ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2011 г.

Махов С.А., Подлазов А.В.

Исследование распределения стран мира по душевому ВВП

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Махов С.А., Подлазов А.В. Исследование распределения стран мира по душевому ВВП // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 75. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-75

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

С.А. Махов, А.В. Подлазов

Исследование распределения стран мира по душевому ВВП

Москва - 2011

С.А. Махов, А.В. Подлазов. Исследование распределения стран мира по душевому ВВП. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 16 страниц, 9 рисунков, библиография: 7 наименований.

В работе обсуждаются проблемы моделирования глобального и регионального развития. В ней проводится исследование вопросов единства мира как совокупности стран, взаимодействующих друг с другом на основании исследования распределения стран мира по такому показателю, как «валовой внутренний продукт на душу населения». Показывается, что зависимость типа «ранг-размер» для указанного показателя хорошо приближается показательной функцией, что означает равномерное распределение для логарифма этого индикатора. Предлагается и исследуется теоретическая качественная модель, объясняющая данный факт.

S.A. Makhov, I.V. Podlazov. The study of the distribution of the world countries in terms of GDP per capita. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 16 Pages, 9 Figures, 7 References.

The work discusses the problems of modeling of global and regional development. In this study it is investigated questions of the unity of the world as a set of countries, interacting with each other on the basis of the study of the distribution of the world countries on such indicators as 'gross domestic product per capita'. It is shown that the dependence of the type of 'rank-size' for the indicator of well-nigh exponential function, which means the uniform distribution for the logarithm of this indicator. It is presented and investigated qualitative theoretical model that explains this fact.

Введение

При моделировании мировой динамики перед исследователем зачастую стоит проблема: насколько можно считать мир единой системой, и в самом ли деле это так. Если верно обратное утверждение, то мир представляет собой, скорее, набор слабо связанных элементов, и нет нужды говорить о глобализации и, тем более, строить глобальные прогнозы.

Реальность убеждает в справедливости первого утверждения, т.е. мир всё же един, поскольку буквально пропитан связями самого разного рода, прежде всего экономическими. Именно последние будут нас интересовать при постановке следующего вопроса: если мир является системой, то каковы составляющие его элементы, взаимодействие которых приводит к появлению системности?

Казалось бы, ничего сложного здесь нет и ответ очевиден: экономическая статистика ведется каждой страной (точнее, государством), международная торговля также ведется между странами, поэтому субъектом мировой экономики является государство. Всё это так, и мы, с некоторыми оговорками, примем эту гипотезу в качестве основной рабочей. Главный уточняющий вопрос заключается в следующем: существуют ли еще промежуточные уровни между мировой системой и отдельно взятой страной, и если да, то, что это за уровни и каким образом они могут быть определены из имеющейся статистики?

Говоря про промежуточные уровни, мы имеем в виду, конечно, объединения стран, региональные блоки – то, что иногда называется «мирами-экономиками» [1], либо более общими категориями в рамках мир-системного подхода: «центр», «периферия», «полупериферия» [2]. Таким образом, наш вопрос сводится к выявлению социально-экономических или каких-либо иных индикаторов, которые либо демонстрируют, либо не демонстрируют разбиение государств на отдельные кластеры.

Вопрос не праздный: помимо подтверждения или опровержения мир-системных представлений, исследование данного вопроса позволит лучше понять структуру мировой системы, опираясь на цифры. Без последнего же вряд ли возможно построение удовлетворительной модели мировой динамики, дающей долгосрочные прогнозы.

Сделаем еще один шаг в конкретизации задачи. В качестве индикатора выберем *валовой внутренний продукт, приходящийся на душу населения в данной стране*. Обосновать, почему выбран именно этот показатель, несложно. ВВП характеризует масштаб экономики данной страны в целом, при этом душевой ВВП нивелирует влияние демографического фактора, поскольку понятно, что большая страна (с высокой численностью населения) имеет большой ВВП. Кроме того, этот показатель является мерилом производительности труда, стало быть, достигнутого в данном обществе уровня технологий.

Итак, окончательно сформулируем нашу задачу: исследовать распределение душевого ВВП по странам мира и предложить объясняющую теоретическую модель.

Анализ эмпирических данных

Для решения задачи, прежде всего, необходимы источники статистических данных. Были использованы базы данных ООН [3], Всемирного банка [4] и таблицы А. Мэдисона [5]. Наиболее полная информация по всем странам содержится в базе ООН за 1970-2007 годы, поэтому она и использовалась главным образом. Использовались таблицы, показывающие душевой ВВП каждой страны, измеренный в постоянных долларах 1990 года. По ним в текущем году строилась ранг-размерная зависимость по убыванию размера показателя.

К слову сказать, еще ранее построение ранг-размерной зависимости для душевого ВВП стран было осуществлено С.Ю. Малковым [6], у него зависимость была построена для 2003 года по данным А. Мэдисона. Результаты получились те же, что и в настоящей работе.

В качестве примеров приведены графики ранг-размерной зависимости в 1975, 1985, 1995, 2005 годах (рисунки 1-4). Выбор обусловлен тем, что примерно каждые 10 лет происходят сдвиги в национальных экономиках, поэтому качественные изменения, если они происходили, должны быть видны.

Во всех 4 случаях мы видим одну и ту же картину: ранг-размерная кривая хорошо приближается экспонентой, что иллюстрируется нарисованной линией регрессии, имеющей вид прямой в логарифмическом масштабе. Коэффициент детерминации при этом очень высок: от 0,97 до 0,99. Хотя и имеют место некоторые волнообразные отклонения от линии регрессии и отдельные выбросы на концах (что понятно), в целом можно считать ранг-размерную зависимость душевого ВВП страны ничем иным, как показательной функцией. При переходе к эмпирической функции распределения это означает, что она также является прямой линией для *логарифма душевого ВВП*, то есть последняя величина имеет *равномерное распределение*.

