Батищева Я.Г.

Кинетика твердых частиц с активной поверхностью в идеальном газе. Метод построения диффузного приближения

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ордена Ленина

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

им. М.В. Келдыша

Я.Г.Батищева

КИНЕТИКА ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ С АКТИВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ДИФФУЗНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

Москва, 2011

Я.Г.Батищева

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Кинетика твердых частиц с активной поверхностью в идеальном газе. Метод построения диффузного приближения.

В работе представлен вывод уравнения Фоккера-Планка на основе уравнения переноса с использованием формального представления дельта-функции степенным рядом, что позволяет относительно просто технически осуществить вывод уравнения Фоккера-Планка в достаточно общем виде. Показана методика применения общих уравнений к конкретным модельным случаям, для которых полученное уравнение может быть использовано как для теоретического анализа, так и в численых рассчетах.

J. G. Batisheva

The kinetics of solid particles in the ideal gas. The method of derivation of the diffuse approximation.

This paper is presenting the derivation method of the Fokker-Planck equation based on the transport equation and the representation of the delta-function by a formal power series. The technique and the example of the application of our method are shown.

Введение

В работе представлен вывод уравнения Фоккера-Планка на основе уравнения переноса с использованием формального представления дельта-функции степенным рядом, что позволяет относительно просто технически осуществить вывод уравнения Фоккера-Планка в достаточно общем виде. Показана методика применения общих уравнений к конкретным модельным случаям, для которых полученное уравнение может быть исполбзовано как для теоретического анализа, так и в численых рассчетах.

Основной подход приведения интеграла столкновений к дифференциальному полиному, использующийся в этой работе, связан с классической идеей малости относительного изменения состояния отдельной частицы, находящейся в газе, при единичном столкновении млекулы газа с ее поверхностью [1-4].

В литературе известны другие подходы к приложению уравнения типа Фоккера-Планка к газовым взвесям твердых частиц и другим гетерогенным состояниям вещества (см., например,[5] и ссылки в этой работе), однако часть из известных автору не позволяют охватить интересующий нас круг задач, напротив, другие из них, представляются с одной стороны слишком абстрактыми, так что для применения к конкретным физическим ситуациям их использовать затруднительно, с другой стороны — не достаточно строгими.

I. Уравнение переноса

В работах [6-10] представлен ряд моделей, описывающих движение в идеальном газе отдельной массивной твердой частицы с неоднородной активной поверхностью (то есть поверхностью на разных областях которой рассеяние газа имеет различный характер, а также возможно поглощение молекул газа).

Основной задачей этой работы является посторение кинетического описания эволюции ансамбля таких твердых частиц. Как показано в [10] в различных случаях (наличия или отсуствия динамической, геометрической симмметрии и проч.) возможно использование разных наборов переменных и соответственно уравнений описывающих динамику частицы. С целью сохранения универсальности описания на данном этапе рассмотрим динамику твердой частицы в общем виде. Пусть ξ - вектор состояния частицы составленный из всех значимых переменных, выбранных так, чтобы собственное движение частицы (вне взаимодействия с газом) описывается системой ОДУ с гладкими правыми частями в фазовом пространстве переменных $\{\xi\}$:

(1) $$\frac{d\xi}{dt}=\phi(\xi,t)$$

Тогда в отсуствие газа перенос частиц будет описываться уравнением неразрывности:

(2) $$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{\{i\}}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\phi_i(\xi,t)\cdot F(\xi,t)\right)=0 \quad .$$

Введем в расмотрение взаимодействие с газом. Пусть η вектор состояния молекулы газа, $f(\eta)$ - функция распределения для молекул газа. Будем учитывать только парные столкновения молекул с поверхностью твердой частицы, столкновение предполагается мгновенным:

(3) $$\xi+\eta \xrightarrow{\nu} \tilde{\xi}+\ldots \quad ,$$

здесь ν - набор переменных характеризующие тип столкновения, пусть $\beta(\xi,\eta,\nu)$ - есть вероятность того, что в результате соударения реализуется случай соотвествующий значению ν : $\tilde{\xi}=u(\xi,\eta,\nu)$. Таким образом закладывается возможность того, что результат столкновения может иметь как детерминированный, так и вероятностный характер.

