



**Бондарев А.Е.**

Исследование  
нестационарных  
пространственно-временных  
структур с помощью  
решения оптимизационной  
задачи и методов  
визуализации

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Бондарев А.Е. Исследование нестационарных пространственно-временных структур с помощью решения оптимизационной задачи и методов визуализации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 37. 14 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-37>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

А.Е. Бондарев

**Исследование нестационарных пространственно-  
временных структур с помощью решения  
оптимизационной задачи и методов визуализации**

Москва

2011

А.Е. Бондарев

## **Исследование нестационарных пространственно-временных структур с помощью решения оптимизационной задачи и методов визуализации**

### **Аннотация**

В данной работе рассматривается приближенный подход, предназначенный для исследования пространственно-временных структур в нестационарных задачах вычислительной механики жидкости и газа. Подход основан на решении оптимизационной задачи и применении методов визуального представления. Применение этого подхода позволяет проводить быструю приближенную оценку зависимости возникновения нестационарных структур в потоке от определяющих параметров задачи. В ряде случаев данный подход позволяет получать искомую зависимость в виде квазианалитических соотношений.

A.E. Bondarev

## **Analysis of Unsteady Space-Time Structures Using the Optimization Problem Solution and Visualization Methods**

### **Abstract**

This paper presents an approximate approach to analysis of space-time structures for unsteady problems of CFD (computational fluid dynamics). The approach is based on the solution of optimization problem combined with methods of data visual presentation. This approach is intended for fast approximate estimation of unsteady flow structures dependence on character parameters (or determining parameters) in a certain class of problems. For some cases such approach allows to obtain the sought-for dependence in a quasi-analytical form.

Версия статьи с цветными иллюстрациями размещена по адресу [http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/publications/cgd\\_publ.htm](http://www.keldysh.ru/pages/cgraph/publications/cgd_publ.htm).

## Содержание

1. Введение.....	4
2. Обратные задачи в прикладных исследованиях .....	5
3. Описание методологического подхода.....	7
4. Применение методологического подхода к задаче о нестационарном взаимодействии вязкого сверхзвукового потока со струйной преградой.....	9
5. Заключение.....	14
Литература.....	14

# 1. Введение

Нестационарные процессы в задачах механики жидкости и газа характеризуются наличием изменяющихся пространственно-временных структур – отрывных зон, циркуляционных течений, вихревых дорожек и т.д. Эти структуры могут появляться и исчезать, определяя собой качественную картину и количественные характеристики течения. Тщательное изучение процессов зарождения и изменения подобных структур является необходимым.

Современная вычислительная техника и численные методы позволяют в настоящее время тщательно и точно моделировать практически любой нестационарный физический процесс в механике сплошных сред и получать соответствующее поле физических величин. Однако в практических приложениях недостаточно просто рассчитать поле течения и представить красивую картину трансформации пространственно-временной структуры. Гораздо больший интерес вызывает не само явление, а то, при каких обстоятельствах оно возникает, т.е. зависимость возникновения явления от определяющих параметров задачи, таких как числа Маха, Рейнольдса, Прандтля и т.д. Для того чтобы рассчитать подобную зависимость необходимо решение оптимизационной задачи, основанной на многократном решении обратных задач.

В данной работе рассматривается приближенный подход, предназначенный для быстрой и грубой оценки зависимости возникновения пространственно-временных структур от определяющих параметров задачи. Этот подход основан на решении оптимизационной задачи и применении методов визуального представления для анализа результирующего многомерного массива. Согласно классификации методов научной визуализации, приведенной в [1], такой подход может быть отнесен к методам анализа данных.

В ряде случаев, как показано ниже на конкретных примерах, применение данного подхода позволяет получать квазианалитические соотношения для искомых зависимостей.