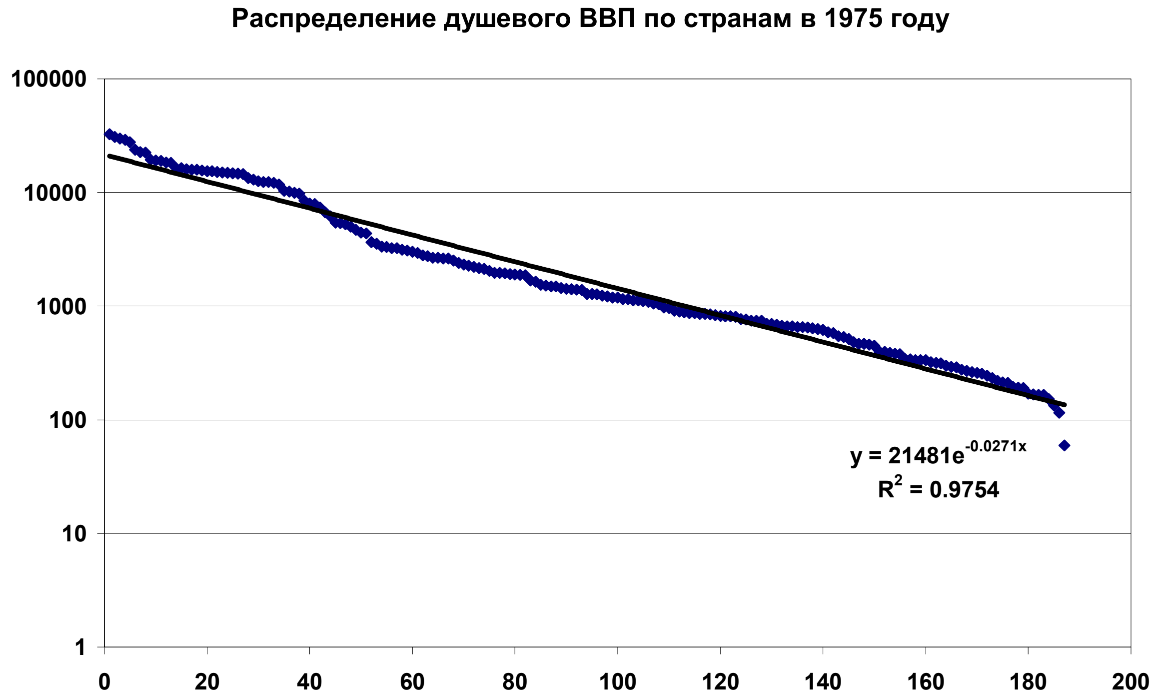

Рис.1. Зависимость ранг-размер для ВВП на душу населения стран мира в 1975 году (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 года на человека. Ранг изменяется от 1 до 187. Подавляющее большинство точек лежит на линейном участке, выпадают несколько точек в начале и конце.

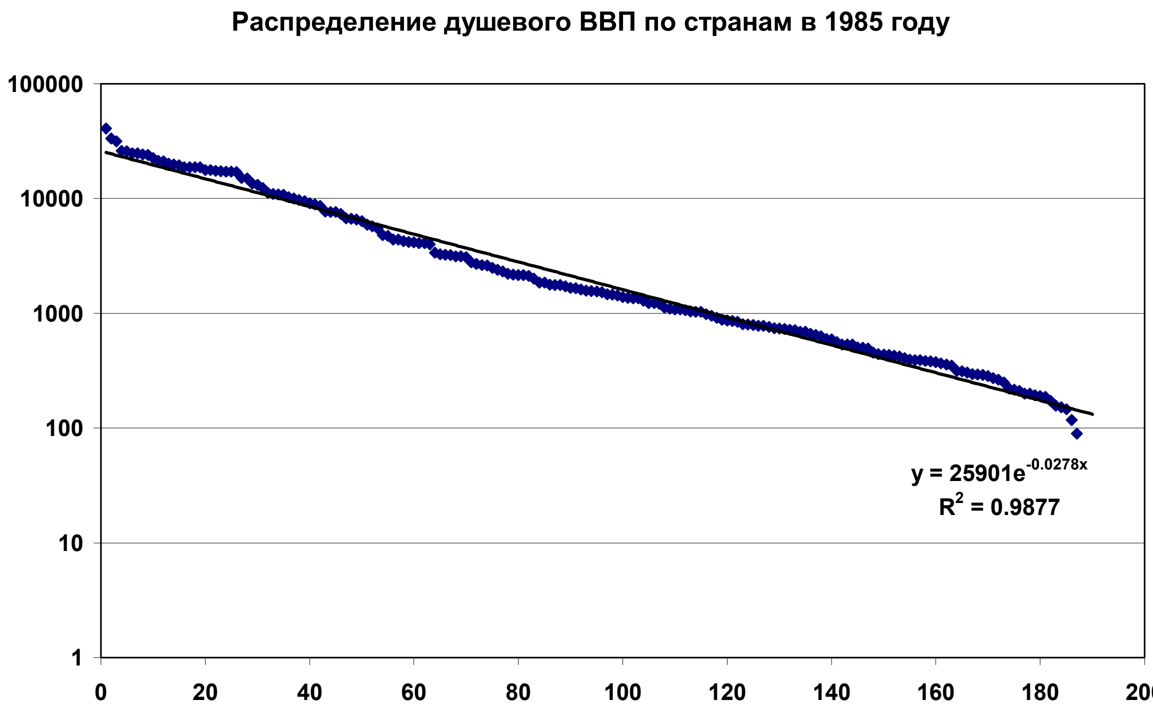

Рис.2. Зависимость ранг-размер для ВВП на душу населения стран мира в 1985 году (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 года на человека. Ранг изменяется от 1 до 187.

