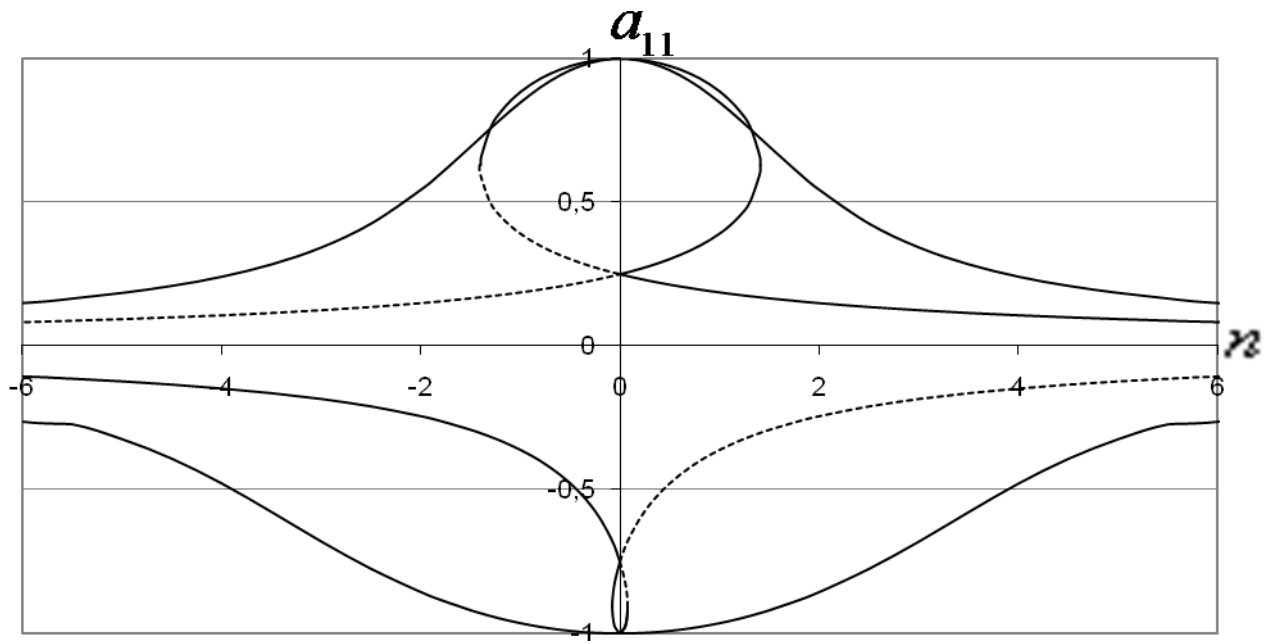
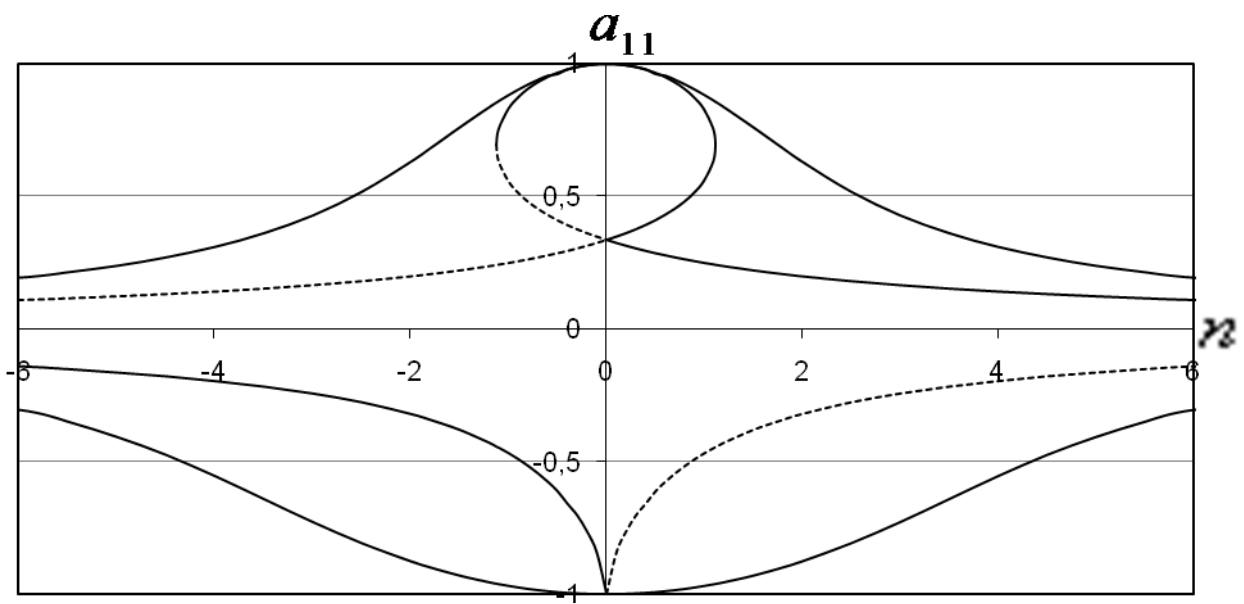
Рис.9.  $m = 1$ Рис.10.  $m = 2$

