



Пеньков В.И., [Овчинников М.Ю.](#),  
Иванов Д.С.

Комплексное исследование  
свойств гистерезисных  
стержней из магнитомягкого  
материала

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Иванов Д.С. Комплексное исследование свойств гистерезисных стержней из магнитомягкого материала // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 31. 40 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-31>

ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

В.И. Пеньков, Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников

**КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ  
ГИСТЕРЕЗИСНЫХ СТЕРЖНЕЙ  
ИЗ МАГНИТОМЯГКОГО МАТЕРИАЛА**

Москва

2011

**Комплексное исследование свойств гистерезисных стержней из магнитомягкого материала.** В.И. Пеньков, М.Ю. Овчинников, Д.С. Иванов. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, Москва, 40 страниц, 63 рисунка, библиография 5 наименований.

Работа посвящена экспериментальному определению свойств мягкомагнитных материалов, применяемых в системах ориентации малых спутников, и теоретическому обоснованию получаемых данных. Приводится оценка искажений, вносимых в форму гистерезисной петли интегрирующей  $RC$ -цепочкой. На основе классического решения задачи о линейном намагничивании бесконечно длинного стержня в переменном магнитном поле большие искажения величины коэрцитивной силы объясняются вихревыми токами в стержне. Предлагается приближенное решение задачи о нелинейном намагничивании бесконечно длинного стержня в переменном магнитном поле. Описаны результаты экспериментов, проведенных на стенде с применением генератора сигналов и цифровой обработки измерений. Оценивается достоверность полученных результатов.

**Ключевые слова:** гистерезисный стержень, магнитная катушка, кривая гистерезиса

**Comprehensive Study of Soft Magnetic Hysteresis Rod Properties,** V.I. Penkov, M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Ivanov, Preprint of KIAM RAS, Moscow, 40 Pages, 63 Figures, 5 References

Paper is purposed for experimental determination of the soft magnetic material properties which is used in small satellite attitude control system and for theoretical justification of the data obtained. Hysteresis curve form disturbances caused by RC-chain is investigated. Huge distortions of coercive force are accounted for by eddy currents in the rod. An approximate solution of the infinite long rod nonlinear magnetization inside variable magnetic field task is proposed. Results of experiments from laboratory facility are discussed. Reliability of results obtained is justified.

**Key words:** hysteresis rod, magnetic coil, hysteresis curve

## Введение. Постановка задачи

Магнитные гистерезисные стержни являются важными элементами пассивных систем ориентации малых спутников. Стержни, установленные на спутнике, создают демпфирующий момент для рассеяния кинетической энергии вращения спутника после отделения от носителя и приведения его в рабочее положение. Но одновременно с созданием демпфирующего момента они являются источником возмущений, которые ухудшают точность ориентации. Гистерезисные стержни прямоугольного или круглого сечения изготавливаются из магнитомягких материалов с высокой магнитной проницаемостью. Они имеют большое относительное удлинение  $\mu=100-300$ , малый коэффициент размагничивания  $N$  и способны существенно намагничиваться в магнитном поле Земли.

Магнитные характеристики стержней получаются расчетным путем. Авторам неизвестны работы, в которых магнитные характеристики стержней, типа примененных на спутниках *Munin*, ТНС-0, были бы подтверждены экспериментально. Разработка простой методики оперативного измерения магнитных характеристик таких стержней является важной задачей, поскольку знание реальных магнитных характеристик стержней позволит более уверенно судить о свойствах систем ориентации.

Имеется много способов измерения магнитных характеристик. Наиболее подходящим для оперативного контроля магнитных свойств представляется индукционный метод. Он основан на изменении магнитного состояния тела и замерах ЭДС, возникающей по закону электромагнитной индукции.

Вытянутое тело помещается в известное периодически меняющееся поле соленоида и по ЭДС, наведенной в измерительной катушке, определяется намагниченность тела. Далее будет рассматриваться этот способ.

Известно, что тело в виде эллипсоида с любым соотношением осей в однородном поле намагничивается однородно. Почти однородно намагничивается круглый цилиндр с большим отношением длины к диаметру. При анализе результатов измерений обычно пренебрегают неоднородностью намагничивания, если тела имеют форму близкую к сильно вытянутому цилиндру.

Одной из основных характеристик демпфирующего магнитного гистерезисного стержня является петля гистерезиса. С ее помощью можно оценить потери энергии, т.е. демпфирующие свойства стержня, магнитный момент, определяющий возмущающее воздействие, и другие важные характеристики.

Лабораторный стенд [1], состоящий из трансформатора, понижающего напряжение городской сети до 16 V, переменного сопротивления, многослойного соленоида, измерительной катушки и осциллографа, позволил получить некоторые результаты, в частности, оценить степень неоднородности намагничивания стержня по его длине и зависимость индуцированной ЭДС от положения стержня по отношению к магнитному полю Земли.

Добавление интегрирующей RC цепочки и одновременная подача напряжений с измерительного сопротивления и конденсатора на входы осциллографа

GRS-60, как принято в таких случаях, приводит к построению гистерезисной петли.

В начальном варианте соленоид имел длину 25см, диаметр 7.5мм, число витков 2342, измерительная катушка - длину 2см, диаметр 1.5см, число витков 1550. Частота изменения магнитного поля, создаваемого соленоидом, равна частоте городской электрической сети, т.е. 50Гц.

Отметим, что параллельно для контроля и ради некоторого удобства наряду с аналоговым интегрированием применялось и численное интегрирование. Попытка получения петель гистерезиса таким способом встретила трудности.

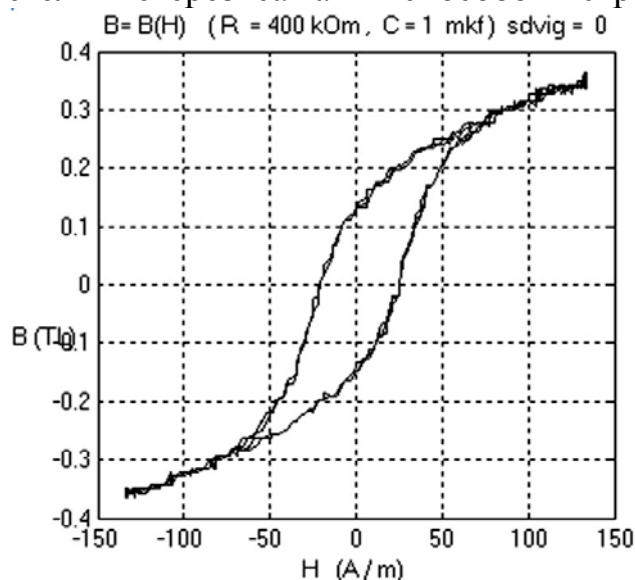


Рис.1. Типовая гистерезисная кривая при частоте  $f = 50 \text{ Гц}$

Анализируя типовую кривую (рис.1), можно заключить, что, во-первых, помехи достигают заметной величины, хотя и не искажают в целом облик петли. Во-вторых, максимальное значение индукции около 0.35 Тл примерно в 2 раза меньше ожидаемого (паспортного). Наконец, коэрцитивная сила около 25 А/м более чем на порядок превышает паспортное значение 1,6 А/м для испытуемого стержня из пермаллоя 79НМ. Термины “гистерезисная кривая”, “коэрцитивная сила” и другие будем применять для удобства описания геометрических характеристик полученных кривых, даже если они далеки от истинных значений.

Если недостаточную величину максимального значения можно объяснить, например, недостаточной величиной намагничивающего поля, замыканием части магнитного потока внутри измерительной катушки, то, что касается коэрцитивной силы, ее значение представляется неприемлемым.

В некоторых случаях кривые намагничивания самопересекались (имели перехлесты). В литературе [2] можно найти примеры гистерезисных петель с перехлестом. Однако в нашем случае их появление кажется странным.

Определение причин такого расхождения между ожидаемым результатом и результатами экспериментов, выработка соответствующих рекомендаций при исследовании гистерезисных петель и результаты их применения приводятся ниже.

В п.1 настоящей работы приводится оценка искажений, вносимых в форму петли интегрирующей  $RC$  цепочкой. Даны рекомендации по выбору её параметров. Показано, что примененная цепочка не могла быть причиной таких расхождений и их надо объяснять другими обстоятельствами.

В п.2 на основе классического решения задачи о линейном намагничивании бесконечно длинного стержня в переменном магнитном поле большие искажения величины  $H_c$  объясняются вихревыми токами в стержне. Показывается, что для снижения искажений до приемлемого уровня необходим переход к частоте изменения магнитного поля порядка  $0.1 \div 0.2 \text{ Гц}$ . Предложен простой способ оценки искажения ширины петли в зависимости от характерного параметра. Приводится формула для вычисления омических потерь от вихревых токов в стержне.

В п.3 предлагается приближенное решение задачи о нелинейном намагничивании бесконечно длинного стержня в переменном магнитном поле. Рассмотрение нелинейного намагничивания связано с тем, что пережест имеет тенденцию возникать на концах петли, где нелинейность кривой намагничивания существенна. Кроме того, более близкая к реальности модель позволяет подтвердить и уточнить выводы, сделанные на основе линейной модели.

Отметим сразу, что, попытки получить удовлетворительное объяснение пережеста остались безуспешными.

В п.4 описаны результаты экспериментов, проведенных с применением генератора сигналов Гб-46 и цифровой обработки для частоты  $0.2 \text{ Hz}$ . В этом варианте стенда применены катушки с увеличенным на порядок числом витков. Оценивается достоверность полученных результатов.

В дальнейшем все величины, если их размерности явно не указаны, задаются в системе СИ.

## 1. Аналоговое интегрирование посредством $RC$ цепочки

Для приближенного построения петли гистерезиса на экране осциллографа с помощью интегрирующей цепочки используется электрическая схема, которая без детализации представлена на рис.2.

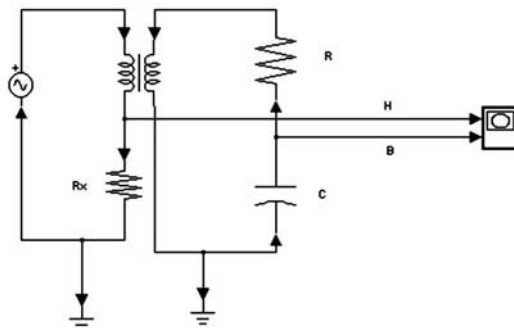


Рис.2. Схема установки с интегрирующей  $RC$ -цепочкой

Первичная цепь питается источником напряжения. Посредством реостата (на рис. 2 не показан) можно задавать ток в цепи первой катушки. В цепи первой катушки (соленоида) последовательно включено измерительное сопротив-

ление  $R_x$ , напряжение с которого, пропорционально току, и, следовательно, напряженности магнитного поля  $H$  (влиянием тока вторичной цепи на величину  $H$ , как будет показано ниже, можно пренебречь).

Систему уравнений, описывающих поведение установки, можно представить в виде:

$$E + E_{ind1} = R_1 I_1, \quad (1.1)$$

$$E_{ind2} = R_2 I_2 + \frac{1}{C} \int I_2 dt, \quad (1.2)$$

где ЭДС электромагнитной индукции в первой и второй цепи равны

$$E_{ind1} = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad E_{ind2} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.3)$$

магнитный поток, пронизывающий катушки равен

$$\Phi = BS + \mu_0 S_0 H, \quad (1.4)$$

напряженность магнитного поля внутри соленоида можно представить в виде

$$H = \frac{N_1 I_1}{l_{sol}}. \quad (1.5)$$

Здесь  $E$  - напряжение источника питания,  $I_1, I_2$  - токи,  $R_1, R_2$  - полные омические сопротивления цепей,  $C$  - емкость интегрирующей цепочки,  $N_1, N_2$  - число витков катушек,  $S, S_0$  - площади сечений стержня и соленоида соответственно,  $l_{sol}$  - длина соленоида.

Для построения петли  $R_2$  и  $C$  выбираются достаточно большими. При этом ток во вторичной цепи и напряжение на конденсаторе становятся малыми и при вычислении  $I_2$  последним членом в уравнении (1.2) можно пренебречь.

Тогда  $I_2 = \frac{E_{ind2}}{R_2}$  и из (1.3) следует

$$I_2 = -\frac{N_2}{R_2} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.6)$$

Напряжение на конденсаторе равно

$$V_C = \frac{1}{C} \int I_2 dt = -\frac{N_2}{R_2 C} \Phi + V_0. \quad (1.7)$$

Если в (1.4) оставить только магнитный поток стержня и пренебречь вторым слагаемым (поток в воздухе) ввиду малости по сравнению с  $B \cdot S$ , то

$$V_C = -\frac{N_2 S}{R_2 C} B. \quad (1.8)$$

Начальный заряд конденсатора  $V_0$  можно положить равным нулю по причине саморазряда и разряда через сопротивление  $R_2$  и катушку.

Подавая напряжение с измерительного сопротивления  $R_x$  на вход X осциллографа и напряжение  $V_C$  с конденсатора на вход Y, получают приближен-

но петлю гистерезиса  $B = B(H)$  с некоторыми масштабными коэффициентами по координатным осям.

Представленная на рис.1 петля, получена с параметрами интегрирующей цепочки  $R = 400$  кОм,  $C = 1$  мкф для стержня из сплава 79НМ квадратного сечения  $1 \times 1 \text{ мм}^2$  длиной 25см. Первая катушка имела число витков  $N_1 = 2342$ , длину  $l_{sol1} = 25$ см, диаметр  $D_1 = 7.5$  мм. Вторая - число витков  $N_2 = 1550$ , длину  $l_{sol2} = 2$ см, диаметр  $D_2 = 1.5$ см. Обе катушки намотаны проводом диаметром  $d = 0.1$  мм. Частота источника напряжения  $f = 50$  Гц.

ЭДС электромагнитной индукции во вторичной цепи  $-N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ , не превосходит величины  $N_2 2\pi f S B_s = 1550 \times 2\pi \times 50 \times 10^{-6} \times 0.7 \approx 425$  мВ. Ток во вторичной цепи не более  $10^{-6}$  А и величина  $H$  от тока этой катушки не превосходит 0.01 А/м, что в сравнении со значениями  $H$  на графике пренебрежимо мало.

Из (1.8) легко получить оценку напряжения на конденсаторе  $V_C \leq 3$  мВ, что также мало в сравнении с  $I_2 R_2 \approx 400$  мВ. Таким образом, общепринятые предположения при построении петель гистерезиса в нашем случае выполнены.

Для выявления причины отличия экспериментальной кривой от ожидаемой необходимо также оценить влияние фазовых искажений в интегрирующей цепи (рис.3).

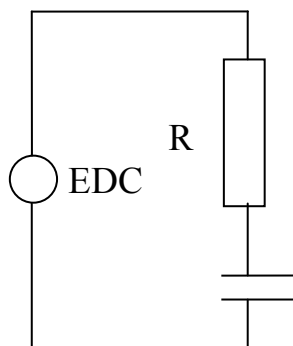


Рис.3. Схема интегрирующей цепочки

Оценку проведем в предположении, что  $B = \mu_{rod} \mu_0 H$ , магнитная проницаемость стержня  $\mu_{rod} = \text{const}$  и

$$H = H_0 \sin \omega t. \quad (1.9)$$

В этом случае «петля» гистерезиса, очевидно, есть отрезок прямой.

Переходя к комплексной форме, нетрудно показать, что сигнал  $V_C$ , снимаемый с конденсатора и трактуемый как магнитная индукция  $B$  в стержне, сдвинут по фазе на малую величину

$$\alpha = \arctg \frac{1}{\omega RC}, \quad (1.10)$$

так что

$$B = \mu_{rod} \mu_0 H_0 \sin(\omega t - \alpha). \quad (1.11)$$



На плоскости  $(H, B)$  уравнения (1.9) - (1.11) вместо отрезка прямой задают эллипс. При этом точки пересечения эллипса с горизонтальной осью определяют погрешность, вносимую в значение коэрцитивной силы  $H_C$ :

$$\Delta H_C = H_0 \sin \alpha \approx \frac{H_0}{\omega RC}. \quad (1.12)$$

Ориентировочно можно положить

$$H_0 = \frac{B_s}{\mu_{rod} \mu_0}.$$

Тогда

$$\Delta H_C \approx \frac{B_s}{\omega RC \mu_{rod} \mu_0}. \quad (1.13)$$

В нашем случае  $\omega RC \approx 125$ ,  $\mu_{rod} \approx 9000$ ,  $B_s \approx 0.7$ , сдвиг фазы  $\alpha = \frac{1}{125}$  рад ( $\approx 0.46^\circ$ ) и возникающая вследствие сдвига фазы погрешность  $\Delta H_C \approx 0.5$  А/м, составляющая треть паспортного значения, которая также не дает объяснения расхождения между ожидаемой и полученной гистерезисными кривыми.

