



Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф.

Численный метод решения
уравнения
теплопроводности на
треугольных сетках на
основе многосеточного
метода

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках на основе многосеточного метода // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 29. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-29>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

О.Ю.Милюкова, В.Ф.Тишкин

**Численный метод решения
уравнения теплопроводности на
треугольных сетках на основе
многосеточного метода**

Москва — 2011

Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф.

Численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках на основе многосеточного метода

Предлагается новый численный метод решения уравнений параболического типа на треугольных сетках на основе многосеточного метода. Расчеты модельных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности показали хорошую точность метода. Использование предложенного метода для решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности позволяет существенно уменьшить объем вычислений по сравнению с их решением по неявной схеме на подробной сетке и по явной схеме на подробной сетке, в которой временной шаг мал.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, многосеточные методы, точность численного метода

Milyukova O.Yu., Tishkin V.F.

A numerical method for the solution of heat conduction equation on triangular grids using the multigrid techniques

A new numerical method for the solution of parabolic equations on triangular grids based on the use of multigrid techniques is proposed. Numerical results obtained for model initial-boundary problems for heat conduction equation have demonstrated good accuracy of the method. The use of the proposed method for the solution of the heat conduction equation make it possible to reduce considerably the computational costs as compared either to the solution with the use of the fully implicit scheme on the fine grid or to the solution using the explicit scheme with a small time step-size.

Key words: parabolic type equations, multigrid methods, accuracy of numerical methods.

Оглавление

1. Введение.....	4
2. Алгоритм нового метода решения уравнений диффузионного типа.....	4
3. Результаты расчетов.....	11
Объем препринта.....	16

1. Введение

При численном моделировании многих задач математической физики, например, задач газовой динамики, гидродинамики, необходимо учитывать диффузионные процессы, а значит нужно решать уравнения параболического типа. Использование явных схем для аппроксимации параболических уравнений приводит к жесткому ограничению на шаг по времени для сохранения устойчивости [1,2] и, следовательно, к очень большому времени расчетов. Применение неявных схем снимает это ограничение, однако трудоемкость решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при этом, может сделать невыгодным их использование. Заметим, что применение многосеточных методов [3,4] в классическом варианте в ряде случаев также может быть связано с большой арифметической работой и не дать существенного выигрыша по сравнению с вычислением по явным схемам. Поэтому необходима разработка новых численных алгоритмов решения параболических уравнений.

В работах [5-7] предложены эффективные алгоритмы решения параболических уравнений на ортогональных сетках, основанные на использовании двухсеточного метода. С помощью теоретического и численного исследования на примере модельных задач для уравнения теплопроводности показано, что методы, определяемые этими алгоритмами, обладают устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Схемы решения задачи методами [6,7], в отличие от схем [5,6], консервативны. Предложенные в [5-8] алгоритмы позволяют существенно уменьшить объем арифметической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке.

В работах [9,10] предлагается новый численный метод решения уравнений параболического типа на ортогональных сетках, основанный на использовании L -сеточного метода. При этом L таково, что $h_{x,L}^2 = o(\tau)$, $h_{y,L}^2 = o(\tau)$, $h_{z,L}^2 = o(\tau)$, где $h_{x,L}$, $h_{y,L}$, $h_{z,L}$ - шаги по пространству на самой грубой сетке, τ - шаг по времени. При решении начально-краевой задачи для параболического уравнения с помощью нового метода на каждом временном слое осуществляется всего одна итерация многосеточного цикла, а на этапах сглаживания на каждой сетке – одна или несколько итераций. На примере двумерной модельной задачи для уравнения теплопроводности доказано, что предложенный метод позволяет получить решение с тем же порядком точности, что по чисто неявной схеме. расчеты модельных задач с непрерывными и разрывными коэффициентами показали хорошую точность метода. Показано, что использование предложенного метода позволяет существенно уменьшить объем арифметической работы по сравнению с решением задачи как по неявной схеме, так и по явной схеме на подробной сетке, в которой временной шаг мал. Предложен способ распараллеливания алгоритма созданного нового метода.

В настоящей работе предлагается новый численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках. Метод основан на использовании многосеточного метода. При этом используются L сеток, где L удовлетворяет условиям, аналогичным сформулированным для случая ортогональных сеток [9,10]. Для нахождения решения на каждом новом временном слое осуществляется всего одна итерация многосеточного цикла и одна или несколько сглаживающих итераций. Предлагаются специальные способы вычисления ограничения невязки на более грубую сетку и интерполяции поправки на более подробную сетку. Расчеты модельных задач с постоянными коэффициентами показали, что предложенный метод обладает устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке.

