ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 36 за 2011 г.

Брюно А.Д.

Экспоненциальные разложения решений ОДУ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Экспоненциальные разложения решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 36. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-36

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДУ

Москва, 2011 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно. Экспоненциальные разложения решений ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Пусть для него найдено степенное разложение решения, имеющего экспоненциальные добавки. В § 1 показано как эти добавки продолжить в экспоненциальные разложения решений исходного уравнения. Указан алгоритм вычисления характеристических чисел. Их отсутствие гарантирует существование таких разложений. В § 2 показан алгоритм вычисления экспоненциальных разложений решений, соответствующих горизонтальному ребру многоугольника уравнения. В § 3 даны доказательства утверждений §§ 1, 2. Приведены примеры из уравнений Пенлеве.

A.D. Bruno. Exponential expansions of solutions to an ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

We consider an ordinary differential equation of a very general form. Let we have found a power expansion of its solution with exponential addendums. In Section 1 we show how the addendums can be prolongated in the exponential expansions of solutions to the initial equation. We explain a method of calculation of critical numbers. Their absence is sufficient for the existence of the expansions. In section 2 we show a method for calculation of exponential expansions of solutions corresponding to a horisontal edge of the polygon of the equation. In Section 3 we proof statements of Sections 1 and 2. Examples from the Painlevé equations are given.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mail: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru
http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno

§ 1. Экспоненциальные добавки и разложения

Сначала напомним некоторые понятия и результаты степенной геометрии [1,2].

Пусть x — независимая и y — зависимая комплексные переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. *Дифференциальным мономом* $a(x,y)$ называется произведение обычного монома $cx^{r_1}y^{r_2}$, где $c = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и конечного числа производных вида $d^l y/dx^l$, $l \in \mathbb{N}$. Каждому дифференциальному моному $a(x,y)$ ставится в соответствие его (векторный) *показатель степени* $Q(a) = (q_1,\ q_2) \in \mathbb{R}^2$. Сумма дифференциальных мономов

$$f(x,y) = \sum a_i(x,y) \tag{1.1}$$

называется *дифференциальной суммой.* Множество $\mathbf{S}(f)$ показателей степеней $Q(a_i)$ всех дифференциальных мономов $a_i(x,y)$, входящих в дифференциальную сумму (1.1), называется *носителем суммы* $f(x,y)$. Очевидно, $\mathbf{S}(f) \in \mathbb{R}^2$. Замыкание выпуклой оболочки $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником суммы* $f(x,y)$. Граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и рёбер $\Gamma_j^{(1)}$. Их называют (обобщёнными) *гранями* $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\hat{f}_j^{(d)}(x,y) = \sum a_i(x,y) \text{ по } \ Q(a_i) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}.$$

Пусть плоскость $\mathbb{R}^2_*$ сопряжена плоскости $\mathbb{R}^2$ так, что для $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2_*$ и $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ определено скалярное произведение $\langle P, Q\rangle \stackrel{def}{=} p_1q_1 + p_2q_2$. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ в плоскости $\mathbb{R}^2_*$ соответствует свой *нормальный конус* $\mathbf{U}_j^{(d)}$.

Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x,y) = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x,y)$ — дифференциальная сумма. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_j^{(d)}(x,y) = 0. \tag{1.3}$$

Пусть $x \to 0$, тогда $\omega = -1$, или $x \to \infty$, тогда $\omega = 1$. Степенные решения укороченного уравнения (1.3)

$$y = c_r x^r, \ \ c_r = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \ \ c_r \neq 0, \ r \in \mathbb{C} \tag{1.4}$$

с $\omega(1, \mathrm{Re}\ r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$ являются степенными асимптотиками решений полного уравнения (1.2). Согласно § 1 [1] решению (1.4) уравнения (1.3) соответствуют: оператор

$$\mathcal{L}(x) = \delta \hat{f}_j^{(d)}(x,y)/\delta y \quad \text{на} \quad y = c_r x^r \tag{1.5}$$

и его критические числа

$$k_i: \ \mathrm{Re}\ k_i\omega < \mathrm{Re}\ r\omega, \ \ i = 1, \ldots, \varkappa. \tag{1.6}$$

Согласно [1,§ 3] можно продолжить степенную асимптотику (1.4) в виде степенно-логарифмических разложений

$$y = c_r x^r + \sum \beta_s x^s \stackrel{def}{=} b_0(x) \tag{1.7}$$

решений уравнения (1.2), где β_s суть многочлены от $\ln x$ с комплексными коэффициентами, показатели степени $r, s \in \mathbb{C}$ и ω Re $s < \omega$ Re r.

Теперь наложим несколько ограничений.

1. $r \in \mathbb{R}$ и в разложении (1.7) все показатели $s \in \mathbb{R}$.

2. Разложение (1.7) — степенное, т.е. все c_s — комплексные постоянные.

3. Переменная y и её производные $y', \ldots, \ y^{(n)}$ входят в дифференциальную сумму $f(x, y)$ только в целых степенях.

Пусть $\pi(f)$ —наибольший порядок производной в дифференциальной сумме $f(x, y)$.