Пусть $B(\xi,\eta)$ - сечение столкновения, тогда дифференциальная частоста столкновений есть:

(4) $$d\Omega(\xi,\eta,\nu)=\beta(\xi,\eta,\nu)B(\xi,\eta)f(\eta)d\eta d\nu$$

Тогда уравнение переноса частиц можно записать в виде:

(5) $$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i}\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\phi_i(\xi,t)\cdot F(\xi,t)\right)=I[F,f]$$

Где интеграл столкновений:

(6) $$I[F,f]=\iiint_{\{\xi',\eta,\nu\}}\delta\left(u(\xi',\eta,\nu)-\xi\right)F(\xi')d\Omega(\xi',\eta,\nu)d\xi'-F(\xi)\iint_{\{\eta,\nu\}}d\Omega(\xi,\eta,\nu)$$

II. О представлении дельта-функции степенным рядом.

Рассмотрим пересечение пространства основных функций с аналитическими, и на нем обощенную функцию, представленную рядом:

(7) $$\sum_{\alpha\in J^d}\frac{y^\alpha}{\alpha!}D^\alpha\delta(x) \quad ,$$

где $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_d)$ - мультииндекс, соотвественно пространство мультииндексов есть $\alpha \in J^d = \{0, \mathbb{N}\}^d$. Кроме того будем будем использовать обозначения:

$$\delta(x) = \prod_{i=1}^{d} \delta(x_i) \quad , \quad y^\alpha = \prod_{i=1}^{d} y_i^{\alpha_i} \quad , \quad \alpha! = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i! \quad , \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$$

и дифференциальный оператор:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad .$$

Легко заметить, что (7) есть формальный степенной ряд дельта-функции $\delta(x+y)$ по степеням *y* в окрестности аргумента *x*. Пусть $\varphi(x)$ некоторая функция из пространства основных функций и аналитическая. Сравним действие обобщенных функций (7) и $\delta(x+y)$ на пробную аналитическую функцию $\varphi(x)$:

(8) $$\int \sum_{\alpha \in J^d} \frac{y^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \delta(x)\, \varphi(x)\, dx = \dots$$

Выполнив $|\alpha|$ раз интегрирование по частям получим что это выражение есть:

$$\dots = \int \sum_{\alpha \in J^d} \frac{y^\alpha}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} \delta(x) D^\alpha \varphi(x) dx = \int \delta(x) \sum_{\alpha \in J^d} \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) dx = \int \delta(x) \varphi(x-y) dx$$

Последний знак равенства справедлив в силу аналитичности $\varphi(x)$. Также легко видеть:

(9) $$\int \delta(x+y) \varphi(x) dx = \int \delta(x) \varphi(x-y) dx \quad .$$

Итак, правые части равенств в (8) и (9) получились равными, следовательно мы можем говорить о равенстве обобщенных функций: дельта-функции и ее формального степенного ряда при условии аналитичности функции в аргументе соответсвующих функционалов.

III. Преобразование интеграла столкновений.

Преобразуем интеграл (6) в правой части уравнения переноса (5) к виду:

$$I[F, f] = \iiint_{\{\xi', \eta, \nu\}} \left[\delta\left(u(\xi', \eta, \nu) - \xi\right) - \delta\left(\xi' - \xi\right) \right] F(\xi')\, d\Omega(\xi', \eta, \nu)\, d\xi' = \dots$$

Тождественно преобразуем выражение в аргументе первой дельта-функции:

$$...=\iiint\limits_{\{\xi',\eta,\nu\}}\left[\delta\left((u(\xi',\eta,\nu)-\xi')+(\xi'-\xi)\right)-\delta(\xi'-\xi)\right]F(\xi')\,d\Omega(\xi',\eta,\nu)\,d\xi'$$

Далее используем формальное разложение в степенной ряд первой дельта-функции из подынтегрального выражения в окрестности аргумента $(\xi'-\xi)$ по степеням $(u(\xi',\eta,\nu)-\xi')$

$$I[F,f]=\iiint\limits_{\{\xi',\eta,\nu\}}\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ \alpha\neq 0}}\frac{1}{\alpha!}\left(u(\xi',\eta,\nu)-\xi'\right)^{\alpha}D^{\alpha}\delta(\xi'-\xi)F(\xi')\,d\Omega(\xi',\eta,\nu)\,d\xi'$$