2. Алгоритм нового метода решения уравнений диффузионного типа

Построение и исследование алгоритма нового метода решения уравнений диффузионного типа на основе многосеточного метода проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} &= \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + f, (x, y, t) \in G, 0 < t \leq \bar{T}, \\ T(x, y, t) &= g(x, y, t) \text{ при } (x, y) \in \gamma, 0 \leq t \leq \bar{T}, \\ T(x, y, 0) &= T_0(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где C_v - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, ρ - плотность, κ - коэффициент теплопроводности, T - температура в точке (x, y) в момент времени t , f - плотность тепловых источников, γ - граница области расчета, $g(x, y, t), T_0(x, y)$ - заданные функции. Область $G \cup \gamma$ - произвольная односвязная. В области $G \cup \gamma$ введем треугольную сетку $\bar{\omega}_p^1 = \{P_i^1 = (x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, содержащую внутренние и граничные точки области G . Обозначим ω_p^1 множество внутренних узлов сетки. На $\bar{\omega}_p^1$ построим триангуляцию $T(\bar{\omega}_p^1) = \{T_m^1 = \Delta(P_{i_m}^1, P_{j_m}^1, P_{k_m}^1), P_{i_m}^1, P_{j_m}^1, P_{k_m}^1 \in \bar{\omega}_p^1, m = 1, 2, \dots, M\}$. Пусть $T(\bar{\omega}_p^1)$ содержит все узлы $\bar{\omega}_p^1$; все треугольники T_m^1 имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждой точке $P_i^1 \in \bar{\omega}_p^1$ определим множество всех треугольников, вершинами которых она является и определим его шаблоном в точке i . В каждом из треугольников шаблона определим точку пересечения медиан (центр масс треугольника) и середины сторон треугольников. Барицентрический контрольный объем равен площади многоугольника, образованного отрезками, соединяющими центры масс треугольников с серединами сторон, изображен на

рис. 1. Обозначим Ψ_i^1 множество вершин треугольников шаблона узла i , не совпадающих с узлом i .

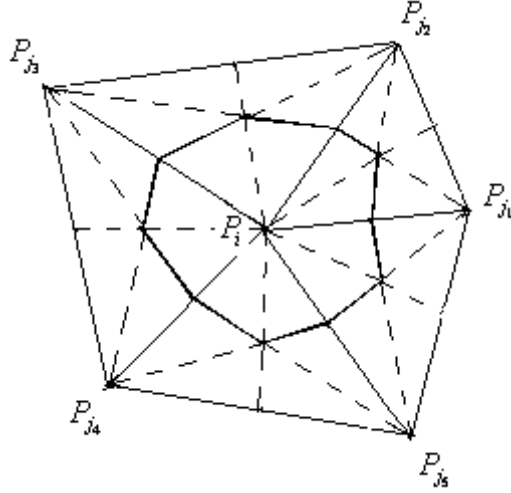


Рис. 1. Схема определения барицентрического объема.

Для аппроксимации задачи (1) будем использовать чисто неявную схему:

$$(C_v \rho)_i \frac{u_i^{im} - \tilde{u}_i^{im}}{\tau} = \sum_{j_s \in \Psi_i^1} a_{ij_s}^1 u_{j_s}^{im} - a_{ii}^1 u_i^{im} + \Phi_i, \quad i \in \omega_p^1, \\ u_i^{im} = g(x_i, y_i, t^{n+1}), \quad i \in \bar{\omega}_p^1 \setminus \omega_p^1, \\ u_i^0 = T_0(x_i, y_i), \quad i \in \bar{\omega}_p^1, \quad (2)$$

где $u_i^{im}, \tilde{u}_i^{im}$ - решения задачи на $n+1$ -вом и n -том временных слоях, τ - шаг по t , $a_{ij_s}^1$ - коэффициенты, полученные в результате аппроксимации выражения $\frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \frac{\partial T}{\partial y}$ на подробную треугольную сетку.

Схема (2) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения на $n+1$ слое по времени:

$$A_h u^{n+1} = f_h. \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) можно производить многосеточным методом [3,4]. При этом кроме сетки $\bar{\omega}_p^1$ и триангуляции $T(\bar{\omega}_p^1)$ вводятся более грубые сетки $\bar{\omega}_p^k$ с триангуляцией $T(\bar{\omega}_p^k)$, удовлетворяющей приведенным выше для $T(\bar{\omega}_p^1)$ условиям, причем $\bar{\omega}_p^{k+1} \in \bar{\omega}_p^k$, $k=1,2,\dots,L-1$, L - число используемых сеток. Будем предполагать, что для каждого $k=1,2,\dots,L-1$ узлы сетки $\bar{\omega}_p^k$, несовпадающие с узлами сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, находятся в середине ребер элементарных треугольников из триангуляции $T(\bar{\omega}_p^{k+1})$. Обозначим $h_k^2 \approx S / N_k$ -

среднее значение барицентрического объема для сетки $\bar{\omega}_p^k$, S - площадь области расчета, N_k число узлов сетки $\bar{\omega}_p^k$, $N_1 = N$.

Основная идея многосеточного метода состоит в следующем. На каждой итерации внешнего цикла для решения исходного уравнения (3) на первоначальной сетке $\bar{\omega}_p^1$ находится u_h^s - приближенное решение исходного уравнения после s итераций, причем основной задачей при этом является подавление высокочастотных для сетки $\bar{\omega}_p^1$ гармоник (сглаживание). Точное решение уравнения (3): $u_h = u_h^s - \delta_h^s$, можно определить при известном значении погрешности δ_h^s , которая удовлетворяет уравнению $A_h \delta_h^s = r_h$, где $r_h = A_h u_h^s - f_h$. δ_h^s будем находить приближенно. Для этого переходим на более грубую сетку $\bar{\omega}_p^2$ и находим решение уравнения

$$A_H \Delta_H = R_H, \quad (4)$$

где $H = h_2$, A_H -аппроксимация A_h на сетку $\bar{\omega}_p^2$, R_H -ограничение или проекция невязки r_h на сетку $\bar{\omega}_p^2$. Далее, интерполируя функцию Δ_H на сетку $\bar{\omega}_p^1$, определяем значение поправки δ_h и затем вычисляем $u_h = u_h^s - \delta_h$. Для решения уравнения (4) в свою очередь применяется изложенный выше подход, и так далее. На последней используемой сетке L -того уровня уравнение $A_{h_L} \Delta_{h_L} = R_{h_L}$ решается точно или с помощью какого-либо итерационного метода [1112]. Процесс продолжается до сходимости итераций внешнего цикла.