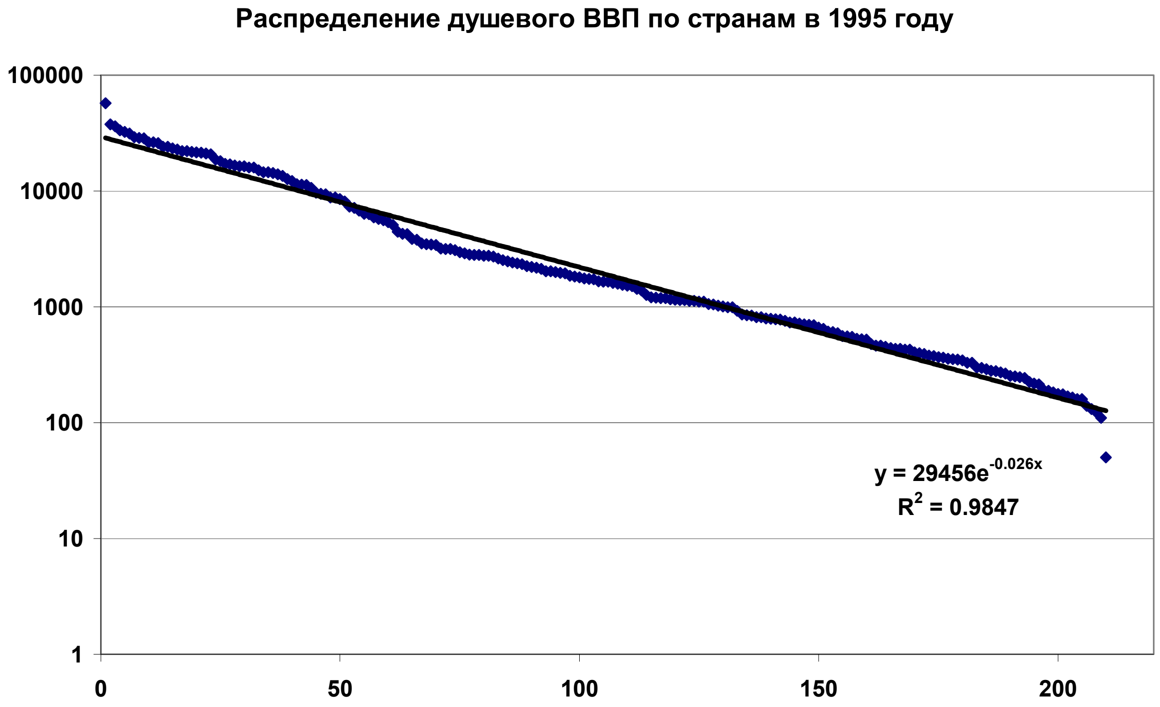

Рис.3. Зависимость ранг-размер для ВВП на душу населения стран мира в 1995 году (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 года на человека. Ранг изменяется от 1 до 210.

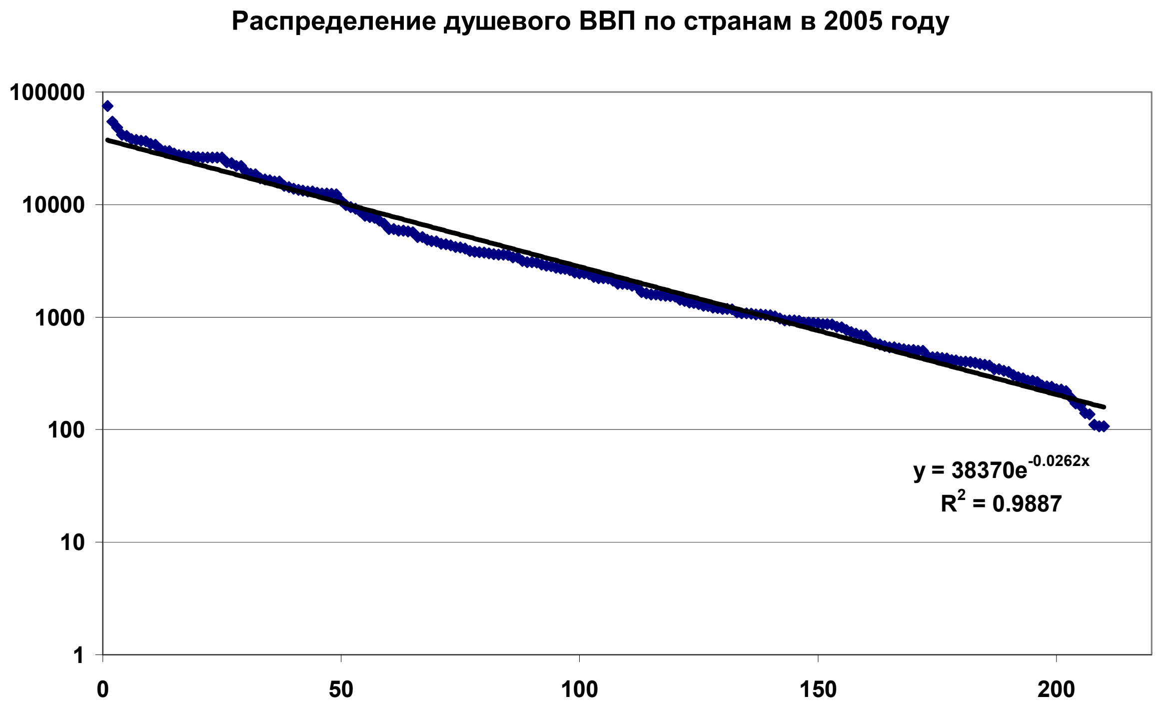

Рис.4. Зависимость ранг-размер для ВВП на душу населения стран мира в 2005 году (отдельные точки-ромбики) и регрессия (сплошная линия). График представлен в логарифмическом масштабе. Душевой ВВП измеряется в долларах 1990 года на человека. Ранг изменяется от 1 до 210.

Чтобы показать, что утверждение о равномерном распределении логарифма душевого ВВП носит неслучайный характер, были построены регрессии для ранг-размерных зависимостей по всем имеющимся годам, с 1970 по 2007 год.

Уравнение регрессии:

$$y = a\exp(br)\,, \tag{1}$$

или

$$\ln y = \ln a + br\,, \tag{1*}$$

где y – душевой ВВП, r – ранг страны, a, b – коэффициенты регрессии.

На рис. 5-7 приведены значения коэффициента детерминации, а также коэффициентов регрессии b и $\ln a$ по всем годам. Динамика изменения данных коэффициентов указывает на 1990 год, как время перелома в мировой экономической системе, когда, как известно, произошли значительные изменения в мировой политике и экономике. Несмотря на это, самый характер ранг-размерной зависимости не изменился, на что указывает значение коэффициента детерминации – оно, как было, так и осталось довольно высоким, т.е. распределение логарифма душевого ВВП осталось равномерным.