## **2. Обратные задачи в прикладных исследованиях.**

Численное решение обратных задач в газовой динамике достаточно сложно в силу того, что задачи газовой динамики в общем случае многомерны по пространству. Необходимо решать 4D задачи (3D+ время) в вариационной постановке, что требует серьезных вычислительных и временных ресурсов. Отдельной проблемой является визуальное представление решений обратных задач, как в концептуальном смысле, так и в инструментальном. Тем не менее, интенсивное современное развитие вычислительных средств и методов позволяет в настоящее время вплотную заниматься этим классом задач математического моделирования.

Используя концепцию и постановку обратных задач, мы можем решать широкий круг проблем. Обратные задачи классифицируются согласно [2,3], как поиски границы, коэффициента, ретроспективные обратные задачи или задачи оптимального проектирования. В общем, в практических целях обратные задачи формулируются следующим образом: найти при каких определяющих параметрах в классе задач будет возникать интересующее практического исследователя явление, независимо от того, как проявляется это явление количественно (достижение некой величиной определенного значения) или качественно (зарождение вихрей, срыв потока и т.д.).

Формализованная постановка обратной задачи выглядит в общем случае следующим образом:

Решение выбранной задачи формируется в процессе математического моделирования и определяется конечным набором определяющих параметров задачи. Эти параметры можно разделить на три группы:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  - параметры, характеризующие физические свойства задачи и математическую

модель;  $B = (b_1, \dots, b_m)$  - параметры, характеризующие численный метод;  $C = (c_1, \dots, c_l)$  - параметры, относящиеся к организации процесса расчета. Численное решение  $F = F(A, B, C) = F(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$  вырабатывается в процессе расчета на основе выбранной математической модели, численного метода и способа организации расчета.

В качестве функционала событий будем рассматривать функционал  $\Phi(F(A, B, C))$ , который на решении задачи принимает, подобно логической переменной, два значения: 1 – если событие, интересующее исследователя, наступило (независимо от рода события – достижение величиной определенного значения, появление в потоке новой качественной структуры и т.п.) и 0 – если событие не наступило.

$$\Phi(F(A, B, C)) = 0 - \text{событие не наступило} \quad (2.1)$$

$$\Phi(F(A, B, C)) = 1 - \text{событие наступило.}$$

Представляя  $\Phi(F(A, B, C))$  как  $\Phi(F(A, B, C)) = \Phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ , можно в общем случае сформулировать обратную задачу следующим образом:

$$\text{найти все значения определяющих параметров } (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l), \text{ при которых выполняется условие } \Phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l) = 1. \quad (2.2)$$

Рассматривая  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$  как набор базисных векторов, можно представить пространство определяющих параметров  $L(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ , имеющее размерность  $(n + m + l)$ . Тогда в общем случае обратную задачу можно сформулировать так:

$$\text{найти в пространстве } L \text{ все подобласти } L^*, \text{ для которых выполняется } \Phi(L^*) = 1.$$

### 3. Описание методологического подхода.

На практике в задачах аэрогазодинамики при изучении с помощью численного или экспериментального моделирования того или иного явления (возникновение отрыва пограничного слоя на теле, разрушение вихревой зоны и т.п.) мы, как правило, знаем причину возникновения явления и количественный параметр, управляющий этой причиной (управляющий параметр). Исследование стремится к численному (экспериментальному) установлению зависимостей управляющего параметра от определяющих параметров задачи. Построение подобных зависимостей в квазианалитическом или табличном виде является практической целью исследования. По сути, такие зависимости и составляют практический смысл аэрогазодинамики последние полвека.

В данной работе рассматривается методологический подход получения таких зависимостей с помощью численного моделирования. Суть данного подхода можно описать следующим образом.