Если потребовать, чтобы погрешность  $\Delta H_C$  не превосходила, например, 10%  $H_C$ , получим полезное при выборе параметров интегрирующей цепи неравенство

$$\omega RC \geq \frac{B_s}{0.1 \mu_{rod} \mu_0 H_C}. \quad (1.14)$$

Следует отметить, что величина  $\omega RC$  показывает также, во сколько раз интегрирующая цепь ослабляет входной сигнал, подаваемый на нее. В нашем случае для достижения 10-ти процентной погрешности должно быть  $\omega RC \geq 390$ . Но при таком значении полезный сигнал уменьшится в 3 раза по сравнению с представленным на рис.1, и уровень помех станет существенным.

Анализ, приведенный выше, а также математическое моделирование интегрирующей RLC цепи (описание приводить не будем) позволяют сделать два заключения. Первое - причины значительного отличия экспериментальной кривой от ожидаемой кроются не в свойствах интегрирующей цепи и, второе - возможности на пути аналогового интегрирования близки к пределу.

Основной причиной, как будет показано ниже, является неоднородность намагничивания сечения стержня вследствие возникающих в нем вихревых токов.

## 2. Линейное намагничивание бесконечного цилиндра. Точное решение

В [1] показано, что для бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса  $a$  с магнитной проницаемостью  $\mu$ , обмотанного проводом, по которому течет ток, создающий поле  $H_0 \cos \omega t$ , поле в цилиндре в установившемся режиме в комплексном виде выражается через функции Бесселя первого рода

$$\vec{B}_z = \frac{I_0 \left( (ip)^{1/2} r \right)}{I_0 \left( (ip)^{1/2} a \right)} B_0 e^{i\omega t}. \quad (2.1)$$

Выделением действительной части получены выражения

$$B_z = \left\{ \frac{ber_0^2(p^{1/2}r) + bei_0^2(p^{1/2}r)}{ber_0^2(p^{1/2}a) + bei_0^2(p^{1/2}a)} \right\}^{1/2} B_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (2.2)$$

$$\alpha = \arctg \frac{ber_0(p^{1/2}a)bei_0(p^{1/2}r) - ber_0(p^{1/2}r)bei_0(p^{1/2}a)}{ber_0(p^{1/2}a)ber_0(p^{1/2}r) + ber_0(p^{1/2}r)bei_0(p^{1/2}a)}. \quad (2.3)$$

Здесь  $B_0 = \mu\mu_0 H_0$ ,  $p = \mu\mu_0 \omega / \rho$ ,  $\rho$  - удельное сопротивление материала стержня,  $r$  - расстояние от оси стержня,  $i$  - мнимая единица,  $ber$  и  $bei$  - функции Кельвина [1].

Выражение (2.3), из которого следует, что  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ , не вполне корректно. Область значений начальной фазы  $\alpha$ , т.е. аргумента комплексной амплитуды  $\vec{B}_z$ , вообще говоря, есть промежуток  $[-\pi, \pi]$ . Нетрудно привести примеры, подтверждающие некорректность выражения (2.3). Например, корректно следующее выражение

$$a = \arg \frac{I_0 \left( (ip)^{1/2} r \right)}{I_0 \left( (ip)^{1/2} a \right)}$$

Выражения (2.1-2.3) получены в результате решения системы уравнений Максвелла

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$rot \vec{H} = \vec{j} \quad (2.5)$$

для линейной зависимости  $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{j} = \rho \vec{E}$  при граничном условии  $H(a) = H_0 \cos \omega t$ .

Решение системы свелось к решению модифицированного уравнения Бесселя нулевого порядка

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial v^2} + \frac{1}{v} \frac{\partial B_z}{\partial v} - B_z = 0, \quad (2.6)$$

где  $v = r\sqrt{ip}$ . Отметим, что точка  $r = 0$  является особой точкой уравнения (2.6).

Приведем примеры вычислений на основе формул (2.1) – (2.3) для стержня в виде круглого цилиндра диаметром 1.128 мм ( $a=0.564$  мм) и длиной 0.25м. Площадь поперечного сечения цилиндра равна площади сечения реального стержня, т.е.  $1 \text{ мм}^2$ . Число витков соленоида  $N_1=2342$ , ток  $i_0 = 8 \text{ мА}$ .

Пример 1. Частота  $f = 50$  Гц,  $\mu_{rod} = 8000$ ,  $\rho = 5 \times 10^{-7}$  Ом м. (сплав 79НМ).

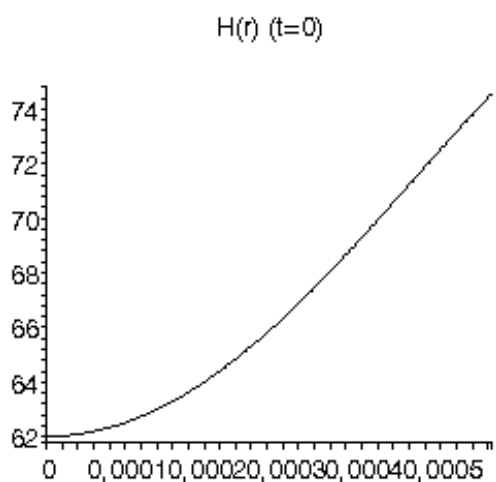


Рис.4. Напряженность  $H(r)$  при  $t = 0$

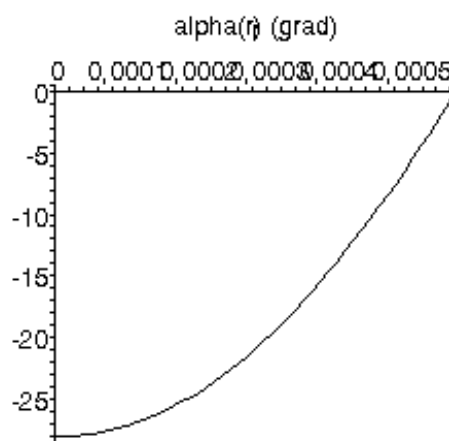


Рис.5. Сдвиг фазы  $\alpha(r)$

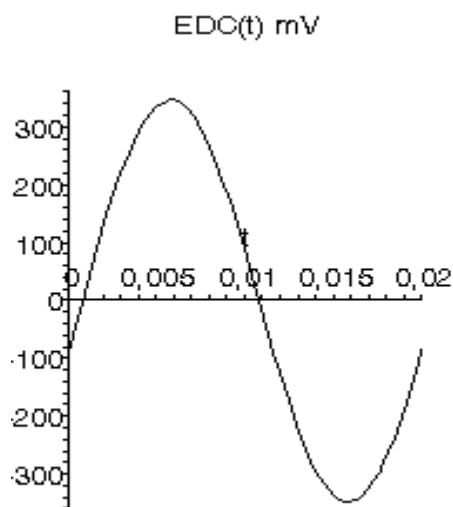


Рис.6. ЭДС в измерительной катушке на одном периоде (Тл)

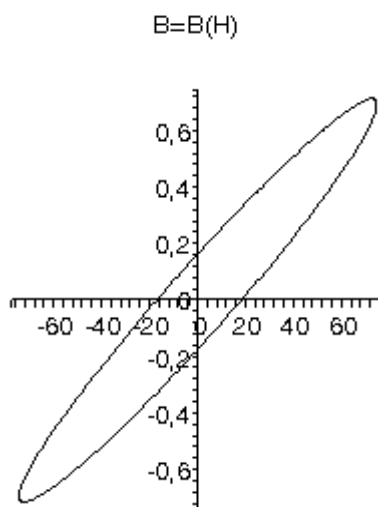


Рис.7.  $B = B(H)$  ( $B$  - среднее интегральное по сечению стержня  $H$  - поле соленоида (А/м))

Анализируя графики, можно заключить, что неоднородность намагничивания и сдвиг фазы по сечению хотя достаточно заметны, но, казалось бы, не критичны. Однако, как видно из рис.7, вместо  $H_c = 0$  имеем ширину петли  $H_c \approx 20$  А/м. Следовательно, погрешность  $\Delta H_c \approx 20$  А/м, что более чем на порядок превосходит ожидаемое реальное значение  $H_c = 1.6$  А/м.

Отметим, что при нулевом сдвиге фаз по сечению при любой неоднородности величины (степени) намагничивания, очевидно,  $\Delta H_c = 0$ . Следовательно, основной причиной погрешности  $\Delta H_c$  является сдвиг фаз.

Естественным способом уменьшения погрешности вследствие неоднородности намагничивания и сдвига фаз является уменьшение частоты  $f$  источника питания установки.

Пример 2. Частота  $f = 1\text{Гц}$  (остальные параметры как в примере 1).

$H(r) (t=0)$

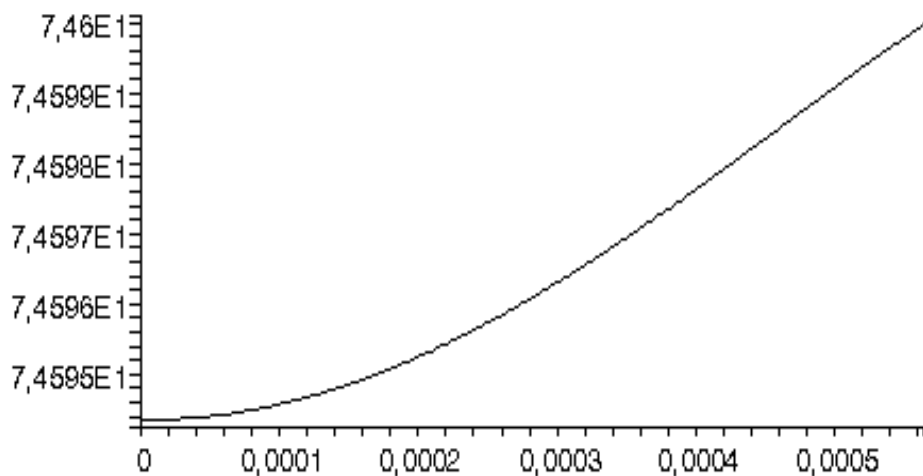


Рис.8. Напряженность  $H(r)$  при  $t = 0$

EDC(t) mV

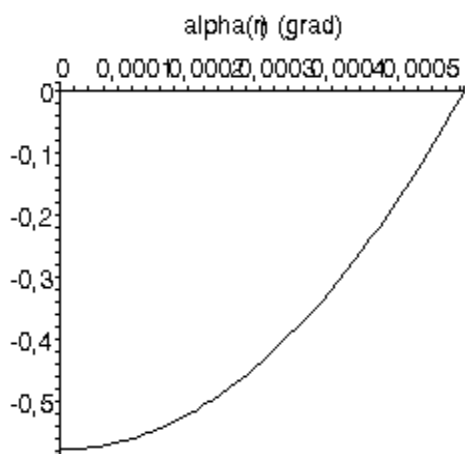


Рис.9. Сдвиг фазы  $\alpha(r)$

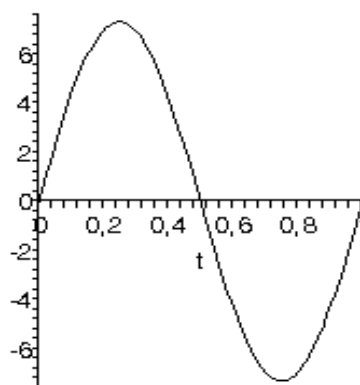


Рис.10. ЭДС в измерительной катушке на одном периоде

$B=B(H)$

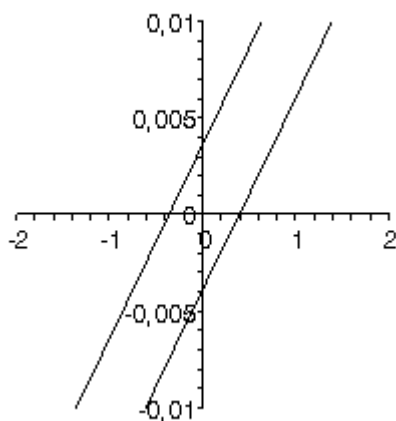


Рис.11. Фрагмент  $B = B(H)$  ( $B$  - среднее интегральное по сечению стержня (Тл),  $H$  - поле соленоида (А/м))

Анализируя приведенные в этом примере графики, можно заключить, что намагниченность практически однородна, сдвиг фазы по сечению мал. Однако,

как видно из рис. 11, снова вместо  $H_C = 0$  имеем  $H_C \approx 1$  А/м. и, следовательно, погрешность  $\Delta H_C \approx 1$  А/м, что также неприемлемо.

Пример 3. Частота  $f = 0.2$  Гц (остальные параметры как в примере 1)

$H(r) (t=0)$

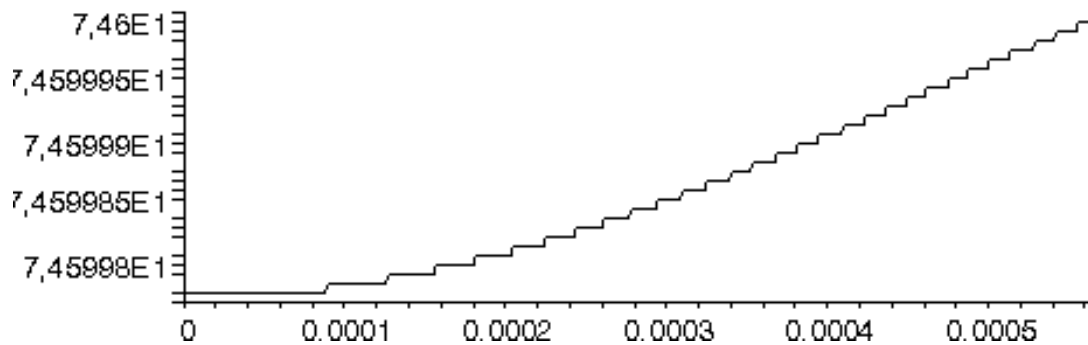


Рис.12. Напряженность  $H(r)$  при  $t = 0$

EDC(t) mV

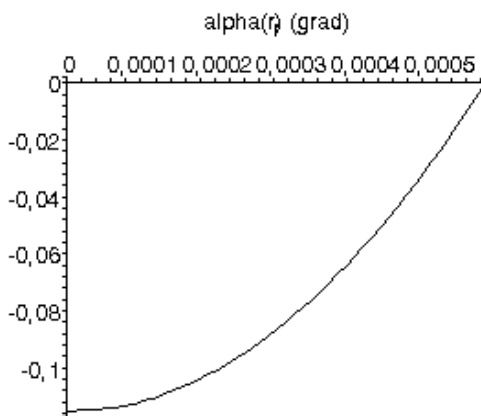


Рис.13. Сдвиг фазы  $\alpha(r)$

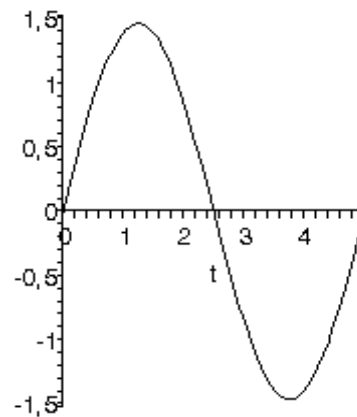


Рис.14. ЭДС в измерительной катушке на одном периоде

$B=B(H)$

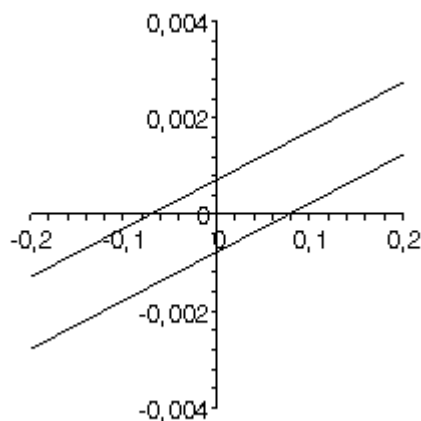


Рис.15. Фрагмент  $B = B(H)$  ( $B$  - среднее интегральное по сечению стержня (Тл),  $H$  - поле соленоида (А/м))

Анализируя графики, можно заключить, что намагниченность практически однородна, сдвиг фазы мал. Из рис. 15 получаем погрешность  $\Delta H_c \approx 0.16$  А/м, что составляет 10% от паспортного значения и приемлемо для оперативного контроля.

ЭДС в измерительной катушке (рис.14) около 3 мВ, что примерно такого же уровня, как и напряжение на конденсаторе  $V_c$  при построении рис.1. О соотношении полезный сигнал / помеха можно будет судить, проведя конкретные эксперименты.