Для решения уравнения (3) в настоящей работе в отличие от классического многосеточного метода будем производить только одну итерацию внешнего цикла многосеточного метода и одну или несколько сглаживающих итераций. В результате процесс нахождения решения на следующем временном слое можно представить в виде V-цикла, изображенного на рис. 2, который выполняется только один раз.

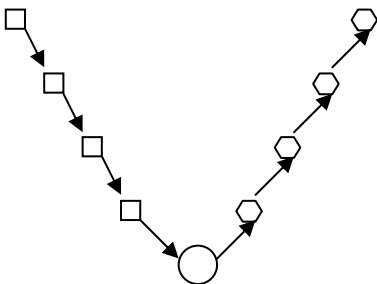


Рис. 2. Схематическое изображение алгоритма определения решения на следующем временном слое

На рис. 2 используются обозначения: \square - одна или несколько простых сглаживающих итераций, в результате получаем u_h^{sm} , $r_h = r_{h_1}$ или $\Delta_{h_k}^{sm}$, r_{h_k} при $1 < k < L$, \downarrow - проекция невязки r_{h_k} с сетки k -того уровня на сетку $k+1$ -вого

уровня, получаем $R_{h_{k+1}}$, где $k=1, \dots, L-1$, \bigcirc - решение уравнения $A_{h_L} \Delta_{h_L} = R_{h_L}$ на самой грубой сетке, \uparrow - интерполяция поправки $\Delta_{h_{k+1}}$ с сетки $k+1$ -вого уровня на сетку k -того уровня, получаем $\tilde{\Delta}_{h_k}$, $\delta_h = \tilde{\Delta}_{h_1}$, где $k=L-1, \dots, 1$, \bigcirc - вычисление поправки Δ_{h_k} на сетке k -го уровня ($k=L-1, \dots, 2$) или решения u^{n+1} на новом временном слое.

Будем использовать L сеток, где

$$L < k_0, \quad k_0 - \text{максимальное значение } k, \text{ при котором } h_k^2 \leq \tau,$$

$$\text{причем } h_L^2 = o(\tau). \quad (5)$$

В случае сильно измельчающихся сеток в качестве k_0 будем использовать максимальное значение k , при котором $\bar{h}_k^2 \leq \tau$, причем $\bar{h}_L^2 = o(\tau)$, где \bar{h}_k^2 - максимальное значение барицентрического объема сетки k -того уровня.

Рассмотрим, как производятся вычисления на каждом этапе предлагаемого алгоритма. На этапах сглаживания для решения уравнения на сетке k -того уровня осуществляется одна или несколько итераций метода Якоби [11]:

$$\Delta_{h_k}^{s+1} = \Delta_{h_k}^s - \sigma D_{h_k}^{-1} (A_{h_k} \Delta_{h_k}^s - F_{h_k}), \quad (6)$$

где $F_{h_1} = C_v \rho / \tau + \Phi$, $\Delta_{h_1}^0 = u^n$ и $F_{h_k} = R_{h_k}$, $\Delta_{h_k}^0 \equiv 0$ для $1 < k < L$, $0 < \sigma \leq 1$ - параметр релаксации. Индекс h_k означает, что сеточная функция и матрица относятся к сетке k -того уровня, D_{h_k} - диагональная часть матрицы A_{h_k} . Формулы (6) при $k=1$ определяют оператор $\tilde{S}_1(\Phi): H_1 \rightarrow H_1$, где H_1 - пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_p^1$. Тогда $u_h^{sm} = \tilde{S}_1(\Phi)u^n$. Формулы (6) при $1 < k < L$ определяют оператор $\tilde{S}_k: H_k^0 \rightarrow H_k^0$, где H_k^0 - пространство сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}_p^k$ и обращающихся в 0 на границе области расчета, $\Delta_{h_k}^{sm} = \tilde{S}_k R_{h_k}$. Определим оператор $A_k: H_k^0 \rightarrow H_k^0$ ($k=2, \dots, L$) следующим образом:

$$(A_k \Delta)_i = (C_v \rho)_i \frac{\Delta_i}{\tau} - \sum_{j \in \Psi_i^k} a_{ij}^k \Delta_j + a_{ii}^k \Delta_i,$$

где Ψ_i^k - множество узлов в вершинах треугольников шаблона узла i , несовпадающих с i , на сетке ω_p^k , a_{ij}^k - коэффициенты, полученные в результате аппроксимации оператора $\frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \frac{\partial}{\partial y}$ на сетку ω_p^k . Тогда $r_{h_k} = A_k \Delta_{h_k}^{sm} - R_{h_k}$.

Аналогичным образом определим оператор $A_1: H_1 \rightarrow \bar{H}_1$, где \bar{H}_1 - пространство сеточных функций, заданных на сетке ω_p^1 . Можно считать, что $A_1: H_1 \rightarrow H_1^0$. Тогда $r_h = A_1 u_h^{sm} - \tilde{D}_1 u^n - \Phi$, где оператор \tilde{D}_1 определяется по формуле $(\tilde{D}_1 u^n)_i = [(C_v \rho)_i / \tau] u_i^n$.