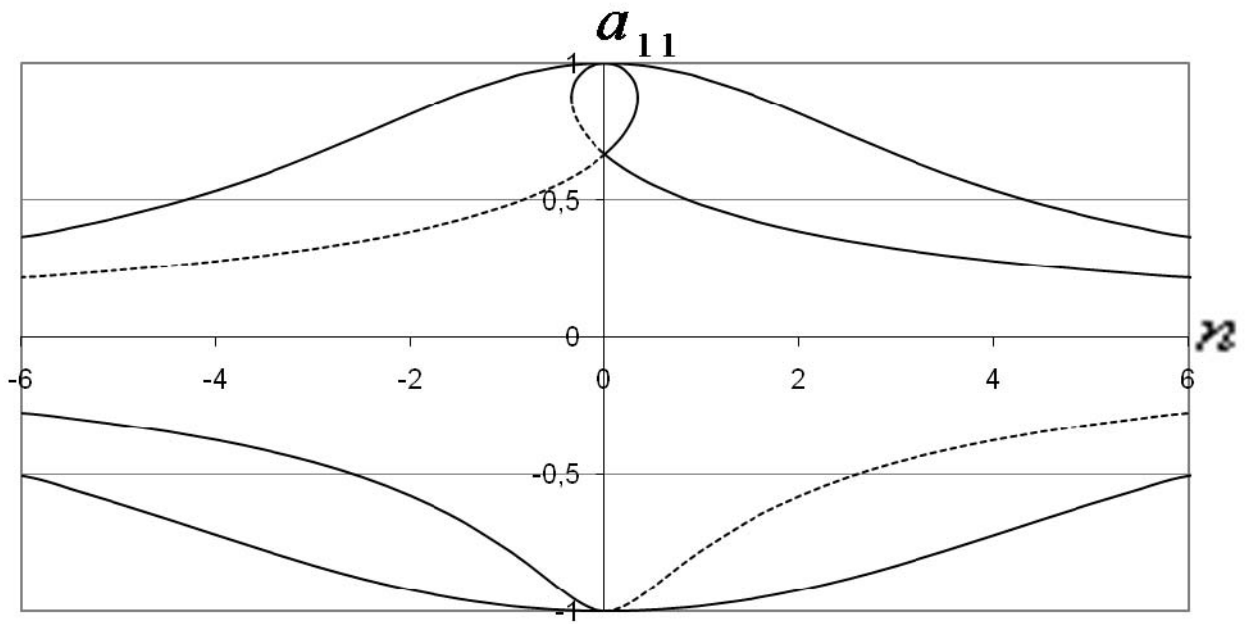
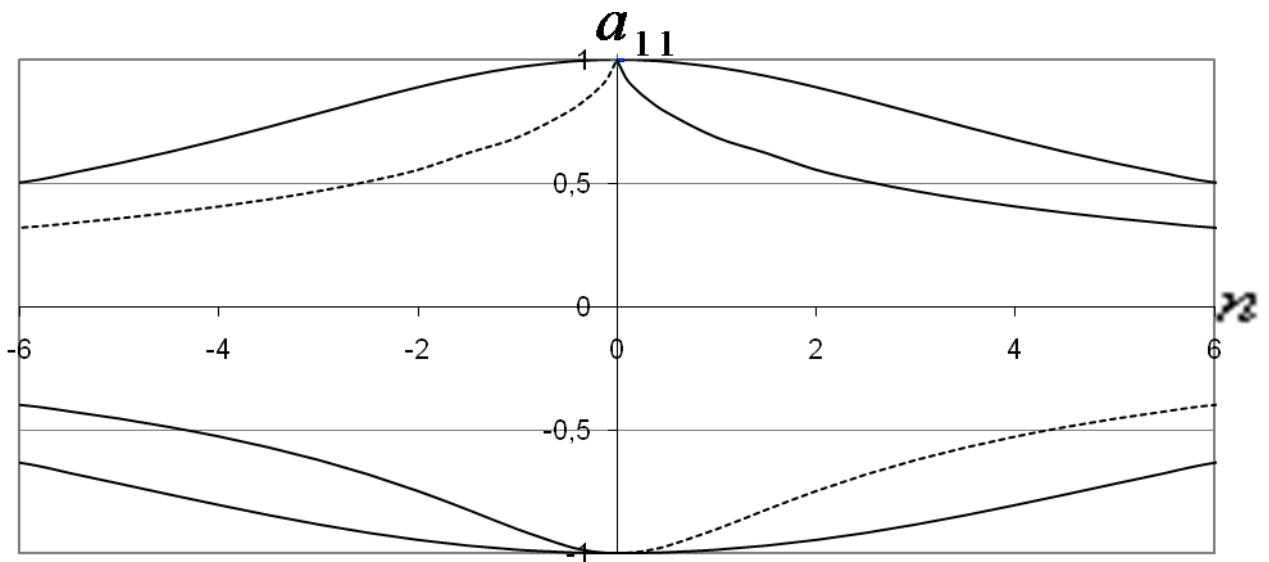
Рис.11.  $m = 3$ Рис.12.  $m = 4$