Приведем простой способ определения  $H_c$  при линейном намагничивании (рис.7,11,15). Переходя в (2.1) к безразмерным величинам  $p_0 = a \sqrt{p}$ ,  $x = r / a$ , получим

$$\tilde{B}_z / B_0 = \frac{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 x \right)}{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 \right)} e^{i\omega t}.$$

Отделяя действительную часть, получим

$$\tilde{B}_z / B_0 = \operatorname{Re} \frac{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 x \right)}{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 \right)} \cos \omega t - \operatorname{Im} \frac{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 x \right)}{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 \right)} \sin \omega t.$$

Вычисляя магнитный поток  $\Phi$  в сечении и среднее по сечению значение  $B = \Phi / S$ , нетрудно получить выражение

$$B = 2B_0 (A_1 \cos \omega t - B_1 \sin \omega t) = 2B_0 \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cos(\omega t + \beta), \quad (2.7)$$

где

$$A_1 = \int_0^1 \operatorname{Re} \frac{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 x \right)}{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 \right)} x dx, \quad B_1 = \int_0^1 \operatorname{Im} \frac{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 x \right)}{I_0 \left( (i)^{1/2} p_0 \right)} x dx, \quad (2.8)$$

$$\cos \beta = A_1 / \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \sin \beta = B_1 / \sqrt{A_1^2 + B_1^2}. \quad (2.9)$$

Для нахождения  $H_c$  положим в (2.7)  $B = 0$ . Тогда

$$\cos(\omega t + \beta) = 0, \quad \omega t + \beta = \pi / 2, \quad H = H_0 \cos \omega t = H_0 \sin \beta,$$

и, следовательно,

$$H_c = H_0 |\sin \beta|. \quad (2.10)$$

Отметим, что  $H_c / H_0$  зависит только от  $p_0$ . Эта зависимость показана на рис. 16.

При  $p_0 \leq 0.5$  с точностью не хуже 0.2% зависимость можно задать формулой

$$H_c / H_0 = 0.1248 p_0^2, \quad (2.11)$$

которую следует использовать при малых значениях  $p_0$ .

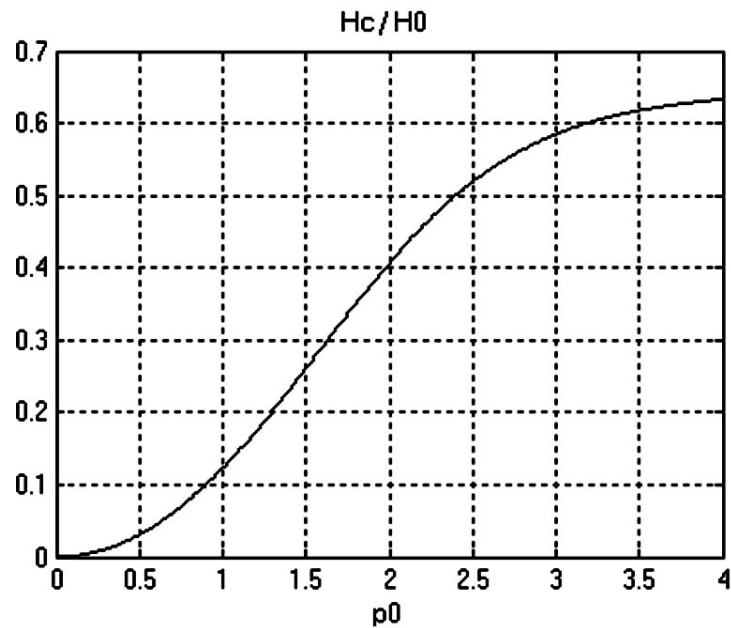


Рис.16. Зависимость  $H_c/H_0$  от  $p_0$ .

Ориентировочные значения  $p_0$  при соответствующих частотах намагничивания для стержня прямоугольного сечения  $1 \times 1 \text{ мм}^2$  приведены в табл. 1

Таблица 1. Зависимость  $p_0$  от частоты

$f(\text{Hz})$	0.1	0.2	0.5	1	5	50
$p_0$	0.063	0.09	0.14	0.2	0.45	1.4

Условие линейности намагничивания налагает ограничение на величину  $H_0$ . Приближенно можно положить

$$H_0 \approx \frac{B_s}{\mu_{rod} \mu_0} \quad (2.12).$$

Поскольку реальные стержни имеют конечную длину, при вычислении  $p_0$  вместо магнитной проницаемости материала  $\mu$  следует использовать магнитную проницаемость стержня  $\mu_{rod}$ .

При практическом применении изложенной теории, ввиду значительной неопределенности в выборе  $H_0$  и  $\mu_{rod}$ , можно рассчитывать лишь на получение оценочных значений. В [4,5] приведена формула, для коэффициента размагничивания цилиндрического стержня

$$N = (\ln(1.2p) - 1) / p,$$

где  $p = L/d$  - относительное удлинение стержня. Для стержня с сечением  $1 \times 1 \text{ мм}^2$  (эксперимент на рис.1) коэффициент размагничивания, вычисляемый по этой формуле, может принимать значения от  $7.5 \cdot 10^{-5}$  до  $1.4 \cdot 10^{-4}$  в зависимости от способа вычисления удлинения. Соответственно, магнитная восприимчивость стержня может принимать значения от  $\mu_{rod}^{\min} = 5600$  до  $\mu_{rod}^{\max} = 12400$ . и

$H_c/H_0$  от 0.23 до 0.34. При  $B_s = 0.75$  Тл получаем значения  $H_c \approx 19$  А/м, что представляется удовлетворительной оценкой.

На рис. 17, 18 приведены полученные из (10) зависимости  $H_c/H_0$  от частоты для стержней квадратного  $1 \times 1$  мм<sup>2</sup> и прямоугольного  $1 \times 2$  мм<sup>2</sup> сечения при  $\mu_{rod}^{min} = 8000$  (рис. 17, 18). С этими стержнями выполнялось большинство экспериментов.

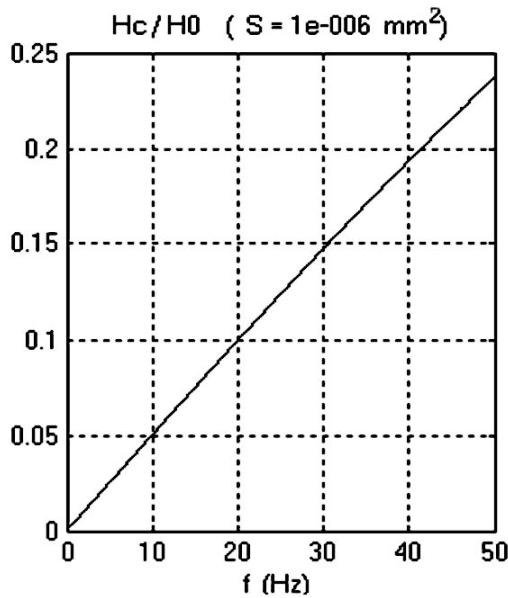


Рис.17.

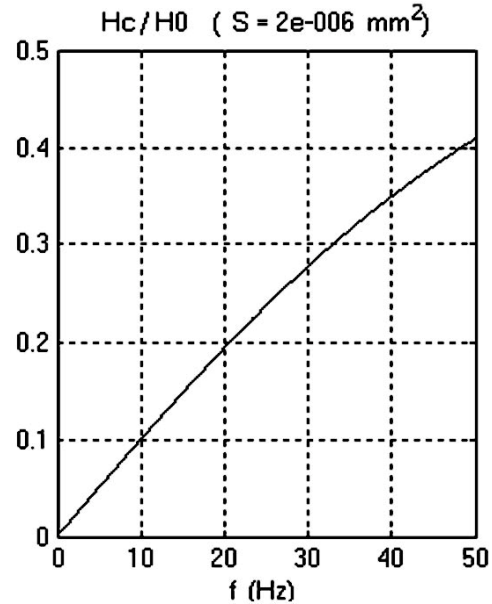


Рис.18.

При малых значениях  $f$  можно использовать приближенные выражения  $H_c/H_0 = 0.005f$  для  $S = 1$  мм<sup>2</sup> и  $H_c/H_0 = 0.01f$  для  $S = 2$  мм<sup>2</sup>.

В заключение получим выражение для омических потерь в стержне при линейном перемагничивании.

На основании мощности потерь в элементарном объеме  $dP = \frac{E^2}{\rho} dV$ , выражение мощности потерь в цилиндрическом слое можно представить в виде

$$dP = \frac{E^2}{\rho} 2\pi l r dr = \frac{E^2(r) l dr}{2\pi \rho r}, \quad (2.13)$$

где  $E$  - напряженность электрического поля, а  $E(r) = 2\pi r E$  - электродвижущая сила. Представляя  $E(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dt}$  в виде

$$E(r) = 2\pi \omega B_0 \{ A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \},$$

где

$$\Phi(r) = \int_0^r B_z(r) 2\pi r dr,$$



$$A_2 = \int_0^r \operatorname{Re}\left(\frac{I_0\left((ip)^{1/2} r\right)}{I_0\left((ip)^{1/2} a\right)}\right) r dr, \quad B_2 = \int_0^r \operatorname{Im}\left(\frac{I_0\left((ip)^{1/2} r\right)}{I_0\left((ip)^{1/2} a\right)}\right) r dr, \quad (2.14)$$

легко получить выражение мгновенной мощности омических потерь в стержне

$$P(t) = \frac{\pi \ell B_0^2 \omega^2}{\rho} \left( A_2^2 (1 - \cos 2\omega t) + B_2^2 (1 + \cos 2\omega t) + A_2 B_2 \sin 2\omega t \right). \quad (2.15)$$

С учетом (14) имеем следующее выражение для средней мощности потерь за период

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{\omega^3 \ell B_0^2}{2\rho} \int_0^a (A_2^2 + B_2^2) \frac{dr}{r}. \quad (2.16)$$

Вводя в интегралах (14, 16) безразмерную переменную  $x = r/a$ , получим окончательное выражение средней мощности омических потерь

$$P_{med} = \frac{V B_0^2 \omega^2 a^2}{\rho} \Pi(p_0), \quad (2.17)$$

где

$$\Pi = \int_0^1 (\tilde{A}_2^2 + \tilde{B}_2^2) \frac{dx}{x},$$

$$\tilde{A}_2 = \int_0^1 \operatorname{Re}\left(\frac{I_0\left((i)^{1/2} p_0 x\right)}{I_0\left((i)^{1/2} p_0\right)}\right) x dx, \quad \tilde{B}_2 = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{I_0\left((i)^{1/2} p_0 x\right)}{I_0\left((i)^{1/2} p_0\right)}\right) x dx. \quad (2.18)$$

Зависимость  $\Pi(p_0)$  представлена на рис.19.

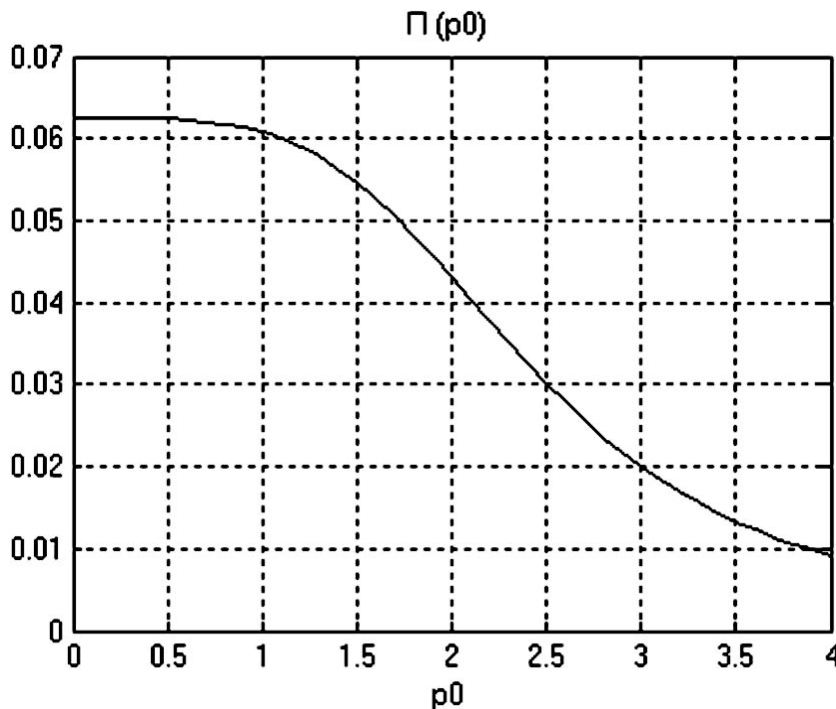


Рис.19. Зависимость  $\Pi(p_0)$ .

При малых  $p_0 < 0.5$  и, соответственно, малых частотах (табл.1),

$$P_{med} \approx \frac{2.5VB_0^2 a^2 f^2}{\rho} \quad (2.19)$$

На рис. 20, 21 показаны мощности омических и гистерезисных потерь в зависимости от частоты для стержня, площадь сечения которого  $S = 1 \text{ мм}^2$ , длина  $0.25 \text{ м}$ ,  $\mu_{rod} = 8000$ ,  $B_0 = 0.75 \text{ Тл}$ ,  $\rho = 5 \times 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ . Омические потери – сплошная, гистерезисные – штриховая линия. Гистерезисные потери вычислялись по формуле

$$P_{gist} = 4H_c B_S V f,$$

где  $H_c = 1.6 \text{ А/м}$ ,  $B_S = 0.75 \text{ А/м}$ , объем стержня  $V = S \cdot \ell = 0.25 \times 10^{-6} \text{ м}^3$ .

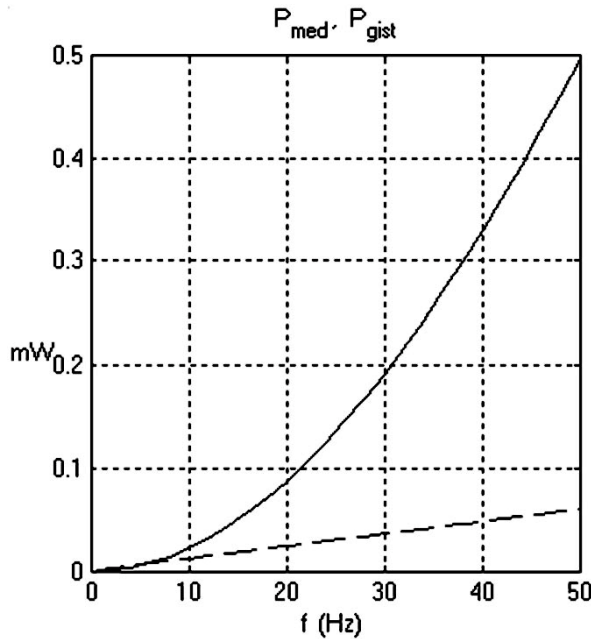


Рис.20.

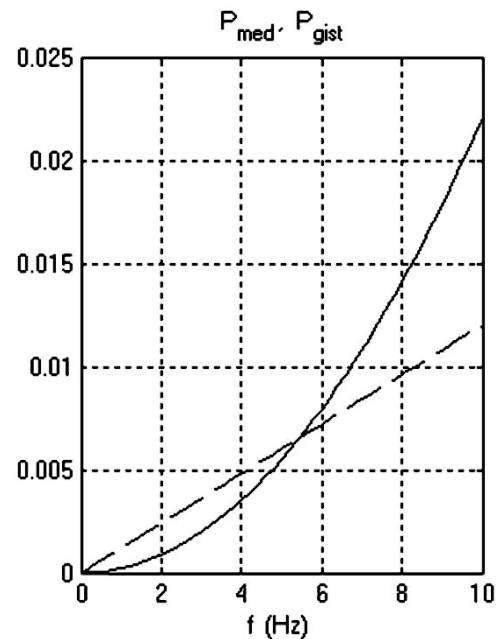


Рис.21.

Для частот ниже  $5 \text{ Гц}$  преобладают гистерезисные потери, выше  $5 \text{ Гц}$  – омические.

Адекватность результатов, получаемых по линейной модели, зависит от степени намагничивания. Достаточно реалистичными можно считать результаты, когда в большей части сечения стержня максимальная индукция не превышает  $B_S$ . Приведенные на рис.20, 21 графики получены при условии, что максимум  $B_{max}$  индукции достигается на боковой поверхности стержня и  $B_{max} = B_S = 0.75 \text{ Тл}$ .

### 3. Нелинейное намагничивание $B = B_S \text{th}(\sigma H)$ . Численное моделирование

Модификация стенда посредством замены аналогового (RC) интегрирования численным позволила на два порядка увеличить полезный сигнал на входе осциллографа. Однако, трудности, связанные с малостью полезного сигнала, остаются, поскольку при снижении частоты источника питания с  $50 \text{ Гц}$  до значений  $0.1 \div 0.2 \text{ Гц}$  снова происходит соответствующее уменьшение напряжения,

подаваемого на вход осциллографа. Для уточнения диапазона приемлемых частот, уточнения искажений формы петли гистерезиса и омических потерь вихревыми токами и, возможно, объяснения “перехлеста” петли разработана математическая модель более близкая к реальности. В этой модели применена нелинейная кривая намагничивания  $B = B_s th(\sigma H)$ .