Интегрирование по частям $|\alpha|$ раз и, затем, по ξ' дает:

$$I[F,f]=\iiint\limits_{\{\xi',\eta,\nu\}}\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ \alpha\neq 0}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\delta(\xi'-\xi)D^{\alpha}\left[\left(u(\xi',\eta,\nu)-\xi'\right)^{\alpha}F(\xi')\,d\Omega(\xi',\eta,\nu)\right]d\xi'=...$$

$$...=\iint\limits_{\{,\eta,\nu\}}\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ \alpha\neq 0}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\left[\left(u(\xi,\eta,\nu)-\xi\right)^{\alpha}F(\xi)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\right]$$

(10) $$I[F,f]=\iint\limits_{\{,\eta,\nu\}}\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ \alpha\neq 0}}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}D^{\alpha}\left[\left(u(\xi,\eta,\nu)-\xi\right)^{\alpha}F(\xi)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\right]$$

Определив коэффициенты:

(11) $$K_{\alpha}(\xi)=\frac{1}{\alpha!}\iint\limits_{\{,\eta,\nu\}}\left(u(\xi,\eta,\nu)-\xi\right)^{\alpha}d\Omega(\xi,\eta,\nu)$$

можем окончательно представить интеграл столкновения в виде:

(12) $$I[F,f]=\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ \alpha\neq 0}}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left[K_{\alpha}(\xi)F(\xi)\right]$$

Другой полезной формой представления интеграла столкновений видится следующая:

(13) $$I[F,f]=\sum_{n=1}^{\infty}I_n[F,f]$$, где $$I_n[F,f]=\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ |\alpha|=n}}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left[K_{\alpha}(\xi)F(\xi)\right]$$.

IV. Приближенные формы интеграла столкновений

В ряде физически-интересных случаях множители $(u(\xi,\eta,\nu)-\xi)^{\alpha}$ и их производные по ξ, входящие в интеграл столкновений, являются малыми величинами, в частности для упругого рассеяния они имеют порядок малости $|\alpha|$ по отношению масс $\frac{m}{M}$ молекулы газа и твердой частицы. Это дает возможность сохраняя достаточную точность описания упрощать задачу, заменяя бесконечную сумму в (13) — конечной суммой небольшого числа слагаемых. Однако, следует заметить, что при использовании различных модельных взаимодействий, малость высших членов подлежит оценке сверху для каждого варианта динамики столкновений.

Рассмотрим самое простое приближение, когда интеграл столкновений представленный заменяется своим первым членом разложения (13):

$$I[F,f]\approx I_1[F,f]=\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ |\alpha|=1}}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left[K_{\alpha}(\xi)F(\xi)\right]=-\sum_{\{i\}}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left[F(\xi_i)\iint\limits_{\{\eta,\nu\}}(u_i(\xi,\eta,\nu)-\xi_i)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\right]$$

Таким образом вместо уравнения (2), которое можно считатть нулевым приближением,и которое является уравнением Лиувилля в силу собственного движения частиц без взаимодействия частиц с газом, мы получам снова уравнение Лиувилля в силу двидения получаемого изходя из усреднения сил, действующих на каждую частицу, по потоку молекул газа сталкивающихся с этой частицой:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(F(\xi,t)\cdot\left[\phi_i(\xi,t)+\iint\limits_{\{\eta,\nu\}}(u_i(\xi,\eta,\nu)-\xi_i)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\right]\right)=0 \quad . \tag{14}$$

Это уравнение полностью соответствует расмотрению движения частиц в [9,10].

Рассмотрим приблежение следующего порядка. Пренебрежем слагаемыми в которых $|\alpha|>$٢, получим:

$$I[F,f]\approx I_1[F,f]+I_2[F,f]=\sum_{\substack{\alpha\in J^d\\ |\alpha|=1;2}}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\left[K_{\alpha}(\xi)F(\xi)\right]=\ldots$$

$$\ldots=-\sum_{\{i\}}\frac{\partial}{\partial\xi_i}[F(\xi_i)A_i(\xi)]+\sum_{\{i,j\}}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}[F(\xi)B_{ij}(\xi)]$$

Где коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_i(\xi)&=\iint\limits_{\{\eta,\nu\}}(u_i(\xi,\eta,\nu)-\xi_i)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\\ B_{ij}(\xi)&=\iint\limits_{\{\eta,\nu\}}(u_i(\xi,\eta,\nu)-\xi_i)(u_j(\xi,\eta,\nu)-\xi_j)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu)\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом во втором приближении получаем уравнение Фоккера-Планка:

(16) $$\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\phi_i(\xi,t)\cdot F(\xi,t)\right)=-\sum_{\{i\}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}[F(\xi_i)A_i(\xi)]+\sum_{\{i,j\}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}[F(\xi)B_{ij}(\xi)] \quad .$$

Свойства уравнения Фоккера-Планка хорошо изучены, см. например [1,11]. Поскольку это - дифференциальное уравнение второго порядка, по сравнению с исходным уравнением переноса (5,6) оно существенно проще для проведения численных рассчетов и теоретических оценок.

V. Учет нескольких типов взаимодействия.

В представленных выше рассуждениях для учета различных исходов столкновения использовался только непрерывный параметр, хотя и, возможно, большей, чем единица, размерности. На практике такое представление хотя и почти всегда осуществимо, не всегда удобно. Покажем как следует модифицировать полученные здесь формулы, если требуется учесть конечное число модельных типов столкновений, каждое со своим, возможно не одномерным, параметром.

Полная дифференциальная частота соударений (безотносительно их исходов) согласно (4):

(17) $$d\Omega_{tot.}(\xi,\eta)=B(\xi,\eta)f(\eta)d\eta$$

Пусть столкновение типа k с параметром ν_k реализуется с условной вероятностью $\beta_k(\xi,\eta,\nu_k)$:

$$\xi+\eta\xrightarrow{\nu_k}\tilde{\xi}+\ldots \quad , \quad \tilde{\xi}=u_k(\xi,\eta,\nu_k) \quad .$$

Функции вероятности, очевидно, должны удовлетворять условию:

$$\sum_{\{k\}} \int_{\{\nu_k\}} \beta_k(\xi,\eta,\nu_k)d\nu_k\equiv 1$$

Определим меру $d\Omega_k(\xi,\eta,\nu_k)=\beta_k(\xi,\eta,\nu_k)B(\xi,\eta)f(\eta)d\eta d\nu_k$ - дифференциальную частоту столкновений типа k с параметром ν_k , тогда, естественно получим:

(18) $$d\Omega_{tot.}(\xi,\eta)=\sum_{\{k\}} \int_{\{\nu_k\}} d\Omega_k(\xi,\eta,\nu_k) \quad .$$

Уравнение (16) не изменит своего вида, однако коэффициенты в нем теперь следует вычислять по формулам:

(19)
$$A_i(\xi)=\sum_{\{k\}}\iint_{\{\eta,\nu_k\}}(u_{ki}(\xi,\eta,\nu_k)-\xi_i)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu_k)$$
$$B_{ij}(\xi)=\sum_{\{k\}}\iint_{\{\eta,\nu_k\}}(u_{ki}(\xi,\eta,\nu_k)-\xi_i)(u_{kj}(\xi,\eta,\nu_k)-\xi_j)\,d\Omega(\xi,\eta,\nu_k)\quad .$$

VI. Применение общих уравнений к конкретным физическим ситуациям.

Для приложения к конкретным физическим задачам полученных выше конкструкций необходимо задать (и/или вывести из отдельно оговоренных предположений) следующие объекты:

1. Описание ансамбля частиц:
- фазовое пространство состояний частицы $\{\xi\}$;
- собственное движение частицы: $\frac{d\xi}{dt}=\phi(\xi,t)$;

2. Описание газа-носителя:
- фазовое пространство состояний молекулы газа $\{\eta\}$;
- функция распределения молекул газа $f=f(\eta)$ или достаточные условия для ее нахождения.

3. Описание взаимодействия частиц с газом.
Определение сечения столкновений $B(\xi,\eta)$ и, соответсвенно, нахождение $d\Omega_{tot.}(\xi,\eta)=B(\xi,\eta)f(\eta)d\eta$.

4. Описание взаимодействия частиц с газом по модельным типам. Для каждого модельного типа взаимодействия должны быть указаны:
- физическая модель столкновения типа k ;
- пространство параметров $\{\nu_k\}$;
- функции $\beta_k(\xi,\eta,\nu_k)$, определяющие условные вероятности реализации столкновения типа k с параметром $\{\nu_k\}$;
- дано описание динамики столкновений, то есть определение функций u_k которые описывают результат столкновения $\xi+\eta\xrightarrow{\nu_k}\tilde{\xi}+...$, $\tilde{\xi}=u_k(\xi,\eta,\nu_k)$.