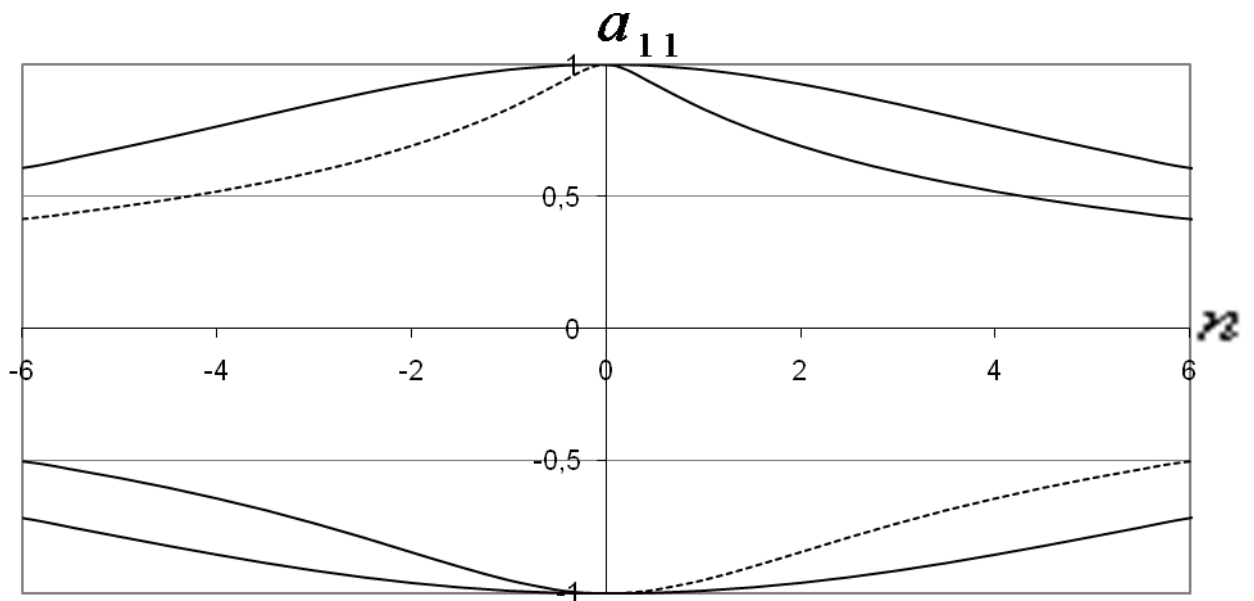
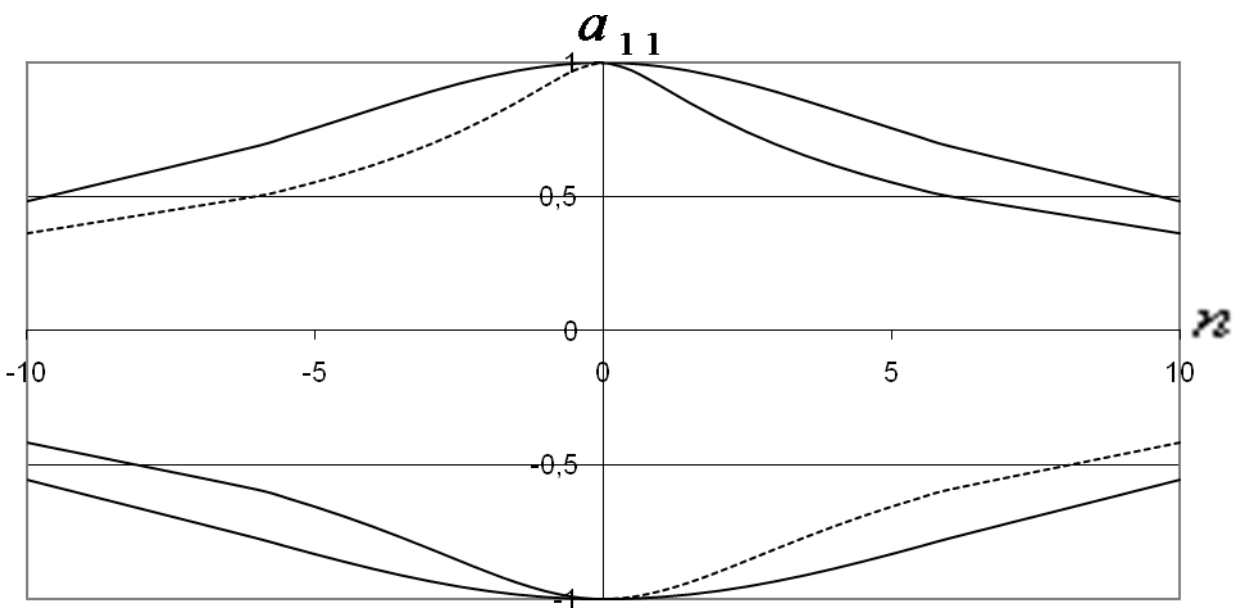
Рис.13.  $m = 5$ Рис.14.  $m = 20$