Для изучения конкретного явления (эффекта) проводится решение обратной задачи с целью нахождения точного значения управляющего параметра, при котором наступает изучаемое явление. Обратная задача решается путем многократного решения прямой задачи с вариацией управляющего параметра  $f_{упр}^*$  при заданном наборе определяющих параметров  $f_{упр}^*(f_1, \dots, f_n)$ . Далее реализуется многократный расчет обратных задач с вариацией определяющих параметров  $f_1, \dots, f_n$  с выбранным шагом в пределах их области изменения. Результатом применения такого вычислительного подхода является зависимость управляющего параметра от определяющих параметров задачи, представленная в общем случае n-мерным массивом  $f_{упр}^*(f_1, \dots, f_n)$ . Далее проводится аналитическое изучение массива, отбрасываются определяющие параметры, не оказывающие влияния на

управляющий параметр. Тем самым понижается размерность массива. К оставшимся данным применяются современные методы визуального представления, которые в ряде случаев позволяют быстро и эффективно получить искомые квазианалитические зависимости  $f_{ynp}^*(f_1, \dots, f_n)$ . Для получения таких зависимостей предполагается там, где это возможно, аппроксимировать данные массива с помощью простых геометрических элементов – линий, плоскостей, участков сфер и т.д.

Здесь возникают интересные задачи с точки зрения построения концепций и выработки методов научной визуализации. Легко представить визуально в виде поверхности зависимость типа  $f_{ynp}^*(f_1, f_2)$ , гораздо сложнее организовать визуальное представление области пространства  $f_{ynp}^*(f_1, f_2, f_3)$ . Правильная и доступная зрителю организация визуализации зависимостей от более чем трех параметров является предметом разработок и исследований в задачах научной визуализации.

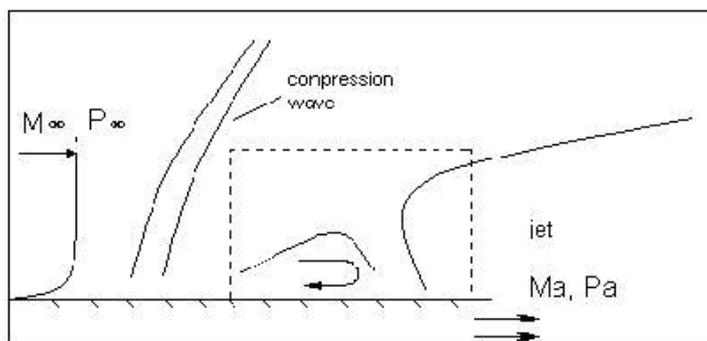
Организация многократного решения обратной задачи, сводящаяся к многократному решению однотипных задач с разным набором определяющих параметров и варьируемым управляющим параметром органично укладывается в идеологию построения многопроцессорных параллельных расчетов по принципу многозадачного параллелизма - «одна задача – один процессор» с минимальным количеством обменов данными между процессорами. Параллельное вычисление однотипных задач позволяет резко ускорить процесс расчета и сделать его гораздо более эффективным с точки зрения конкретных практических приложений. К числу преимуществ рассматриваемого подхода следует отнести возможность его реализации на грубых сетках.

Данный подход был успешно применен к оптимизации вычислительных свойств гибридной разностной схемы с учетом влияния вязкости и турбулентности [4]. В качестве события рассматривалось появление нежелательных осцилляций. Управляющим параметром послужил весовой

коэффициент гибридной разностной схемы. В результате для выбранного класса задач были получены квазианалитические зависимости весового коэффициента от определяющих параметров задачи – шага сеточного разбиения, чисел Маха и Рейнольдса задачи.

#### 4. Применение методологического подхода к задаче о нестационарном взаимодействии вязкого сверхзвукового потока со струйной преградой

Данный подход был применен к исследованию процессов образования нестационарных циркуляционных зон в задаче о нестационарном взаимодействии вязкого сверхзвукового потока со струйной преградой. Проводилось численное исследование течения на внешней боковой поверхности обтекаемого сверхзвуковым вязким потоком сопла, из которого истекает спутная сверхзвуковая вязкая недорасширенная струя большой степени нерасчетности. Общая схема течения рассматриваемой задачи представлена на приведенном ниже рисунке 1.