Магнитная проницаемость не предполагается постоянной по сечению стержня и может задаваться в виде функции  $r$ . Косвенным образом с помощью весовых коэффициентов учитывается влияние рассеяния магнитного потока. Питание цепи первой катушки осуществляется источником заданного напряжения с учетом нелинейности внутреннего сопротивления или источником заданного тока с бесконечным внутренним сопротивлением.

В качестве отправного пункта построения уточненной математической модели примем модель, использованную в [3], т.е. будем рассматривать круглый длинный цилиндр в однородном поле соленоида.

Уравнения Максвелла запишем в интегральной форме

$$\oint_{K1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\oint_{K2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (3.2)$$

где  $\Phi$  - магнитный поток,  $I$  - макроскопические токи проводимости.

$$\Phi = \iint_{S1} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.3)$$

$$\vec{I} = \iint_{S2} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad (3.4)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (3.5)$$

Решение системы проводится в цилиндрических координатах. Неоднородностью по длине цилиндра пренебрежем. В силу симметрии, неизвестные величины, входящие в уравнения, зависят только от координаты  $r$  и времени  $t$ .

Выберем, как обычно, в качестве контура  $K1$  окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $r_1 = 0$ , в качестве  $K2$  - контур, образованный прямолинейным отрезком внутри стержня, отстоящим от продольной оси на расстоянии  $r$ , и линией  $BB'A'A$  замыкающей контур вне стержня (рис. 25).

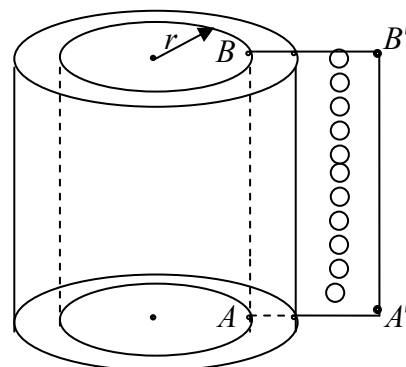


Рис. 25. Схематичное изображение стержня

Тогда уравнения (3.1) и (3.2) можно представить в виде

$$E(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r B(r) r dr, \quad (3.6)$$

$$H(r) + \frac{1}{l} \int_{BB'A'A} \vec{H}^e \cdot d\vec{l} = \frac{N_1 \cdot I_1}{l} + \frac{1}{\rho_r} \int_r^a E(r) dr \quad (3.7)$$

где  $H$  и  $H^e$  - напряженность магнитного поля внутри и вне стержня,  $l$  - длина стержня,  $N_1$  - число витков соленоида, охваченных контуром  $K_2$ . Если соленоид длиннее стержня (это полезно для уменьшения неоднородности вблизи концов), то контур может охватывать обмотку соленоида частично. Член  $\frac{1}{\rho_r} \int_r^a E(r) dr$  - поле вихревых токов в стержне. Зависимость от времени этих и других величин с целью сокращения записи указывать не будем.

В случае отсутствия в соленоиде стержня интегралом по внешней части  $BB'A'A$  контура  $K_2$ , т.е.  $\frac{1}{l} \int_{BB'A'A} \vec{H}^e \cdot d\vec{l}$ , вследствие малости обычно пренебрегают.

В соленоиде со стержнем им также будем пренебрегать.

Неоднородность поля соленоида на продольной оси при отсутствии стержня иллюстрирует рис.27. Длина соленоида 25 см и диаметр 7.5 мм.

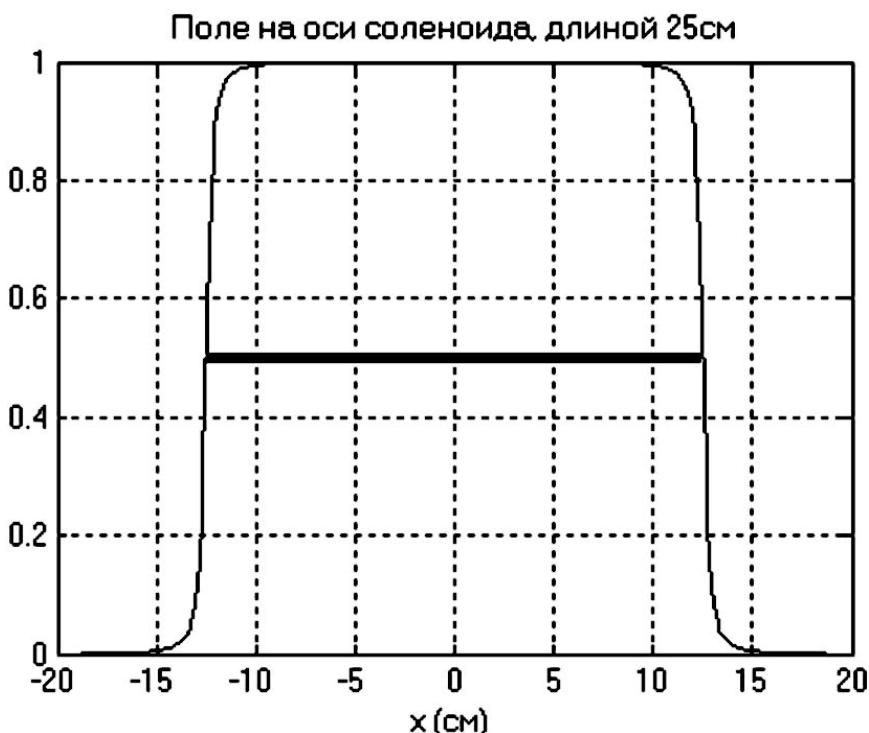


Рис. 26. Жирная линия - протяженность соленоида

В случае нелинейной зависимости  $B = B(H)$  метод разделения переменных, использованный при получении точного решения (2,1), неприменим. Для получения приближенного решения системы (3.6), (3.7) зададим некоторое множество («сетку») значений  $r$  (рис.27),

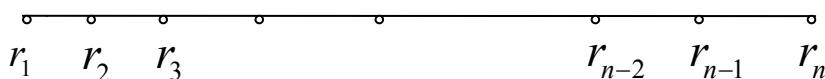


Рис.27. Сетка значений  $r$

разбивая сечение цилиндра с помощью концентрических окружностей на слои (рис.28а), причем  $r_1 = 0$ ,  $r_n = a$ . Использовались как равномерные, так и неравномерные сетки со сгущением вблизи точки  $r_1 = 0$ , поскольку эта точка является особой точкой уравнений (3.6) и (2.6). Пример неравномерной сетки показан на рис.29б.

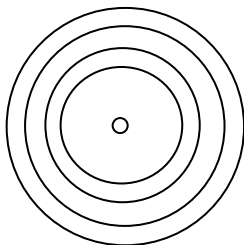


Рис.28 а. "Слой" стержня



Рис.28 б. Неравномерная сетка

Для раскрытия неопределенности в точке  $r_1 = 0$  применим линейную интерполяцию

$$B = B_1 + \frac{B_2 - B_1}{r_2} \cdot r, \quad r \in [r_1, r_2]. \quad (3.8)$$

Тогда

$$E(r) = -\frac{1}{r} \int_0^r (\dot{B}_1 r + \frac{\dot{B}_2 - \dot{B}_1}{r_2} \cdot r^2) dr = -\dot{B}_1 \left( \frac{r}{2} - \frac{r^2}{3r_2} \right) - \dot{B}_2 \frac{r^2}{3r_2} \quad (3.9)$$

и

$$E_1 = 0, \quad E_2 = -\dot{B}_1 \cdot \frac{r_2}{6} - \dot{B}_2 \frac{r_2}{3}. \quad (3.10)$$

Здесь и далее через  $E_k, B_k, H_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и т.п. значения величин в узловых точках.

Заменяя в (3.6, 3.9) интегралы конечными суммами по методу трапеций, в дополнение к (3.10) получим следующие уравнения для узловых значений:

$$E_3 = -\frac{1}{2r_3} \left( \dot{B}_1 \frac{r_2^2}{3} + \dot{B}_2 \left( r_2 r_3 - \frac{r_2^2}{3} \right) + \dot{B}_3 r_3 (r_3 - r_2) \right), \quad (3.11)$$

$$E_k = -\frac{1}{2r_k} \left( \dot{B}_1 \frac{r_2^2}{3} + \dot{B}_2 \left( r_2 r_3 - \frac{r_2^2}{3} \right) + \sum_{i=3}^{k-1} \dot{B}_i r_i (r_{i+1} - r_{i-1}) + \dot{B}_k r_k (r_k - r_{k-1}) \right), \quad (k = 4, \dots, n) \quad (3.12)$$

$$H_k = \frac{N_1 I_1}{l} + \frac{1}{2\rho} \left( E_k (r_{k+1} - r_k) + \sum_{i=k+1}^{n-1} E_i (r_{i+1} - r_{i-1}) + E_n (r_n - r_{n-1}) \right), \quad (k = 1, \dots, n-2). \quad (3.13)$$

$$H_{n-1} = \frac{N_1 I_1}{l} + \frac{1}{2\rho} (E_n + E_{n-1})(r_n - r_{n-1}).$$

Напомним, что  $E_1 = 0$ , а  $H_n = \frac{N_1 I_1}{l}$  есть напряженность поля, создаваемого

током соленоида.

Представляя уравнения (3.10-3.13) в матричном виде

$$\begin{aligned} E &= A_1 \dot{B}, \\ H' &= A_2 E, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и исключая  $E$ , получим

$$A_{21} \dot{B} = H'. \quad (3.15)$$

Здесь

$$E = \begin{pmatrix} E_2 \\ E_3 \\ \dots \\ E_n \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} H_1 - \frac{N_1 I_1}{l} \\ H_2 - \frac{N_1 I_1}{l} \\ \dots \\ H_{n-1} - \frac{N_1 I_1}{l} \end{pmatrix}, \quad \dot{B} = \begin{pmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dots \\ \dot{B}_n \end{pmatrix}, \quad A_{21} = A_2 A_1. \quad (3.16)$$

Размеры матриц :

$$\dim A_1 = (n-1) \times n, \quad \dim A_2 = (n-1) \times (n-1), \quad \dim A_{21} = (n-1) \times n.$$

Зависимость  $B = B(H)$ , а, следовательно, и обратная зависимость  $H = H(B)$  известна. В нашем случае  $H_k = \frac{1}{\sigma} a \tanh \frac{B_k}{B_s}$ . Тогда (3.15) представляет собой систему дифференциальных уравнений с неизвестными  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Легко видеть, что эта система незамкнута. В дополнение к системе необходимо составить дифференциальное уравнение тока  $I_1$  в цепи соленоида. В случае питания соленоида, например, источником ЭДС  $= E_0 \sin \omega t$  уравнение имеет вид

$$\mu_0 N_1^2 \pi R^2 \dot{I}_1 + I_1 (R_x + R_1) = E_0 \sin \omega t + 2\pi a N_1 E_n, \quad (3.17)$$

а случае питания источником тока  $I_1 = I_{\max} \sin \varpi t$  - вид

$$\dot{I}_1 = I_{\max} \varpi \cos \varpi t. \quad (3.18)$$

Ради удобства, конечное уравнение  $B_n = B_s \text{th}(\sigma_n H_n)$  также заменим дифференциальным

$$\dot{B}_n = \sigma_n B_s (1 - \text{th}^2(\sigma_n H_n)) \frac{N_1}{l} \dot{I}_1. \quad (3.19)$$

Заметим, что при замене конечных уравнений дифференциальными начальные условия должны удовлетворять исходным конечным уравнениям. Система (15), (17), (19) и система (15), (18), (19) - замкнутые системы дифференциальных уравнений  $n+1$  порядка с неизвестными  $B_1, B_2, \dots, B_n, I_1$ .

В случае источника ЭДС систему можно представить в матричном виде

$$A_3 \begin{pmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dots \\ \dot{B}_{n-1} \\ \dot{B}_n \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 - H_n \\ H_2 - H_n \\ \dots \\ H_{n-1} - H_n \\ E_0 \sin(\omega t) - I_1(R_x + R_1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Здесь  $A_3$  - квадратная матрица размером  $\dim A_3 = (n+1) \times (n+1)$ , имеющая вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \mu_0 N_1^2 \pi R^2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\sigma_n B_s (1 - th^2(\sigma_n H_n)) \frac{N_1}{l} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

В случае источника тока - в виде

$$A_3 \begin{pmatrix} \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \\ \dots \\ \dot{B}_{n-1} \\ \dot{B}_n \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 - H_n \\ H_2 - H_n \\ \dots \\ H_{n-1} - H_n \\ I_{\max} \varpi \cos \varpi t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\sigma_n B_s (1 - th^2(\sigma_n H_n)) \frac{N_1}{l} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Легко видеть, что первые  $n$  строк матрицы  $A_3$  суть величины, не зависящие от времени. Постоянную часть матрицы  $A_3$  целесообразно, вычислив единожды, передавать подпрограмме вычисления правых частей дифференциальных уравнений посредством механизма глобальных данных. Это приводит к сокращению затрат машинного времени.

Задавая определенную зависимость магнитной проницаемости  $\mu_{rod} = \eta_{rod}(r)$  в предположении, что  $\mu_{rod} = \frac{dB}{dH} \Big|_{H=0}$ , получаем  $\sigma = \mu_0 \mu_{rod} / B_s$ .

Отметим, что системы (20), (22) “жесткие” (системы с большими собственными числами) и их численное интегрирование должно выполняться соответствующим методом, например, методом Эйлера.

Важным моментом является выбор количества точек  $r_k (k=1, \dots, n)$  и их расположение на оси  $r$ . Заметных преимуществ неравномерных сеток не было обнаружено. Поэтому интегрирование в основном проводилось на равномерных сетках по  $r$ .

На рис.29, 30 для сравнения представлены зависимости  $B = B(H)$  для точного и приближенного решений системы (20) при  $n = 30$ .

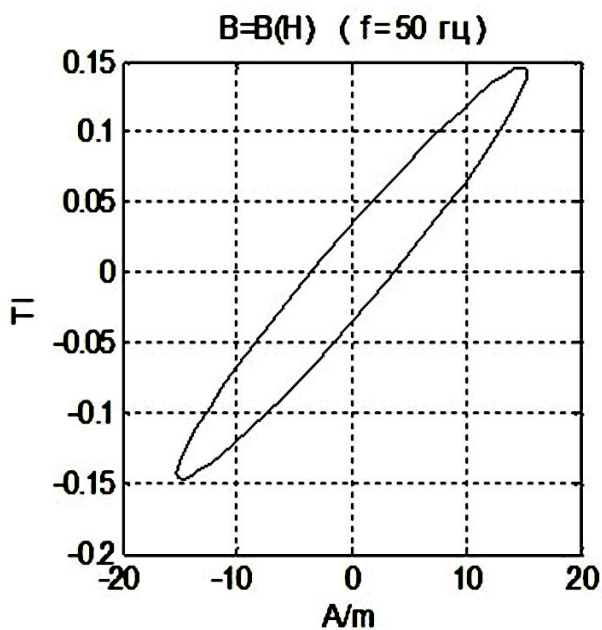


Рис.29. Точное решение.

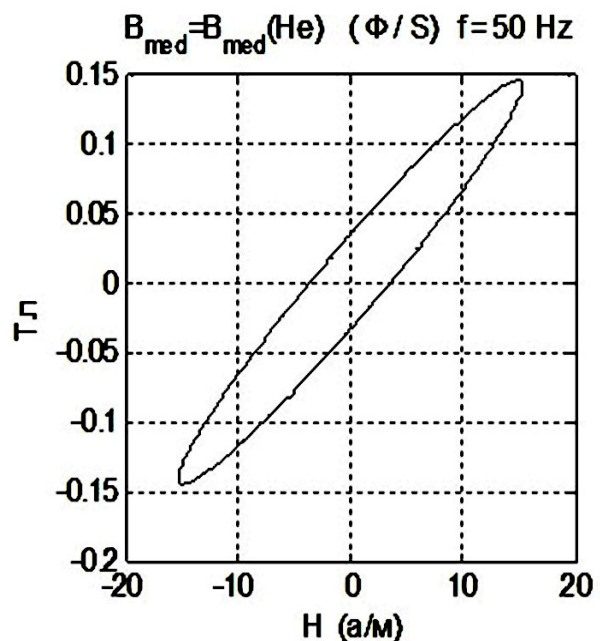


Рис.30. Приближенное решение ( $n = 30$ ).