Если $\pi(\mathcal{L}z) = \pi(f)$, то ряд (1.7) сходится согласно теореме 3.4 [1] (доказательства см. в [2,3,4]).

Если $\pi(\mathcal{L}z) < \pi(f)$, то разложение (1.7) имеет экспоненциальные добавки вида

$$c \ \mathrm{exp}\varphi(x), \tag{1.8}$$

где $\varphi'(x)$ — степенное разложение с вещественными показателями и c — произвольная постоянная, согласно § 7 [1].

Теорема 1. *Каждой добавке* (1.8) *соответствует её характеристический многочлен* $\mu(k)$ *порядка* $\pi(f)$. *Если ни одно из целых чисел* $k > 1$ *не является корнем многочлена* $\mu(k)$, *то разложение решения* (1.7) *и его добавка* (1.8) *продолжаются в виде экспоненциального разложения*

$$y = b_0(x) + c\mathrm{exp}\varphi(x) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x) c^k \mathrm{exp} k\varphi(x) \tag{1.9}$$

решений полного уравнения (1.2), *где* $b_k(x)$ — *степенные разложения.*

Разложения вида (1.9) введены В.П. Вариным в [5] для решений уравнений (1.2) первого порядка.

Опишем вычисления добавки (1.8) и её характеристического многочлена $\mu(k)$. После подстановки

$$y = b_0(x) + z$$

уравнение (1.2) принимает вид

$$f(x, b_0(x) + z) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(x, z) \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(x)z + g(x, z) = 0, \tag{1.10}$$

где $\mathcal{M}(x)$ — линейный дифференциальный оператор и у всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(g)$ координата $q_2 \geq 2$. Так что $z = 0$ является решением уравнения (1.10), соответствующим решению (1.7) уравнения (1.2).

При этом
$$\mathcal{M}(x) = \delta f/\delta y \text{ на } \ y = b_0(x) \tag{1.10$'$}$$
согласно лемме 7.1 из [1]. Многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$ уравнения (1.10) имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с $q_2 = 1$, соответствующее сумме $\mathcal{M}(x)z$, т. е. $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma(\mathcal{M}(x)z)$. После логарифмического преобразования
$$\zeta = d\log z/dx \tag{1.11}$$
укороченное уравнение
$$\mathcal{M}(x)z = 0$$
перейдёт в уравнение
$$h(x,\zeta)z \stackrel{def}{=} \mathcal{M}(x)z = 0, \tag{1.12}$$
где $h(x,\zeta)$ — дифференциальная сумма, и конус задачи
$$\tilde{\mathcal{K}}_\omega = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0, \ \operatorname{sgn} \tilde{p}_1 = \omega\} \tag{1.12$'$}$$
(см. рис. 1).

Многоугольник $\Gamma(h)$ обозначим $\tilde{\Gamma}$, а его грани — как $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$. Пусть $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ — ребро с внешней нормалью $\tilde{N}_i = (1, \ \rho)$, лежащей в конусе задачи $\tilde{\mathcal{K}}_\omega$. Тогда ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение
$$\hat{h}_i^{(1)}(x,\zeta)z = 0, \tag{1.13}$$
которое является алгебраическим согласно § 7 [1]. Полагая $\zeta = \gamma x^\rho$, получаем для γ определяющее уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(1,\gamma) = 0$. Пусть $\gamma = \gamma^*$ — один из его корней. Ему соответствует однозначное степенное разложение
$$\zeta = \gamma^* x^\rho + \sum \gamma_\sigma x^\sigma \stackrel{def}{=} \varphi'(x), \ \omega \mathrm{Re}\ \sigma < \omega \mathrm{Re}\ \rho \tag{1.14}$$
решения уравнения (1.12) и характеристический многочлен $\mu(k) = \hat{h}_i^{(1)}(1, \gamma^* k)$.

Замечание 1. $\mu(1) = 0$, т.е. $\mu(k)$ делится на $k - 1$.

Пример 1. Рассмотрим второе уравнение Пенлеве
$$f \stackrel{def}{=} -y'' + 2y^3 + xy + a = 0 \text{ с } a \neq 0, \tag{1.15}$$
где a — комплексный параметр. Носитель $\mathbf{S}(f)$ и многоугольник $\Gamma(f)$ см. на рис. 2. Правому нижнему ребру $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ соответствует укороченное уравнение
$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{def}{=} xy + a = 0. \tag{1.16}$$

Поскольку ребро правое, то $\omega = 1$, т. е. $x \to \infty$. Решение $y = -a/x$ укороченного уравнения (1.16) продолжается в разложение

$$y = -ax^{-1} + x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-3k} \stackrel{def}{=} b_0(x)$$

решения полного уравнения (1.15). Согласно (1.10')

$$\mathcal{M} = x - \frac{d^2}{dx^2} + a^2x^{-2} + \ldots.$$

Согласно (1.11) имеем $z' = \zeta y,\ z'' = (\zeta' + \zeta^2)y$. Поэтому в (1.12) $x - \zeta^2 = 0$ и

$$h(x, \zeta) = x - \zeta^2 + 6a^2x^{-2} + \ldots$$

Носитель и многоугольник этой суммы показаны на рис. 3. Укорочение, соответствующее ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, есть $\hat{h}(x, \zeta) = x - \zeta^2$, т. е. $\zeta = \pm\sqrt{x}$ и $\gamma^* = \pm 1,\ \rho = 1/2$.