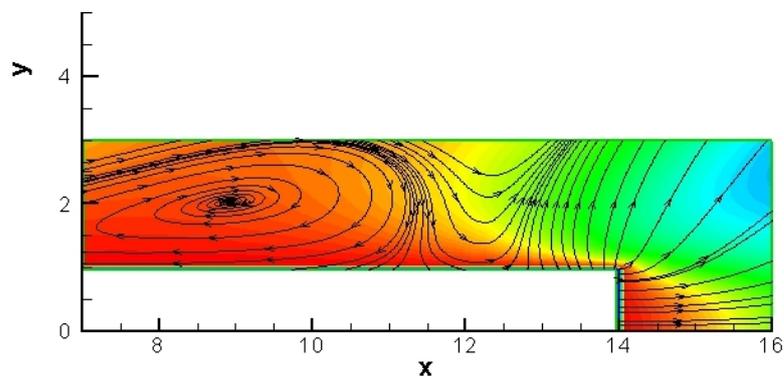


**Рис.1.** Схема течения.

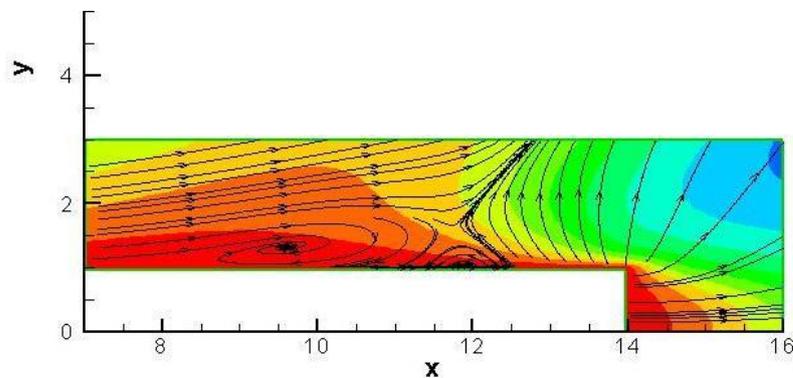
При расширении данная струя затекает на внешнюю боковую поверхность сопла, образуя для внешнего потока струйную преграду. Наличие струйной преграды вносит возмущение во внешний поток, что приводит к отрыву пограничного слоя на внешней поверхности сопла и возникновению во внешнем потоке перед преградой области циркуляционного течения (Рис.2).

Рассматривалась задача с нестационарным граничным условием на срезе сопла, где в качестве параметра струи, изменяющегося со временем, выбрана степень нерасчетности недорасширенной струи  $n = n(t) = P_a / P_\infty$ , ( $P_a$  - давление на срезе сопла, а  $P_\infty$  - давление в набегающем потоке). В качестве математической модели использовалась полная система нестационарных двумерных уравнений Навье-Стокса для вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Для численного решения задачи применяется неявная гибридная конечно-разностная WW-схема, обладающая вторым порядком аппроксимации по времени и пространству.

В качестве  $n = n(t)$  выбиралось линейная зависимость, позволявшая задавать различные скорости изменения нерасчетности струи до  $n = 100$ . В ходе расчетов было обнаружено, что увеличение темпа повышения нерасчетности приводит к новой качественной картине течения в окрестности циркуляционной зоны перед струйной преградой (рис.3).