5. Для каждого типа взаимодействия k выполнена оценка порядка малости величины $(u_k(\xi,\eta,\nu_k)-\tilde{\xi})$, а также производных порядка не выше $|\alpha|$ степеней $(u(\xi,\eta,\nu)-\xi)^{\alpha}$, $\alpha\in J^n\setminus\{0\}$.

6. Произведены вычисления коэффициентов (15) уравнения Фоккера-Планка (16). Указаны начальные и граничные уловия или иная постановка задачи для уравнения (16).

VII. Простейший пример

Рассмотрим простейший пример: ансамбль частиц, поверхность которых имеет сферическую форму радиуса a и идеально-упруго рассеивает молекулы газа, все частицы будем считать механически неразличимыми,центр масс совпадающим с геометрическим центром. Масса частиц полагается много большей массы молекул газа: $M \gg m$. Согласно вышеприведенной схеме в этом случае:

1. Описание ансамбля частиц:
- фазовое пространство состояний частицы — $\{R,Q\} = \mathbb{R}^6$ где R - радиус вектор центра масс, Q импульс частицы;
- собственное движение частицы : $\frac{dQ}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = \frac{Q}{M}$;

2. Описание газа-носителя:
- фазовое пространство состояний молекулы газа $\{r,p\} = \mathbb{R}^6$;
- функция распределения молекул газа – какая-либо изотропная функция распределения: $f(r,p) = f(p)$.

3. Описание взаимодействия частиц с газом.
Сечение столкновений $B(R,Q,r,p) = \delta(|R-r|-a)(v,n)\theta((v,n))$,
где $n = \frac{R-r}{|R-r|}$ - внутренняя нормаль к поверхности сферы, $v = \frac{p}{m} - \frac{Q}{M}$ - относительная скорость, тогда полная дифференциальная частота столкновений $d\Omega_{tot.} = \delta(|R-r|-a)(v,n)\theta((v,n)) f(p)\, dp\, dr$.

4. В данном примере рассматривается только один модельный тип взаимодействия – идеально-упругое рассеяние, соотвественно динамика столкновений является детерминированной:

$$\{R,Q\} + \{r,p\} \rightarrow \{\tilde{R},\tilde{Q}\} + \{\tilde{r},\tilde{p}\} \quad , \quad \tilde{R} = R \quad , \quad \tilde{Q} = Q + \frac{2Mm}{M+m}\left(\frac{p}{m} - \frac{Q}{M}, n\right) n \quad .$$

5. Рассмотрим изменение импульса $\tilde{Q} - Q = \frac{m}{M}\frac{2M}{M+m}\left(\frac{Mp}{m} - Q, n\right) n$, множитель $\frac{m}{M}$ - является малым параметром задачи, множитель $\frac{M}{M+m}$ мало отличается от единицы. Однократное дифффеpенцирование дает $\frac{\partial(\tilde{Q}_i - Q_i)}{\partial Q_j} = -\frac{m}{M}\frac{2M}{M+m} n_i n_j$ величину первого порядка малости по отношению масс. Выполним оценку производной $D^\beta((\tilde{Q}-Q)^\alpha)$ входящей в члены высшего порядка разложения интеграла столкновений (13). Обозначим отношение масс

$\varepsilon = \dfrac{m}{M}$, тогда:

$$\left(\tilde{Q}-Q\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \cdot \left(p-\varepsilon Q, n\right)^{|\alpha|} \cdot n^{\alpha} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \cdot n^{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{|\alpha|} C_k^{|\alpha|} (-1)^k \varepsilon^k \left(p, n\right)^{|\alpha|-k} \left(Q, n\right)^k \quad .$$

Применим дифференцирование:

$$D^{\beta}\left(\tilde{Q}-Q\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \cdot n^{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{|\alpha|} C_k^{|\alpha|} (-1)^k \varepsilon^k \left(p, n\right)^{|\alpha|-k} D^{\beta}\left(Q, n\right)^k \quad ,$$

заметив, что $D^{\beta}\left(Q, n\right)^k = 0$, если $k < |\beta|$, получим:

$$D^{\beta}\left(\tilde{Q}-Q\right)^{\alpha} = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \cdot n^{\alpha} \cdot \sum_{k=|\beta|}^{|\alpha|} C_k^{|\alpha|} (-1)^k \varepsilon^k \left(p, n\right)^{|\alpha|-k} D^{\beta}\left(Q, n\right)^k \quad ;$$

таким образом малый параметр ε входит в каждое слагаемое в степени не меньшей, чем порядок дифференцирования $|\beta|$.