Теперь

$$\hat{h}(1, k\gamma^*) = 1 - k^2\gamma^{*2} = 1 - k^2 = \mu(k).$$

Корни многочлена $\mu(k)$ суть $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$, и $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 1 получаем два семейства разложений (1.9), соответствующих двум значениям $\gamma^* = \pm 1$.

§ 2. Горизонтальное ребро

Пусть укороченное уравнение (1.3) соответствует горизонтальному ребру $\Gamma_j^{(1)}$ многоугольника $\Gamma(f)$. Следовательно на этом ребре $q_2 = m \in \mathbb{N}$. Согласно [1,§ 5] сделаем логарифмическое преобразование

$$\zeta = d\log y/dx \tag{2.1}$$

и из укороченного уравнения (1.3) получим уравнение

$$h(x, \zeta)y^m \stackrel{def}{=} \hat{f}_j^{(1)} = 0, \tag{2.2}$$

где $h(x, \zeta)$ — дифференциальная сумма. Пусть $\Gamma(h) = \tilde{\Gamma}$ — ее многоугольник и $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ — его ребро с внешней нормалью $\tilde{N} = (1, \rho)$, лежащей в конусе задачи $\mathcal{K}_\omega$ (1.12′). Этим определяется знак ω и направление стремления x (к нулю или бесконечности). Ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(x, \zeta) = 0$, которое является алгебраическим и имеет несколько степенных решений $\zeta = \gamma^* x^\rho$, где $\gamma = \gamma^*$ — один из корней уравнения $\hat{h}_i^{(1)}(1, \gamma) = 0$.

Каждое степенное решение $\zeta = \gamma^* x^\rho$ укороченного уравнения $\hat{h}_i^{(1)}(x,\zeta) = 0$ единственным образом продолжается в степенное разложение

$$\zeta = \gamma^* x^\rho + \sum d_\sigma x^\sigma \stackrel{def}{=} \varphi'(x) \tag{2.3}$$

решения полного уравнения $h(x,\zeta) = 0$.

Первую вариацию $\dfrac{\partial \hat{f}_j^{(1)}}{\partial y}$ запишем в виде

$$\frac{\partial \hat{f}_j^{(1)}}{\partial y} = y^{m-1} g(x, \zeta, \frac{d}{dx}), \tag{2.3$'$}$$

где g — многочлен от своих аргументов, если под $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^l$ понимать $\dfrac{d^l}{dx^l}$. Его степень по $\zeta, \zeta', \ldots, \zeta^{(n-1)}$ не превосходит $m-1$. Теперь в операторе g заменим $\dfrac{d^l}{dx^l}$ на $k^l \zeta^l$, затем ζ на $\gamma^* x^\rho$ и выделим ведущий член $\mu(\gamma^*, k) x^\tau$ по x. Коэффициент $\mu(\gamma^*, k)$ является *характеристическим многочленом*, соответствующим укороченному решению $\zeta = \gamma^* x^\rho$.

Замечание 2. Пусть $f^*(x,y)$ — сумма тех дифференциальных мономов из $\hat{f}_j^{(1)}(x,y)$, которые после логарифмической замены (2.1) дали члены, попавшие в укорочение $\hat{h}_i^{(1)}(x,\zeta)$ и $g^*(x, \zeta, \dfrac{d}{dx}) y^{m-1} = \dfrac{\delta f^*}{\delta y}$. Тогда $\mu(\gamma, k)$ для g^* такое же, как и для g.

Лемма 1. *Характеристический многочлен $\mu(\gamma^*, k)$ всегда делится на $k-1$.*

Если уравнение $h(x,\zeta) = 0$ имеет решение вида (2.3), то укороченное уравнение $\hat{f}_j^{(1)}(x,y) = 0$ имеет семейство решений

$$y = c \exp \varphi(x), \tag{2.4}$$

где c — произвольная постоянная и $\varphi(x)$ — интеграл от степенного разложения (2.3).

Теперь перейдем к полному уравнению (1.2). Пусть множество Σ — проекция носителя $\mathbf{S}(f)$ на ось q_2 параллельно оси q_1. Положим $\Sigma' = \Sigma - m$, т.е. Σ' — это сдвинутое на m множество Σ. Наконец, Σ'_+ — это множество всевозможных сумм чисел множества Σ'.