**Рис.2.** Структура потока при медленном повышении нерасчетности

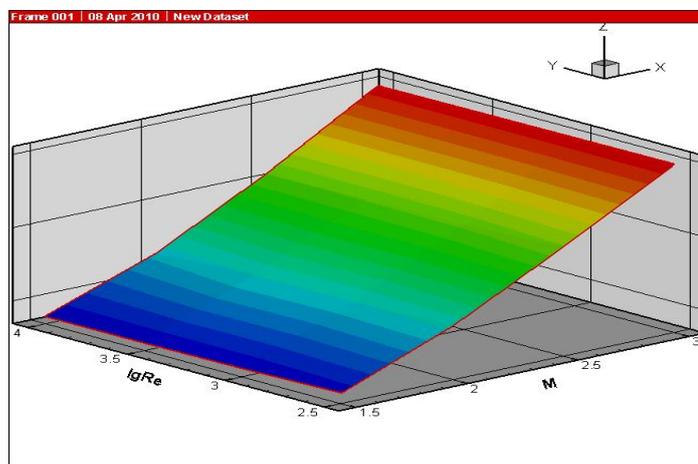


**Рис.3.** Структура потока при быстром повышении нерасчетности

В качестве управляющего параметра была выбрана скорость повышения нерасчетности. В качестве события рассматривалось образование новой структуры в картине течения. На первом этапе рассматривалось два определяющих параметра. В качестве определяющих параметров были использованы характерное число Маха  $M_\infty$  и число Рейнольдса  $Re_\infty$  задачи. Для каждого набора  $(M_\infty, Re_\infty)$  проводилось решение обратной задачи при помощи вариации скорости повышения нерасчетности до наступления искомого события – образования новой структуры течения с дополнительной циркуляционной зоной. Определяющие параметры, в свою очередь, варьировались в диапазонах  $1.5 \leq M_\infty \leq 3$  и  $2.5 \leq \lg Re_\infty \leq 4$ .

Для каждого набора  $(M_\infty, Re_\infty)$  таким образом определялась скорость повышения степени нерасчетности, при которой наступает искомое событие и, соответственно, характерное время наступления этого события - образования новой структуры. В качестве характерного времени выбиралось  $t^* = t_{cob} / t_{n=100}$ , где  $t_{cob}$  - время наступления события, а  $t_{n=100}$  - время достижения значения степени нерасчетности, равной 100.

В режиме online в процессе расчета проводилось построение и визуальное представление в виде поверхности зависимости характерного времени наступления события от набора определяющих параметров  $t^*(M_\infty, \lg Re_\infty)$ . Данная поверхность представлена на рисунке 4.

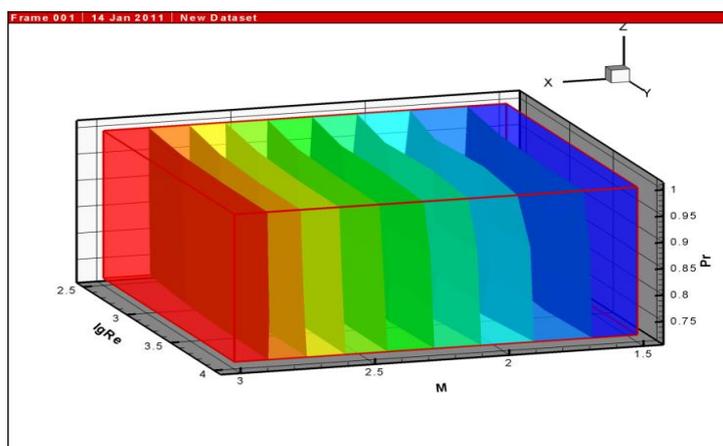


**Рис.4.** Зависимость характерного времени от чисел Маха и Рейнольдса

Вид поверхности  $t^*(M_\infty, \lg Re_\infty)$ , представленной на рисунке 4, позволяет сразу определить, что зависимость характерного времени от изменения числа  $Re_\infty$  является крайне слабой, а зависимость от изменения характерного числа  $M_\infty$  является почти линейной. Таким образом была получена квазианалитическая зависимость  $t^* = 0.289M_\infty + 0.131$ .

