ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2011 г.

Махов С.А.

Модифицированная модель мировой динамики КМХ. Вероятностно-теоретический подход к построению сценариев развития

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

С.А. Махов

Модифицированная модель мировой динамики КМХ. Вероятностно-теоретический подход к построению сценариев развития

Москва - 2011

С.А. Махов. Модифицированная модель мировой динамики КМХ. Вероятностно-теоретический подход к построению сценариев развития. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 16 страниц, 14 рисунков, библиография: 8 наименований.

В данной работе делается попытка модифицировать модель Коротаева–Малкова–Халтуриной (КМХ) с тем, чтобы модель могла давать лучшие прогнозы на 50-100 лет вперед. Проводится исследование модифицированной модели. Излагается вероятностный подход к анализу возможных динамических режимов модели.

S.A. Makhov. The modified KMKh-model of the world dynamics. Probability-theoretical approach to the construction of scenarios of development. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 16 Pages, 14 Figures, 8 References.

In this paper an attempt is made to modify the Korotaev-Malkov-Khalturina (KMKh) model to ensure that the model could give the best forecasts for 50-100 years ahead. Is the study of the modified model. Presents a probabilistic approach to the analysis of the possible dynamical regimes of the model.

Исходная модель

В классической модели Коротаева–Малкова–Халтуриной (далее – модель КМХ) [1, 2, 3] три переменные: численность населения N, производительность труда T (которая на самом деле есть просто валовой мировой продукт Y на душу населения) и грамотность L. Уравнения для них записываются в таком виде:

$$\frac{dN}{dt} = aN(T - m)(1 - L), \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} = bN(T - m), \tag{2}$$

$$\frac{dL}{dt} = cL(T - m)(1 - L), \tag{3}$$

$$Y = TN. \tag{4}$$

Где a, b, c, m – константы. Посредством введения дополнительной переменной $S = T - m$, представляющей собой, по словам авторов, «излишки на душу населения» можно добиться упрощения записи уравнений.

$$\frac{dN}{dt} = aNS(1 - L), \tag{5}$$

$$\frac{dT}{dt} = bNS, \tag{6}$$

$$\frac{dL}{dt} = cLS(1 - L). \tag{7}$$

В ходе эволюции переменные демонстрируют следующее поведение: грамотность выходит на стационар, вслед за ней численность населения, а уровень технологий растет по экспоненциальному закону.

Один из недостатков модели – несоответствие фактическим данным после 1970-х гг. Например, грамотность к 2010 практически равна единице, соответственно, численность населения также должна перестать расти (или расти с очень низкими темпами), однако, этого не наблюдается.

Следовательно, для лучшего описания мировой динамики в относительно недалеком прошлом и предсказания в будущем необходима другая модель. Модель КМХ обладает таким несомненным плюсом, как компактность и маломерность (т.е. весьма небольшое число переменных и параметров), поэтому уместно начать с ее модифицирования.

Модификация модели

В предлагаемой модификации первая переменная остается без изменения, вторая получает определение как продукт на одного работающего, третья переменная меняется совсем. Вместо грамотности рассматривается ожидаемая продолжительность обучения, выраженная в годах. По последней величине имеются некоторые данные, по крайней мере, с 1970 года (рис. 1).

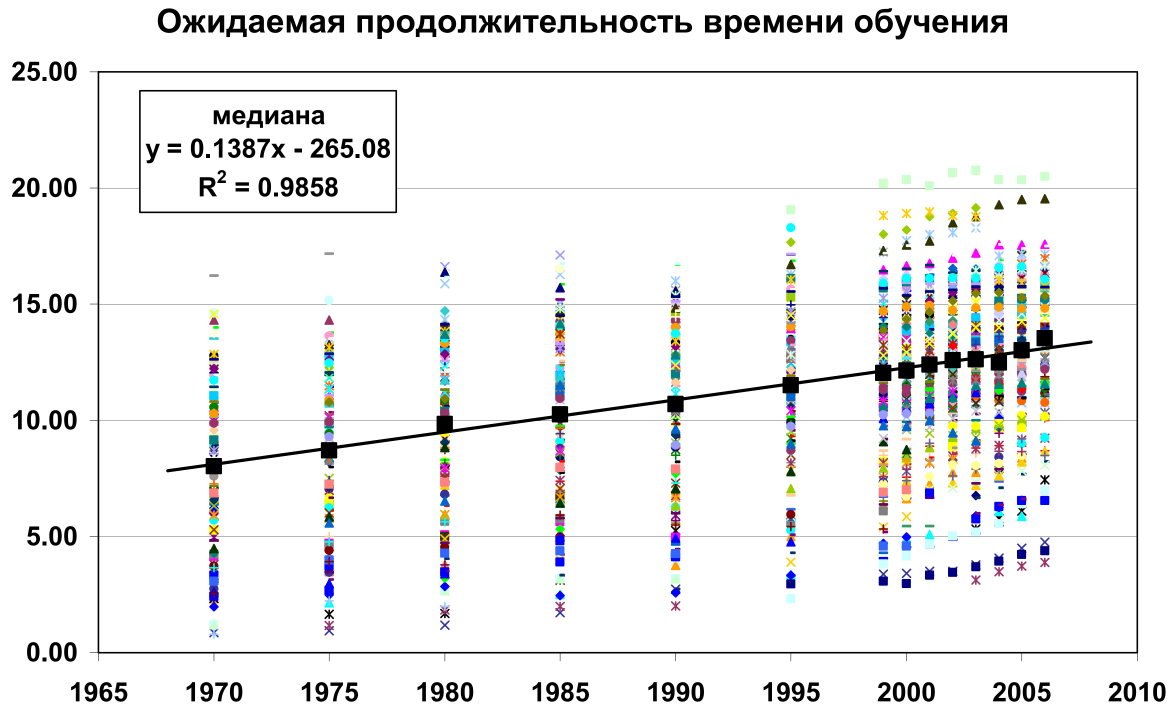

Рис. 1. Ожидаемая продолжительность времени обучения за 1970-2006. Крупными квадратами обозначены медианные значения в текущем году. Источник: UNESCO [4].
Через медианные значения проведена линия регрессии с уравнением $y = 0.1387(x - 1911.2)$.

В настоящей работе бралось средневзвешенное значение, которое по смыслу лучше подходит в качестве характеристики мира в целом. В качестве веса принята доля численности населения стран по отношению к общемировой численности населения[1], после чего происходило суммирование по всем странам. Величина представлена на рис. 2.

[1] То есть вес показывает вероятность для какого-либо индивидуума принадлежать данной стране.