Обозначим $\mu^k(i)$ -номер узла на сетке $\bar{\omega}_p^{k+1}$, имеющего номер i на сетке $\bar{\omega}_p^k$. Положим $\mu^k(i) = 0$, если узел i не является узлом сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$. На этапе проекции или ограничения невязки на более грубую сетку вычисления в настоящей работе проводятся по формуле

$$(R_{h_{k+1}})_{\mu^k(i)} = \begin{cases} \frac{1}{S_{\mu^k(i)}^{k+1}} \left\{ (r_{h_k})_i S_i^k + \sum_{j \in \Psi_i^k} (r_{h_k})_j \left[\frac{S_{\Delta P_i^k P_j^k P_{j_1}^k}}{3} + \frac{S_{\Delta P_i^k P_j^k P_{j_2}^k}}{3} + \frac{S_{\Delta P_j^k P_{j_1}^k P_{j_3}^k}}{6} + \frac{S_{\Delta P_j^k P_{j_2}^k P_{j_4}^k}}{6} \right] \right\}, & (7) \\ 0, i \in \bar{\omega}_p^k \setminus \omega_p^k, \end{cases}$$

где S_i^k - величина барицентрического объема узла i на сетке $\bar{\omega}_p^k$, $S_{\Delta P_i^k P_{j_1}^k P_{j_2}^k P_{j_3}^k}$ - площадь треугольника с вершинами в точках $P_i^k, P_{j_1}^k, P_{j_2}^k, P_{j_3}^k$. В формуле (7) $P_{j_1}^k, P_{j_2}^k$ - вершины элементарных треугольников $T(\bar{\omega}_p^k)$, находящиеся напротив стороны $P_i^k P_j^k$; $P_{j_3}^k, P_{j_4}^k$ - вершины элементарных треугольников $T(\bar{\omega}_p^k)$, находящиеся напротив сторон $P_j^k P_{j_1}^k$ и $P_j^k P_{j_2}^k$ в $\Delta P_j^k P_{j_1}^k P_{j_3}^k$ и $\Delta P_j^k P_{j_2}^k P_{j_4}^k$, причем $j_3 \neq i, j_4 \neq i$ (см. рис. 3). Формула (7) определяет оператор $R_k : H_k^0 \rightarrow H_{k+1}^0$. Итак $R_{h_{k+1}} = R_k r_{h_k}$.

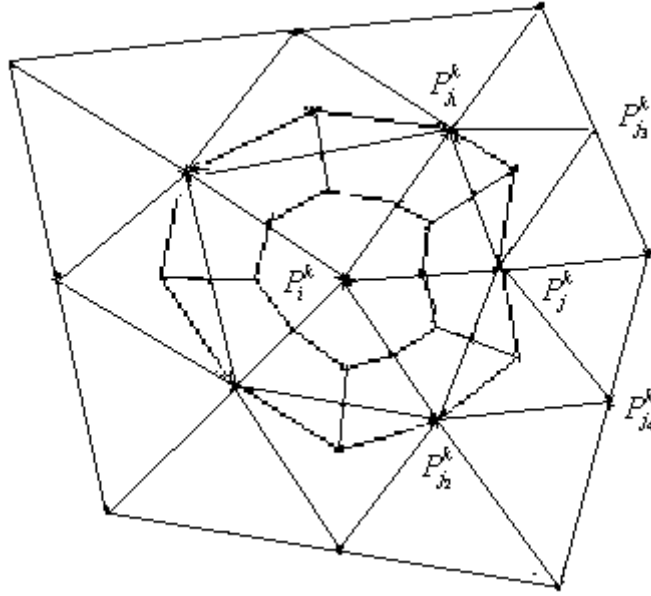


Рис. 3. Изображение узлов сетки $\bar{\omega}_p^k$, значения в которых используются при вычислении $(R_{h_{k+1}})_{\mu^k(i)}$.

Поправка $\Delta_{h_{k+1}}$ интерполируется с сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$ на более подробную сетку $\bar{\omega}_p^k$ следующим образом:

$$(\tilde{\Delta}_{h_k})_i = \begin{cases} (\Delta_{h_{k+1}})_{\mu^k(i)}, \mu^k(i) \neq 0, \\ 0.5 \bar{g}_i((\Delta_{h_{k+1}})_{m_1}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_2}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_3}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_4}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_5}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_6}) + \\ 0.5 \bar{g}'_i((\Delta_{h_{k+1}})_{m_1}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_2}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_3}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_4}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_7}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_8}), i \in \omega_p^k, \mu^k(i) = 0, \\ 0, i \in \bar{\omega}_p^k \setminus \omega_p^k, \end{cases} \quad (8)$$