Сравнение проведено при постоянном по сечению значении  $\mu_{rod} = 8000$ , частоте  $f = 50 \text{ Hz}$  и малой напряженности поля соленоида -  $H_n \leq 15 \text{ A/m}$ . Имеем визуально хорошее совпадение решений. Численные значения  $H_c = 3.63 \text{ A/m}$  по точному решению и  $H_c = 3.61 \text{ A/m}$  по приближенному это подтверждают.

Заметим, что разница индукции  $B = \mu_{rod} \mu_0 H$  при линейном и  $B = B_s \text{th}(\sigma H)$  - нелинейном намагничивании при  $H_n = 15 \text{ A/m}$  составляет 1.2%, поэтому и для больших  $n$  нельзя ожидать полного совпадения решений. Этот и другие численные эксперименты позволили при проведении большинства расчетов остановиться на значении  $n = 50$ . Для иллюстрации решения системы (20) при больших значениях  $H$  приведем рисунки 31-34.



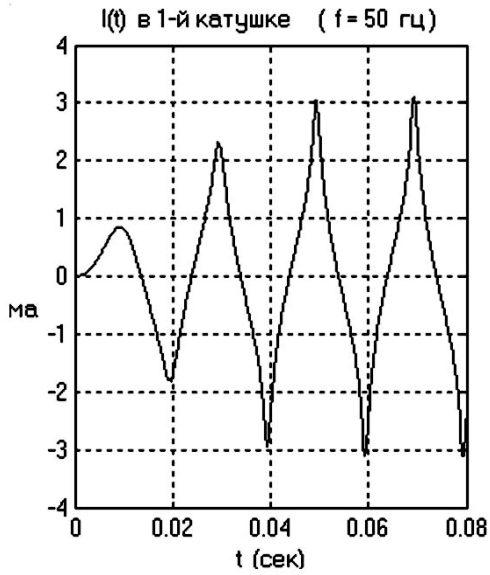


Рис.31. Ток в соленоиде.  
 $B(r)$  ( $f=50$  гц)

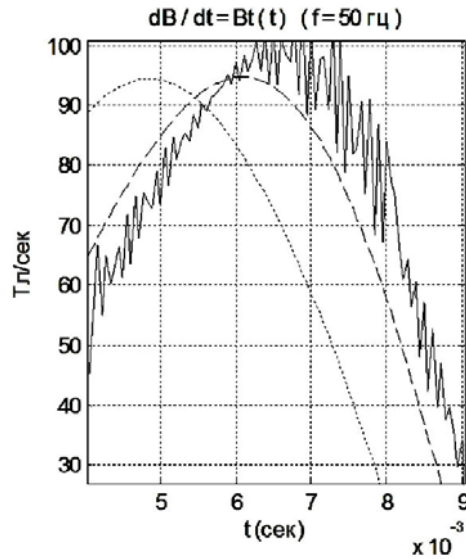


Рис.32. Зависимость  $dB/dt$  от времени.

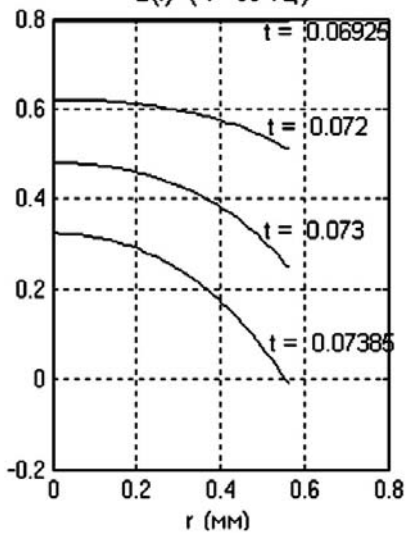


Рис.33.  $B = B(r)$

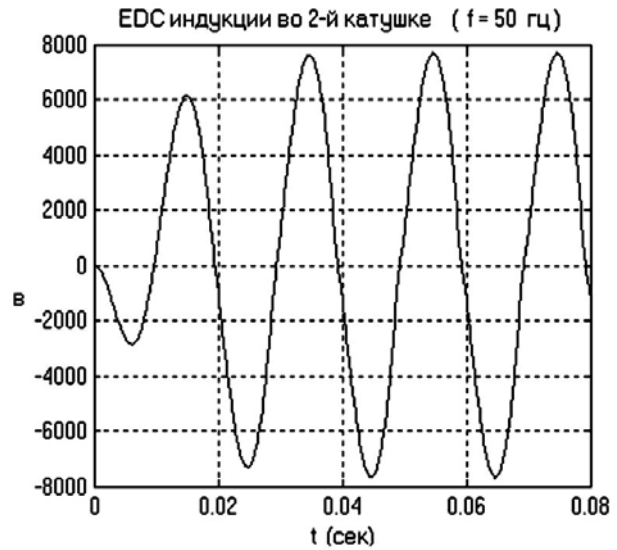


Рис.34. ЭДС индукции во 2-й катушке.

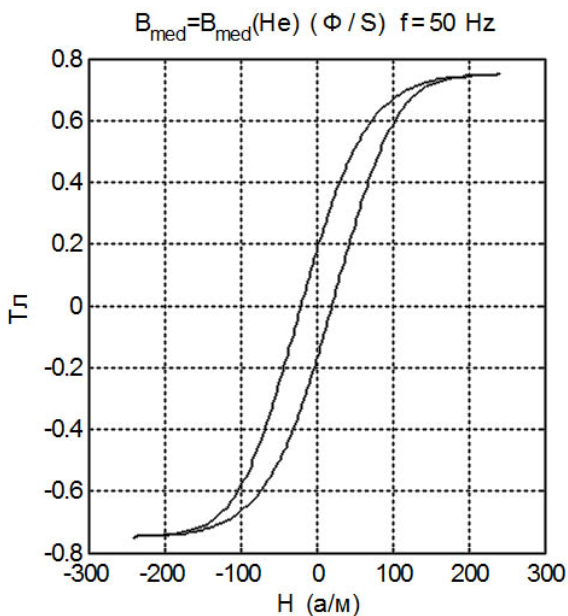


Рис.35.  $B = B(H)$

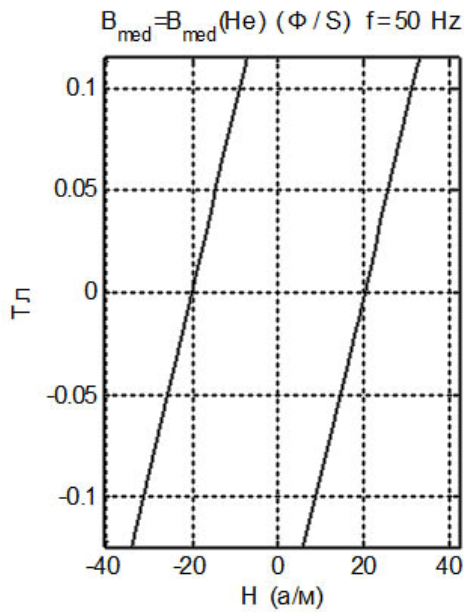


Рис.36. Окрестность нуля кривой  $B = B(H)$ .

В уравнениях (3.20), (3.22) временные зависимости ЭДС и силы тока, вообще говоря, могут быть произвольными. В частности, рис. 33-38 получены для  $\mathcal{E} = E_0 \tanh(at) \sin \omega t$ , обеспечивающей постепенный выход ЭДС на максимальное значение. В отсутствие постепенного выхода уже на первом периоде может происходить столь глубокое насыщение индукции  $B$ , что программа перестает работать (определитель при старших производных приближается к нулю и система вырождается).

В некоторых численных экспериментах в системе (3.22) зависимость тока от времени определялась по реальным данным, полученным с помощью осциллографа. Реальная дискретная зависимость аппроксимировалась отрезком ряда Фурье.

На рис. 37, 38 для примера показаны одновременно реальные данные и их аппроксимация ряда из 30 гармоник.

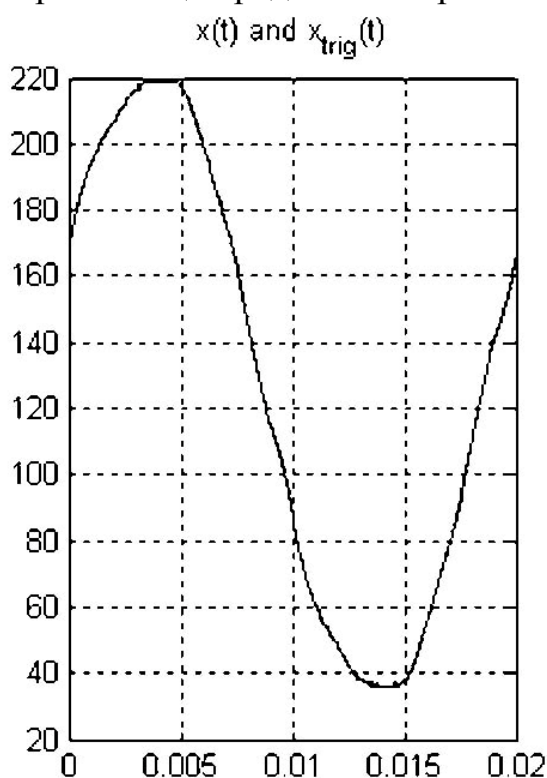


Рис.37. Данные на одном периоде.

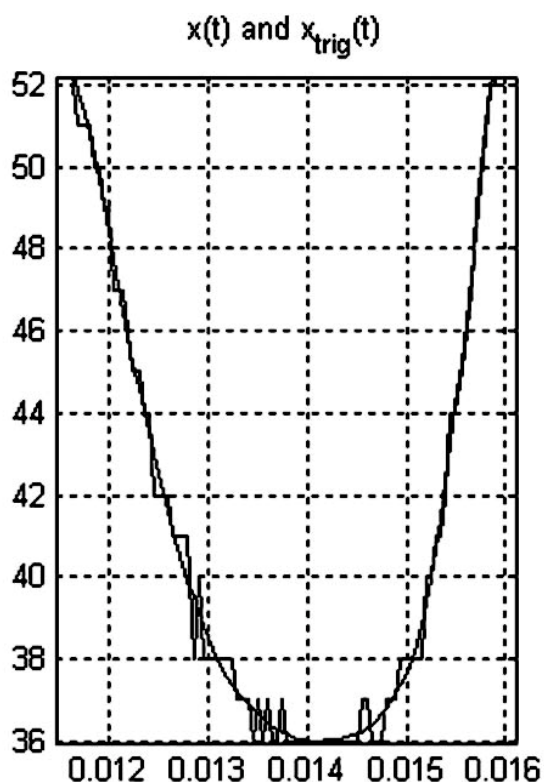
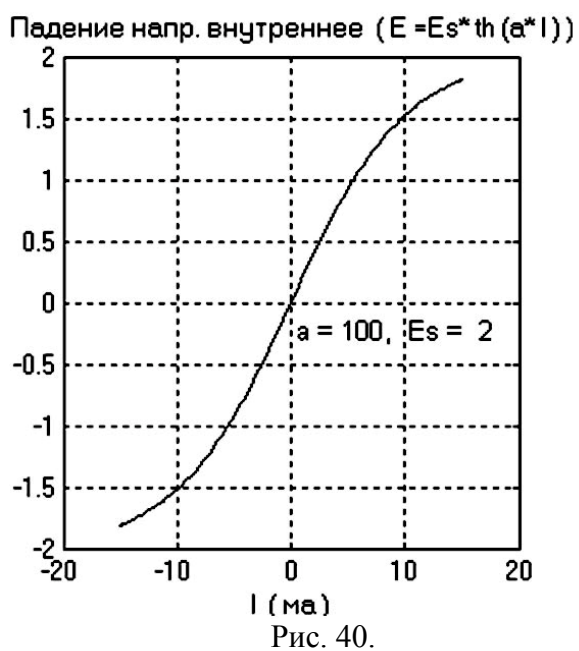


Рис.38. Фрагмент данных.

Кроме идеального источника ЭДС с нулевым внутренним сопротивлением, применялись источники с нелинейным сопротивлением, падение напряжения на которых задавалось в виде  $E = aI + bI^3$  (рис.39) или  $E = E_s \tanh(aI)$  (рис.40).

В программе реализована имитация рассеяния магнитного потока. С помощью весовых коэффициентов частично или полностью отсекались магнитные потоки тех слоев стержня, магнитные силовые линии которых могут замыкаться внутри соленоида или измерительной катушки. Номера этих слоев задавались из общих соображений: линии, исходящие из центральных слоев не замыкаются, а линии из периферийных могут замыкаться внутри катушек.



Достаточно многочисленные вычисления с различными весовыми коэффициентами, магнитными проницаемостями слоев, нелинейностями сопротивлений источников питания (в разумных пределах) не привели к явному проявлению перехлеста. Отдельные случаи перехлеста происходили при недостаточно точном интегрировании (что можно интерпретировать как имитацию возмущений) и, иногда, при искусственном введении дополнительного постоянного сдвига фаз каналов осциллографа.

В качестве результата применения нелинейной модели приведем найденные численным интегрированием зависимости от частоты коэрцитивной силы  $H_c$  (рис. 41, 42) и магнитной проницаемости  $\eta'_{rod}$  (рис. 43, 44), получаемой графически с линейного участка петли. Зависимости получены для стержня сечением  $1 \times 2 \text{ mm}^2$ , длиной 25 см с магнитной проницаемостью  $\eta_{rod} = 8000$ . Символом “o” помечены кривые, полученные при питании соленоида источником ЭДС, символом “>” – источником тока. И в том и в другом случае максимальное намагничивание было близким к насыщению.

Заметим, что для частоты  $0.2 \text{ Гц}$ , имеем  $H_c = 0.5 \text{ А/м}$ . Эта величина, напомним, является погрешностью, проистекающей вследствие появления вихревых токов при данной частоте. На основе линейного анализа, погрешность оценивалась величиной  $\approx 0.15 \text{ А/м}$ .

В меньшей степени подвержена искажению магнитная проницаемость. Так на частоте  $10 \text{ Гц}$  тангенс угла наклона линейного участка кривой  $B = B(H)$ , равный 7200, мало, с точки зрения практических приложений, отличается от “истинного”, равного 8000. На частоте  $0.2 \text{ Гц}$  отличие около 3%.

Зависимость  $H_c$  от частоты

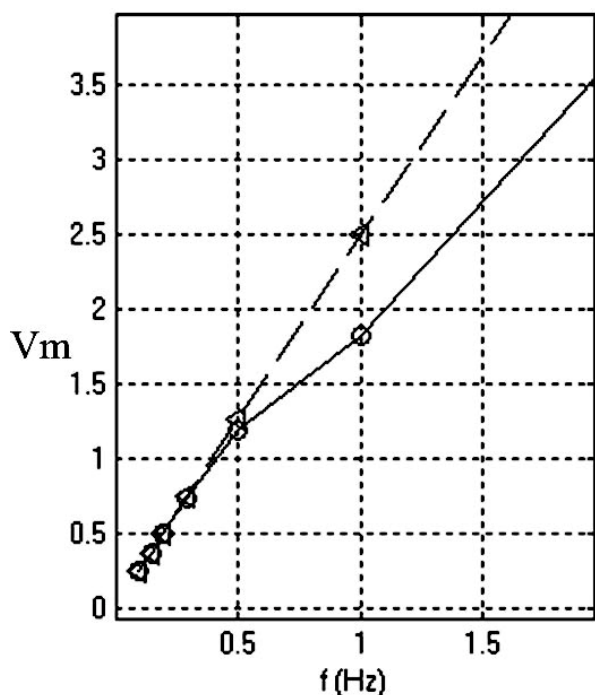


Рис.41

Зависимость  $H_c$  от частоты

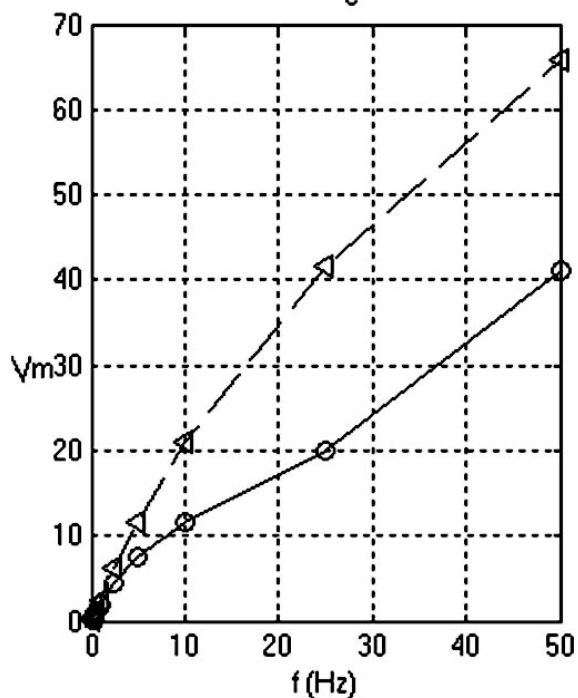


Рис.42.