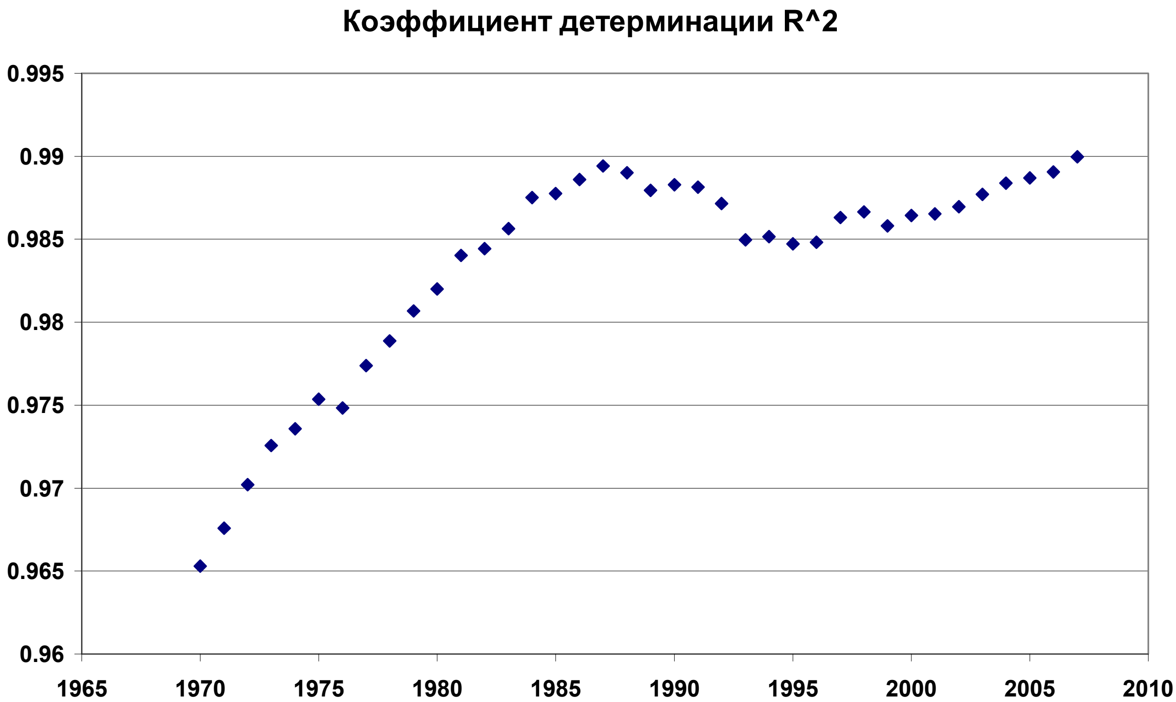

Рис.5. Коэффициент детерминации линейной регрессии (1*) для ранг-размерной зависимости логарифма душевого ВВП, вычисленный по годам. Коэффициент никогда не опускается ниже 0,965 и не поднимается выше 0,990. В 1987-2007 годах ведет себя устойчиво в пределах 0,984÷0,990.

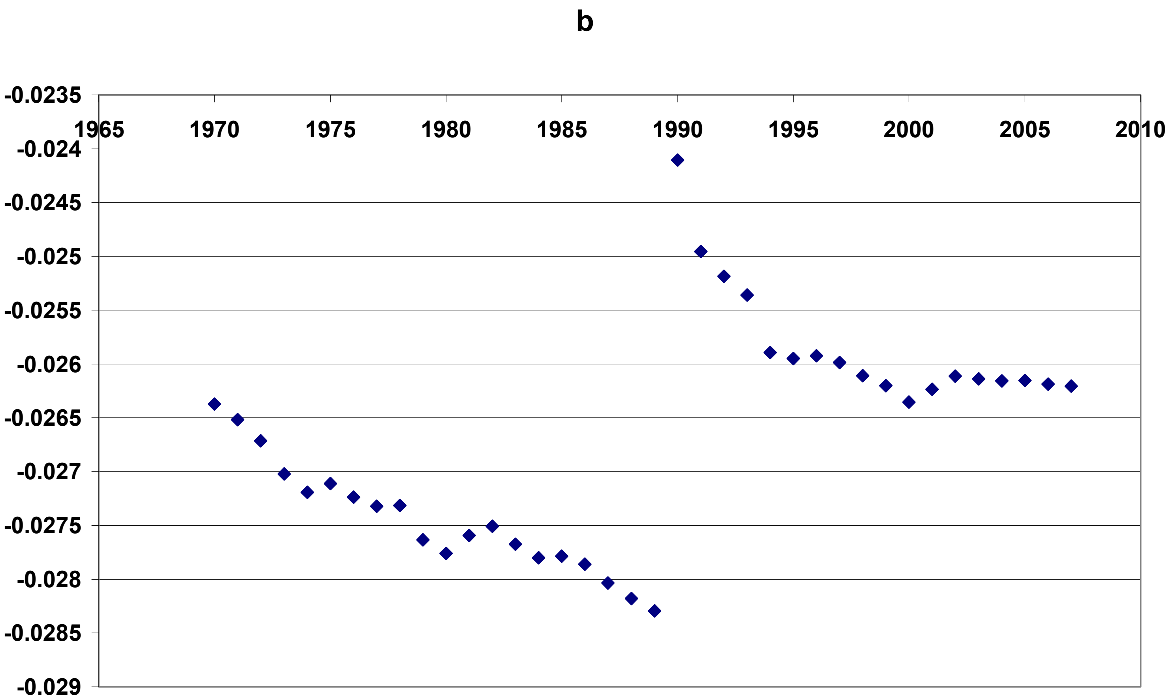

Рис.6. Коэффициент b линейной регрессии (1*) для ранг-размерной зависимости логарифма душевого ВВП, вычисленный по годам. С 1970 по 1989 год коэффициент медленно снижался (всего примерно на 7%). В 1990 году наблюдается резкий скачок. С 1994 по 2007 год коэффициент менялся незначительно, с тенденцией к снижению.