где функции $\bar{g}_i((\Delta_{h_{k+1}})_{m_1}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_2}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_3}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_4}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_5}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_6})$ и $\bar{g}'_i((\Delta_{h_{k+1}})_{m_1}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_2}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_3}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_4}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_7}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_8})$ задают интерполяцию в узле i на сетку $\bar{\omega}_p^k$ по значениям поправки на сетке $\bar{\omega}_p^{k+1}$ в узлах $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ и $m_1, m_2, m_3, m_4, m_7, m_8$. Здесь m_1, m_2 - номера узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, соответствующие концам отрезка $P_{m_1}^{k+1} P_{m_2}^{k+1}$, в середине которого расположен узел с номером i сетки $\bar{\omega}_p^k$ (см. рис.4), m_3, m_4 - номера узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, соответствующие вершинам $\Delta P_{m_1}^{k+1} P_{m_2}^{k+1} P_{m_3}^{k+1}$ и $\Delta P_{m_1}^{k+1} P_{m_2}^{k+1} P_{m_4}^{k+1}$, находящимся напротив стороны $P_{m_1}^{k+1} P_{m_2}^{k+1}$, m_5, m_6 - номера узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, соответствующие вершинам $\Delta P_{m_5}^{k+1} P_{m_2}^{k+1} P_{m_3}^{k+1}$ и $\Delta P_{m_1}^{k+1} P_{m_3}^{k+1} P_{m_6}^{k+1}$, находящимся напротив сторон $P_{m_2}^{k+1} P_{m_3}^{k+1}$ и $P_{m_1}^{k+1} P_{m_3}^{k+1}$ соответственно, причем $m_5 \neq m_1, m_6 \neq m_2$. m_7, m_8 - номера узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, соответствующие вершинам $\Delta P_{m_7}^{k+1} P_{m_2}^{k+1} P_{m_4}^{k+1}$ и $\Delta P_{m_1}^{k+1} P_{m_4}^{k+1} P_{m_8}^{k+1}$, находящимся напротив сторон $P_{m_2}^{k+1} P_{m_4}^{k+1}$ и $P_{m_1}^{k+1} P_{m_4}^{k+1}$ соответственно, причем $m_7 \neq m_1, m_8 \neq m_2$.

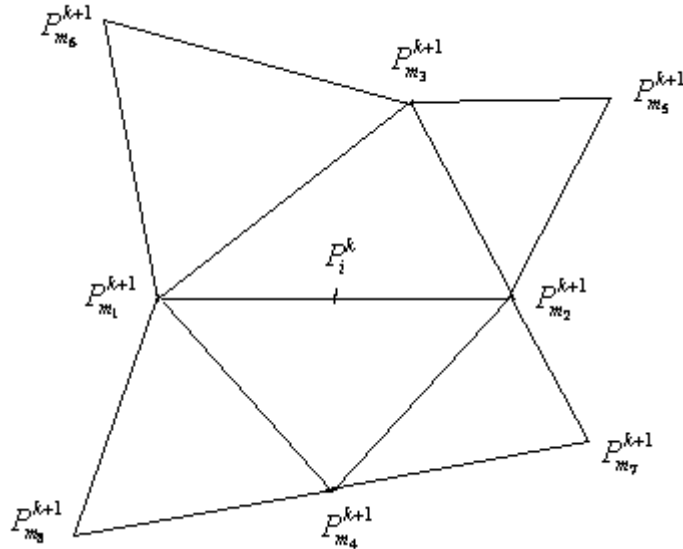


Рис. 4. Изображение узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$, значения в которых используются при вычислении интерполяции поправки в узле i сетки $\bar{\omega}_p^k$.

Интерполяция осуществляется по формулам:

$$\bar{g}_i = b_0 + b_1 x_i^k + b_2 y_i^k + b_3 (x_i^k)^2 + b_4 (y_i^k)^2 + b_5 x_i^k y_i^k, \quad (9)$$

$$\bar{g}'_i = b'_0 + b'_1 x_i^k + b'_2 y_i^k + b'_3 (x_i^k)^2 + b'_4 (y_i^k)^2 + b'_5 x_i^k y_i^k, \quad (10)$$

где x_i^k, y_i^k - координаты узла i сетки $\bar{\omega}_p^k$. Коэффициенты $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ определяются из решения системы 6 уравнений с 6 неизвестными

$$(\Delta_{h_{k+1}})_{m_s} = b_0 + b_1 x_{m_s}^{k+1} + b_2 y_{m_s}^{k+1} + b_3 (x_{m_s}^{k+1})^2 + b_4 (y_{m_s}^{k+1})^2 + b_5 x_{m_s}^{k+1} y_{m_s}^{k+1}, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

где $x_{m_s}^{k+1}, y_{m_s}^{k+1}$ - координаты узла с номером m_s сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$. Коэффициенты $b'_0, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5$ определяются из решения системы 6 уравнений с 6 неизвестными

$$(\Delta_{h_{k+1}})_{m_s} = b'_0 + b'_1 x_{m_s}^{k+1} + b'_2 y_{m_s}^{k+1} + b'_3 (x_{m_s}^{k+1})^2 + b'_4 (y_{m_s}^{k+1})^2 + b'_5 x_{m_s}^{k+1} y_{m_s}^{k+1}, \quad s = 1, 2, 3, 4, 7, 8.$$

Заметим, что если узел i является приграничным, то узлов с номерами m_5, m_6, m_7, m_8 может не существовать в сетке $\bar{\omega}_p^{k+1}$. Тогда узел с номером m_5 вне области расчета определяется как узел, расположенный симметрично узлу с номером m_1 относительно оси симметрии, проходящей через точки $P_{m_2}^{k+1}, P_{m_3}^{k+1}$. При этом $(\Delta_{h_{k+1}})_{m_5} = -(\Delta_{h_{k+1}})_{m_1}$. Аналогично определяется расположение узлов с номерами m_6, m_7, m_8 и значения функции $(\Delta_{h_{k+1}})_{m_6}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_7}, (\Delta_{h_{k+1}})_{m_8}$ в них, если эти узлы не принадлежат сетке $\bar{\omega}_p^{k+1}$.

Интерполяция поправки на более подробную сетку, определяемая в (8), осуществляется оператором $P_k : H_{k+1}^0 \rightarrow H_k^0$, $\tilde{\Delta}_{h_k} = P_k \Delta_{h_{k+1}}$, причем $\tilde{\Delta}_{h_1} = \delta_h$.

Вычисление поправки на сетке k -го уровня происходит по формуле

$$\Delta_{h_k} = \Delta_{h_k}^{sm} - \tilde{\Delta}_{h_k}, \quad k=2, \dots, L-1,$$

а вычисление решения на новом временном слое - по формуле

$$u^{n+1} = u_h^{sm} - \delta_h.$$

Решение уравнения $A_{h_L} \Delta_{h_L} = R_{h_L}$ осуществляется прямым или итерационным методом [11].

Нетрудно показать, что при использовании L -сеточного метода

$$u^{n+1} = \tilde{S}_1(\Phi)u^n - P_1 M_2 R_1 r_h, \quad \text{где } r_h = (A_1 \tilde{S}_1(\Phi) - \tilde{D}_1)u^n - \Phi,$$

$$M_k = \tilde{S}_k - P_k M_{k+1} R_k (A_k \tilde{S}_k - E), \quad k=2, 3, \dots, L-1, \quad M_L = A_L^{-1}.$$

Число арифметических действий в новом методе на каждом временном слое на каждой сетке, кроме последней, примерно $125.5N_k$, если число соседей каждого узла 6. Следовательно, число арифметических действий в новом методе на каждом временном слое на всех сетках, кроме последней, меньше $168N$. При достаточно большом L число арифметических действий, необходимых на решение уравнения на самой грубой, сетке $o(N)$. Следовательно, при достаточно большом L и достаточно большом N число арифметических действий в новом методе на каждом временном слое меньше, чем при решения системы уравнений неявной схемы каким либо прямым или итерационным методом.

Число арифметических действий на каждом временном слое при использовании явной схемы примерно $16N$, если число соседей каждого узла 6. Это всего в 10.5 раз меньше, чем при использовании предложенного метода в случае достаточно больших L . С другой стороны, как показывают теоретические исследования [7,9,10], проведенные для модельной задачи на ортогональной сетке, и расчеты модельных задач в случае треугольных сеток, приведенные ниже, предложенный метод обладает устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Это позволяет сильно увеличить шаг по времени по сравнению с решением по явной схеме и, благодаря этому, сильно уменьшить время решения всей задачи в целом.

3. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов двумерных модельных задач. Решение системы уравнений для поправки на самой грубой сетке, а также системы уравнений неявной схемы на подробной сетке (2) осуществлялось методом сопряженных градиентов с предобуславливанием Якоби [11]. При этом завершение итерационного процесса осуществляется при выполнении условия $\|A_{h_k} v^l - F_{h_k}\|_{L_2} < \varepsilon$, где v^l - решение на итерации с номером l . $v^0 = u^n$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $F_{h_k} = f_h$, $k=1$ в случае решения системы уравнений неявной схемы на подробной сетке. $v^0 \equiv 0$, $\varepsilon = 10^{-10}$, $k=L$, $F_{h_L} = R_{h_L}$ в случае решения системы уравнений $A_{h_L} \Delta_{h_L} = R_{h_L}$. Для вычисления коэффициентов в формулах (9), (10) использовался метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента [11].

В качестве задачи 1 рассматривалась задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in G, \quad 0 < t \leq \bar{T},$$

$$u(x, y, 0) = 1 + 2 \sin(\pi(y+1)/\sqrt{3}) \cos(\pi x) + \sin(2\pi(y+1)/\sqrt{3}), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y, t) = 1, \quad (x, y) \in \gamma, \quad 0 \leq t \leq \bar{T},$$

область расчета $G \cup \gamma$ была равносторонним треугольником с вершинами в точках $(-1, -1), (1, 1), (0, \sqrt{3} - 1)$. Точным решением задачи была функция

$$u(x, y, t) = 1 + \exp(-4\pi^2 t / 3) [2 \sin(\pi(y+1)/\sqrt{3}) \cos(\pi x) + \sin(2\pi(y+1)/\sqrt{3})]. \quad \text{В}$$

области расчета вводилась равномерная треугольная сетка. Предполагалось, что множество узлов сетки $\bar{\omega}_p^k$ состоит из множества узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$ и множества середин сторон элементарных треугольников триангуляции $T(\bar{\omega}_p^{k+1})$.

Предполагалось, что $0 < t \leq \bar{T} = 0.5$. Задача 1 решалась предложенным методом с использованием L сеток, где L удовлетворяло условию (5). На всех сетках, кроме последней, делалась одна сглаживающая итерация, $\sigma = 0.5$. Сравнение решения u_i , полученного предложенным методом, проводилось с точным решением и с решением по чисто неявной схеме на подробной сетке. В таблицах

1-3 приведены значения

$$\alpha_1 = \max_t (\max_{i \in \omega_p^1} |u_i - u_i^{imp}| / \max_{i \in \omega_p^1} |u_i^{imp}|),$$

$$\alpha_2 = \max_t (\max_{i \in \omega_p^1} |u_i - u_i^T| / \max_{i \in \omega_p^1} |u_i^T|),$$

$$\alpha_3 = \max_t (\max_{i \in \omega_p^1} |u_i^{imp} - u_i^T| / \max_{i \in \omega_p^1} |u_i^T|),$$

соответствующие различным значениям $K = \tau / h_1^2$, L .

Таблица 1. Значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, полученные при решении задачи 1 при $K=10$.

	N=8385		N=33151		N=131841	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
L=2	$3,2 \cdot 10^{-4}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$8,2 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-5}$	$5,07 \cdot 10^{-4}$
Неявная схема, α_3	$7,71 \cdot 10^{-3}$		$1,94 \cdot 10^{-3}$		$4,86 \cdot 10^{-4}$	

Таблица 2. Значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, полученные при решении задачи 1 при $K=100$.

	N=8385		N=33151		N=131841	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
L=2	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$7,27 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$1,89 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$
L=3			$3,9 \cdot 10^{-4}$	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$4,88 \cdot 10^{-3}$
Неявная схема, α_3	$7,14 \cdot 10^{-2}$		$1,88 \cdot 10^{-2}$		$4,77 \cdot 10^{-3}$	

Таблица 3. Значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, полученные при решении задачи 1 при $K=500$.

	N=33151		N=131841	
	α_1	α_2	α_1	α_2
L=2	$7,2 \cdot 10^{-5}$	$8,77 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$2,34 \cdot 10^{-2}$
L=3	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$8,81 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$2,35 \cdot 10^{-2}$
L=4			$4,2 \cdot 10^{-4}$	$2,38 \cdot 10^{-2}$
Неявная схема, α_3	$8,77 \cdot 10^{-2}$		$2,34 \cdot 10^{-2}$	

В качестве задачи 2 рассматривалась задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq \bar{T},$$

$$u(x, y, 0) = 1 + 32xy(1-x)(1-y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \bar{T}.$$

В области расчета вводилась неструктурированная регуляризованная треугольная сетка со сгущением к центру области в 5 раз, построение которой производилось с помощью иерархического алгоритма декомпозиции графов [12]. При построении регуляризованной сетки накладывалось дополнительное условие: 6 соседних узлов у максимально возможного числа внутренних узлов. На рис. 5 изображена самая грубая сетка, содержащая $N=7899$ узлов.

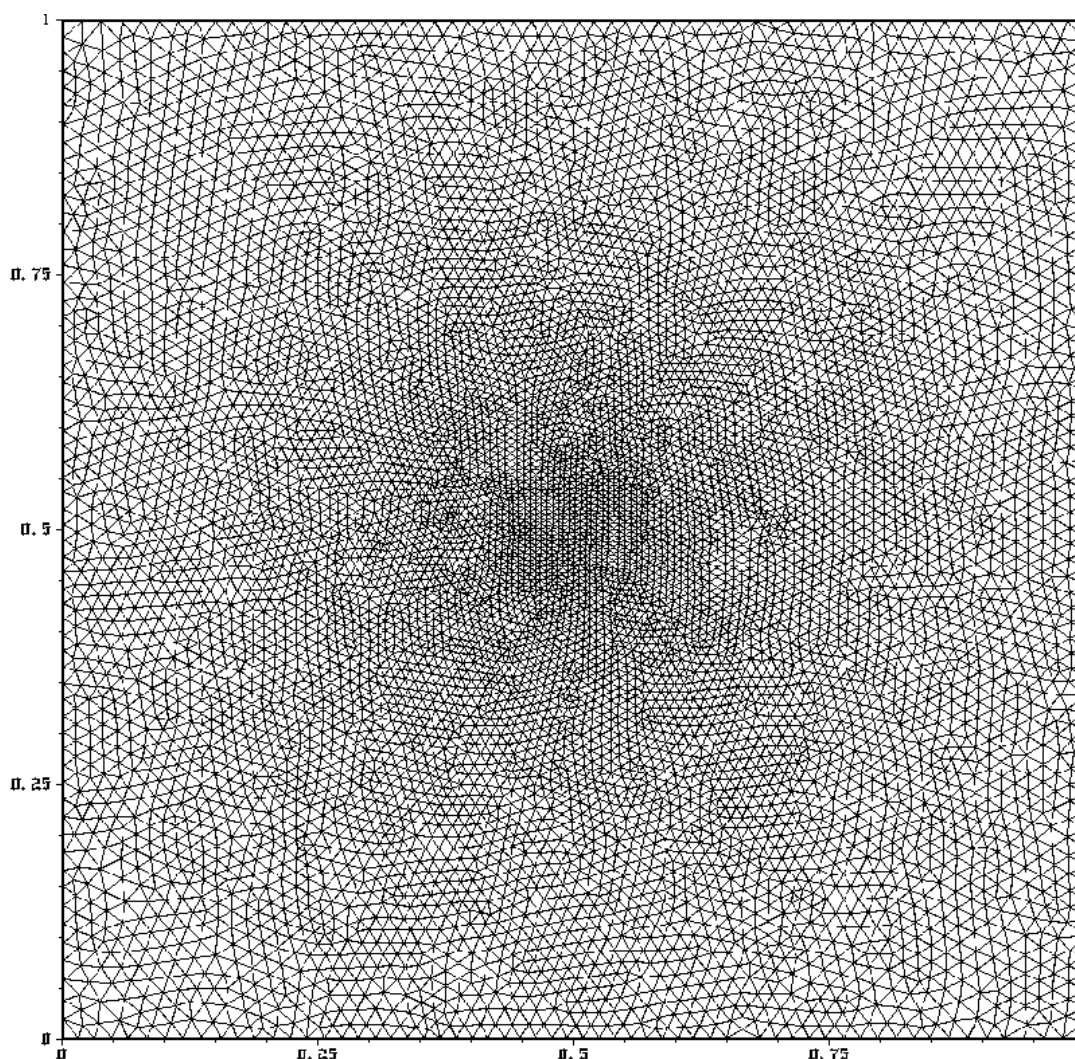


Рис. 5. Изображение самой грубой сетки, содержащей $N=7899$ узлов, в задаче 2.

Предполагалось, что множество узлов сетки $\bar{\omega}_p^k$ состоит из множества узлов сетки $\bar{\omega}_p^{k+1}$ и множества середин сторон элементарных треугольников триангуляции $T(\bar{\omega}_p^{k+1})$. Для определения элементов матриц $A_{h_k}, k=1, \dots, L$, использовался метод Рунге [13]. Предполагалось, что $0 < t \leq \bar{T} = 0.3$. Задача 2 решалась предложенным методом с использованием L сеток, где L удовлетворяло условию (5). На всех сетках, кроме последней, делалась одна сглаживающая итерация, $\sigma = 0.5$. Сравнение решения, полученного предложенным методом, проводилось с решением по чисто неявной схеме на подробной сетке. В таблицах 4-6 приведены значения $\alpha_1 = \max_t (\max_{i \in \omega_p^1} |u_i - u_i^{imp}| / \max_{i \in \omega_p^1} |u_i^{imp}|)$, соответствующие различным значениям $K = \tau / h_1^2$, слева указано число используемых сеток.

Таблица 4. Значения α_1 , полученные при решении задачи 2 при $K=100$.

	N=32313	N=128769	N=514113
L=2	$9,97 \cdot 10^{-5}$	$2,65 \cdot 10^{-5}$	$0,672 \cdot 10^{-5}$
L=3		$1,19 \cdot 10^{-4}$	$3,42 \cdot 10^{-5}$

Таблица 5. Значения α_1 , полученные при решении задачи 2 при $K=500$.

	N=32313	N=128769	N=514113
L=2	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$2,63 \cdot 10^{-5}$	$0,656 \cdot 10^{-5}$
L=3		$1,25 \cdot 10^{-4}$	$3,28 \cdot 10^{-5}$
L=4			$1,27 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6. Значения α_1 , полученные при решении задачи 2 при $K=1000$.

	N=128769	N=514113
L=2	$2,63 \cdot 10^{-5}$	$0,653 \cdot 10^{-5}$
L=3	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$3,26 \cdot 10^{-5}$
L=4		$1,3 \cdot 10^{-4}$

Результаты расчетов задач 1,2 продемонстрировали устойчивость и точность метода. Как видно из таблиц 1-6, решения задач 1,2 предложенным методом очень слабо отличаются от их решения по чисто неявной схеме на подробной сетке. С ростом N относительная погрешность по сравнению с решением по неявной схеме убывает, а с ростом L - медленно растет.

Сравнение решения задачи 1 предложенным методом с точным решением и решением по чисто неявной схеме показало, что точность решения задачи 1 предложенным методом очень близка к точности решения по чисто неявной схеме и была примерно $O(\tau + h^2)$. При этом отличие от решения по чисто неявной схеме примерно порядка $O(h_L^2)$.

Вывод

Предложен новый эффективный численный метод решения уравнения теплопроводности на треугольных сетках на основе использования многосеточных методов. На примере модельных задач численно показано, что предложенный метод обладает устойчивостью и точностью, присущими чисто неявной схеме на подробной сетке. Созданный новый метод позволяет существенно уменьшить объем арифметической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке, уменьшить время расчета всей эволюционной задачи по сравнению с использованием явной схемы.

Список литературы

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. <http://phys.spb.ru/Stud/Books/index.php>
3. Федоренко Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. N5. С. 922-927.
4. Бахвалов Н.С. О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. N6. С. 101-135.
5. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Один численный алгоритм для уравнений диффузионного типа на основе многосеточных методов // Матем. модел., 2007. Т.19. № 4. С.71–89.
6. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Использование многосеточных методов для решения уравнений диффузионного типа // ВАНТ, серия: Матем. модел. физ. проц. 2008 . вып. 1. С. 4 – 19.
7. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный алгоритм решения диффузионных уравнений на основе многосеточных методов. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009.Т.49. N 3. С.518-541.

8. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов // "Труды Средневолжского математического общества", Саранск, 2008, Т. 10, №2. С. 21 – 44.
9. Ладонкина М.Е., Милюкова О.Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточного метода. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, N8, С. 1438-1461.
10. Ladonkina M.E., Milyukova O.Yu., Tishkin V.F., Method for the numerical solution of parabolic equations on detailed spatial grids based on multilevel techniques, in: Numerical geometry, grid generation, and high performance computing (Yu.G.Evtushenko, V.A.Garanzha, M.K.Kerimov, eds.), Procs. Int. Conf. NUMGRID2010, Moscow, 11-13 Oct.2010, pp.~110-116.
11. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. PWS Publishing Co., Int. Tompson Publ. Co. 1995. 447P.
12. Тхир А.В. Метод продвинутого фронта для построения неструктурированных сеток. // В кн. Численные методы и приложения под ред. Ю.А. Кузнецова. Институт вычислительной математики РАН. 1995 .
13. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.// М: Наука. 1980. 534с.