Зависимость  $Mu_{rod}$  от частоты ( $MU_0=8000$ )

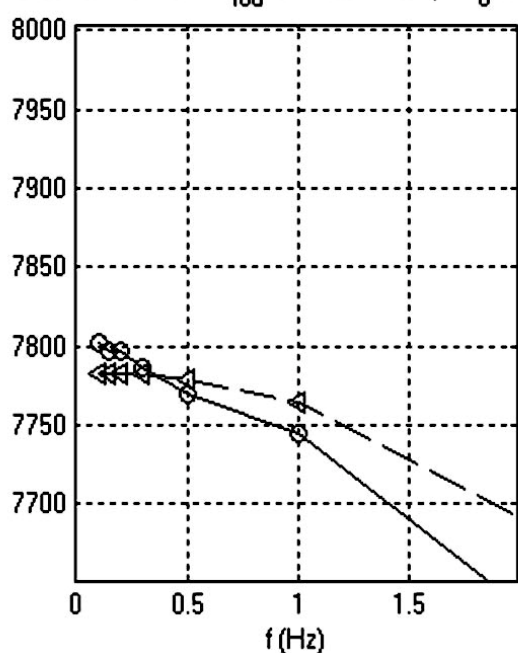


Рис.43.

Зависимость  $Mu_{rod}$  от частоты ( $MU_0=8000$ )

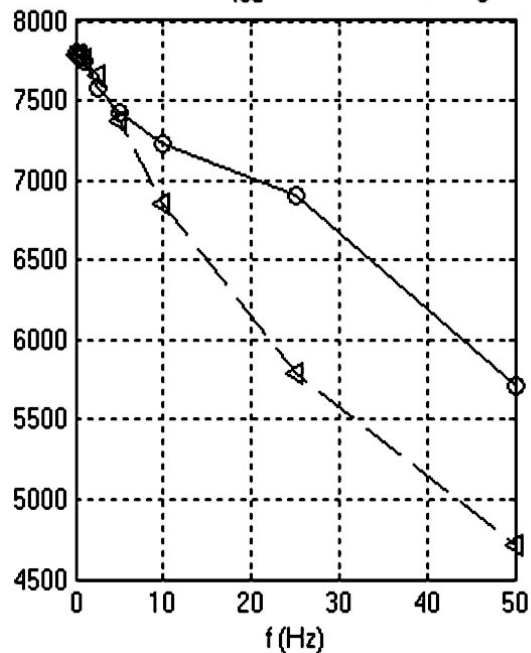


Рис.44.

Разница кривых в случае синусоидальных ЭДС и источника тока, когда оба источника обеспечивают намагничивание близкое к насыщению, объясняется нелинейностью задачи и, вследствие этого, различием спектров напряженности магнитного поля соленоида. Это подтверждено численным экспериментом.

Заметим, что 1-му варианту установки с понижающим трансформатором и относительно большим общим сопротивлением в цепи соленоида, более адекватна математическая модель с источником тока. В случае питания установки генератором Г6-46 (рис.45) и применения соленоида с повышенным числом витков (2-й вариант установки) подходящей представляется модель с источником ЭДС.

Затраты машинного времени на интегрирование с источником ЭДС при низких частотах измеряются часами, с источником тока – на порядок меньше. При частотах ниже  $0.5\text{Гц}$  результаты, получаемые применением этих моделей, практически идентичны.

Зависимости омических и гистерезисных потерь от частоты близки к полученным ранее (рис.20, 21).

#### 4. Интегрирование сигнала в цифровой форме. Результаты эксперимента

Малая величина полезного сигнала и его дополнительное ослабление в  $\omega RC$  раз интегрирующей цепочкой вынуждают отказаться от аналогового интегрирования, заменяя его численным интегрированием с использованием возможностей цифрового осциллографа. Модификация стенда без детализации представлена схематично на рис.46. Сам стенд изображен на рис.47.

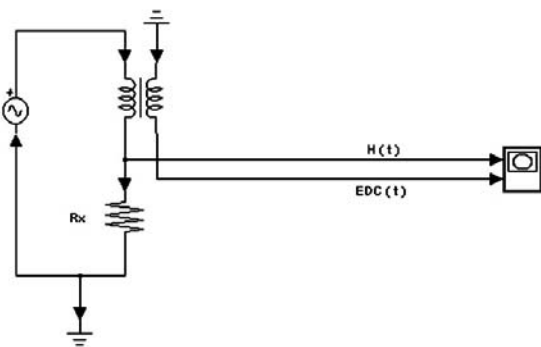


Рис.46. Схема измерительной установки



Рис.45. Генератор периодического сигнала Г6-46



Рис.47. Стенд для исследования свойств гистерезисных стержней

В этом случае, как видно из рис. 46, на вход 2-го канала осциллографа подается весь сигнал  $E_{ind2} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ , а не уменьшенный в  $\omega RC$  раз. Результаты измерений в цифровой форме записываются в памяти осциллографа и по USB –

каналу передаются компьютеру для обработки. Обработка, прежде всего, заключается в определении нулей и соответствующем сдвиге («центровке») данных. Числовые значения, полученные от осциллографа, переводятся в реальные вольты и секунды. Для контроля центровка данных, полученных по каждому из двух каналов, выполнялась по выбору одним из двух способов - по размаху или интегрально. В первом случае за нулевое значение принималось среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений, во втором – среднее интегральное. Интегрированием данных второго канала (т.е.  $E_{ind2}$ ) получался магнитный поток  $\Phi$ , проводилась его центровка и значение  $\Phi / S$  (среднее по сечению) принималось в качестве индукции  $B$  в стержне. Для контроля операции интегрирования выполнялись как методом трапеций, так и методом Симпсона.

Перед обработкой реальных измерений полезно провести математическое моделирование этой процедуры.

#### 4.1. Имитация процесса обработки

Для имитации процесса обработки в качестве исходных использовались данные, полученные с помощью описанных в п.3 программ. Эти данные принимались за эталон, с которым сравнивались результаты последующих преобразований. Преобразования состояли, во-первых, в зашумлении и дискретизации, т.е. получении из непрерывных функций ступенчатых. И, во-вторых, в обратном переходе от дискретной формы к непрерывной посредством «фитинга», т.е. аппроксимации ступенчатых функций гладкими. Исходные данные из вольт и секунд переводились в координаты экрана и обратно. При этом учитывалось, что экран осциллографа имеет 1000 делений (с номерами от 0 до 999) по горизонтали и 256 делений (с номерами от 0 до 255) по вертикали. Выполнение операций интегрирования сопровождалось неоднократным уточнением «вручную» нулевых значений интегрируемых данных. Критерием правильности нулевого значения служит периодичность результата интегрирования и замкнутость получаемых петель.

Имитация позволяет оценить влияние дискретизации, шумов, параметров фитинга и др. на достоверность результатов и оценить границы возможностей предлагаемого метода.

Рис.48 – 52 иллюстрируют процесс обработки, когда частота питания установки  $f = 0.2$  Гц, шумы отсутствуют, и изображение входных данных обоих каналов осциллографа занимает 1/4 часть экрана по вертикали. С такой ситуацией можно встретиться при малых входных сигналах. В этом случае дискретизация осуществляется с использованием не более чем 64 ступенек.

На рис.48, 49 представлена имитация данных обоих каналов осциллографа, в той форме, в какой они передаются для обработки в компьютер. На рис.50 отдельно показана кривая  $V=B(H)$ , построенная на основании приведенных выше данных без применения фитинга на рис.51 - эта же кривая вместе с эталонной. Видим, что по глобальным характеристикам эти кривые практически совпадают, но локально (рис.51а) отличаются существенно. Трудно, например, глядя на

рис.50а сказать, что ширина исходной петли  $H_c \approx 0.4$  А/м (при более глубоком насыщении могло бы быть  $H_c \approx 0.5$  А/м, (рис.43)).

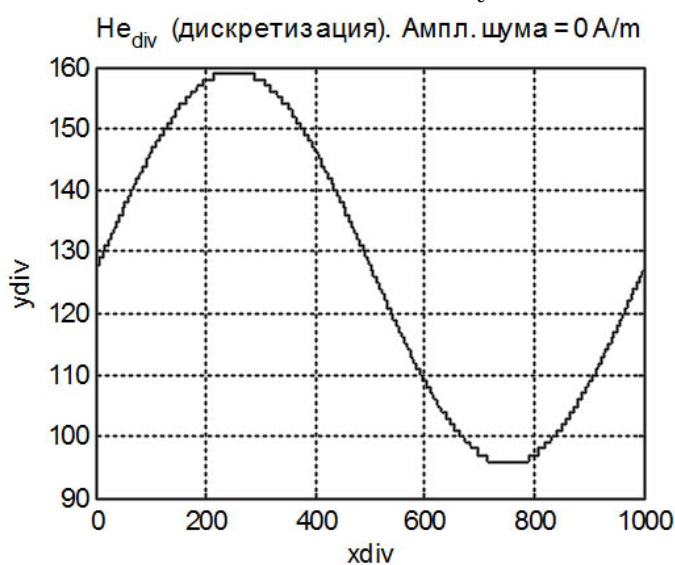


Рис.48. Поле соленоида в дискретной форме

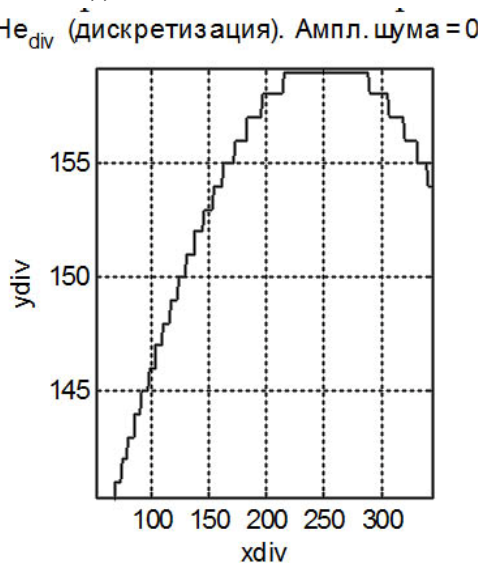


Рис.48а. Фрагмент поля соленоида.

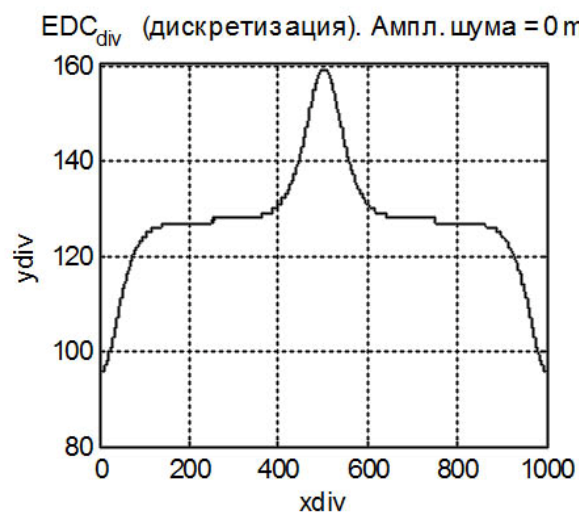


Рис. 49. ЭДС измерительной катушки

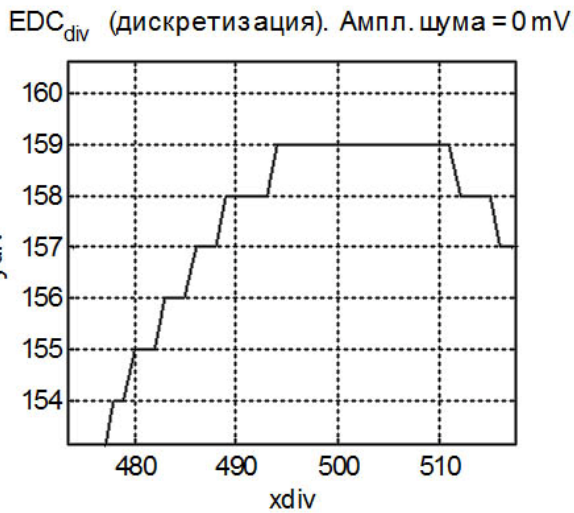


Рис. 49а. Фрагмент ЭДС в дискретной форме.

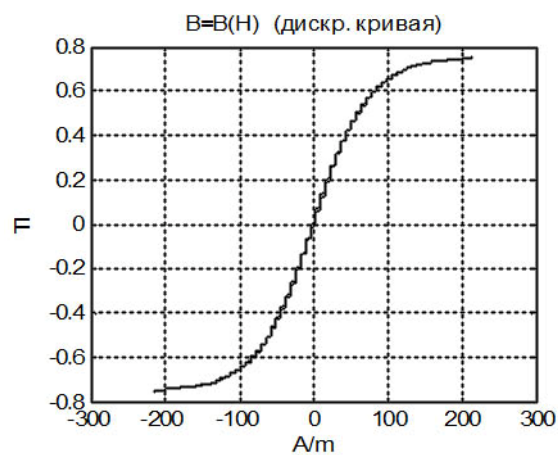


Рис.50.  $B=B(H)$  при дискретных  $B$  и  $H$ .

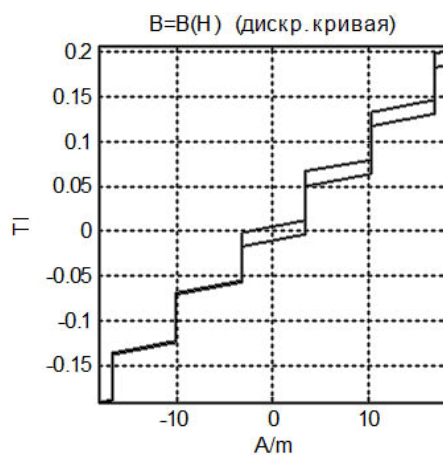


Рис.50а. Фрагмент рис.50

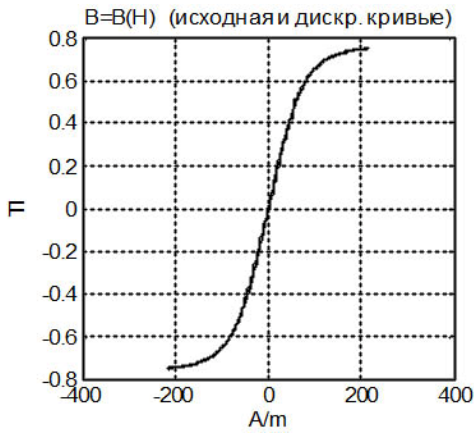


Рис.51. Эталонная  $V=B(H)$  и дискретных  $V$  и  $H$ .

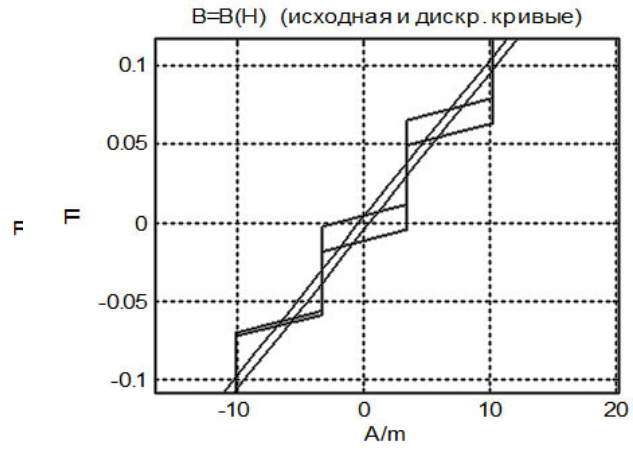


Рис.51а. Фрагмент рис.51.вблизи нуля  $V=B(H)$  при дискретных  $V$  и  $H$ .

На рис.52 показаны фрагменты эталонной кривой  $V=B(H)$  и кривой, полученной в результате обработки. Видим, что эти кривые практически совпали. Зашумление ЭДС измерительной катушки белым шумом амплитудой 3 мВ (рис.53) существенно в локальном искажает конечный результат. При этом получаем  $H_c \approx 0.3$  А/м и увеличение искажений вблизи насыщения.

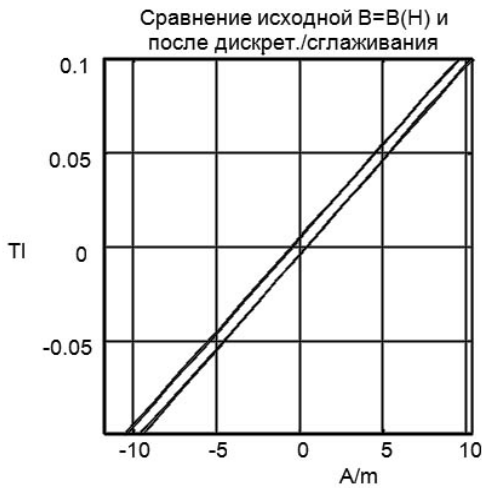


Рис.52. Фрагмент эталонной и сглаженной  $V=B(H)$  вблизи нуля.