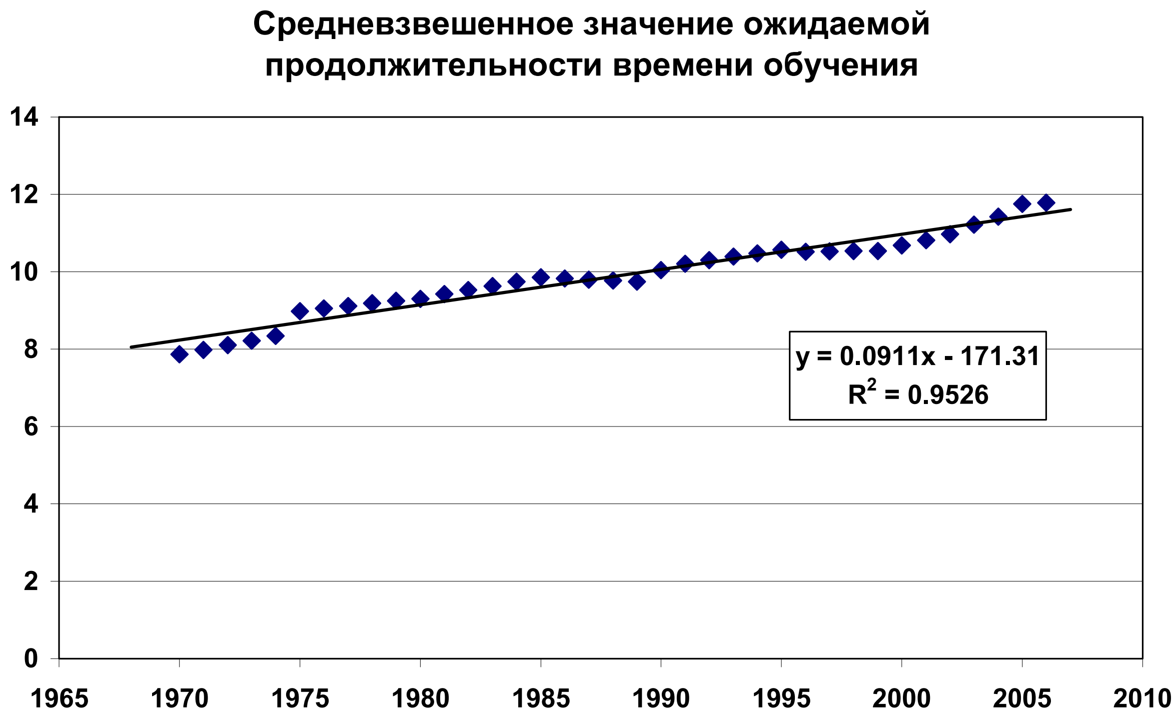

Рис. 2. Средневзвешенная по миру ожидаемая продолжительность времени обучения за 1970-2006, построенная с интерполяцией. В качестве весов взяты доли стран в мировой численности населения. Источники: UNESCO [7], UN [4, 5].
Через точки проведена линия регрессии с уравнением y = 0.0911(x – 1880.5).

Структура уравнений для трех переменных примерно такая же, как и в исходной модели:

$$\frac{dN}{dt} = k_N N\left(1 - \frac{E}{E_1}\right), \tag{8}$$

$$\frac{dT}{dt} = k_T s_T \frac{Y}{N} E\left(1 - \frac{E}{E_2}\right), \tag{9}$$

$$\frac{dE}{dt} = k_E s_E \frac{Y}{N}\left(1 - \frac{E}{E_2}\right), \tag{10}$$

$$Y = k_Y T N\,. \tag{11}$$

Где N – численность населения,
T – уровень технологий – общая производительность труда (доллары на душу населения),
E – ожидаемая продолжительность обучения (в годах),
Y – валовой мировой продукт (в постоянных долларах 1990 года);
E_1 – максимальное время обучения, при котором возможен демографический рост,

E_2 – предельное время обучения,
s_T – доля ВМП, идущая на валовое накопление,
s_E – доля ВМП, идущая в образование,
k_N – параметр демографического роста,
k_T – коэффициент отдачи капитальных вложений,
k_E – коэффициент отдачи вложений в образование,
k_Y – доля работающих (занятых) в общей численности населения, принята константой.

На основании имеющихся данных ООН [4, 5] и Всемирного Банка [6] по численности населения и ВМП и ЮНЕСКО по времени обучения [7] с 1970 по 2008 г.г. можно построить соответствующие регрессии для каждого уравнения и идентифицировать параметры по аналогии с [8].

Модель демонстрирует различную динамику численности населения в зависимости от соотношения двух параметров: E_1 и E_2. Первый показывает ожидаемое время обучения, при котором рождаемость и смертность уравниваются и демографический рост отсутствует, т.е. численность населения не растет. Второй является максимально возможным временем обучения, определяемым продолжительностью жизни и экономическими факторами (трудовой стаж, экономическая выгода от образования).

Возможные динамические режимы (сценарии развития).

1. При $E_1 < E_2$ численность населения достигает максимума, после чего убывает – «режим с возвратом» (рис. 3а, 3б, 3в, 3г).

Значения параметров и начальных данных, при которых проведены расчеты, представленные на рис. 3, таковы.

Параметры: $k_N = 0.04$, $k_T = 0.033$, $k_E = 0.0012$, $k_Y = 0.445$, $s_T = 0.222$, $s_E = 0.047$, $E_1 = 16.8$, $E_2 = 18.1$.

Начальные данные: $t_0 = 1970$, $N_0 = 3.70*10^9$, $T_0 = 7200$, $E_0 = 8.2$.