Теорема 2. *Пусть* (1.3) *— укороченное уравнение для* (1.2)*, соответствующее горизонтальному ребру высоты m. Если ни одно из чисел $k \in \Sigma' + 1$, $k \neq 1$ не является корнем характеристического многочлена $\mu(\gamma^*, k)$, то решения* (2.4) *укороченного уравнения* (1.3) *продолжаются в виде экспоненциального разложения*

$$y = c \exp \varphi(x) + \sum b_k(x) c^k \exp(k\varphi(x)) \quad \text{по} \quad k \in \Sigma'_+ + 1, \qquad k \neq 1, \tag{2.5}$$

решений полного уравнения (1.2), *где* $b_k(x)$ — *степенные разложения.*

Пример 2. Рассмотрим четвертое уравнение Пенлеве

$$f(x,y) \overset{def}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4(x^2-a)y^2 + 2b = 0, \tag{2.6}$$

где a и b — комплексные параметры. При $b = 0$, его многоугольник $\Gamma(f)$ имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ высоты $m = 2$ (рис. 4), которому соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)} \overset{def}{=} -2yy'' + y^2 + 4(x^2-a)y^2 = 0.$$

После логарифмического преобразования (2.1) получаем

$$h(x,\zeta) = -2(\zeta' + \zeta^2) + \zeta^2 + 4x^2 - 4a.$$

$\Gamma(h)$ имеет наклонное ребро $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, соответствующее $\omega = 1$, с укорочением

$$\hat{h}(x,\zeta) = -\zeta^2 + 4x^2 = 0,$$

откуда $\zeta = \pm 2x$, т.е. $\gamma^* = \pm 2$ и $\rho = 1$. Имеем

$$\frac{\delta \hat{f}_{(1)}^1}{\delta y} = -2y'' - 2y\frac{d^2}{dx^2} + 2y'\frac{d}{dx} + 8(x^2-a)y =$$

$$= y\left[-2(\zeta'+\zeta^2) - 2\frac{d^2}{dx^2} + 2\zeta\frac{d}{dx} + 8(x^2-a)\right].$$

Заменяем $\dfrac{d^2}{dx^2}$ и $\dfrac{d}{dx}$ на $k^2\zeta^2$ и $k\zeta$ соответственно, а ζ — на $\gamma^* x$. Тогда ведущий член при $x \to \infty$ есть

$$-2\zeta^2 - 2k^2\zeta^2 + 2k\zeta^2 + 8x^2 = -2\zeta^2(k^2-k).$$

Следовательно, характеристический многочлен $\mu(\gamma^*, k) = -2(k^2-k)$ для обоих значений $\gamma^* = \pm 2$. Множество Σ состоит из чисел 2,3,4; поэтому $\Sigma' = \Sigma - 2 = \{0,1,2\}$ и Σ'_+ — это все неотрицательные целые числа, а $\Sigma'_+ + 1$ — это все натуральные числа. Корни многочлена $\mu(\gamma^*, k)$ суть $k = 0$ и $k = 1$. Поскольку корень $k = 0$ не лежит в множестве $\Sigma'_+ + 1$, то по теореме 2 решение уравнения (2.6) при $b = 0$ разлагаются в ряды

$$y = c\exp\varphi(x) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x)c^k \exp\ k\varphi(x),$$

соответствующие двум значениям $\gamma^* = \pm 2$.

Пример 3. Рассмотрим 5-ое уравнение Пенлеве

$$f(x,y) \overset{def}{=} -x^2y(y-1)y'' + x^2(3y-1)y'^2/2 - xy(y-1)y' +$$

$$+(y-1)^2(ay^2+b)+cxy^2(y-1)+dx^2y^2(y+1)=0, \qquad (2.7)$$

где a,b,c,d — параметры. При $a=0$ его многоугольник $\Gamma(f)$ имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ высоты $m=3$ (рис. 6), которому соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x,y) \stackrel{def}{=} -x^2y^2y''+3x^2yy'^2/2-xy^2y'+by^3+cxy^3+dx^2y^3=0.$$

После логарифмической замены (2.1) получаем

$$h(x,\zeta)=-x^2(\zeta'+\zeta^2)+3x^2\zeta^2/2-x\zeta+b+cx+dx^2.$$

Если $d\neq 0$, то многоугольник $\Gamma(h)$ (рис. 7) имеет вертикальное ребро $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$, соответствующее $\omega=1$, с укорочением

$$\hat{h}_1^{(1)}=x^2\zeta^2/2+dx^2.$$

Его корни $\zeta=\pm\sqrt{-2d}$, т.е. $\rho=0$ и $\gamma^*=\pm\sqrt{-2d}$. Имеем

$$\frac{\delta\hat{f}_1^{(1)}}{\delta y}=-2x^2yy''-x^2y^2\frac{d^2}{dx^2}+3x^2y'^2/2+3x^2yy'\frac{d}{dx}-$$

$$-2xyy'-xy^2\frac{d}{dx}+3by^2+3cxy^2+3dx^2y^3=$$

$$=y^2\left[-2x^2(\zeta'+\zeta^2)-x^2\frac{d^2}{dx^2}+3x^2\zeta^2/2+\right.$$

$$\left.+3x^2\zeta\frac{d}{dx}-2x\zeta-x\frac{d}{dx}+3b+3cx+3dx^2\right]\stackrel{def}{=}y^2g.$$