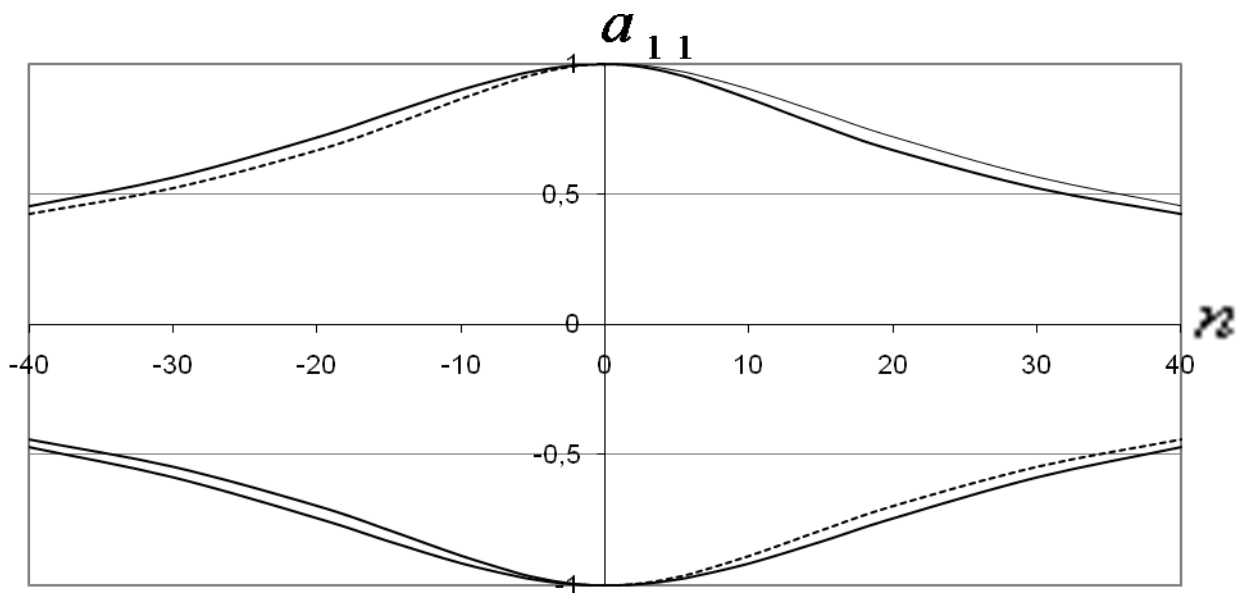


Рис.15.  $m = -0,25$ Рис.16.  $m = -0,5$

Рис.17.  $m = -0,75$ Рис.18.  $m = -1$

Рис.19.  $m = -2$ Рис.20.  $m = -3$

Рис.21.  $m = -4$ Рис.22.  $m = -5$

Рис.23.  $m = -20$