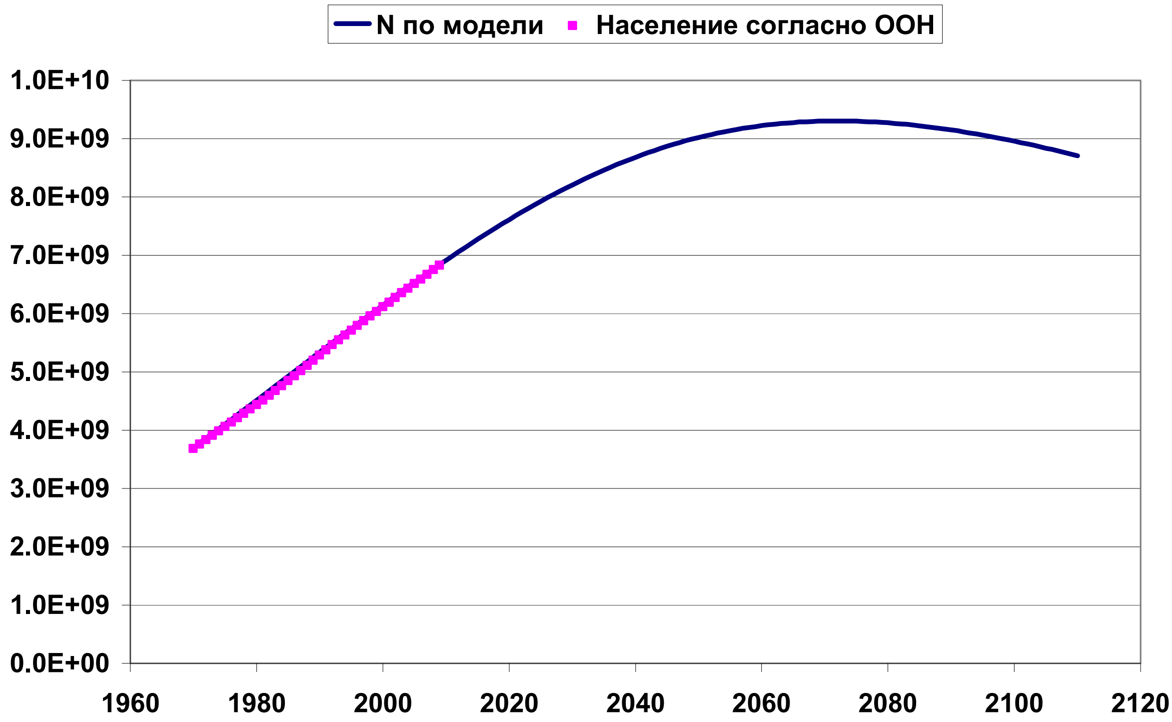
N по модели
Население согласно ООН
1.0E+10
9.0E+09
8.0E+09
7.0E+09
6.0E+09
5.0E+09
4.0E+09
3.0E+09
2.0E+09
1.0E+09
0.0E+00
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 3а.

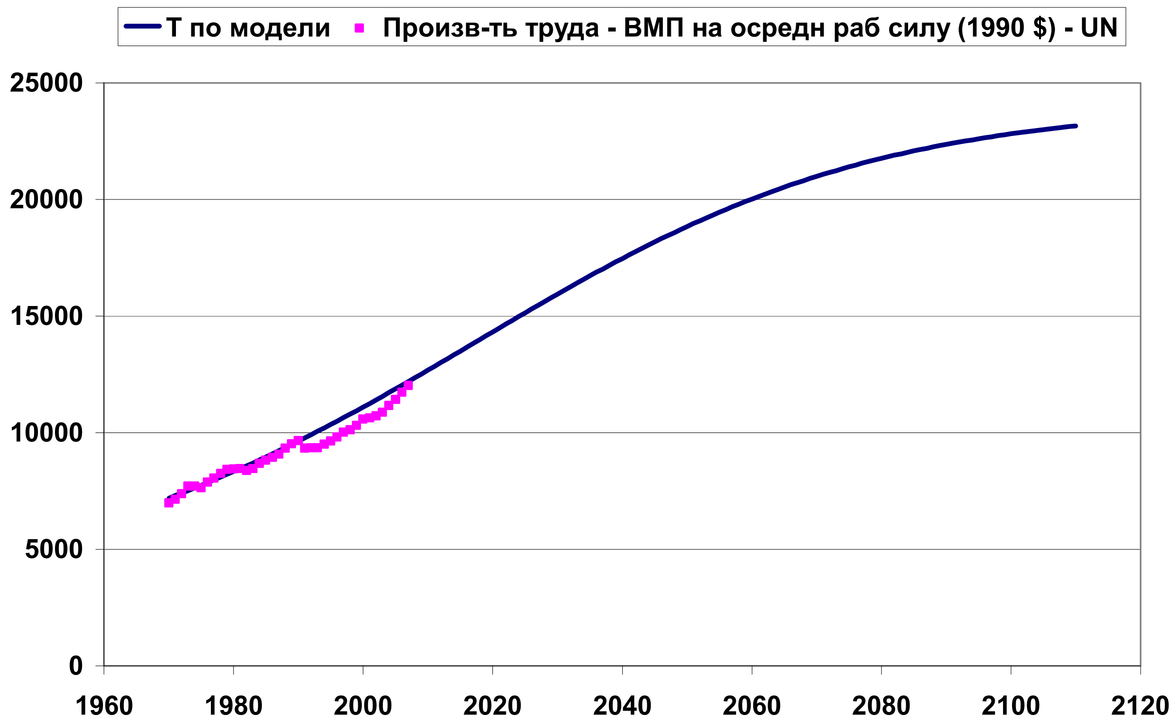
T по модели
Произв-ть труда - ВМП на осредн раб силу (1990 $) - UN
25000
20000
15000
10000
5000
0
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 3б.