Заменяем $\dfrac{d^2}{dx^2}$ и $\dfrac{d}{dx}$ на $k^2\zeta^2$ и $k\zeta$ соответственно, а ζ — на γ^*. Тогда ведущий член при $x\to\infty$ в g есть

$$-2x^2\zeta^2-x^2k^2\zeta^2+3x^2\zeta^2/2+3x^2k\zeta^2+3dx^2=$$

$$=-x^2\zeta^2(k^2-3k+2).$$

Следовательно, характеристический многочлен $\mu(\gamma^*,k)=2d(k^2-3k+2)$ для обоих значений $\gamma^*=\pm\sqrt{-2d}$. Его корни $k_1=1$ и $k_2=2$. Здесь множество $\Sigma=\{3,2,1,0\}$. Поэтому $\Sigma'=\Sigma-3=\{0,-1,-2,-3\}$, и Σ'_+ — это все целые неположительные числа, а Σ'_++1 — это все целые $k<1$. Поскольку $k_2=2$ не лежит в этом множестве, то по теореме 2 решения полного уравнения (2.7) при $b=0$ разлагаются в ряды

$$y=c\exp\varphi(x)+b_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(x)c^{-k}\exp[-k\varphi(x)],$$

где $b_k(x)$ — степенные ряды, соответствующие двум значениям $\gamma^* = \pm\sqrt{-2d}$.

Замечание 3. Экспоненциальные разложения решений, соответствующие теореме 1, имеются у уравнений Пенлеве P1—P5, но отсутствуют у P6. Разложения теоремы 2 имеются у P2 при $a = 0$, у P4 при $b = 0$ (пример 2), у P5 при $a = 0$ (пример 3), и у P5 при $b = 0$.

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 2.

Пусть укороченное уравнение (1.3) соответствует горизонтальному ребру $\Gamma_j^{(1)}$. Положим

$$\mathcal{L}(x) = \left.\frac{\delta \hat{f}}{\delta y}\right|_{y\, =\, c\exp\varphi(x)}. \tag{3.1}$$

Лемма 2. *Если* (2.5) *— разложения решений полного уравнения* (1.2)*, то* $b_k(x)$ *удовлетворяет уравнению вида*

$$\mathcal{L}(x) b_k(x) \psi^k(x) + d_k(x)\psi^{k+m-1}(x) = 0, \tag{3.2}$$

где $\psi(x) = c\exp\varphi(x)$*,* $d_k(x)$ *— степенной ряд, зависящий от предыдущих* $b_j(x)$ *и суммы* $f(x,y)$*.*

Доказательство получается, если уравнение (1.2) и решение (2.5) расписать в виде разложений

$$f(x,y) = \hat{f}(x,y) + \hat{\hat{f}}(x,y) + ..., \tag{3.3}$$

$$y = \psi(x) + \psi_2(x) + ... \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получаем

$$f(x,y) = \hat{f}(x,\psi) + \left.\frac{\delta \hat{f}}{\delta y}\right|_{y=\psi} \psi_2 + \hat{\hat{f}}(x,\psi) + ... \tag{3.5}$$

По условию $\hat{f}(x,\psi) = 0$. Поэтому приравнивая (3.5) к нулю и учитывая (3.1), в первом приближении получаем равенство

$$\mathcal{L}(x)\psi_2 + \hat{\hat{f}}(x,\psi) = 0.$$

Это уравнение (3.2) для наименьшего значения $|k-1|$. Двигаясь по росту этого значения с $k \in \Sigma'_+ + 1$, получим уравнения вида (3.2). Лемма доказана.

Рассмотрим уравнение (3.2) подробнее. Разделим его на ψ^{k+m-1} и получим уравнение

$$\psi^{-k-m+1}\mathcal{L}(x)b_k(x)\psi^k + d_k(x) = 0. \tag{3.6}$$

Поскольку производные от $\exp(k\varphi(x))$ имеют вид $\eta(x)\exp(k\varphi(x))$, где $\eta(x)$ — степенной ряд, то уравнение (3.6) имеет вид

$$\mathcal{M}_k(x)b_k(x) + d_k(x) = 0, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{M}_k(x)$ — дифференциальный оператор, коэффициенты которого — степенные ряды по x. Чтобы выяснить разрешимость уравнения (3.7) относительно $z = b_k(x)$, надо вычислить ведущие члены оператрора $\mathcal{M}_k(x)$. Отметим следующие моменты.

1. Согласно (2.3′) $\left.\dfrac{\delta\hat{f}}{\delta y}\right|_{y=\psi} = \psi^{m-1}\mathcal{L}_1(x)$, где $\mathcal{L}_1(x)$ — дифференциальный оператор, коэффициенты которого суть степенные ряды, по x.

2.
$$\frac{d^l}{dx^l}[b_k(x)e^{k\varphi}] \sim b_k(x)k^l\varphi'^l e^{k\varphi}, \tag{3.8}$$

где $\sim$ означает асимптотическую эквивалентность, т.е. справа — ведущие члены левого выражения. Пусть $\hat{\mathcal{L}}_1(x)$ — ведущие члены оператора $\mathcal{L}_1(x)$ на кривой (2.3), т.е. на кривой $\zeta = \gamma^* x^\rho$.