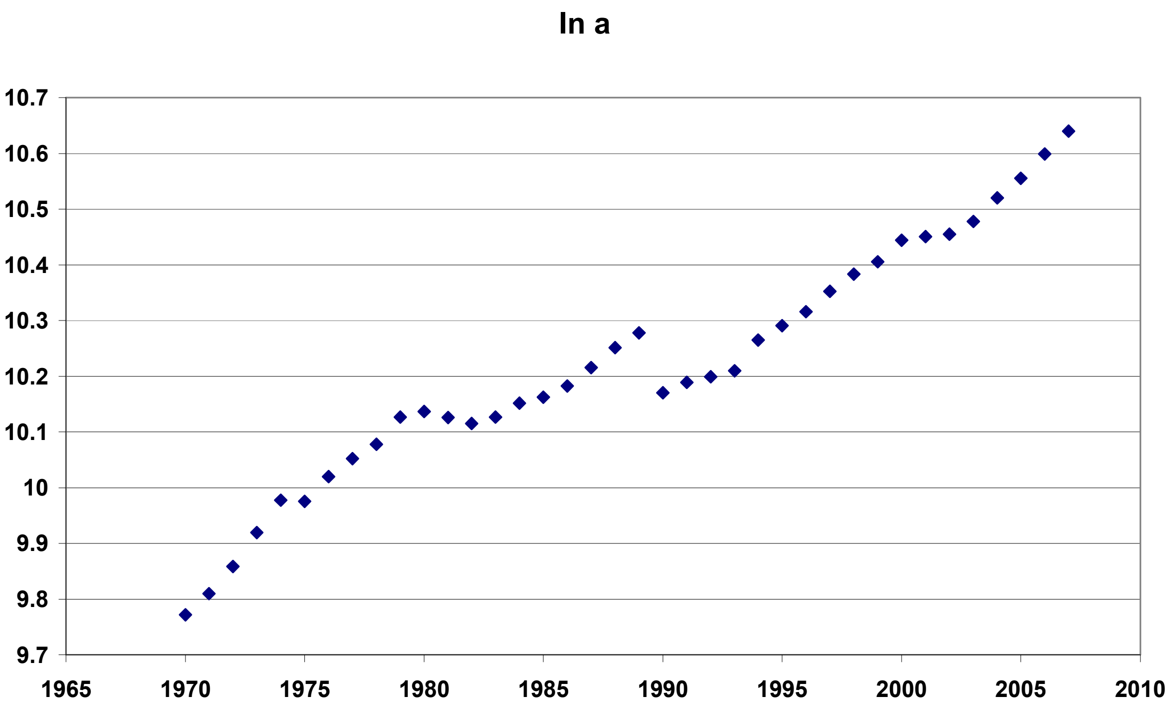

Рис.7. Коэффициент $\ln a$ линейной регрессии (1*) для ранг-размерной зависимости логарифма душевого ВВП, вычисленный по годам. Коэффициент в целом растет, за исключением кризисных лет, в благополучные годы характер роста практически линейный.

Резюмируя сказанное, имеется линейный участок на графике зависимости «ранг-размер» для логарифма душевого ВВП отдельных стран. Т.е. на этом участке логарифм странового душевого ВВП имеет равномерное распределение. Этот эмпирический закон наблюдается в разные годы по статистике ООН.

Ниже будет дано теоретическое объяснение этому эмпирическому факту. Иначе говоря, будет построена математическая модель взаимодействующих агентов, демонстрирующая логарифмически равномерное распределение, хотя некоторые выводы можно сделать уже сейчас.

Ранг-размерная зависимость носит непрерывный характер, без резких скачков внутри интервала изменения (краевые эффекты не в счет). Это говорит против гипотезы разделения стран на кластеры «богатых» и «бедных», т.е. на центр и периферию. Точнее говоря, на основании душевого ВВП нельзя сделать вывода о таком разделении. В самом деле, если бы имело место четкое разбиение, то наблюдались бы резкие скачки показателя, превышающие погрешность измерений и заметные на фоне колебаний. Следовательно, для эмпирического подтверждения существования «центра» и «периферии» (и, может быть, «полупериферии») нужно опираться на какие-то другие индикаторы, нежели ВВП на душу населения.

В пользу универсальности логарифмически равномерного распределения, справедливого не только на уровне стран мира при сравнении их между собой, но и для каждой отдельной страны при взаимодействии ее собственных внутренних регионов говорит статистика регионов России. На основании данных Росстата [7] были построены аналогичные ранг-размерные зависимости для валового регионального продукта на душу населения регионов России в 2001 и 2008 годах (рис. 8-9).

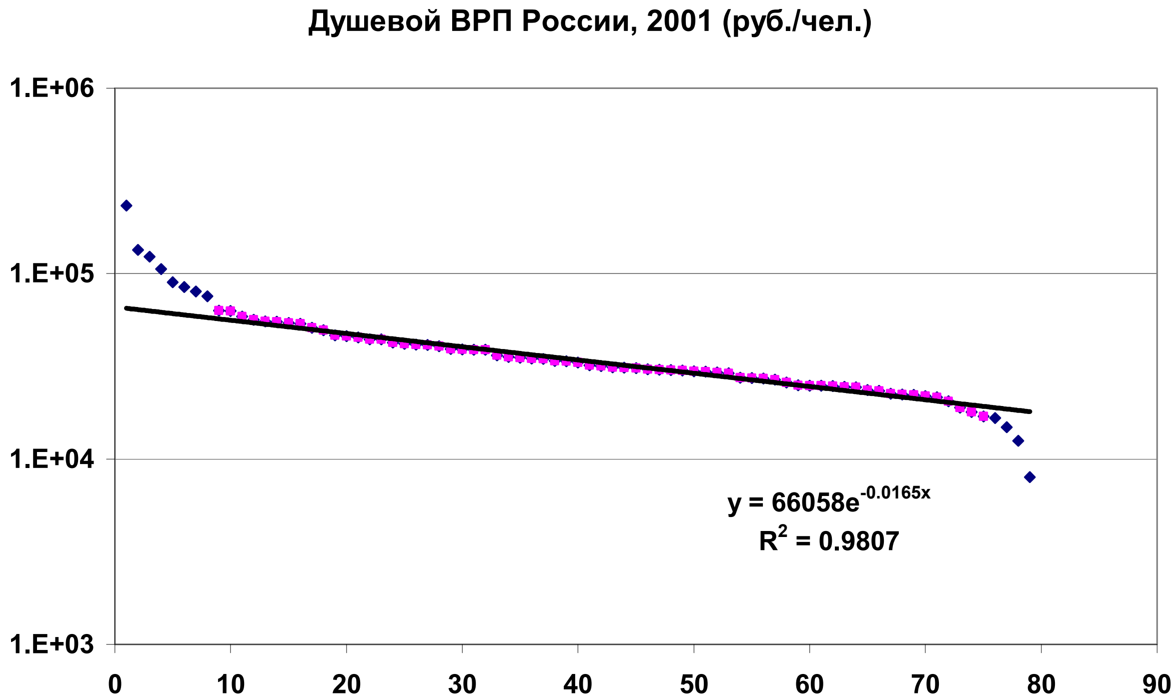

Рис. 8. Ранг-размерная зависимость для ВРП на душу населения регионов России в 2001 году. Всего 79 регионов. Душевой ВРП измеряется в рублях на человека, график показан в логарифмическом масштабе. Регрессия построена для средних точек, отмеченных квадратиками, крайние точки, отмеченные ромбиками, исключены из рассмотрения.

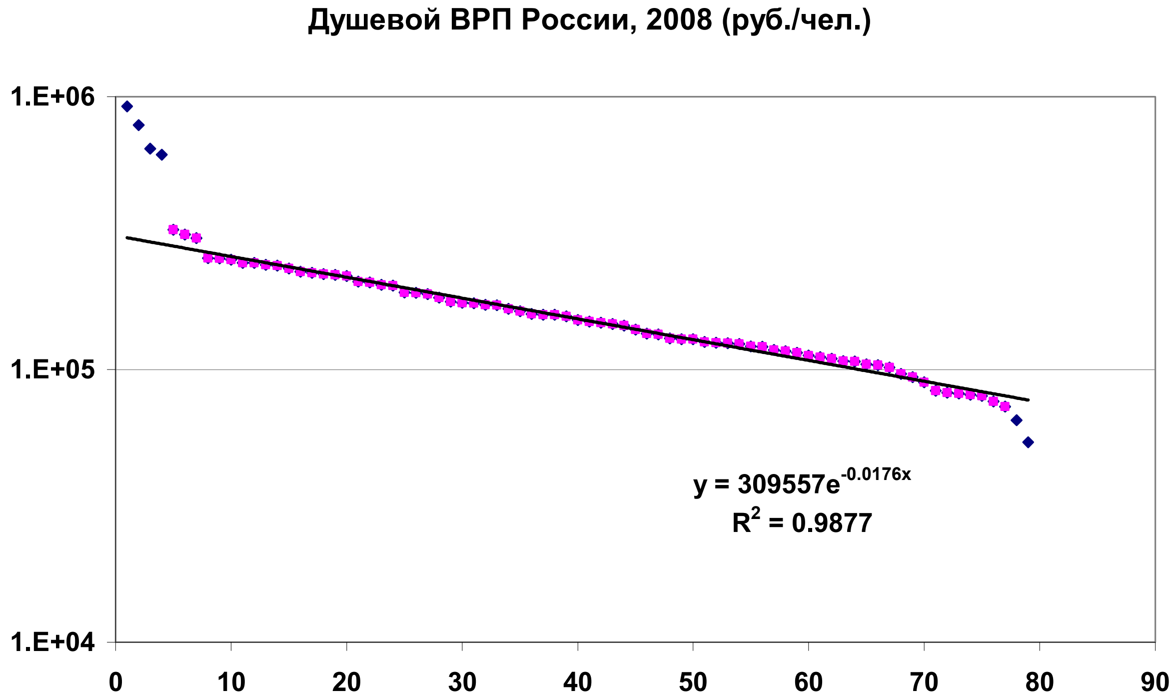

Рис. 9. Ранг-размерная зависимость для ВРП на душу населения регионов России в 2008 году. Всего 79 регионов. Душевой ВРП измеряется в рублях на человека, график показан в логарифмическом масштабе. Регрессия построена для средних точек, отмеченных квадратиками, крайние точки, отмеченные ромбиками, исключены из рассмотрения.

Видно, что, несмотря на весьма заметные краевые отклонения, существует довольно протяженный линейный участок для логарифма душевого ВРП отдельных регионов России. Графики не настолько гладкие, как на рис. 1-4, имеются резкие скачки, так что в данном случае можно с большим основанием предполагать разнородность – Россия менее однородна, чем мир в целом.

Было бы весьма полезно изучить аналогичное распределение внутренних областей других стран, например, штатов США, Индии, или областей в Китае. Видимо, это дело будущих исследований.

Описание модели и исследование стационарных решений

Пусть имеется дискретная система агентов. Пронумеруем их, начиная с нуля, т.е. 0, 1, 2, … и т.д. Без ограничения общности будем считать, что агентов бесконечно много.

Далее, каждый агент характеризуется переменной величиной, которую мы обозначим латинской буквой u, не касаясь пока что ее природы (хотя и так понятно, что это будущий душевой ВВП). Считается, что с ростом номера агента i величина u_i убывает, т.е. последовательность $\{u_i\}$ убывающая.

Рассматривается два процесса изменения величины *u*: автономный рост каждого агента и передача части характеристики *u* от более «бедного» более «богатому». То есть, от агента с данным номером *i* агенту с предыдущим номером (*i*-1), и так далее, по цепочке, вплоть до нулевого агента. Последний никому ничего не передает.

Это требует небольшого пояснения. Мы предполагаем, что агент взаимодействует с ближайшими соседями, поскольку, условно говоря, они близки по уровню развития технологий (мерой которого может считаться душевой ВВП). Технологически близким странам проще выстроить обменные взаимодействия. Некоторое затруднение может состоять в том, что в реальности страны обмениваются не только с «ближними», но и с «дальними» соседями, а какие-то страны так и вовсе обмениваются со всеми.