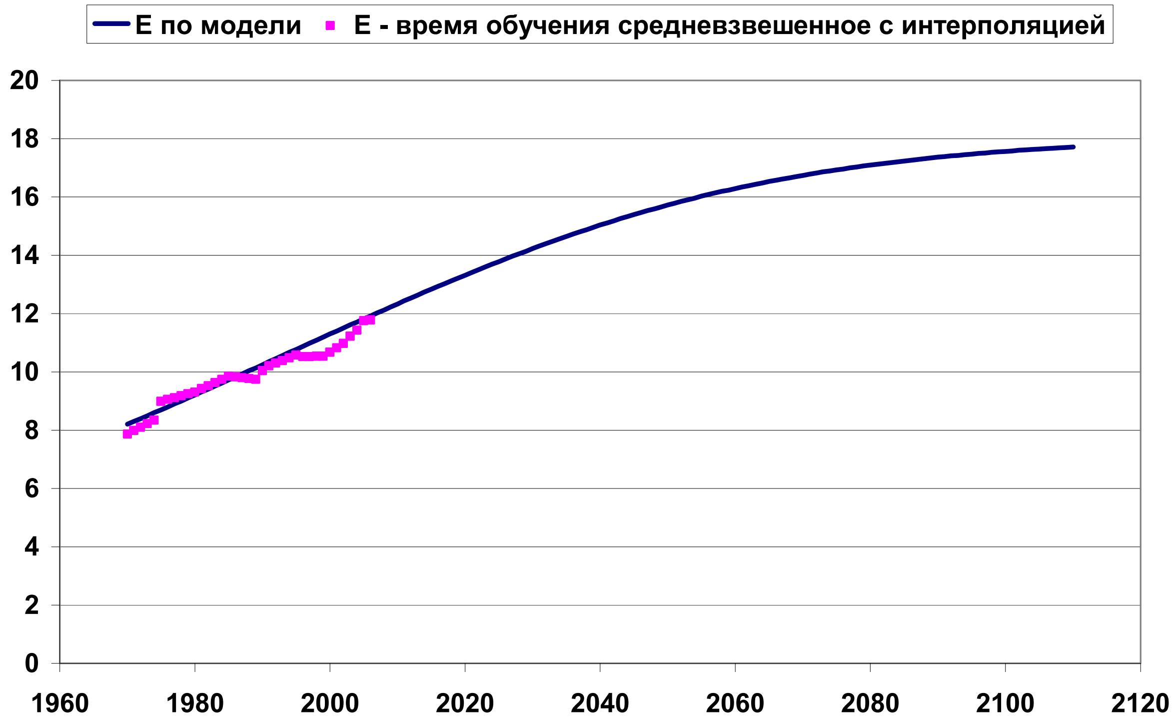

Рис. 3в.

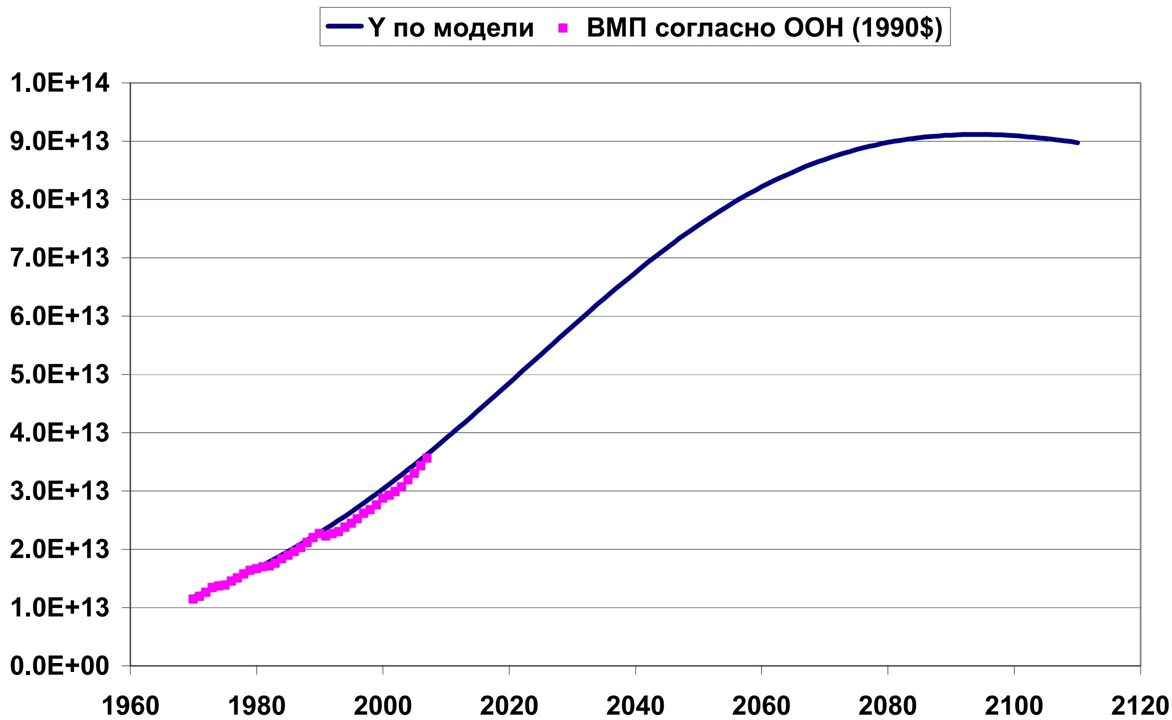

Рис. 3г.

2. При $E_1 = E_2$ численность населения выходит на стационарное значение, не достигая максимума – «стационарный режим без возврата» (рис. 4а, 4б, 4в, 4г).

Параметры измененные: $k_N = 0.036$, $E_1 = 18.1$, $E_2 = 18.1$.

Остальные параметры и начальные данные те же.

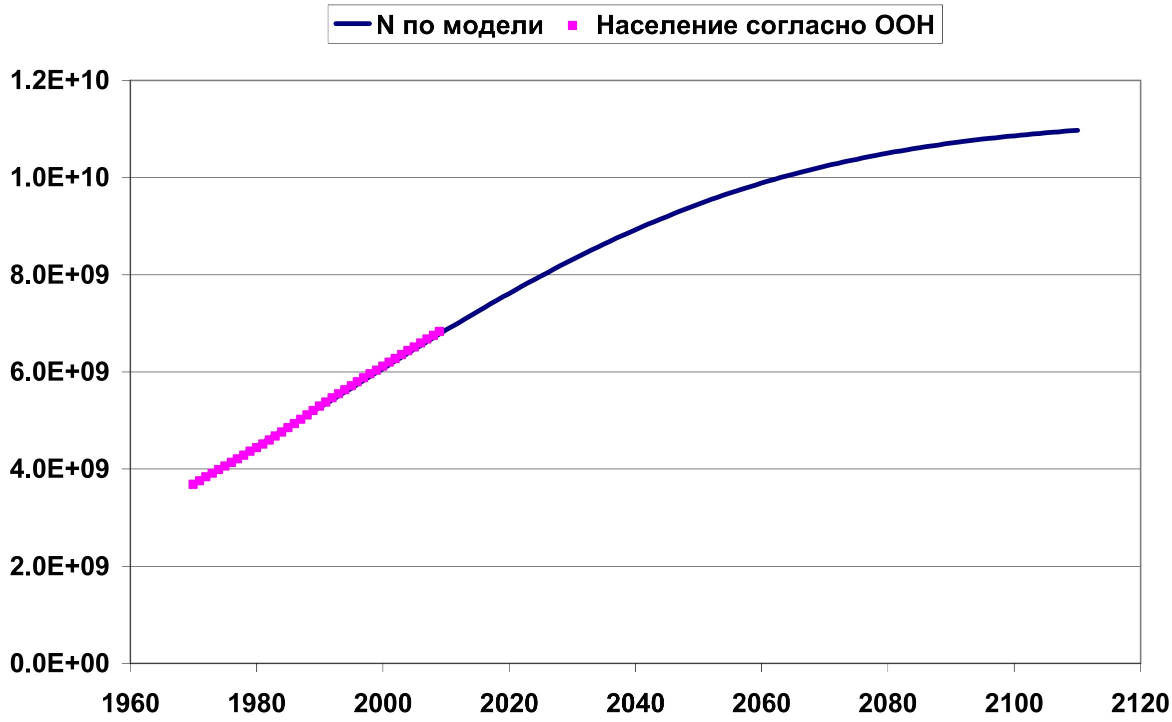
N по модели
Население согласно ООН
1.2E+10
1.0E+10
8.0E+09
6.0E+09
4.0E+09
2.0E+09
0.0E+00
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 4а.