Рис.52а. Эталон. и сглаж.  $V=B(H)$  вблизи насыщения.

ЭДС измерит. катушки ( $EDC_{discr}$ ) Ампл. шума = 3 мВ

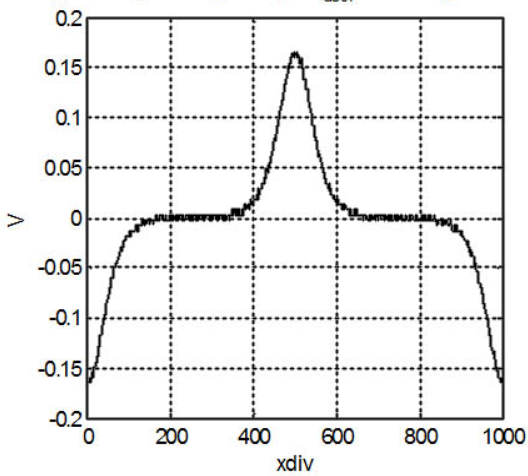


Рис.53.

ЭДС измерит. катушки ( $EDC_{discr}$ ) Ампл. шума = 3 мВ

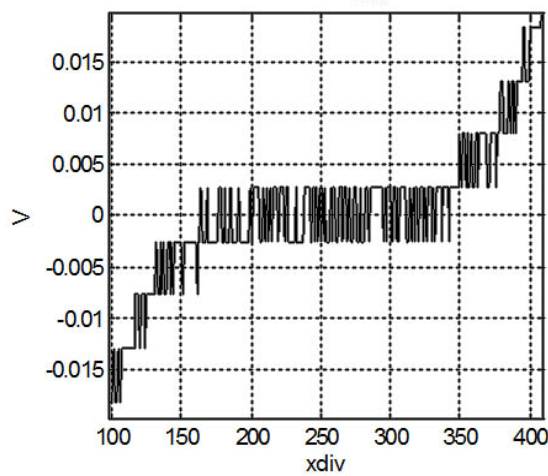


Рис.53а. Фрагмент рис.53.



Отрицательно на результате также сказывается глубокое насыщение, приводящее к появлению длинных горизонтальных участков на графике ЭДС. На этих участках полезный сигнал близкий к нулю продолжительное время “забивается” шумами, что приводит к увеличению погрешности интегрирования.

Положение улучшается, если при том же уровне шумов изображение занимает не четверть, а большую часть экрана по вертикали. На рис.54 показаны фрагменты эталонной кривой (сплошная линия), и кривой после обработки (штриховая линия), когда сигнал занимает 90% площади экрана. В обоих случаях ширина петли  $H_c \approx 0.4$  А/м.

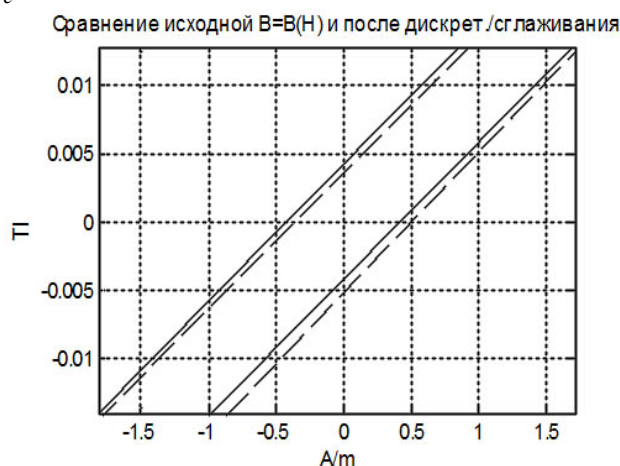


Рис.54.

Для уменьшения влияния шумов при проведении реальных экспериментов измерительная катушка шунтировалась небольшой емкостью. Величина емкости ( $\approx 100$  мкФ) подбиралась так, чтобы глобальные изменения кривых на экране осциллографа не были заметны.

#### 4.2. Обработка результатов эксперимента

Специальные меры (экранирование, термостатирование и т.п.) при проведении экспериментов не принимались. Давалось некоторое время на прогрев аппаратуры и выход генератора сигналов на установившийся режим. Некоторые эксперименты отбраковывались после визуальной проверки полученных данных на периодичность.

Сначала рассмотрим результаты обработки трех тождественных экспериментов при частоте  $f = 0.2$  Гц для стержня длиной 25 см с площадью сечения  $S = 1 \times 2$  мм<sup>2</sup>. Эксперименты проводились в разное время.

Пример 1. На рис.55 представлены экспериментальные данные, полученные компьютером от двух каналов осциллографа. Данные первого канала это напряжение на измерительном сопротивлении  $R_x$  в цепи соленоида, данные второго канала – напряжение на концах измерительной катушки. Напряжение на сопротивлении определяет ток и, следовательно, напряженность  $H^e$  магнитного поля соленоида. Напряжение, снимаемое с катушки, пропорционально производной  $\frac{d\Phi}{dt}$  магнитного потока по времени и после интегрирования опре-

деляет среднюю по сечению индукцию  $B$ . Падением напряжения на сопротивлении катушки, ввиду малости токов, пренебрегаем.

На рис.56 показана кривая  $B=B(H)$ , полученная без сглаживания, на рис.57 – после сглаживания экспериментальных данных. По линейному участку (рис57а) нетрудно найти значение магнитной восприимчивости стержня  $\mu_{rod} \approx 4900$ , по окрестности нуля (рис.57б) -  $H_c \approx 2.9 A/m$ .

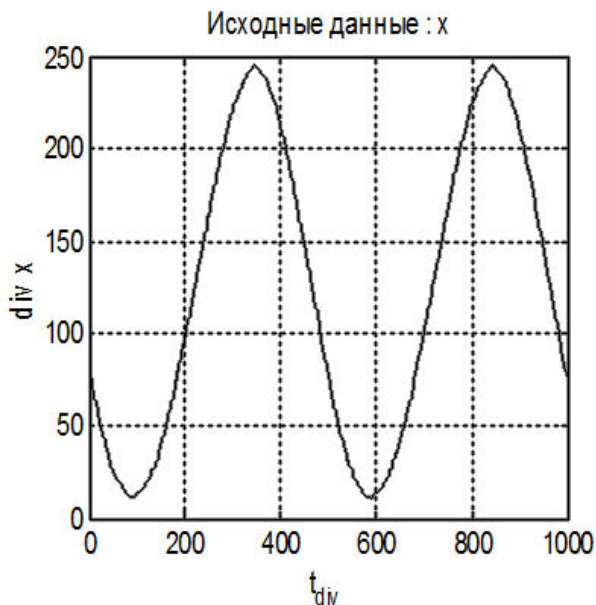


Рис.55. Channel 1

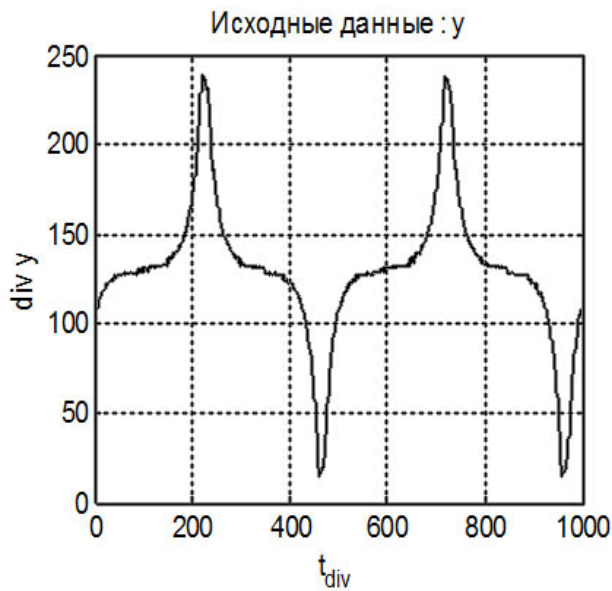


Рис.55а. Channel 2

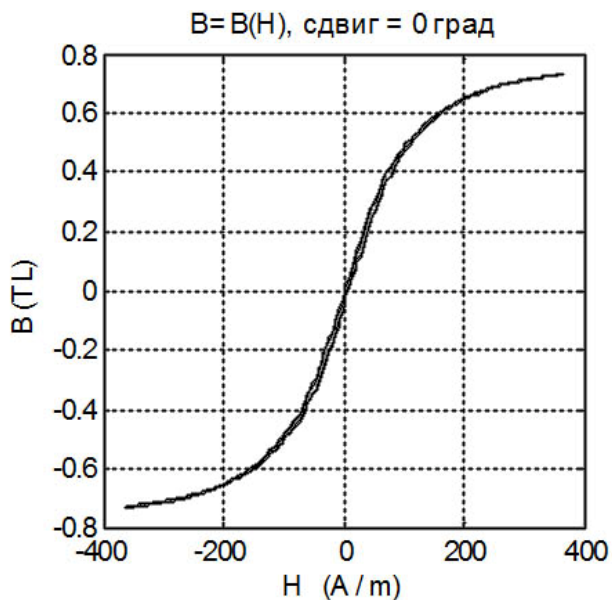


Рис.56.  $B=B(H)$  по исходным данным

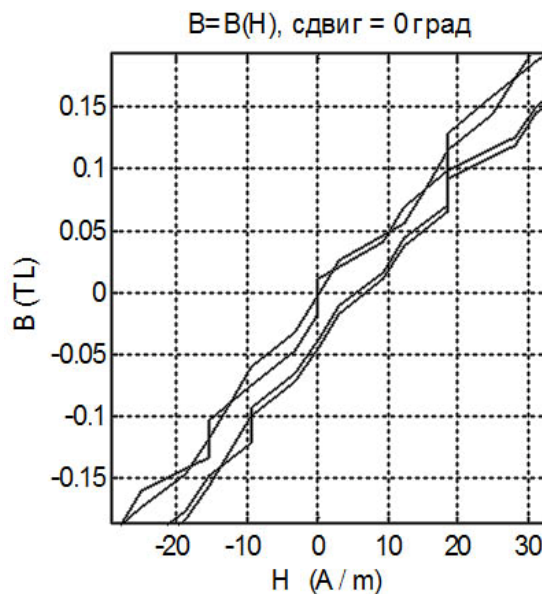


Рис.56а. Фрагмент рис.56

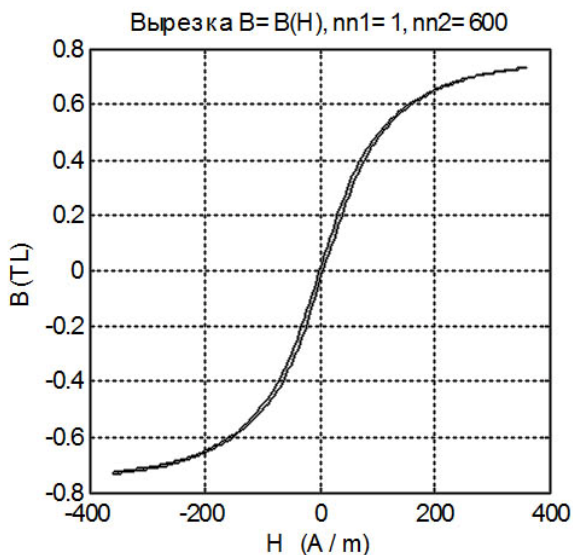


Рис.57.  $B=B(H)$  по сглаженным данным

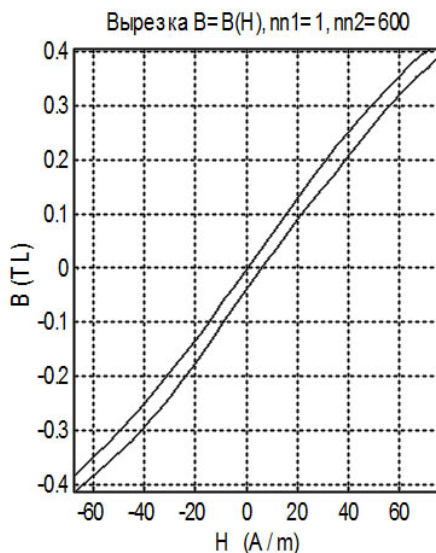


Рис.57а. Фрагмент рис.57

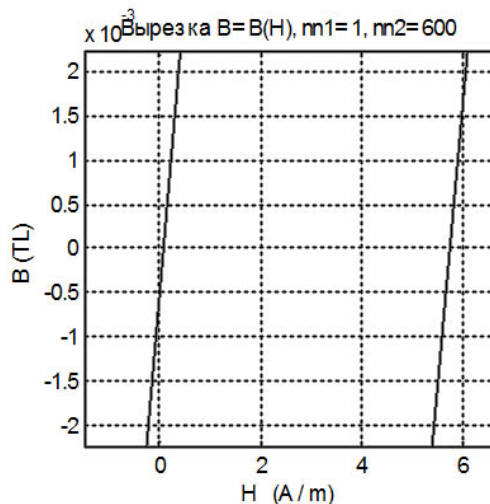


Рис.57б. Фрагмент рис.57

Пример 2. На рис.58 показана кривая  $B = B(H)$ , полученная после сглаживания данных 2-го эксперимента. По линейному участку (рис58а) находим магнитную восприимчивость стержня  $\mu_{rod} \approx 4900$ , по окрестности нуля (рис.58б) -  $H_c \approx 3.1$  А/м.

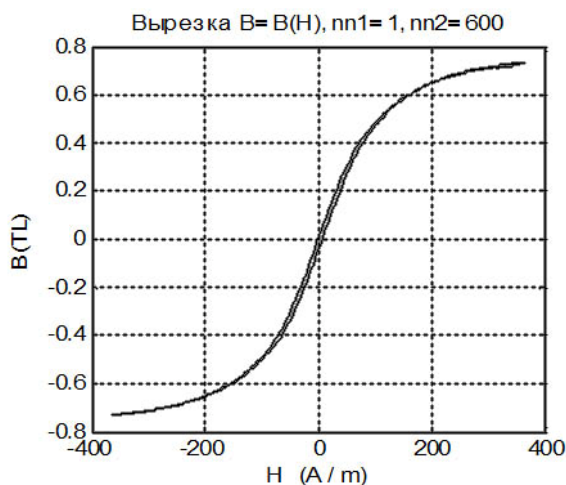


Рис.58.  $B=B(H)$  по сглаженным данным

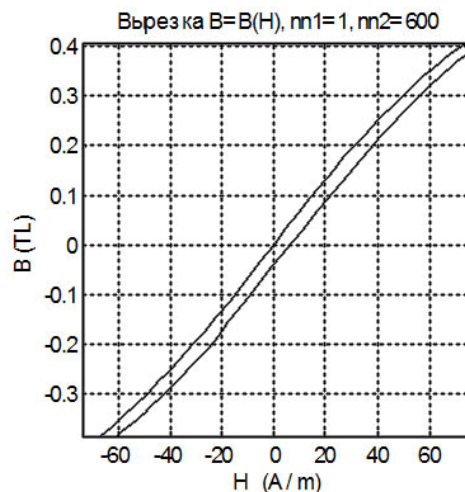


Рис.58а. Фрагмент рис.58

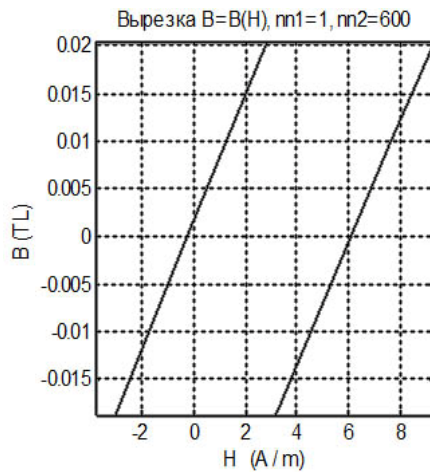


Рис.58б. Фрагмент рис.58

Пример 3. На рис.59 показаны фрагменты кривой  $B = B(H)$  после сглаживания данных 3-го эксперимента. Приведены результаты обработки двух последовательных периодов. По линейному участку (рис.59а) находим магнитную восприимчивость стержня  $\mu_{rod} \approx 4800$ , по окрестности нуля (рис.59б) -  $H_c \approx 2.8$  А/м.