Всё это верно, но при построении идеализированной модели есть резон отказаться от идеи «взаимодействия всех со всеми», сосредоточившись на локальном взаимодействии, поскольку страны воздействуют друг на друга с различной интенсивностью. То есть не все связи одинаково сильны и важны: есть сильные, есть слабые. Нас будут интересовать именно сильные связи между странами, понятно, что их немного.

Речь может идти, таким образом, о выборе *радиуса взаимодействия* агента – количестве более сильных соседей, то есть агентов, с которыми осуществляется обмен. Если считать, что взаимодействие симметрично, то число более слабых соседей совпадает с числом более сильных соседей, и радиус взаимодействия одинаков в обе стороны. Пока мы рассматриваем ситуацию, когда радиус равен 1, позже будет приведен случай произвольного радиуса.

Для удобства записи будем полагать, что время течет непрерывно, тогда для изменения характеристик каждого агента можно записать дифференциальные уравнения. Если считать, что передача части величины *u* от агента к агенту происходит по *линейному* закону, т.е. прямо пропорционально разности их характеристик, то можно записать:

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_i) + c_i(u_i - u_{i+1}) - d_i(u_{i-1} - u_i), \;\; \text{\textit{при}}\ i > 0$$

$$\frac{du_0}{dt} = f_0(t, u_0) + c_0(u_0 - u_1)$$

Дальнейшая спецификация уравнений модели может происходить различными путями, мы рассмотрим самый простой вариант, имея в виду задачу о равномерном распределении логарифма душевого ВВП.

Примем две гипотезы:

1. все функции f_i зависят явно только от u_i, причем *линейным* образом, и, к тому же, с одним и тем же коэффициентом пропорциональности: $f_i\,(t, u_i) = k\,u_i$, для нулевого агента коэффициент пропорциональности может отличаться: k_0;

2. все коэффициенты c_i, d_i, отвечающие за скорость передачи и получения характеристики u, *постоянны* и *одинаковы*: $c_i = d_i = c_0$ (в дальнейшем, для сокращения записи индекс 0 отбросим).

Последнее условие, между прочим, означает выполнение закона сохранения для характеристики при передаче от агента агенту: сколько передано, столько получено.

Новая запись уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{du_i}{dt} = ku_i - c(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \ \ \textit{при } i > 0 \\ &\frac{du_0}{dt} = k_0 u_0 + c(u_0 - u_1) \end{aligned} \qquad . \qquad (2)$$

Решать эту систему можно и в таком виде (тем более что она линейная), однако мы сделаем переход от дискретной системы агентов к непрерывной среде, введя переменную x, отвечающую за ранг: $u = u(t,\ x)$. Заменяя соответствующие разности $u_{j+1} - u_j$ на частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku - c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad (3)$$

справедливое при $x > 0$. В нуле, при $x = 0$, величина $u(t,\ 0)$ должна определяться по непрерывности из данного уравнения в частных производных. Заметим, что задача сформулирована на луче, однако с тем же успехом она может быть сформулирована на отрезке [0, 1].

Обратим внимание читателя на то, что уравнение (3) очень похоже на уравнение теплопроводности, только коэффициент при второй производной по пространственной переменной отрицателен, т.е. по сути, имеем обратное во времени уравнение теплопроводности. Ничего удивительного в этом нет. Уравнение теплопроводности описывает распространение энергии из данного источника по всему пространству, здесь же, наоборот, «энергия» собирается в центре. То есть рассматривается процесс, обратный распространению тепла, поэтому вполне естественно, что, как вариант, он может быть описан обратным во времени уравнением теплопроводности.

Изучим *стационарные* решения последнего уравнения. Почему именно стационарные? Как мы видели из графиков, указанная экспоненциальная зависимость размера от ранга имеет место в отдельно взятые годы, более того, характер зависимости остается таким же для разных лет. При рассмотрении зависимости в данный год, душевой ВВП вычисляется как отношение двух *осредненных* величин: среднегодового ВВП и средней годовой численности населения страны. Таким образом, сама зависимость имеет место для осредненных за год величин, слабо зависящих от времени. Поэтому имеет смысл говорить о *стационарном* распределении душевого ВВП страны.

Имеем при $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$: $0 = ku - cu''$, $u'' - \lambda^2 u = 0$, где $\lambda^2 = \frac{k}{c}$. Уравнение линейное с постоянными коэффициентами, поэтому решается особенно просто:

$$u(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

Константы C_1, C_2 найдем из граничных условий, вытекающих из предположений о непрерывности в нуле и конечности суммарной величины u (т.е. конечности интеграла $\int_0^{+\infty} u(x)dx$, что соответствует конечности энергии):

$u(0) = u_0$, $u(+\infty) = 0$.

Тогда получим:

$u(x) = u_0 e^{-\lambda x}$, где x – ранг агента.

Или

$$\ln u(x) = -\lambda x + \ln u_0.$$

Это и означает равномерность распределения логарифма нашей характеристики u.

Теперь вернемся к радиусу взаимодействия: рассмотрим ситуацию, когда он больше единицы в дискретном случае. Обратимся сразу к системе (2), изменения будем проводить для нее. В правую часть добавляются члены аналогичные члену $-c_1(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$, отражающие взаимодействие с соседями 2-го порядка, т.е. агентами с номерами i+2 и i-2, затем 3-го порядка, и т.д., вплоть до m-го порядка.

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= ku_i - c_1(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - c_2(u_{i+2} - 2u_i + u_{i-2}) - \\ &- \ldots - c_k(u_{i+m} - 2u_i + u_{i-m}) \end{aligned} \tag{4}$$

где m – радиус взаимодействия, $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – скорости взаимодействия с соседями 1, 2, …, m порядков соответственно, при этом $i \geq m$. Уравнения при $i < m$ рассматриваются отдельно, соответственно, возникнут краевые эффекты в решениях системы уравнений, но нас интересуют не они, а зависимости в целом.

Напомним, что мы исследуем стационарные решения. Это можно делать либо непосредственно для системы (4), либо сведя ее предварительно к непрерывному аналогу – уравнению в частных производных.

Если радиус взаимодействия достаточно мал – настолько, что им можно пренебречь в сравнении с размерами всей области[1], то в этом случае все скобки в (4) с точностью до множителя являются второй производной в точке (t, x).

В самом деле: $u_i = u(t,x)$, $u_{i+j} = u(t,x+jh)$, $u_{i-j} = u(t,x-jh)$, $j = 1, 2, \ldots m$; h – шаг по рангу, в дискретном случае равен 1, в общем случае $u_{i+j} - 2u_i + u_{i-j} = (u(t,x+jh) - 2u(t,x) + u(t,x-jh))/h^2$. Разложение последних членов по формуле Тейлора в точке (t, x) дает следующее:

$$\frac{u(t,x+jh) - 2u(t,x) + u(t,x-jh)}{h^2} = j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + O(h^2).$$

При подстановке в (4) получаем с точностью до h^2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku - (c_1 + c_2 2^2 + c_3 3^2 + \ldots + c_m m^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Обозначив всю скобку перед второй производной буквой c, придем к уравнению (3).

Если радиус взаимодействия велик, вышеприведенное рассуждение не проходит, тогда можно непосредственно обратиться к системе уравнений (4) и исследовать стационарные решения. При этом получится система разностных уравнений:

$$ku_i - \sum_{j=1}^{m} c_j (u_{i+j} - 2u_i + u_{i-j}) = 0.$$

Для наших целей достаточно показать, что данная система линейных разностных уравнений допускает частное решение в виде геометрической прогрессии: $u_i = q^i$, причем $q < 1$. Подстановкой и соответствующим сокращением получаем следующее уравнение:

$$k - \sum_{j=1}^{m} c_j (q^j - 2 + q^{-j}) = 0. \tag{5}$$

---

[1] В дискретном случае, когда число агентов конечно, этот радиус должен быть примерно на 1,5-2 порядка меньше количества агентов, чтобы связанные с локальным взаимодействием процессы успевали сгладиться на общем фоне. Таким образом, при числе агентов, равным 200, радиус взаимодействия должен быть от 2 до 4.

Получилось алгебраическое уравнение степени $2m$ относительно q, дополнительной подстановкой $z = q + \frac{1}{q}$ его можно привести к уравнению степени m. Иначе говоря, в конце концов, получим $P_m(z) = 0$. Последнее уравнение необходимо исследовать на существование положительных решений, более того, для нахождения q из уравнения $q^2 - zq + 1 = 0$ требуется, чтобы $z > 2$. Нетрудно убедиться, что такое решение существует всегда при любых коэффициентах $c_1, c_2, ..., c_m$. Обозначим: $P_m\left(q + \frac{1}{q}\right) = f(q) = \sum_{j=1}^{m} c_j (q^j - 2 + q^{-j}) - k$, при этом $P_m(2) = f(1) = -k < 0$, $P_m(+\infty) = f(+\infty) = +\infty$. Следовательно, в силу известной теоремы Больцано многочлен $P_m(z)$ имеет нуль на интервале $(2; +\infty)$.

Замечания и итоги

Заметим, что представленный вывод довольно абстрактен: мы нигде явно не опирались на экономическую природу рассматриваемых объектов и процессов. Рассуждения носят, скорее, физический характер.

В экономике же описанной модели соответствует, скорее всего, модель неравноценного обмена при сделках, когда более сильный и богатый в силу лучшей развитости забирает большую долю, чем слабый и бедный. Правда, обмены происходят посредством денег (или в натуральной форме), т.е., по сути, являются частью ВВП, в то время как изучаемая зависимость относится к душевому ВВП; непосредственно передать часть душевого ВВП физически невозможно. Последний парадокс можно было бы обойти, если считать численность населения каждой страны (агента) одинаковой. Однако в случае стран это не выполняется.

Пока мы оставим этот недостаток модели, укажем лишь на возможность такого объяснения. Численность населения меняется медленнее ВВП, т.е. за год прирост ВВП выше прироста численности населения. Поэтому изменение душевого ВВП определяется в большей степени изменением самого ВВП, чем численностью населения, которая в течение года меняется незначительно и может считаться почти постоянной. Обмены действительно происходят посредством денег и являются частью ВВП. Вклад, вносимый ими в ВВП, при делении на численность населения, даст вклад в душевой ВВП.

Другой вариант состоит в том, чтобы статистически исследовать распределение территориальных кластеров более или менее одинаковой численности населения. Это требует детальной информации о внутренних регионах отдельных стран, что не всегда доступно в открытом виде.

Полученную математическую модель в различных вариациях можно изучать и исследовать, в принципе, независимо от ее экономического обоснования: само по себе это уже интересная задача. В частности, представляет интерес дискретный вариант и, особенно, изменение характеристик во времени, т.е. динамика. При этом возникнет естественный вопрос, насколько верна написанная система уравнений и может ли она количественно описать зависимость размера душевого ВВП от ранга страны? И, кроме того, является ли эта зависимость устойчивой во времени? И как изменится решение, если коэффициенты будут зависеть от ранга?

Авторы выражают благодарность О.И. Кривошееву за обсуждение, сделанные замечания и высказанные идеи, как по теоретическому, так и эмпирическому материалу настоящей работы.

Библиография

1. *Бродель Ф.* Материальная цивилизация, экономика и капитализм XV-XVIII вв. Том 3. Время мира. – М.: Весь мир, 2007.
2. *Валлерстайн И.* Анализ мировых систем и ситуация в современном мире. – СПб.: Университетская книга, 2001.
3. Базы данных ООН (http://data.un.org).
4. Всемирный банк. Индикаторы всемирного развития. (www.worldbank.org).
5. Maddison Historical Statistics for the World Economy (http://www.ggdc.net/MADDISON/oriindex.htm).
6. *Кирилюк И.Л., Малков С.Ю.* Особенности мирового экономического развития: математический анализ статистических данных // Проблемы математической истории: Основания, информационные ресурсы, анализ данных. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008. С.202-215.
7. Росстат (http://www.gks.ru/dbscripts/Cbsd/DBInet.cgi#1)