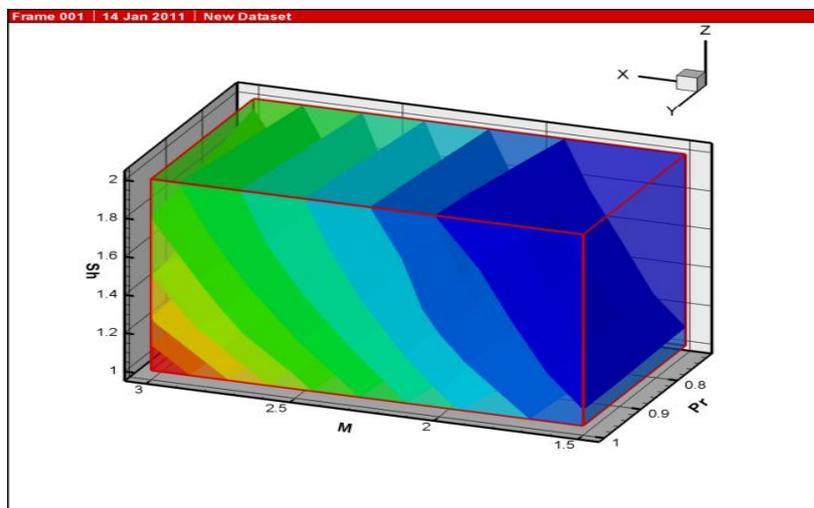
На следующем этапе рассматривалась задача с четырьмя определяющими параметрами. В результате применения вышеизложенного методологического подхода был построен 4-мерный массив, численно характеризующий зависимость характерного времени наступления события  $t^* = t_{cob} / t_{n=100}$  от четырех определяющих параметров задачи  $(M_\infty, Re_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ , где  $Pr_\infty$  - число Прандтля,  $Sh_\infty$  - число Струхаля. Пределами изменения характерных чисел задачи выбраны  $1.5 \leq M_\infty \leq 3$ ;  $2.5 \leq \lg Re_\infty \leq 4$ ;  $0.72 \leq Pr_\infty \leq 1$ ;  $1 \leq Sh_\infty \leq 2$ .

На рис. 5 представлена зависимость  $t^* = t^*(M_\infty, \lg Re_\infty, Pr_\infty)$  в виде изоповерхностей. Характер изоповерхностей подтверждает ранее полученный результат, что для данного класса задач в выбранном ламинарном диапазоне числа  $Re_\infty$ , характерное время не зависит от числа Рейнольдса.



**Рис.5.** Зависимость характерного времени от чисел Маха, Рейнольдса и Прандтля

Таким образом мы можем понизить размерность массива результатов и далее рассматривать уже трехмерный массив  $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$ . На рис. 6 представлена зависимость  $t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty)$  в виде изоповерхностей.



**Рис.6.** Зависимость характерного времени от чисел Маха, Прандтля и Струхалия

Анализируя вид изоповерхностей, можно утверждать, что для целей грубой оценки их можно представить в виде плоскостей вида

$$t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty) = AM_\infty + BPr_\infty + CSh_\infty$$

Построение подобных плоскостей позволяет получить квазианалитическое выражение для усредненной оценки зависимости характерного времени наступления события от определяющих параметров задачи, оказывающих влияние на физический процесс образования дополнительной циркуляционной зоны:

$$t^* = t^*(M_\infty, Pr_\infty, Sh_\infty) = 0.224 M_\infty - 0.04 Pr_\infty - 0.132 Sh_\infty.$$

## 5. Заключение

Рассматриваемый оптимизационный подход помогает в нестационарных задачах провести быструю и эффективную приближенную оценку зависимости критических точек перехода к новым структурам от определяющих параметров задачи. Результирующая зависимость представляется в виде многомерного массива данных. Анализ массива данных и его визуальное представление дают возможность уменьшения размерности массива данных, определения характера зависимости и ее представления в квазианалитическом виде. Данный подход органично распараллеливается и может успешно применяться в задачах вычислительной физики.

### Литература

- [1] *Бондарев А.Е., Галактионов В.А., Четкин В.М.* Анализ развития концепций и методов визуального представления данных в задачах вычислительной физики / Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, Т. 51, N 4, С. 669–683.
- [2] *Алифанов О.М.* Обратные задачи в теплопередаче. М, Машиностроение, 1988.
- [3] *Beck J.V., Blackwell B., St.Clair* Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. John Wiley&Sons, USA, N.Y., 1985.
- [4] *Бондарев А.Е.* Оптимизация гибридной разностной схемы с учетом влияния вязкости и турбулентности на основе решения обратных задач // Сборник трудов конференции «Высокопроизводительные вычисления в задачах механики и физики», Москва, 2009. С.39-44.