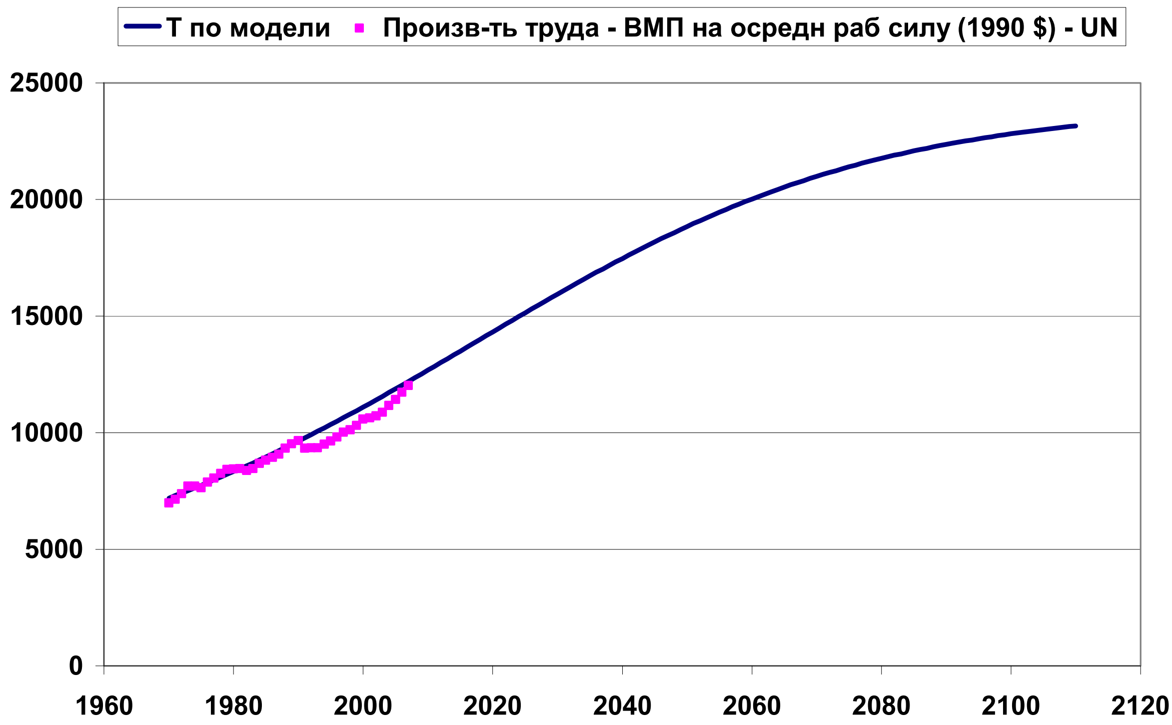
T по модели
Произв-ть труда - ВМП на осредн раб силу (1990 $) - UN
25000
20000
15000
10000
5000
0
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 4б.

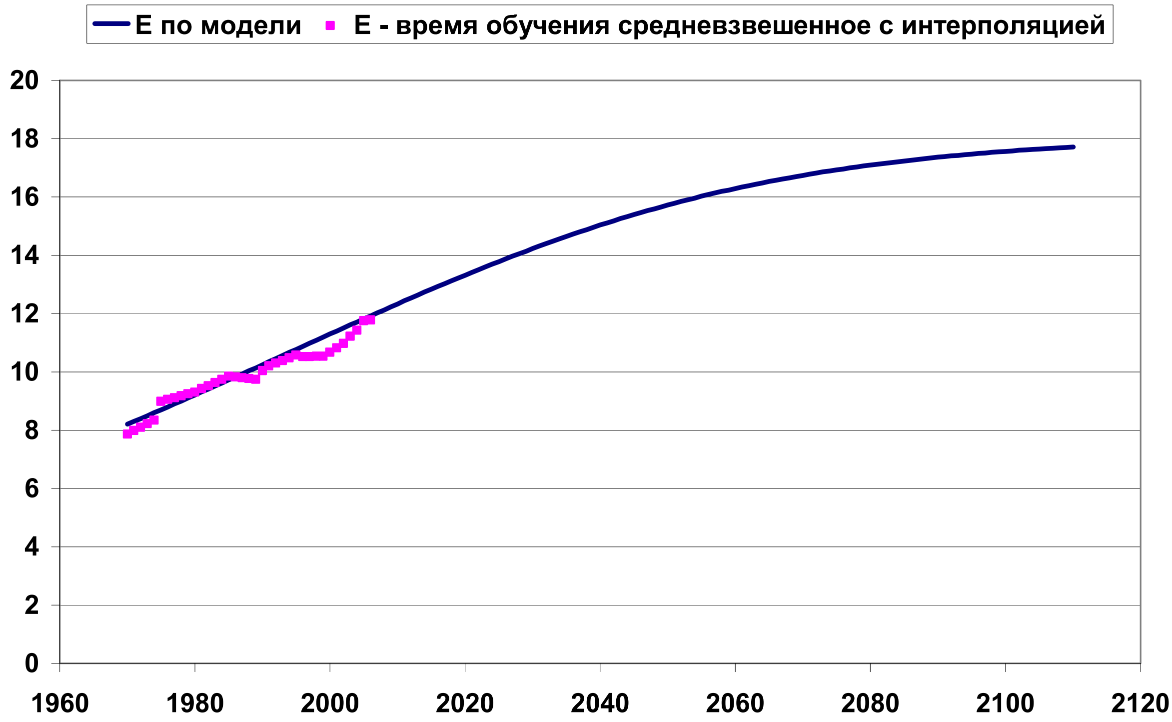

Рис. 4в.

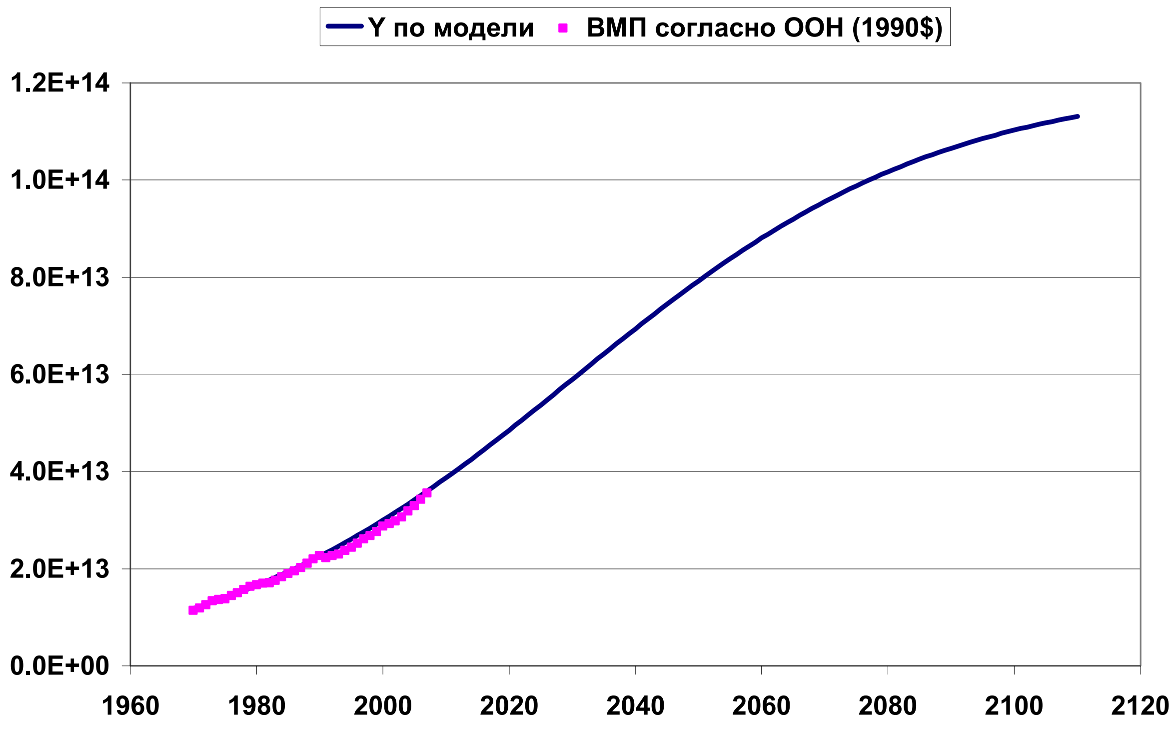

Рис. 4г.

3. При $E_1 > E_2$ численность населения неограниченно растет, но со всё меньшими темпами – «режим неограниченного роста» (рис. 5а, 5б, 5в, 5г).

Параметры измененные $k_N = 0.0345$, $E_1 = 19$, $E_2 = 18$.
Остальные параметры и начальные данные те же.

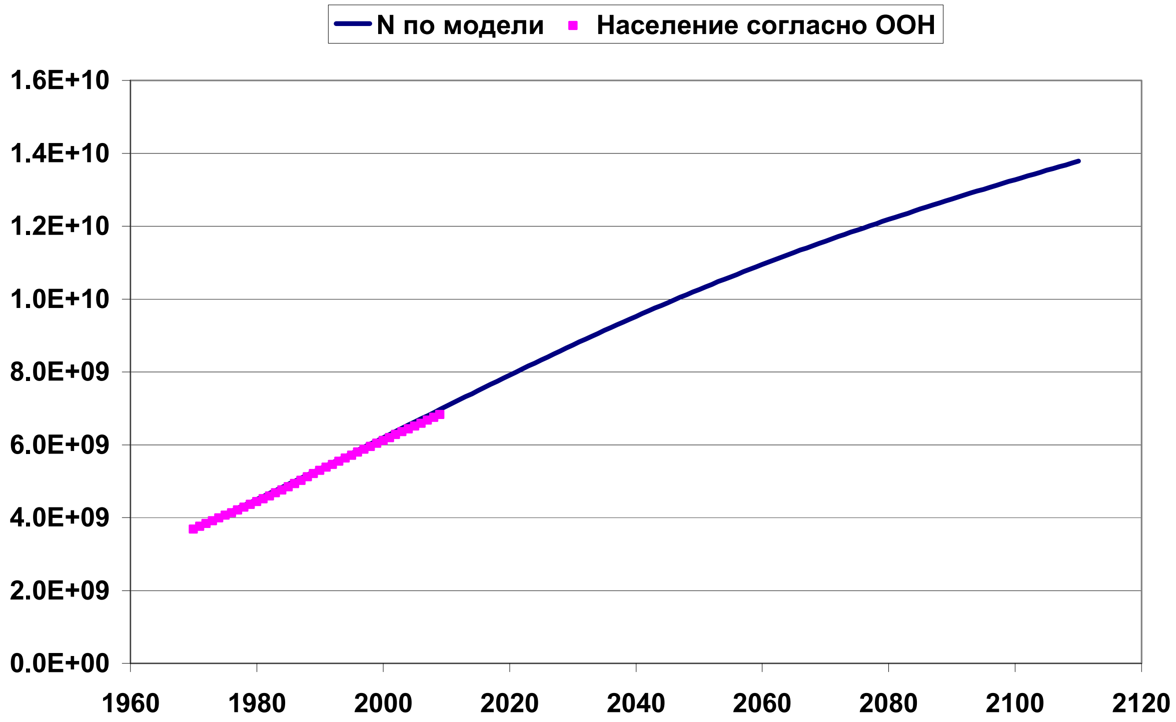
N по модели
Население согласно ООН
1.6E+10
1.4E+10
1.2E+10
1.0E+10
8.0E+09
6.0E+09
4.0E+09
2.0E+09
0.0E+00
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 5а.

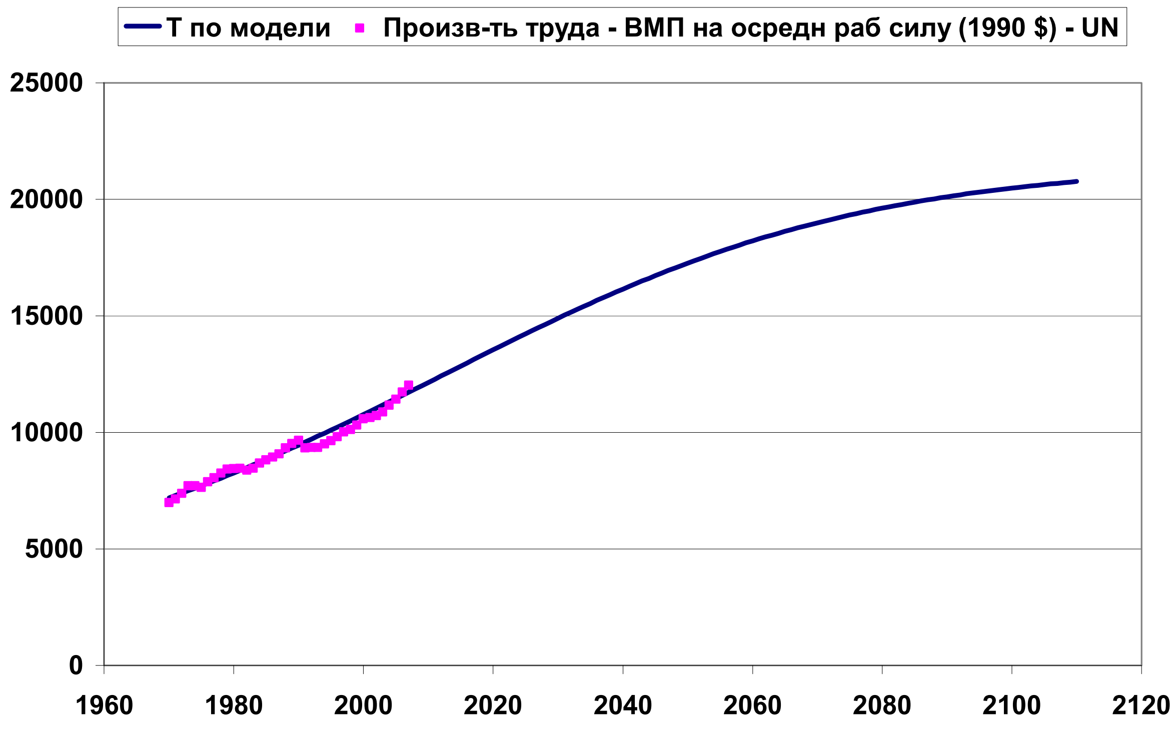
T по модели
Произв-ть труда - ВМП на осредн раб силу (1990 $) - UN
25000
20000
15000
10000
5000
0
1960
1980
2000
2020
2040
2060
2080
2100
2120

Рис. 5б.

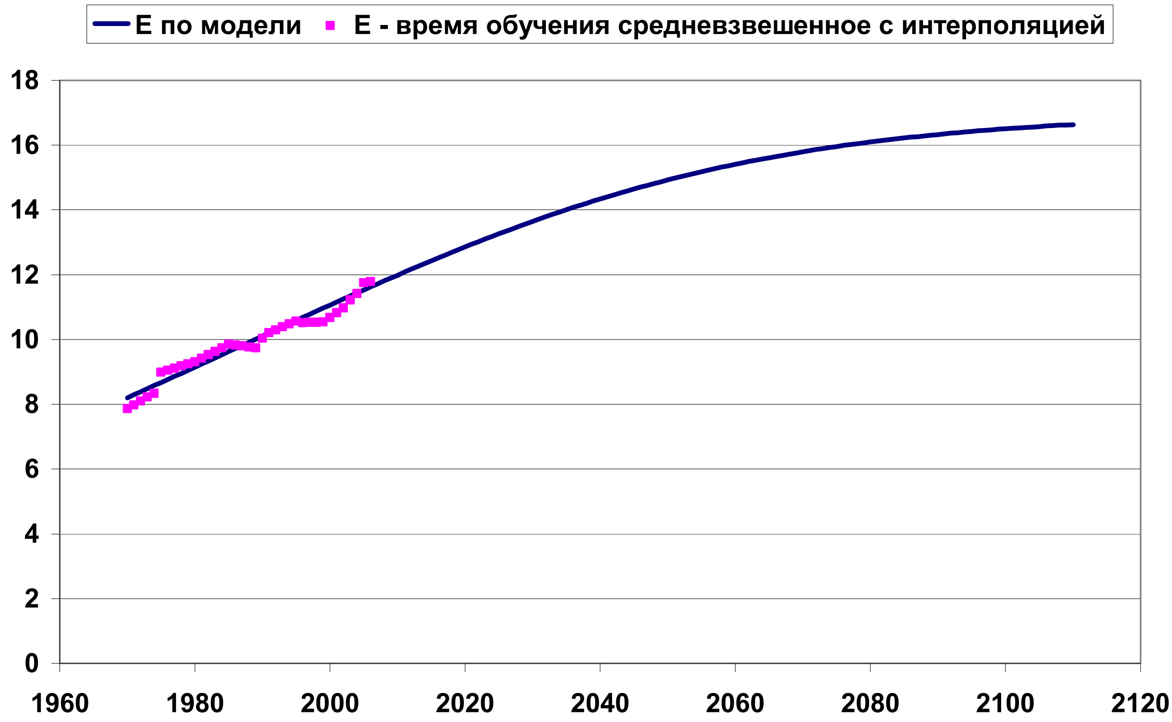

Рис. 5в.

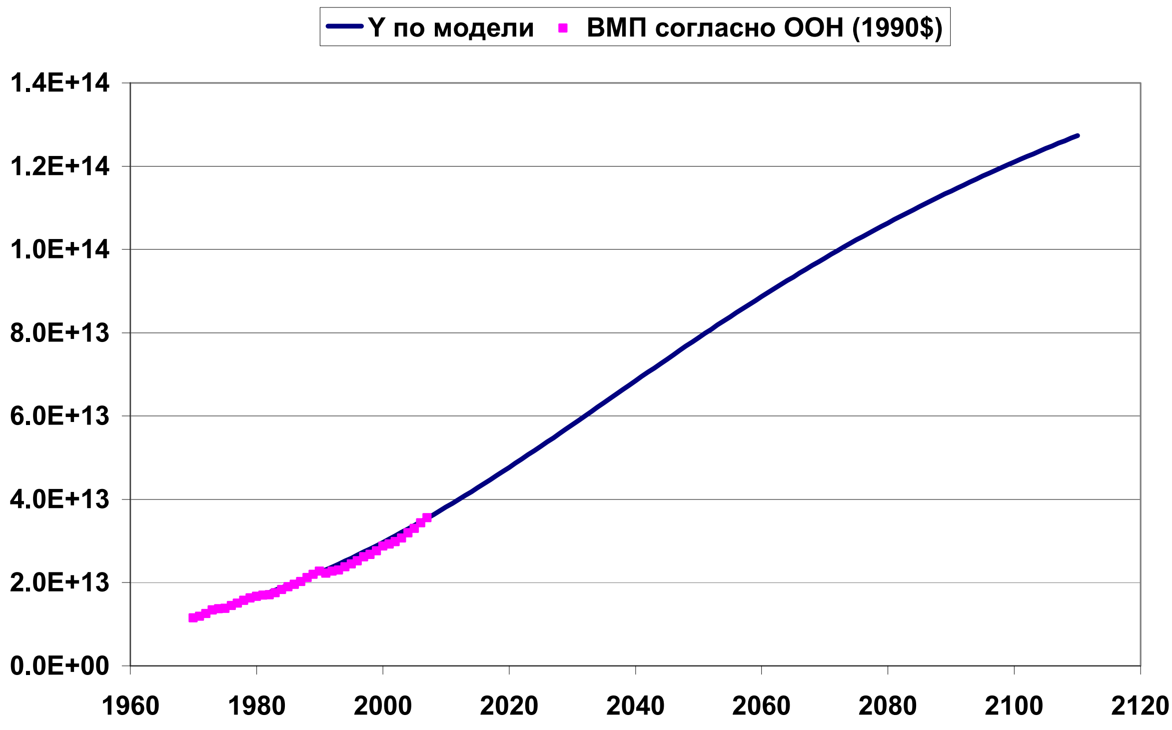

Рис. 5г.

Исходя из статистических данных, имеем оценки для параметров E_1 и E_2: $E_1 = 18.81 \pm 2.25$, $E_2 = 17.32 \pm 0.83$.

Здесь значения – оценки из регрессии, погрешности – стандартные ошибки.

Сказать явно, какое соотношение между параметрами (что чего больше), невозможно. Это означает, что в реальности могут иметь место все три сценария эволюции мировой системы. Мы можем лишь попытаться оценить вероятности того или иного сценария. Здесь возможны различные подходы.

Вероятностный подход к построению сценариев

Рассмотрим самый простой вариант. Будем считать, что параметры – случайные величины, имеющие нормальное распределение с соответствующими средними и стандартными отклонениями. Плотности вероятности для E_1 и E_2:

$$f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

где $m_1 = 18.81$, $\sigma_1 = 2.25$, $m_2 = 17.32$, $\sigma_2 = 0.83$.

Будем, ради упрощения, считать величины независимыми, тогда их совместная плотность будет просто произведением указанных плотностей: $f_{12}(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$. Задача состоит в том, чтобы посчитать вероятности трех событий: $E_1 < E_2$, $E_1 = E_2$, $E_1 > E_2$. В силу того, что величины непрерывные, второе событие в чистом виде невозможно и вероятность его ноль. Следовательно, выполнение равенства $E_1 \approx E_2$ должно быть приближенным с некоторой точностью δ. Аналогично и для неравенств. Таким образом, математическая задача такова – найти следующие вероятности:

$$P(E_2 - E_1 > \delta) = \iint\limits_{x_2 - x_1 > \delta} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 ,$$

$$P(|E_1 - E_2| < \delta) = \iint\limits_{|x_1 - x_2| < \delta} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 ,$$

$$P(E_1 - E_2 > \delta) = \iint\limits_{x_1 - x_2 > \delta} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 .$$

Искать все три вероятности не нужно, поскольку в сумме они составляют единицу, поэтому достаточно найти какие-то две (например, первую и вторую). Интегралы не выражаются в элементарных функциях, поэтому приходится их вычислять приближенно. По этой причине, а также ввиду быстрого убывания подынтегральной функции, считать до бесконечных пределов не нужно, достаточно ограничиться подходящей областью вокруг центра распределения. Например, рассматривать только прямоугольник "4 сигма" – окрестность вида $(m_1 \pm 4\sigma_1, m_2 \pm 4\sigma_2)$.

Расчет проводился на равномерной сетке, разбиением на 100 интервалов, методом прямоугольников. В зависимости от задаваемой точности получаются следующие результаты, приведенные в таблице 1.

Таблица 1. Вероятности сценариев в зависимости от задаваемой точности.

Погрешность δ (в годах)	Вероятность ($E_1 < E_2$)	Вероятность ($E_1 = E_2$)	Вероятность ($E_1 > E_2$)
0.5	0.203	0.137	0.660
0.83	0.167	0.225	0.608
1	0.150	0.269	0.581
1.5	0.106	0.395	0.498
2	0.072	0.511	0.416
2.25	0.059	0.565	0.376

Как видно из таблицы, с ростом погрешности, вторая вероятность растет, остальные уменьшаются. Таким образом, задав точность (или погрешность), можно определить вероятности всех сценариев. Из таблицы видно, что вероятность режима с возвратом, когда численность населения убывает, наименьшая. Связано это с видом динамических уравнений модели, и при другом виде ситуация может быть иной.

Мы рассмотрели лишь простейший способ построения сценариев и вычисления вероятностей их реализации, в зависимости от соотношения двух параметров. При этом мы не интересовались интервалом прогноза, и рассматривали, по существу, аттракторы моделируемой системы на бесконечности. Возможна более сложная постановка задачи построения сценариев и оценки их вероятностей.

Во-первых, можно задать горизонт прогноза и рассматривать динамику модельных переменных только на нем. Соответственно, тип поведения переменных на интервале прогнозирования и будет задавать сценарий.

Во-вторых, изменению могут подвергаться не только два или три параметра, но гораздо больше, а также могут меняться начальные значения переменных.

В-третьих, возможны различные вероятностные модели при изменении параметров. Помимо различных законов распределения (хотя нормальный закон наиболее уместен), также возможно и придание динамики, если параметры считать непостоянными в течение интервала прогнозирования, а меняющимися в каждый момент времени по заданному закону распределения. То есть, можно считать изменяемые параметры стационарными случайными процессами, а все их множество – многомерным случайным процессом. Каждая реализация такого многомерного процесса задает модельную динамику и определенный сценарий, т.е. каждый сценарий имеет свое множество реализаций. Оценив долю реализаций данного сценария среди всех реализаций, получим оценку вероятности сценария.

Библиография

1. *Малков А.С., Коротаев А.В., Халтурина Д.А.* Математическая модель роста населения Земли, экономики и образования // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2005, №12.
2. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Компактная математическая макромодель технико-экономического и демографического развития Мир-Системы (1-1973 гг.) // История и синергетика: Математическое моделирование социальной динамики – М.: КомКнига, 2005.
3. *Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории. Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура. – М.: КомКнига, 2007.
4. Базы данных ООН http://data.un.org.
5. UN Population Division http://www.un.org/esa/population.
6. Всемирный банк. Индикаторы всемирного развития. www.worldbank.org.
7. База данных ЮНЕСКО www.uis.unesco.org.
8. *Махов С.А.* Долгосрочные тенденции и прогнозы с позиций новой модели мировой динамики // Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики. – М.: ЛКИ, 2010. С.262-276.