6. Коэффициенты уравнения Фоккера-Планка вычисляются следующим образом:

$$A_i = \int \left(\tilde{Q}_i - Q_i\right) d\,\Omega_{tot.} \quad , \qquad B_{ij} = \int \left(\tilde{Q}_i - Q_i\right)\left(\tilde{Q}_j - Q_j\right) d\,\Omega_{tot.} \quad .$$

Подставляя представленные выше величины и упрощая полученные интегралы получим:

$$A_i = \frac{2Mm}{M+m} a^2 \iint_{S^2 \times R^3} \theta\left((v, n)\right)(v, n)^2 n_i f(p)\, dp\, dn = \frac{2Mm}{M+m} \cdot \frac{2\pi a^2}{3} \int_{R^3} |v| v_i f(p)\, dp$$

$$B_{ij} = \left(\frac{2Mm}{M+m}\right)^2 a^2 \iint_{S^2 \times R^3} \theta\left((v, n)\right)(v, n)^3 n_i n_j f(p)\, dp\, dn = \ldots \qquad .$$

$$\ldots = \left(\frac{2Mm}{M+m}\right)^2 \cdot \frac{2\pi a^2}{15} \int_{R^3} |v| \left(\delta_{ij} + 2 v_i v_j\right) f(p)\, dp .$$

Окончательно уравнение Фоккера-Планка в этом примере:

$$\frac{\partial F(Q, R)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} Q_i \frac{\partial F(Q, R)}{\partial R_i} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial Q_i}\left(A_i(Q) F(Q, R)\right) + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial Q_i \partial Q_j}\left(B_{ij}(Q) F(Q, R)\right) \quad .$$

Литература

[1] *Лифшиц, Е. М., Питаевский, Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979. — 528 с. — («Теоретическая физика», том X).
[2] *Боголюбов Н. Н.* Собрание научных трудов в 12 томах. Том 5: Неравновесная статистическая механика, 1939—1980. — М.: Наука, 2006. — ISBN 5-02-034142-8.
[3] *Боголюбов Н. Н.* (мл.) и *Санкович Д. П.* (1993). «Николай Николаевич Боголюбов. Очерк научной деятельности.». *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **24**(5): 1224—1293.
[4] *Боголюбов Н. Н. и Крылов Н. М.* (1939). *Об уравнениях Фоккера — Планка, которые выводятся в теории возмущений методом, основанным на спектральных свойствах возмущённого гамильтониана*. Записки кафедры математической физики Института нелинейной механики АН УССР **4**: 5—80 (укр.).
[5] *Мелихов И.В.* Эволюционный подход к созданию наноструктур. // Наносистемы: физика, химия, математика, 2010, т.1, №1, С.148-155.
[6] *Батищева Я.Г. К выводу уравнений динамики твердого тела в газе, реагирующим с ним неоднородно по поверхности*. // ДАН, т.392, №5, 2003г. С.631-633.
[7] *Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Мелихов И. В., Горбачевский А. Я., О движении твердого тела в химически активной среде.* // ДАН, т.392, №6, 2003, С. 758-760.
[8] *Батищева Я. Г.* «К выводу уравнений динамики твердого тела в газе, реагирующем с ним неоднородно по поверхности». Препринт ИПМ РАН №18, 2003.
[9] *Батищева Я. Г.* «Динамика твердого тела в газе, сорбирующемся на его поверхности». Препринт ИПМ РАН №69, 2003.
[10] *Батищева Я.Г. Веденяпин В.В.* Хемореактивное движение. Энциклопедия низкотемпературной плазмы (Серия Б). Том VII. Математическое моделирование в низкотемпературной плазме. 2008 г.
[11] *Risken H. The Fokker-Planck Equation: Method of Solution and Application*. 2nd edition, Berlin: Springer. 1989.