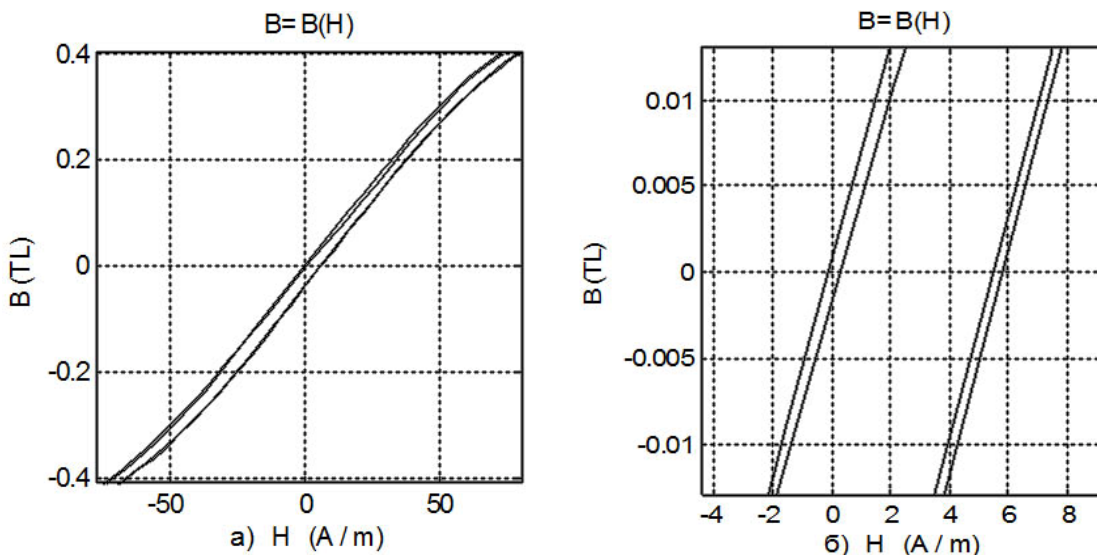


Рис.59а,б. Фрагменты.  $B=B(H)$  по сглаженным данным

С учетом результатов этих экспериментов можно заключить, что в диапазоне внешнего магнитного поля  $\pm 60$  А/м магнитная восприимчивость стержня  $\mu_{rod} \approx 4900$ , и  $H_c \approx (2.9 \pm 0.5)$  А/м. Здесь  $\pm 0.5$  А/м - погрешность, вносимая токами Фуко на частоте  $f = 0.2$  Hz (см. рис.43). Максимальная магнитная проницаемость несколько больше -  $\eta_{max} \approx 5300$ . Индукция насыщения, (см., например, рис.58), близка к паспортному значению  $B_s = 0.75$  Т.

Ввиду малости ширины петли гистерезиса и малости погрешности, можно предположить, что они входят в выражение  $H_c \approx (2.9 \pm 0.5)$  А/м с одинаковыми весовыми коэффициентами, близкими к единице. Некоторые сомнения в адекватности полученных результатов остаются, поскольку «паспортное» значение

$H_c = 1.6$  А/м не было достигнуто. Полученная теоретически амплитуда погрешности  $\pm 0.5$  А/м не позволяет включить в диапазон  $(2.9 \pm 0.5)$  А/м паспортное значение (уменьшением удельного сопротивления можно ликвидировать эту диспропорцию). Эксперименты с частотой  $f = 0.1$  Гц, которая является для генератора ЭДС Г6-46 нижней границей, не давали устойчивых результатов. Поэтому следует ослабить утверждение  $H_c \approx 2.9$  А/м, положив  $H_c \leq 3$  А/м.

Пример 4. На рис. 60, 61 представлены результаты эксперимента, отличающегося от предыдущих экспериментов уменьшенной величиной поля соленоида  $H_e$ . На рис. 60 - экспериментальные данные до обработки, на рис. 61 - после. Отсутствие горизонтальных участков на рис.60а снижает искажения от шумов, поэтому целесообразно ограничиться умеренным намагничиванием стержня. Глубокое насыщение с целью максимального уточнения предельной петли может привести к противоположному результату. Из рис.61 получаем  $\mu_{rod} \approx 5100$ ,  $H_c \approx 2.6$  А/м.

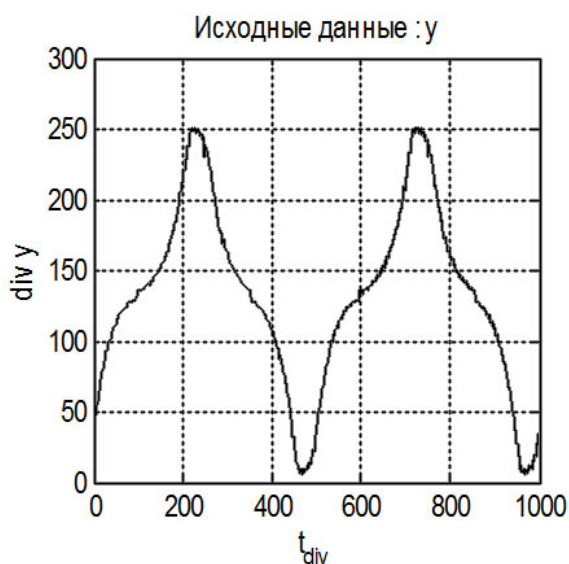


Рис.60а. Channel 2

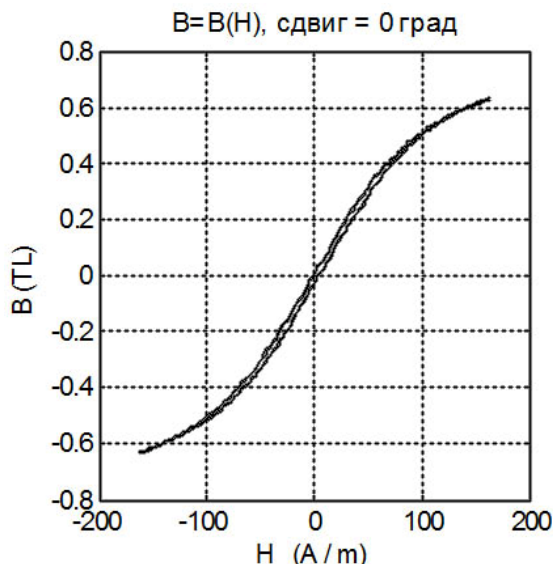


Рис.60б.  $B=B(H)$  по исходным данным  
 $B=B(H)$ , сдвиг = 0 град

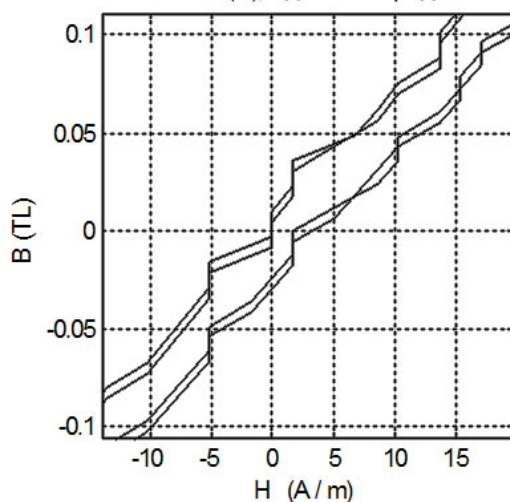


Рис.60в. Фрагмент рис.60б

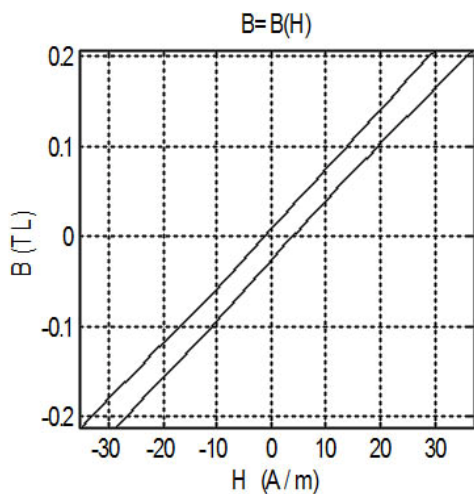


Рис.61а. Линейная часть кривой

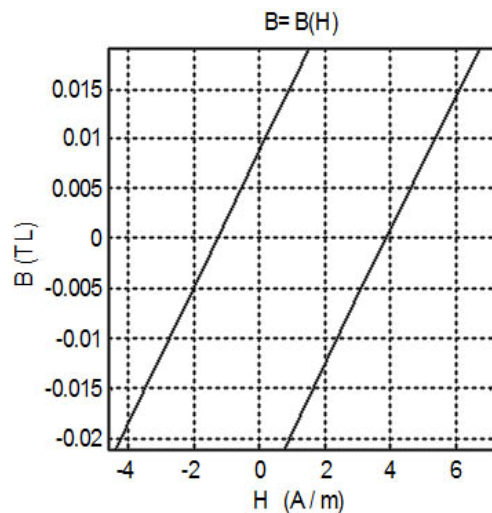


Рис.61б. Окрестность нуля

Пример 5. На рис. 62, 63 представлены результаты эксперимента, со стержнем длиной 10 см с площадью  $S=1 \times 1 \text{ мм}^2$ . По линейному участку (рис.63б) находим магнитную восприимчивость стержня  $\mu_{rod} \approx 2400$ , по окрестности нуля (рис.63в) -  $H_c \leq 4.3 \text{ А/м}$ .

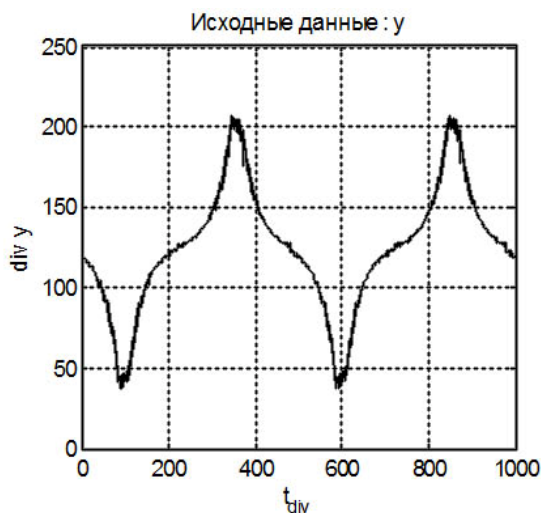


Рис.62а. Channel 2 до сглаживания  
 $B=B(H), S=1 \text{ мм}^2, L=10 \text{ см}$

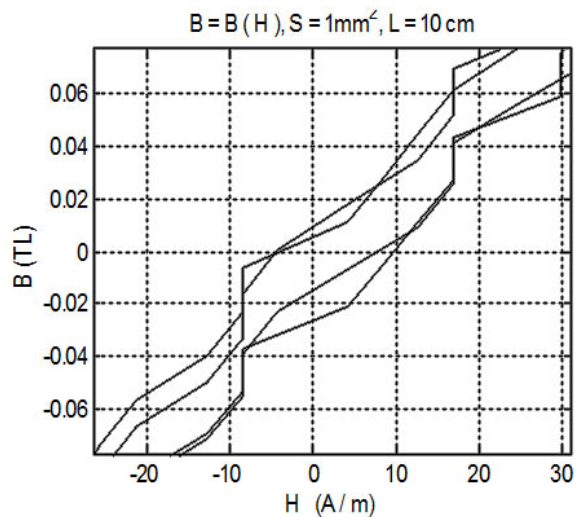


Рис.62б. Фрагмент кривой  $B=B(H)$   
 $B=B(H), S=1 \text{ мм}^2, L=10 \text{ см}$

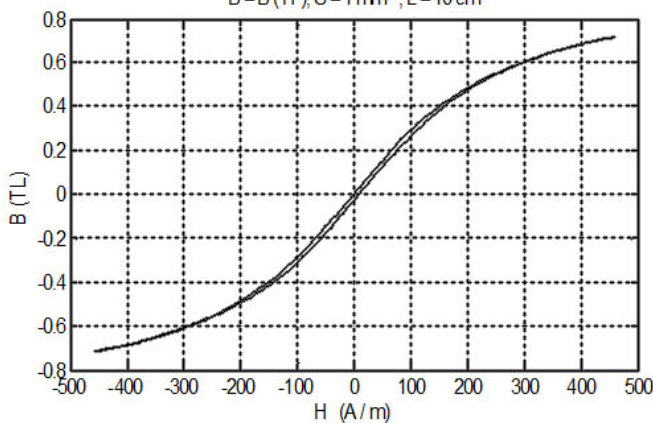


Рис.63а. Кривая  $B=B(H)$  после сглаживания

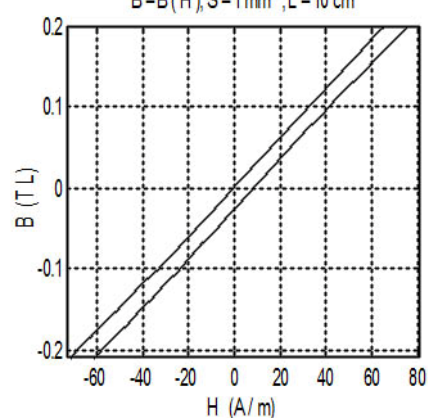


Рис.63б. Линейный участок

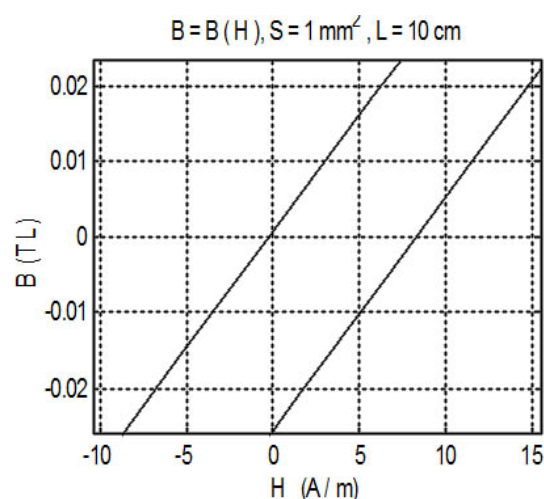


Рис.63в. Окрестность нуля

### Заключение

Целью работы являлось получение простой методики оценки магнитных характеристик гистерезисных стержней, используемых в пассивных системах ориентации для диссипации энергии. Основными характеристиками, определяющими диссипацию, являются магнитная восприимчивость  $\mu_{rod}$  стержня и коэрцитивная сила  $H_c$ .

На основании вышеизложенного можно предположить, что изложенная методика позволяет определить магнитную восприимчивость с точностью 10-20%. Погрешность в определении коэрцитивной силы может составить 100%, что, с учетом малости этой величины для магнитомягких материалов типа 79НМ, является удовлетворительным результатом.

Классическое решение [3], являющееся основой представлений о намагничивании цилиндра в переменном магнитном поле, дополнено простым способом вычисления потерь от вихревых токов и способом определения ширины « $H_c$ » петли  $B = B(H)$ . На примере конкретного стержня показано, что для частот ниже  $\approx 5$  Гц преобладают гистерезисные потери, выше 5 Гц - омические. Величина « $H_c$ », определяющая искажение гистерезисной петли вихревыми токами, лимитирует допустимые частоты при проведении экспериментов.

Дальнейшее улучшение методики видится в применении более совершенной аппаратуры, в первую очередь генератора с улучшенными характеристиками и осциллографа с повышенной разрешающей способностью. При выполнении математической обработки представляется перспективной замена локального сплайн-сглаживания результатов измерений глобальной аппроксимацией с применением параметрического семейства петель.

### Благодарности

Работа поддержана грантом поддержки ведущих научных школ России (№ НШ-6700.2010.1) и грантом РФФИ (№ 09-01-00431).

## Литература

1. M.I.Battagliere, F.Graziani, N.V.Kupriyanova, M.Yu.Ovchinnikov, V.I.Pen'kov. Design, building and experimental results of facility to test hysteresis rod parameters, Preprint of KIAM RAS, Moscow, 2007, № 65, 32 с.
2. Р.Бозорт. Ферромагнетизм. Перевод с английского ИЛ, Москва, 1951, 709 с.
3. В. Смайт, Электростатика и электродинамика. Перевод с английского, ИЛ, Москва, 1954, стр.386,387,408.
4. A. Mager, Stabilisierung von Erd-Satelliten mit weichmagnetischen Legierungen. Z. angew. Phys. 23. Bd., Heft 3, 1967, pp. 164-170.
5. А.П. Коваленко, Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами, Москва, Машиностроение, 1975

## Оглавление

Введение. Постановка задачи .....	3
1. Аналоговое интегрирование посредством RC цепочки .....	5
2. Линейное намагничивание бесконечного цилиндра. Точное решение .....	8
3. Нелинейное намагничивание $B = B_s \text{th}(\sigma H)$ . Численное моделирование	17
4. Интегрирование сигнала в цифровой форме. Результаты эксперимента	28
Заключение .....	38
Благодарности .....	38
Литература .....	39