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l(x,\zeta)\frac{d^l}{dx^l},$$

где α_l — многочлены от x и $\zeta, \zeta', ..., \zeta^{(n-1)}$. Согласно (3.8), ведущие члены в $\mathcal{M}_k(x)b_k(x)$ имеют вид

$$\hat{\mathcal{L}}_1(x)b_k(x) = b_k(x)\sum_{l=0}^{n}\hat{\alpha}_l(x,\zeta)k^l\zeta^l,$$

т.е. характеристический многочлен — это коэффициент при степени x у ведущего члена последней суммы. Если он отличен от нуля, то линейное уравнение (3.7) разрешимо. По условию теоремы 2 это предполагается для всех $k \in \Sigma'_+ + 1$, $k \neq 1$. Теорема доказана.

3.2 Доказательство теоремы 1.

Многоугольник уравнения (1.10) имеет нижнее горизонтальное ребро высоты 1. Для него множество $\Sigma'_+ + 1$ лежит в множестве натуральных чисел. Поэтому применима теорема 2. Кроме того, укороченное уравнение, соответствующее горизонтальному ребру линейно по $z, z', ..., z^{(n)}$. Поэтому если сумма $h(x,\zeta) = \sum\limits_{j,l} \alpha_{j,l} x^j \zeta^l$, то $\dfrac{\delta \hat{f}}{\delta y} = \sum\limits_{j,l} \alpha_{j,l} x^j \dfrac{d^l}{dx^l}$. Следовательно, ведущие члены в операторе $\mathcal{L}_1(x)$ выбирают так, как указано после формулировки теоремы 1. Доказательство окончено.

Литература

1. Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения// УМН, 2004, т. 59, N 3 с. 31-80.

2. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО, 2010, т. 71, с. 6-118.

3. Брюно А.Д., Горючкина И.В. О сходимости формального решения обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2010, т. 432, N 2, с. 151-154.

4. Горючкина И.В. Теорема о сходимости формального решения ОДУ. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша N 25. Москва, 2011, 16 с.

5. Варин В.П. Плоские разложения решений ОДУ вблизи особенности. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша N 64. Москва, 2010, 12 с.

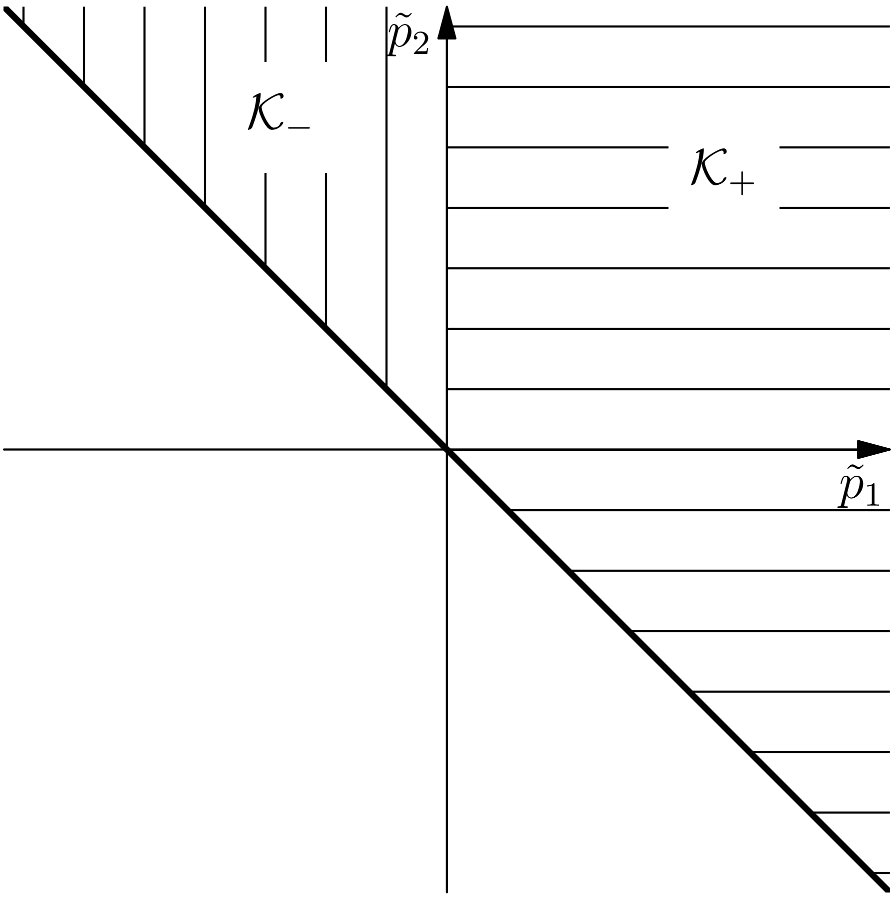

Рис. 1:

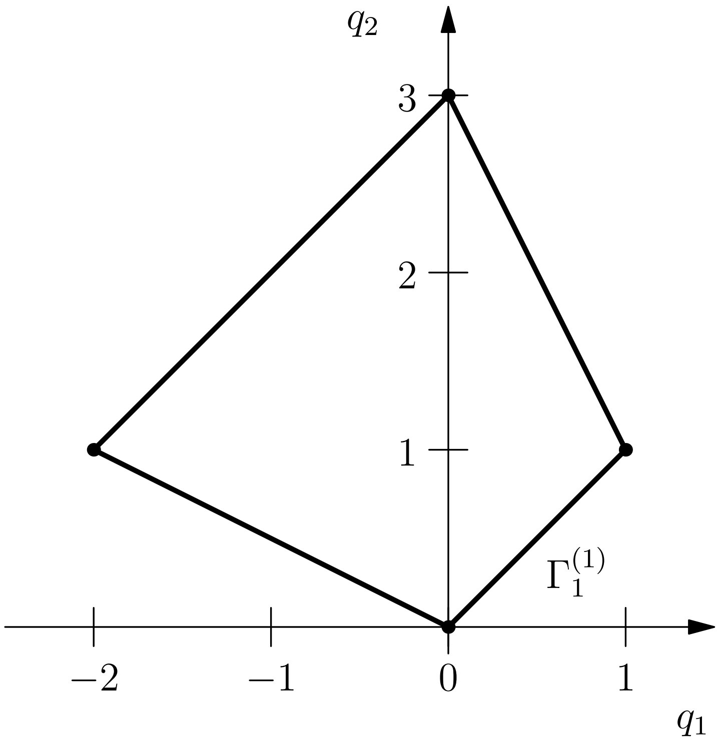
q_2
3
2
1
$\Gamma_1^{(1)}$
-2
-1
0
1
q_1

Рис. 2:

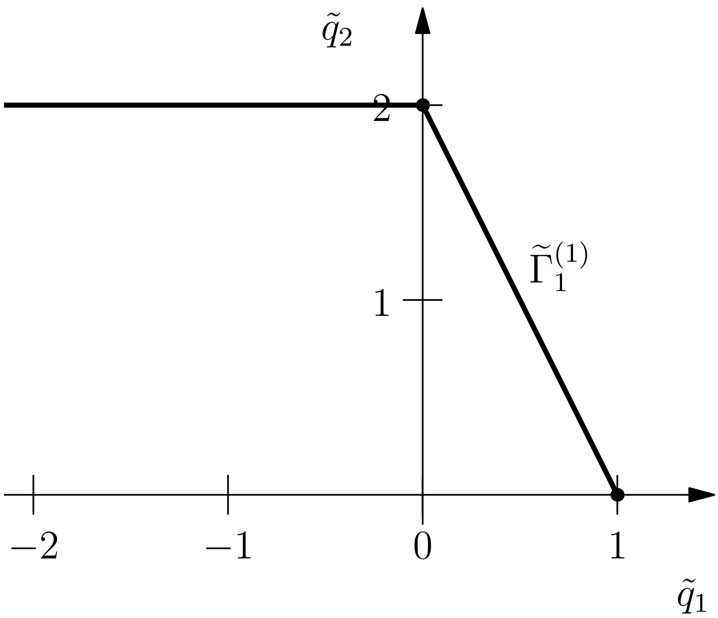
$\tilde{q}_2$
2
$\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$
1
-2
-1
0
1
$\tilde{q}_1$

Рис. 3:

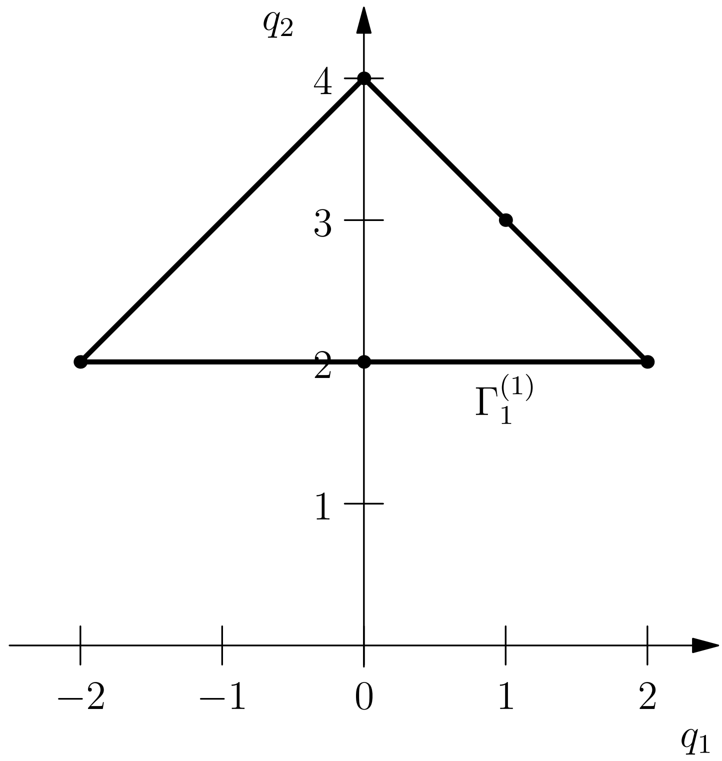
q_2
4
3
2
1
$\Gamma_1^{(1)}$
-2
-1
0
1
2
q_1

Рис. 4:

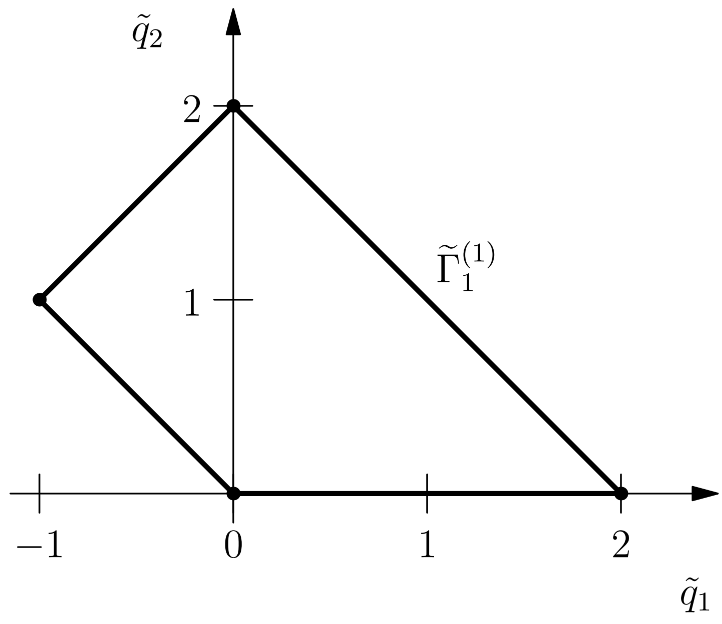
$\tilde{q}_2$
2
1
$\widetilde{\Gamma}_1^{(1)}$
-1
0
1
2
$\tilde{q}_1$

Рис. 5:

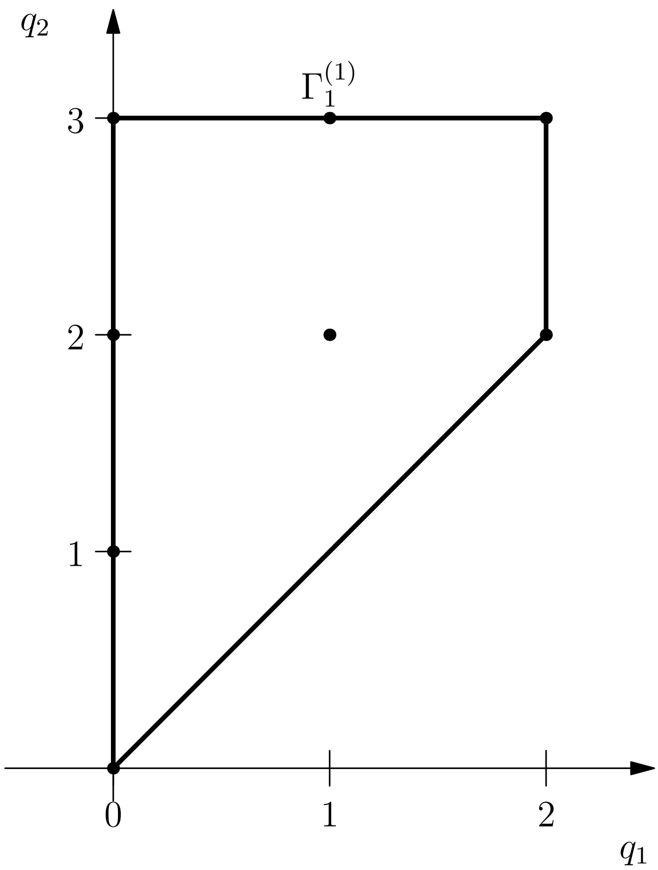

Рис. 6:

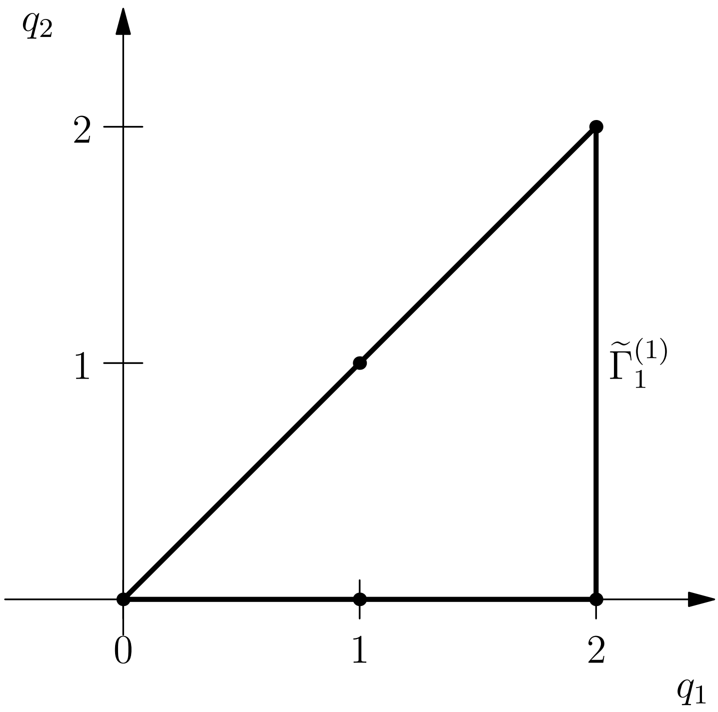

Рис. 7: