



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Баранов А.А., Ролдугин Д.С.**

Определение параметров  
оптимальных  
шестиимпульсных и  
производных  
пятиимпульсных маневров  
встреч на околокруговых  
некомпланарных орбитах

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Баранов А.А., Ролдугин Д.С. Определение параметров оптимальных шестиимпульсных и производных пятиимпульсных маневров встреч на околокруговых некомпланарных орбитах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 57. 27 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-57>

***Публикации по материалам препринта***

А.А. Баранов, Д.С. Ролдугин. Шестиимпульсные маневры встречи космических аппаратов на околокруговых некомпланарных орбитах // Космические исследования, 2012, Т. 50, № 6, с. 472-480 (A.A. Baranov, D.S. Roldugin. Six-Impulse Maneuvers for Rendezvous of Spacecraft in Near-Circular Noncoplanar Orbits // Cosmic Research, 2012, V. 50, № 6, pp. 441-449)

DOI: [10.1134/S0010952512050012](https://doi.org/10.1134/S0010952512050012)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952512050012>

ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А.А. Баранов, Д.С. Ролдугин

Определение параметров оптимальных шестиимпульсных и  
производных пятиимпульсных маневров встречи КА  
на околокруговых некомпланарных орбитах

Москва, 2011

**Optimal six- and five-impulses rendezvous on near-circular noncoplanar orbits.** A.A. Baranov, D.S. Roldugin. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, 2011, 27 p., 7 items of bibliography, 18 figures, 3 tables.

The problem of a rendezvous of two spacecrafts on the close near-circular orbits is considered. Impulse parameters are determined using necessary conditions of optimality. Basis-vector theory is used. Nondegenerate six-impulse solutions are considered. For the impulse parameters (points of applications and orientations) analytic expressions with respect to the time of rendezvous are found. Induced five-impulse solutions are found using these expressions.

Total  $\Delta V$  is compared with those of the Lambert's problem.

**Key words:** basis-vector, rendezvous, optimal maneuvering

**Определение параметров оптимальных шестиимпульсных и производных пятиимпульсных маневров встреч на околокруговых некомпланарных орбитах.** А.А. Баранов, Д.С. Ролдугин, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Москва, 2011г., 27 с., библиография: 7 наименований, 18 рисунков, 3 таблицы.

Рассматривается задача встречи двух аппаратов на близких околокруговых некомпланарных орбитах. Углы приложения импульсов скорости и их ориентация определяются из необходимых условий оптимальности, полученных на основе теории базис-вектора. Для невырожденных шестиимпульсных решений найдены аналитические формулы, аппроксимирующие зависимость моментов приложения импульсов скорости и углов, определяющих их ориентацию, от продолжительности встречи. Суммарная характеристическая скорость шестиимпульсных и/или производных от них пятиимпульсных решений сравнивается с суммарной характеристической скоростью, полученной при решении задачи Ламберта.

**Ключевые слова:** базис-вектор, задача встречи, оптимальное маневрирование.

**Содержание**

Введение.....	4
1. Постановка задачи.....	5
3. Поиск параметров оптимального решения.....	8
4. Аппроксимация параметров импульсов аналитическими функциями ...	18
5. Сравнение оптимального решения с решением задачи Ламберта.....	21
Заключение .....	26
Литература .....	26

## Введение

Рассматривается задача встречи, когда КА, имеющий двигательную установку (ДУ) и способный совершать маневры, должен перейти в заданную точку конечной орбиты за фиксированное время. В этот момент в данной точке может находиться КА-цель, например, орбитальная станция. Задача вывести спутник в заданную точку рабочей орбиты решается также при создании или восполнении спутниковых систем, спутниковых групп (formation flying) и во многих других проектах. Довольно часто в перечисленных примерах начальная и конечная орбита близки и имеют малый эксцентриситет. Именно задача встречи на близких околокруговых некомпланарных орбитах и будет рассмотрена в данной работе.

Как правило, задачи этого типа решаются численными методами [1]. Иногда используются простые, но не оптимальные схемы маневрирования [2], когда часть маневров меняет ориентацию плоскости орбиты, остальные маневры – ее форму и момент выхода в заданную точку конечной орбиты, расчет параметров таких неоптимальных маневров не представляет большой трудности.

В данной работе на основе теории базис-вектора [3] ищется невырожденное шестиимпульсное аналитическое решение задачи встречи, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Решение такого типа было исследовано в [4], однако авторами не был предложен алгоритм определения параметров маневров. Цель данной работы – получить формулы, которые при заданной продолжительности встречи позволяют найти моменты приложения оптимальных импульсов скорости, а также углы, определяющие их ориентацию. Заметим, что аналогичная задача для встречи на компланарных орбитах была решена в [5]. Характеристическая скорость оптимального шестиимпульсного решения, а в случае его отсутствия производного от него пятиимпульсного решения, сравнивается с суммарной характеристической скоростью решения задачи Ламберта.

## 1. Постановка задачи

Задача перелета между околокруговыми орбитами решается в приближенной импульсной постановке, в рамках невозмущенного кеплеровского движения. Получаемое решение линеаризованной задачи достаточно близко к решению задачи в точной постановке. Используя его в итерационной процедуре [1], можно обеспечить выполнение терминальных условий с заданной точностью с учетом всех необходимых возмущений (нецентральность гравитационного поля Земли, влияние динамической атмосферы, протяженность активных участков и т.д.).

Условия перелета за заданное время с исходной орбиты в нужную точку конечной орбиты в линейном приближении можно записать в виде [6]

$$\sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \sin \varphi_i) = \Delta e_x, \quad (1.1)$$

$$\sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \cos \varphi_i) = \Delta e_y, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ti} = \Delta a, \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^N [2\Delta V_{ri}(1 - \cos \varphi_i) + \Delta V_{ti}(-3\varphi_i + 4 \sin \varphi_i)] = \Delta t, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^N -\Delta V_{zi} \sin \varphi_i = \Delta z, \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \Delta V_{zi} \cos \varphi_i = \Delta V_z, \quad (1.6)$$

где  $\Delta e_x = e_f \cos \omega_f - e_0 \cos \omega_0$ ,  $\Delta e_y = e_f \sin \omega_f - e_0 \sin \omega_0$ ,  $\Delta a = (a_f - a_0)/r_0$ ,  $\Delta t = \lambda_0(t_f - t_0)$ ,  $\Delta z = z_0/r_0$ ,  $\Delta V_z = V_{z0}/V_0$ ,  $\Delta V_{ri} = \Delta V_{ri}^*/V_0$ ,  $\Delta V_{ti} = \Delta V_{ti}^*/V_0$ ,  $\Delta V_{zi} = \Delta V_{zi}^*/V_0$ . Здесь  $e_f$ ,  $e_0$  – эксцентриситеты орбиты КА-цели и активного КА соответственно;  $a_f$ ,  $a_0$  – большие полуоси орбит;  $\omega_f$ ,  $\omega_0$  – углы между направлением на перицентр соответствующей орбиты и на точку встречи;  $t_f$  – время прилета в точку встречи КА-цели;  $t_0$  – время, в которое при движении по начальной орбите

активного КА проекция радиус-вектора на плоскость орбиты КА-цели попадет на луч, проходящий через точку встречи;  $z_0$  – отклонение активного КА от плоскости КА-цели в момент  $t_0$ ;  $V_0, \lambda_0$  – орбитальная и угловая скорости движения по опорной круговой орбите радиуса  $r_0$  ( $r_0 = (a_0 + a_f)/2$ );  $N$  – число импульсов скорости;  $\varphi_i$  – угол приложения  $i$ -го импульса, отсчитываемый от направления на точку встречи в сторону движения КА (углы  $\varphi_i$  не положительные, в точке встречи  $\varphi=0$ );  $\Delta V_{ri}^*, \Delta V_{ti}^*, \Delta V_{zi}^*$  – радиальная, трансверсальная и боковая составляющие  $i$ -го импульса скорости соответственно.

Предполагается, что импульсы скорости прикладываются на двух интервалах маневрирования, длина каждого интервала виток, расстояние между интервалами обычно несколько витков.

Запишем принадлежность импульсов скорости заданным интервалам маневрирования в виде

$$\varphi_1 \subseteq F_1, \dots, \varphi_{N1} \subseteq F_1, \varphi_{N1+1} \subseteq F_2, \dots, \varphi_{N1+N2} \subseteq F_2, \quad (1.7)$$

где  $N1, N2$  – число импульсов скорости на первом и втором интервалах маневрирования ( $N=N1+N2$ ).

Таким образом, необходимо решить следующую задачу: надо определить  $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \Delta V_{zi}, \varphi_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), при которых минимальна суммарная характеристическая скорость маневров  $\Delta V$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2 + \Delta V_{zi}^2}, \quad (1.8)$$

при ограничениях (1.1)–(1.7).

## 2. Необходимые условия оптимальности

Чтобы найти решение задачи, можно воспользоваться необходимыми условиями оптимальности из теории базис-вектора [3].

Базис-вектором называется вектор-функция  $\mathbf{s}=(\lambda, \mu, \nu)$ , сопряженная вектору скорости. У оптимального импульсного перехода направление

импульса скорости совпадает с направлением базис-вектора в данной точке траектории. Лоуден показал [3], что на оптимальной траектории модуль базис-вектора не должен превосходить единицы, а импульсы скорости прикладываются в те моменты, когда модуль базис-вектора равен единице. Таким образом, на всей оптимальной траектории годограф базис-вектора не должен выходить за пределы сферы единичного радиуса, а импульсы скорости прикладываются в те моменты, когда он пересекает сферу (в начале и/или конце перелета) или касается её (во внутренних точках траектории).

Для рассматриваемого случая почти кругового движения уравнения для составляющих базис-вектора решаются независимо от уравнений движения. Чтобы это подчеркнуть, далее вместо угла  $\varphi$  используется более привычный для этих уравнений угол  $\theta$ . Решение можно представить в виде [6]

$$\lambda = -\lambda_2 \cos \theta + \lambda_3 \sin \theta + 2\lambda_6, \quad (2.1)$$

$$\mu = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin \theta + 2\lambda_3 \cos \theta - 3\lambda_6 \theta, \quad (2.2)$$

$$v = \lambda_4 \sin \theta + \lambda_5 \cos \theta, \quad (2.3)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$  – произвольные константы.

Для оптимальной ориентации импульса скорости, прикладываемого в точке  $\theta_i$ , необходимо выполнение условия

$$\Delta V_{ri} / \Delta V_i = \lambda(\theta_i), \quad \Delta V_{ti} / \Delta V_i = \mu(\theta_i), \quad \Delta V_{zi} / \Delta V_i = v(\theta_i). \quad (2.4)$$

Вид годографа базис-вектора определяет возможные типы оптимальных решений, а условия задачи определяют выбор конкретного типа решений.

В общем случае уравнения (2.1)-(2.3) описывают спираль (Рис. 1 а). Если же  $\lambda_6 = 0$ , уравнения описывают эллипс (окружность) или отрезок (точку) (Рис. 1 б, в). В этом случае суммарная характеристическая скорость решения задачи встречи совпадает с суммарной характеристической скоростью решения задачи перехода, когда время перелета не фиксировано. Процедура поиска параметров оптимального решения задачи встречи для случая  $\lambda_6 = 0$  описана в работе [7].

В данной работе исследуется шестиимпульсное решение ( $N=6$ ), которому соответствует годограф базис-вектора в виде спирали ( $\lambda_6 \neq 0$ ).

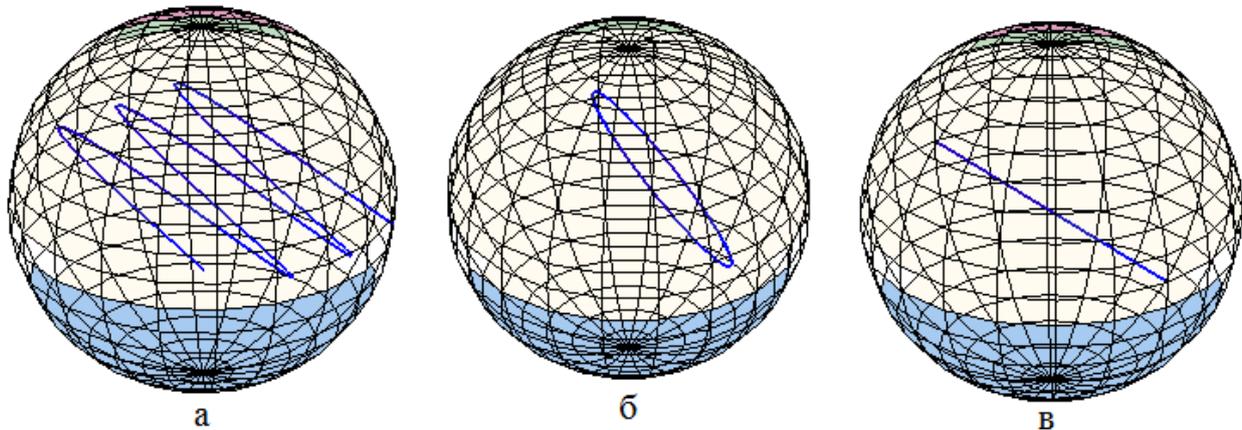


Рис. 1. Вид годографа базис-вектора

### 3. Поиск параметров оптимального решения

В рассматриваемом случае шестиимпульсного невырожденного решения ( $\lambda_6 \neq 0$ ) первый импульс скорости прикладывается в начале первого разрешенного интервала маневрирования (спираль пересекает сферу в начальный момент времени  $\theta = 0$ ). Второй и третий импульсы скорости прикладываются внутри первого витка полета в моменты касания спирали и сферы. Четвертый и пятый – на последнем витке полета в точках касания, а шестой импульс скорости снова соответствует пересечению сферы в конечный момент времени  $\theta_f$ . Как показано в [4], другого распределения импульсов скорости по виткам быть не может. Таким образом первый и последний импульсы скорости максимально разнесены, что позволяет уменьшить затраты суммарной характеристической скорости на обеспечение встречи, т.к. КА максимально долго находится на переходной орбите.

Численные исследования поведения спирали показали, что касание спирали и сферы в четырех внутренних точках возможно только, если выполнены следующие условия «симметрии» спирали:

$$\mu(0) = -\mu(\theta_f), \lambda(0) = \lambda(\theta_f), v(0) = -v(\theta_f). \quad (3.1)$$

Такая «симметричность» спирали приводит к симметричности моментов приложения импульсов, то есть

$$\theta_2 = \theta_f - \theta_5, \theta_3 = \theta_f - \theta_4. \quad (3.2)$$

Таким образом, достаточно найти углы приложения и ориентацию импульсов скорости одного интервала маневрирования, аналогичные параметры импульсов скорости другого интервала могут быть найдены из условий (3.3), (3.2). Для нахождения этих параметров необходимо найти коэффициенты  $\lambda_i$ , определяющие положение спирали.

Условия (3.1) приводят к соотношениям

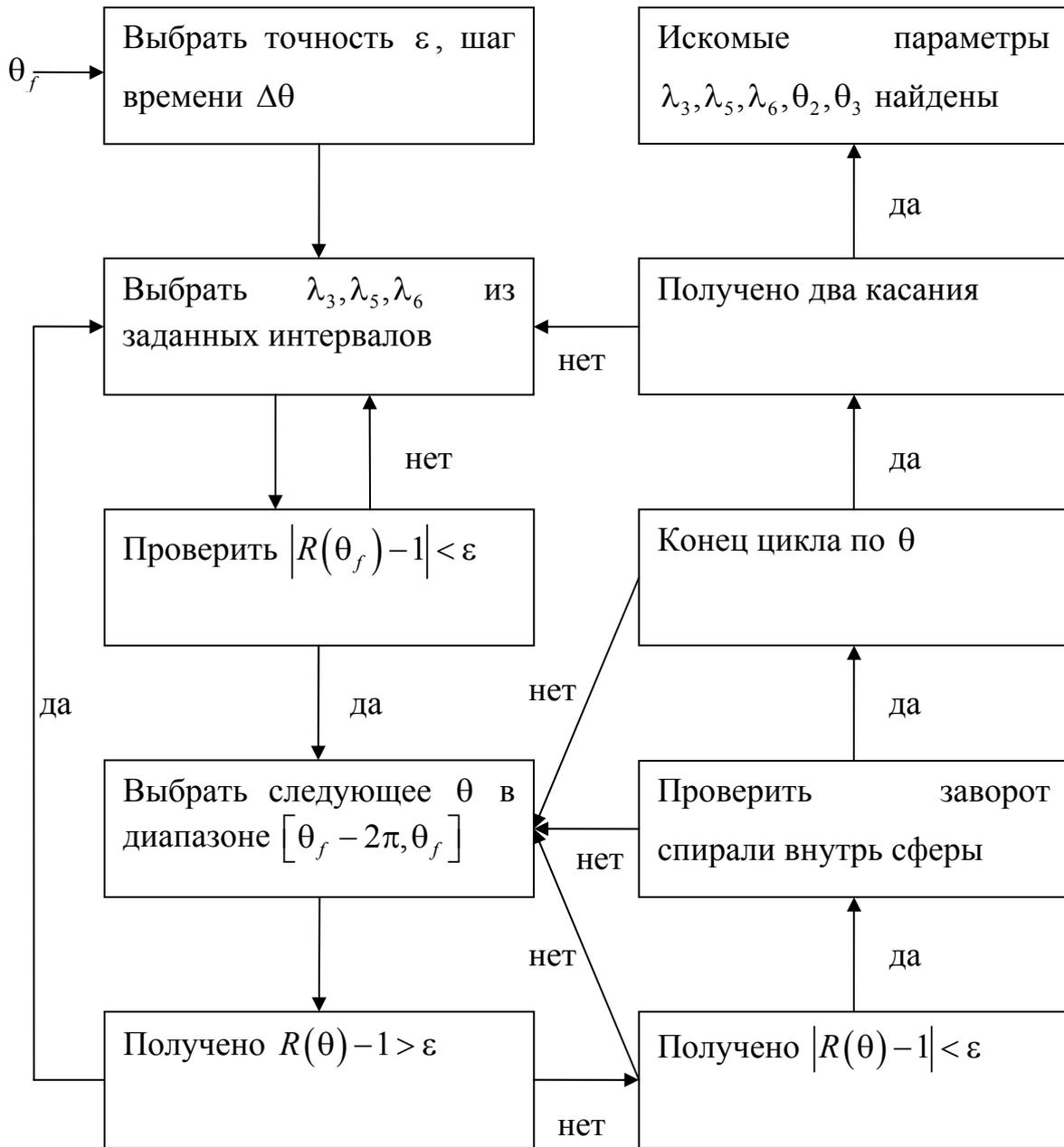
$$\begin{aligned} -\lambda_2 &= -\lambda_2 \cos \theta_f + \lambda_3 \sin \theta_f, \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_3 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \sin \theta_f + 2\lambda_3 \cos \theta_f - 3\lambda_6 \theta_f, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\lambda_5 = \lambda_4 \sin \theta_f + \lambda_5 \cos \theta_f,$$

которые позволяют сократить число независимых параметров спирали до трех. Заметим, что, исходя из соотношений (3.4), можно заключить, что в числе этих трех параметров обязательно должны быть представители пар  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  и  $\lambda_5$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_6$ . Кроме того, параметр  $\lambda_6$  имеет наибольшее влияние на поведение спирали, поэтому логично включить его в число независимых. В качестве независимых параметров спирали были выбраны  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$ .

Поиск величин  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  производился при помощи последовательного применения двух различных программных комплексов. Единственным входным параметром является длина интервала маневрирования  $\theta_f$ . Первый комплекс реализован в среде программирования MS Visual Studio 2010 Ultimate® на языке программирования C#. В этом комплексе перебором возможных значений коэффициентов  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  обеспечивается касание сферы в четырех внутренних точках спирали при заданной продолжительности перелета  $\theta_f$ .

Как уже было сказано, годограф базис-вектора не должен выходить за пределы сферы единичного радиуса. Однако в силу симметричности спирали, если это условие выполняется на первом (или последнем витке), то оно выполняется для всей спирали. В программе проверяются значения  $\theta$  на последнем витке, то есть для  $\theta \in [\theta_f - 2\pi, \theta_f]$ . В программе происходит перебор значений трех выбранных параметров. При этом устанавливаются начальные значения параметров  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  и интервалы их изменения  $\Delta\lambda_3, \Delta\lambda_5, \Delta\lambda_6$ , в рамках которых можно их подбирать. Задание интервалов позволяет значительно сократить время расчета, поскольку для близких  $\theta_f$  параметры  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  меняются незначительно. То есть, найдя  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  для некоторого  $\theta_f$ , можно для следующего  $\theta_f$  взять найденные  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  в качестве начальных значений при подборе и установить небольшой диапазон их изменения. Для каждого заданного  $\theta_f$  и  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  происходит проверка пересечения спирали со сферой в конце интервала перелета. Если пересечения нет, параметры  $\lambda_3, \lambda_5, \lambda_6$  изменяются. Если же пересечение есть, то проверяется, есть ли на последнем витке интервала перелета два касания годографа и сферы. Общая схема работы алгоритма следующая:



Точность  $\varepsilon$  также задается. При этом целесообразно провести первый расчет с большим  $\varepsilon$  и диапазонами  $\Delta\lambda_3, \Delta\lambda_5, \Delta\lambda_6$ . Получив решение, можно повысить точность, уменьшить интервалы  $\Delta\lambda_3, \Delta\lambda_5, \Delta\lambda_6$  и уменьшить шаг по времени  $\Delta\theta$ . Проверка на заворот спирали внутри сферы необходима для того, чтобы отсеять параметры, при которых спираль имеет одно касание со сферой, но удовлетворяет условию  $|R(\theta) - 1| < \varepsilon$  при нескольких последовательных  $\theta$ ,

чтобы программа не могла расценить этот случай как несколько (особенно опасный вариант – два) касаний.

Уточнение значения коэффициентов осуществляется с помощью второго комплекса, реализованного в среде Matlab®. В этой программе решается задача минимизации функции  $f = \sum_{i=1}^3 (R(\theta_i) - 1)^2$  – суммы квадратов расстояний от спирали до сферы в трех точках. Задача нелинейного программирования решается с ограничениями, определяемыми при помощи данных, полученных при работе первой программы.

Последовательное применение двух программ позволяет для каждого  $\theta_f$  полностью определить характеристики спирали, касающейся сферы в четырех внутренних точках

Таким образом, по заданной продолжительности встречи определяются моменты приложения импульсов скорости и их ориентация. Используя программу, можно построить представляющие большой интерес зависимости изменения параметров маневров при изменении продолжительности встречи.

На рис. 2 представлены  $\theta_2$  и  $\theta_3$  – моменты приложения второго (нижний ряд) и третьего (верхний ряд) импульсов скорости в зависимости от общей длины интервала перелета. Предполагается, что первый импульс скорости прикладывается при  $\theta_1=0$ .

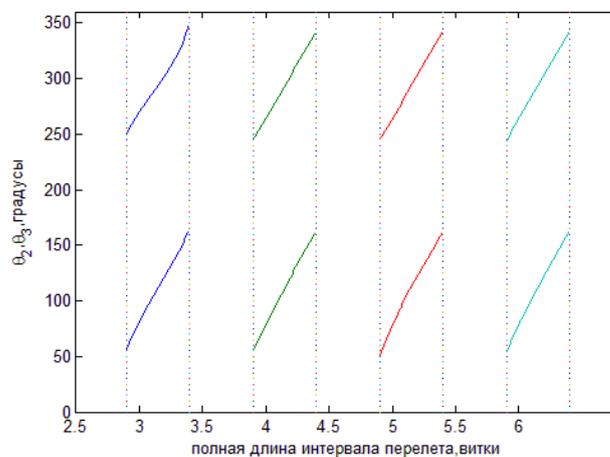


Рис. 2. Моменты приложения второго и третьего импульсов

Из рисунка видно, что представленные величины близки для различных  $\theta_f$ . Для того чтобы оценить эту близость, данные зависимости целесообразно изобразить на одном рисунке, отбросив для каждой зависимости целую часть витков у аргумента  $\theta_f$ , до витка на котором начинает существовать шестиимпульсное решение. Обозначим отбрасываемую часть  $\bar{\theta}$ . Для первых зависимостей  $\theta_2$  и  $\theta_3$   $\bar{\theta} = 2$ , для вторых  $\bar{\theta} = 3$  и т.д. Для каждой зависимости оставшаяся часть  $\theta_f$ , обозначим ее  $\theta_f^*$ , принадлежит интервалу  $\theta_f^* \in [0, 2]$ , причем решения существуют при  $\theta_f^* \in [0.9, 1.4]$ . Введем переменную  $\theta^* = 0.5\theta_f^*$  и построим зависимости моментов приложения второго и третьего импульсов  $\theta_2$  и  $\theta_3$  от  $\theta^*$ . На рис. 3 и 4 приведены эти зависимости, полученные в результате работы первого программного комплекса. На легенде каждого из рисунков отображена отброшенная длина интервала маневрирования  $\bar{\theta}$ .

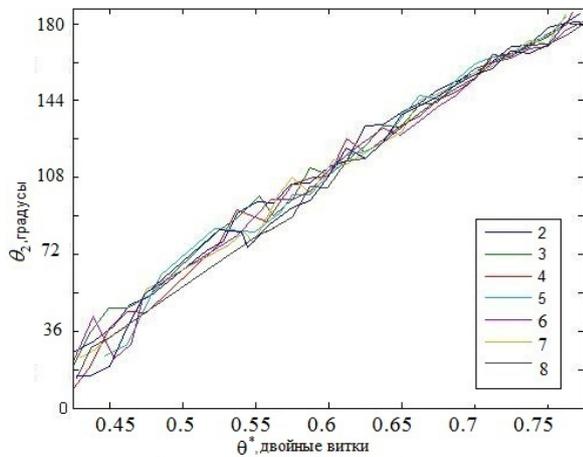


Рис. 3. Момент приложения второго импульса

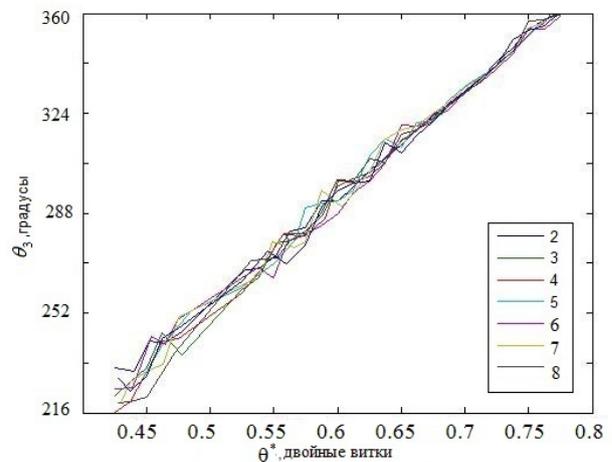


Рис. 4. Момент приложения третьего импульса

На рис. 5 и 6 приведены уточненные значения этих углов, полученные вторым программным комплексом. Как можно видеть, появляется необходимая «гладкость» зависимостей, но немного сокращается область существования решений ( $\theta^* \in [0.45, 0.7]$  вместо  $\theta^* \in [0.4, 0.78]$ ).

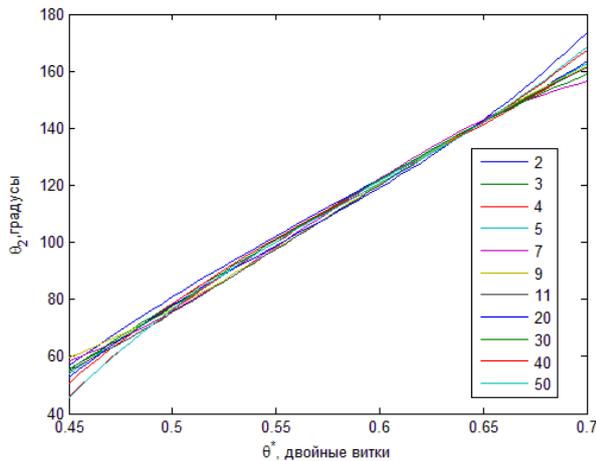


Рис. 5. Момент приложения второго импульса

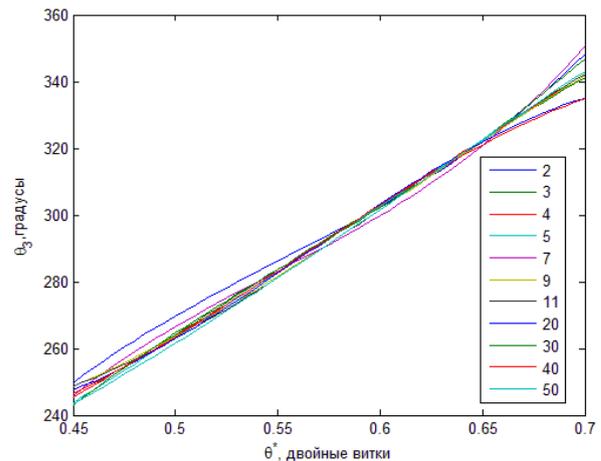
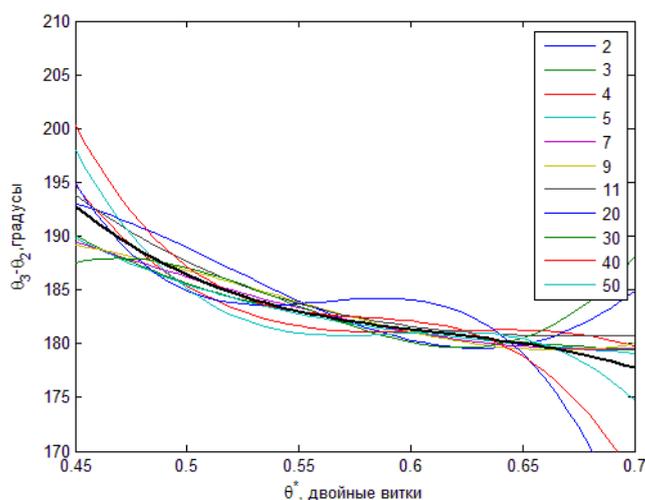


Рис. 6. Момент приложения третьего импульса

Из рисунков 2-6 видно, что зависимости  $\theta_2$  и  $\theta_3$  от  $\theta^*$  для различных  $\bar{\theta}$  практически совпадают. Расхождения разных кривых наблюдаются, когда  $\theta^*$  приближается к концу интервала существования невырожденного шестиимпульсного решения. Это связано с ошибками определения параметров решения, возрастающими при вырождении спирали в эллипс при приближении  $\theta^*$  к 0.7. При этом параметр  $\lambda_6$  уменьшается до нуля. Хотя формально первая программа в этом случае позволяет найти решение и при  $\theta^*=0.78$ , точность определения ориентации импульсов слишком мала для того, чтобы использовать эти данные. Проблема с определением параметров решений при  $\theta^*>0.7$  существует, но при такой продолжительности встречи можно воспользоваться результатами работы [7], в которой предложен простой и надежный алгоритм поиска параметров вырожденных решений задачи встречи, которым как раз соответствует годограф базис-вектора в форме эллипса.

На рис. 7 представлена разность  $\theta_3 - \theta_2$ .

Рис. 7. Разность  $\theta_3 - \theta_2$ 

Как и следовало из предыдущих графиков, разность между вторым и третьим моментами приложения импульсов скорости составляет практически половину витка. В конце интервала маневрирования разница возрастает, но это обусловлено описанными ранее ошибками. В основном разница не превышает  $10^\circ$ . Поэтому вполне можно считать, что интервал между вторым и третьим (а значит, между четвертым и пятым) импульсами составляет половину витка.

На рис. 8 и 9 представлены курсы первого и второго импульсов скорости в зависимости от угла  $\theta^*$ .

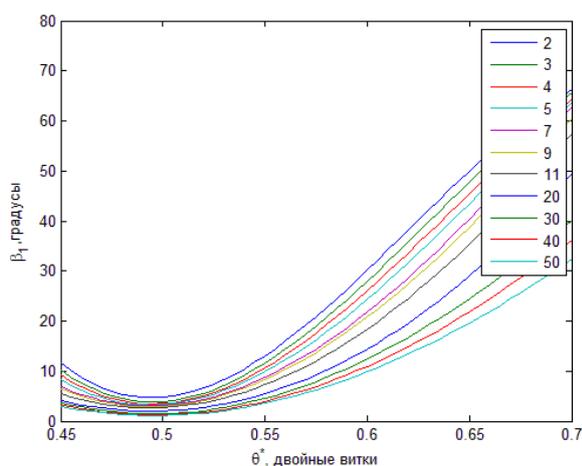


Рис. 8. Курс первого импульса

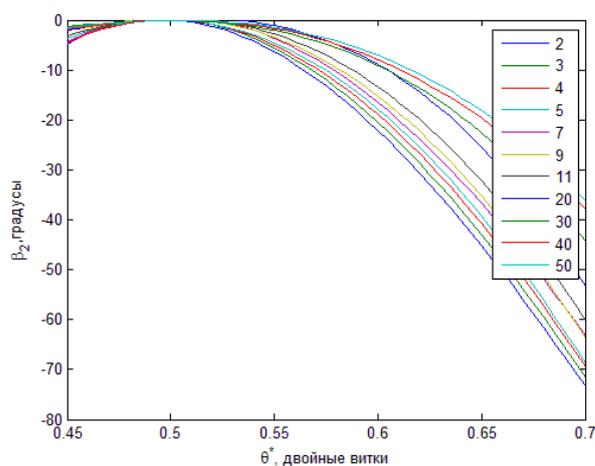


Рис. 9. Курс второго импульса

На обоих графиках заметна похожая тенденция изменения курсов в зависимости от  $\bar{\theta}$  – медленное падение их величины (по модулю). Значение  $\bar{\theta}$ , как и на предыдущих графиках, изображено на легенде.

На рис. 10 представлена сумма курсов второго и третьего импульсов (в зависимости от угла  $\theta^*$ ).

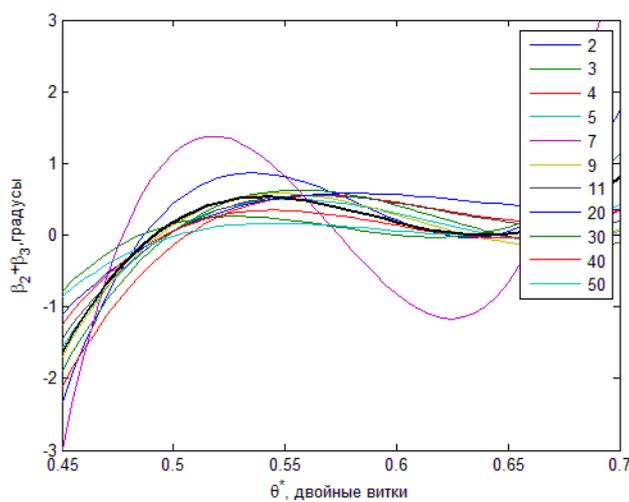


Рис. 10. Сумма курсов второго и третьего импульсов

Как видно из графика, курсы второго и третьего импульсов практически совпадают по модулю, но имеют разные знаки, что является следствием того, что углы приложения импульсов скорости отличаются примерно на половину витка. Разница их величин в основном составляет не более  $1^\circ$ .

Рассмотрим ориентацию импульсов скорости в плоскости орбиты. На рис. 11 представлены тангажи первого импульса для разной продолжительности встречи (она указана рядом с типом линии).

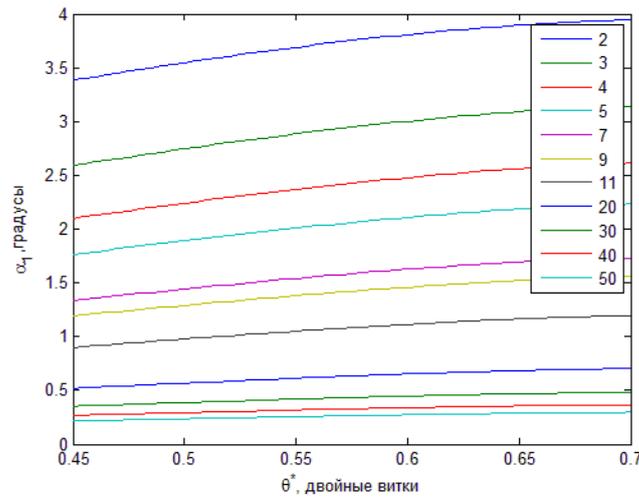


Рис. 11. Тангажи первого импульса скорости

Из графика видно, что тангажи импульсов малы. При этом для встречи продолжительностью более 10 витков углы тангажа не превышают  $1^\circ$ , аналогичный результат для встречи на компланарных орбитах получен в [5].

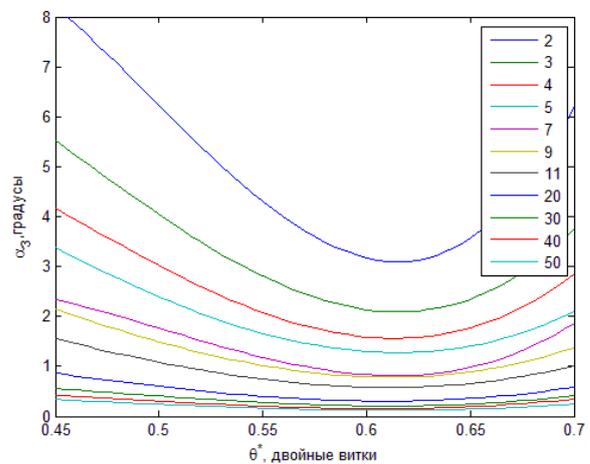
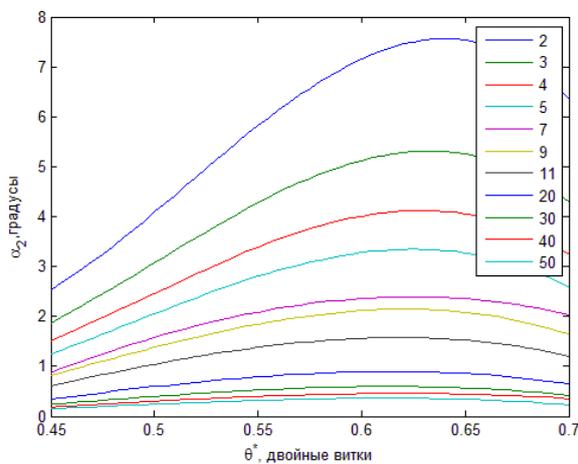


Рис. 12. Тангажи второго импульса скорости    Рис. 13. Тангажи третьего импульса скорости

Рис. 12 и 13, на которых представлены тангажи второго и третьего импульсов, показывают тот же результат. Таким образом, в качестве первого приближения, импульсы скорости в плоскости орбиты можно считать чисто трансверсальными. Если продолжительность встречи более 10 витков, это предположение верно с хорошей точностью (около  $1^\circ$ ).

#### 4. Аппроксимация параметров импульсов аналитическими функциями

Полученные в предыдущем разделе результаты позволяют найти простые аналитические формулы для определения параметров оптимальных маневров. Было показано, что импульсы скорости в плоскости орбиты можно считать чисто трансверсальными, а ориентация импульсов скорости вне плоскости для второго и третьего импульсов противоположна. Таким образом, необходимо найти всего четыре аналитические функции, аппроксимирующие зависимости моментов приложения второго и третьего импульсов (напомним, что в первом приближении можно еще более упростить задачу, считая, что они отличаются на половину витка) и курсов первого и второго импульсов.

Из рис. 5 и 6 видно, что моменты приложения второго и третьего импульсов  $\theta_2$  и  $\theta_3$  практически не зависят от продолжительности перелета (целой части витков)  $\bar{\theta}$ . Для аппроксимации зависимостей  $\theta_2(\theta^*)$  и  $\theta_3(\theta^*)$  используются полиномы третьей степени

$$\begin{aligned}\theta_2(\theta^*) &= 724.8(\theta^*)^3 - 1382.3(\theta^*)^2 + 1298.9\theta^* - 317.1, \\ \theta_3(\theta^*) &= -35.9(\theta^*)^3 + 180.6(\theta^*)^2 + 213.9\theta^* + 116.6.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Напомним, что  $\theta^*$  измеряется в долях двойного витка, моменты приложения импульсов в формулах (4.1) измеряются в долях витка. Заметим также, что зависимость  $\theta_3(\theta^*)$  можно не рассматривать и считать, что  $\theta_3(\theta^*) = \theta_2(\theta^*) + 0.5$ . На рис. 14 и 15 представлена точность аппроксимации.

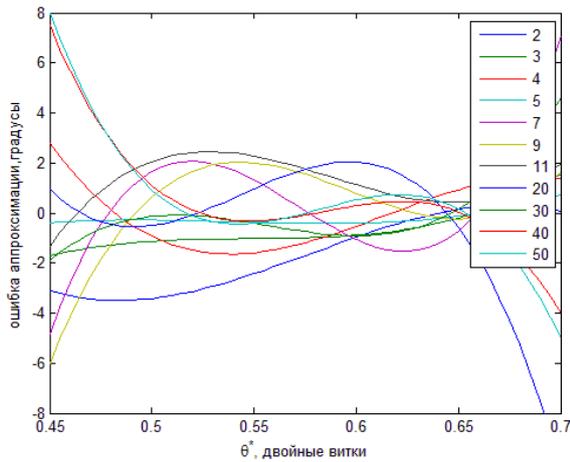


Рис. 14. Ошибка аппроксимации момента приложения второго импульса

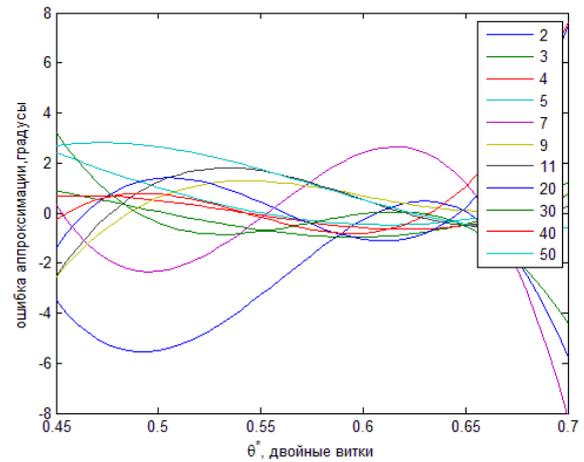


Рис. 15. Ошибка аппроксимации момента приложения третьего импульса

Как видно из графиков, ошибка аппроксимации в основном не превышает  $3^\circ$ , лишь на границах приближаясь к  $8^\circ$  для зависимостей с небольшим числом витков перелета. Такая точность вполне достаточна для получения приближенного решения. Например, при использовании численных методов [1] шаг перебора по углам приложения импульсов скорости (при решении четырехимпульсной задачи) обычно принимается  $6^\circ$ .

На рис. 8 и 9 видно, что курсы первого и второго импульсов зависят от общей продолжительности перелета. Для аппроксимации их зависимости от  $\theta^*$  будем снова применять полиномы третьей степени, но коэффициенты не будут постоянными, их зависимость от  $\bar{\theta}$  также аппроксимируется полиномами третьей степени. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_1(\theta^*) &= a_3(\theta^*)^3 + a_2(\theta^*)^2 + a_1\theta^* + a_0, \\ \beta_2(\theta^*) &= b_3(\theta^*)^3 + b_2(\theta^*)^2 + b_1\theta^* + b_0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$a_3 = 0.48\bar{\theta}^{-3} - 44.76\bar{\theta}^{-2} + 1247.41\bar{\theta} - 10134.39,$$

$$a_2 = -0.80\bar{\theta}^{-3} + 75.58\bar{\theta}^{-2} - 2127.97\bar{\theta} + 18640.44,$$

$$a_1 = 0.44\bar{\theta}^{-3} - 41.96\bar{\theta}^{-2} + 1190.51\bar{\theta} - 11002.99,$$

$$a_0 = -0.08\bar{\theta}^3 + 7.69\bar{\theta}^2 - 219.44\bar{\theta} + 2112.89,$$

$$b_3 = -0.23\bar{\theta}^3 + 22.91\bar{\theta}^2 - 654.31\bar{\theta} + 2418.01,$$

$$b_2 = 0.39\bar{\theta}^3 - 38.13\bar{\theta}^2 + 1116.27\bar{\theta} - 5726.06,$$

$$b_1 = -0.21\bar{\theta}^3 + 20.71\bar{\theta}^2 - 619.14\bar{\theta} + 3854.87,$$

$$b_0 = 0.04\bar{\theta}^3 - 3.69\bar{\theta}^2 + 112.37\bar{\theta} - 798.44.$$

Точность аппроксимации представлена на рис. 16 и 17.

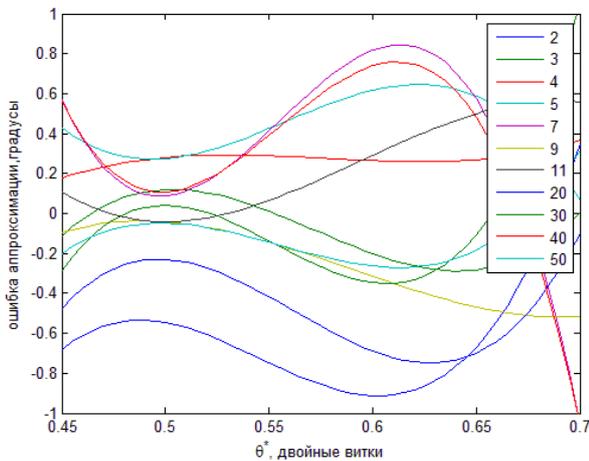


Рис. 16. Ошибка аппроксимации курса первого импульса

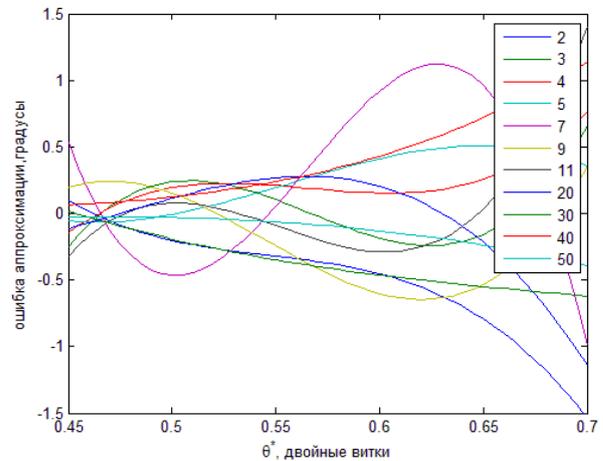


Рис. 17. Ошибка аппроксимации курса второго импульса

Из графиков видно, что ошибка составляет менее градуса, что вполне достаточно для получения приемлемого решения.

Таким образом, зная продолжительность встречи (угловое расстояние от начала первого интервала маневрирования до конца второго) для шестиимпульсных маневров можно найти углы приложения импульсов скорости и их ориентацию, используя аналитические формулы, полученные на основании необходимых условий оптимальности. Для первого интервала маневрирования момент приложения первого импульса скорости совпадает с началом первого интервала маневрирования, а моменты приложения второго и третьего импульсов относительно первого импульса задаются формулами (4.1), курсы первого и второго импульсов задаются формулами (4.2), курс третьего

импульса противоположен курсу второго, тангажи всех импульсов скорости равны нулю. Параметры импульсов второго интервала маневрирования «симметричны» параметрам импульсов первого интервала согласно формулам (3.1), (3.2). Используя эту информацию из системы (1.1)-(1.6) определяются величины импульсов скорости.

## 5. Сравнение оптимального решения с решением задачи Ламберта

Сравним затраты суммарной характеристической скорости, получаемые с использованием оптимального шестиимпульсного решения и с использованием двухимпульсного решения.

Для сравнения выбрано двухимпульсное решение, т.к. задача Ламберта довольно часто используется для решения задачи встречи. Импульсы двухимпульсного решения располагаются на первом и последнем витках перелета. Перебираются возможные моменты приложения импульсов скорости на каждом из интервалов маневрирования, и для каждой пары углов  $\varphi_1, \varphi_2$  из системы (1.1)-(1.6) определяются шесть величин  $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, V_{zi}$  ( $i = 1, 2$ ). Сравнивая суммы импульсов скорости для различных пар  $\varphi_1, \varphi_2$ , находятся моменты приложения импульсов, при которых затраты суммарной характеристической скорости минимальны.

Параметры шестиимпульсного решения определяются с помощью формул (4.1), (4.2), при этом предполагается, что третий импульс отстоит от второго на половину витка (аналогично для четвертого и пятого импульсов скорости), а крайние импульсы располагаются на границах интервалов маневрирования.

Оказалось, что оптимальное шестиимпульсное решение может не существовать даже когда продолжительность встречи попадает в интервалы существования шестиимпульсных решений (рис.2). Напомним, что, как следует из необходимых условий оптимальности, у невырожденного шестиимпульсного решения трансверсальные составляющие импульсов скорости одного интервала

маневрирования положительные, а другого отрицательные. Однако, используя найденные моменты приложения и ориентации импульсов скорости, иногда можно получить решение, у которого разные знаки трансверсальных составляющих импульсов одного интервала маневрирования.

Рассмотрим пример, когда обе орбиты круговые,  $\Delta e_x = \Delta e_y = 0$ , разница больших полуосей  $\Delta a = 0.01$ , отклонение плоскости орбиты пассивного аппарата от плоскости орбиты активного  $\Delta z = 0.0001, \Delta V_z = 0.0001$ , активный спутник опережает пассивный ( $\Delta \mu = -50^\circ$ ) в точке встречи. Общая продолжительность перелета  $\bar{\theta} = 5$ . При таких параметрах орбиты затраты суммарной характеристической скорости при использовании шестиимпульсного решения могут быть почти в два раза меньше затрат при использовании двухимпульсного (при  $\theta^* = 0.46$  выигрыш достигает 45%). Формально, используя формулы (4.1), (4.2), шестиимпульсное решение можно найти для любой продолжительности перелета. Шестиимпульсное решение выгоднее двухимпульсного при продолжительности до  $\theta^* = 0.33$ . Такая продолжительность лежит вне диапазонов существования оптимальных решений, представленных на рис. 2. С убыванием  $\theta^*$  выигрыш медленно уменьшается, при  $\theta^* = 0.38$ , то есть на границе интервала существования оптимального решения согласно первой программе, выигрыш составляет 41%, при  $\theta^*$ . На интервале  $\theta^* \in [0.33, 0.38]$  необходимые условия не выполнены (спираль нельзя вписать в сферу), но знаки трансверсальных составляющих импульсов одного интервала маневрирования совпадают, как должно быть у оптимального решения. Преимущество найденного шестиимпульсного решения подтверждает его сравнение с двухимпульсным.

Формулы (4.1), (4.2) можно использовать для расчета пятиимпульсных маневров, если не существует оптимальное шестиимпульсное решение. Для этого, увеличивая продолжительность перелета, можно добиться нулевого первого или последнего импульса. При этом формально интервал перелета

будет больше заданного, но на самом деле за счет того, что маневрирование начинается со второго импульса (или заканчивается пятым) время перелета удовлетворяет требованиям задачи. В примере, рассмотренном выше, при  $\theta^* = 0.469$  существует шестиимпульсное решение с нулевым первым импульсом. При этом второй импульс (при пятиимпульсном маневре – первый) отстоит от начала интервала с нулевым импульсом скорости перелета на 0.2 витка. То есть, фактически, такая схема маневрирования соответствует  $\theta^* = 0.369$ . Это позволяет использовать на интервале  $\theta^* \in [0.369, 0.469]$  как шестиимпульсное, так и пятиимпульсное решение, производное из шестиимпульсного при  $\theta^* = 0.469$ . В этом случае спираль, которая описывает движение годографа базис-вектора, будет начинаться внутри единичной сферы, но, тем не менее, будет удовлетворять условиям оптимальности (4 касания и 1 пересечение). Длина интервала, на котором такое решение может быть использовано, определяется расстоянием до первой точки касания. На рис. 18 представлен график затрат суммарной характеристической скорости (безразмерной) при использовании шести-, пяти- и двухимпульсных маневров.

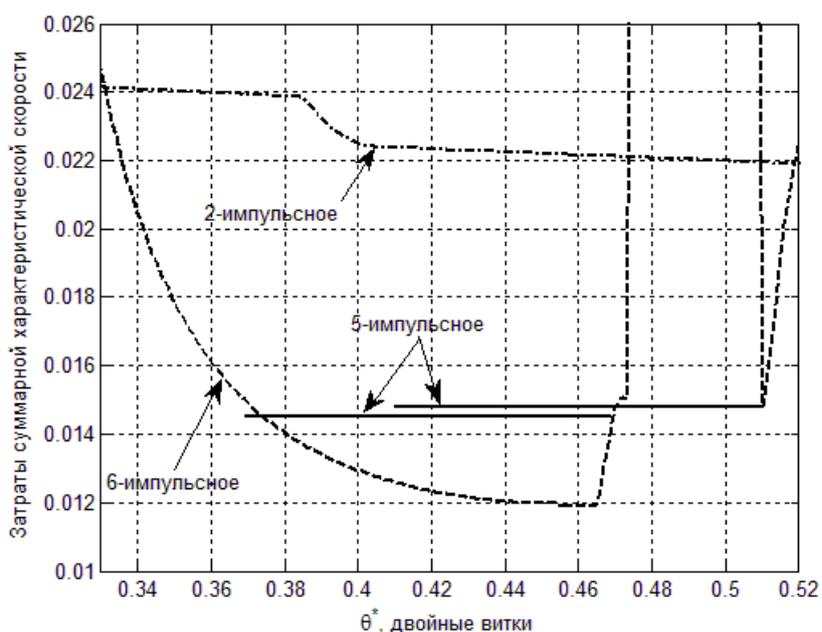


Рис. 18. Затраты суммарной характеристической скорости при использовании шести-, пяти- и двухимпульсных маневров.

На рис. 18 штриховой линии соответствует шестиимпульсное решение, штрихпунктирной – решение задачи Ламберта, сплошные линии соответствуют пятиимпульсным решениям. На рис. 18 видно, что при  $\theta^*$ , близких к 0.5, шестиимпульсное решение вырождается, но при  $\theta^* = 0.51$  существует еще одно пятиимпульсное решение, позволяющее расширить диапазон  $\theta^*$ , при которых можно добиться выигрыша по сравнению с двухимпульсным решением. При  $\theta^* \in [0.51, 0.52]$  шестиимпульсное решение не оптимально (на первом интервале маневрирования есть разгонный импульс), но оно, тем не менее, выгоднее двухимпульсного решения.

В таблицах 1-3 приведены параметры шести- и двухимпульсных решений для различных значений  $\theta^*$ .

В таблицах представлены трансверсальные и боковые компоненты шестиимпульсного решения ( $\Delta V_I$  и  $\Delta V_z$ ) первого (I) и второго (II) интервалов маневрирования, моменты приложения второго и третьего импульсов ( $\Delta \varphi_2$  и  $\Delta \varphi_3$ ), составляющие первого и второго импульсов двухимпульсного решения ( $\Delta V_{2I}$  и  $\Delta V_{2II}$ ), расстояние от момент приложения соответствующего импульса до границы интервала перелета ( $\Delta \varphi_I$  и  $\Delta \varphi_{II}$ ), и затраты суммарной характеристической скорости в обоих случаях ( $\Delta V_6$  и  $\Delta V_2$ ).

$\Delta V_{II}$	0	0.0037	0.0049	$\Delta \varphi_2 = 0.0342$
$\Delta V_{III}$	-0.0003	-0.0033	0	$\Delta \varphi_3 = 0.5719$
$\Delta V_{zI}$	0.0047	-0.0028	0.0037	$\Delta V_6 = 0.0241$
$\Delta V_{zII}$	-0.0003	0.0025	-0.004	$\Delta V_2 = 0.0241$
$\Delta V_{2I}$	0.0201	0.0089	-0.001	$\Delta \varphi_I = 0$
$\Delta V_{2II}$	0.0257	-0.0039	0	$\Delta \varphi_{II} = 0.8488$

Таблица 1. Параметры импульсов при  $\theta^* = 0.33$ .

$\Delta V_{II}$	0.002	0.0017	0.0049	$\Delta\varphi_2 = 0.0462$
$\Delta V_{III}$	-0.0005	-0.0014	-0.0018	$\Delta\varphi_3 = 0.6166$
$\Delta V_{zI}$	0.0019	-0.0006	0.0015	$\Delta V_6 = 0.014$
$\Delta V_{zII}$	-0.0001	0.0004	-0.0016	$\Delta V_2 = 0.0239$
$\Delta V_{2I}$	0.0072	0.0092	-0.0001	$\Delta\varphi_I = 0$
$\Delta V_{2II}$	0.0178	-0.0042	0.001	$\Delta\varphi_{II} = 0.9443$

Таблица 2. Параметры импульсов при  $\theta^* = 0.38$ .

$\Delta V_{II}$	0	0.0029	0.0059	$\Delta\varphi_2 = 0.0342$
$\Delta V_{III}$	-0.0006	-0.0041	0.009	$\Delta\varphi_3 = 0.5719$
$\Delta V_{zI}$	-0.00006	-0.000018	0.000035	$\Delta V_6 = 0.0145$
$\Delta V_{zII}$	0	0.000026	0.00014	$\Delta V_2 = 0.0221$
$\Delta V_{2I}$	-0.0227	0.0093	-0.0003	$\Delta\varphi_I = 0$
$\Delta V_{2II}$	0.028	-0.0043	0.003	$\Delta\varphi_{II} = 0.1326$

Таблица 3. Параметры импульсов при  $\theta^* = 0.469$ .

Из таблицы 3 видно, что пятиимпульсное решение не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Тем не менее, оно позволяет добиться заметного выигрыша в затратах суммарной характеристической скорости.

Таким образом, использование пятиимпульсных маневров, получаемых из шестиимпульсных, позволяет увеличить выигрыш в затратах суммарной характеристической скорости и расширить область существования оптимальных решений, дающих выигрыш.

Можно видеть, что хотя оптимальное многоимпульсное решение существует далеко не всегда, шести- и пятиимпульсные решения позволяют добиться значительного выигрыша в затратах суммарной характеристической скорости по сравнению с решением задачи Ламберта.

## Заключение

Рассмотрено шестиимпульсное решение задачи встречи на близких околокруговых некомпланарных орбитах. Определены интервалы продолжительности перелета, на которых выполняются необходимые условия оптимальности. Найдены аппроксимирующие аналитические формулы, позволяющие определять моменты приложения импульсов. Показано, что второй и третий импульсы скорости отстают примерно на половину витка (аналогично для четвертого и пятого импульсов), а импульсы в плоскости орбиты можно считать трансверсальными. Для углов ориентации импульсов вне плоскости орбиты найдены аппроксимирующие формулы. Курсы второго и третьего импульсов практически противоположны. Проведено сравнение затрат суммарной характеристической скорости шестиимпульсного и/или производного от него пятиимпульсного решений и суммарной характеристической скорости двухимпульсного маневра. Показано что использование шести- или пятиимпульсных решений позволяет сократить затраты суммарной характеристической скорости на несколько десятков процентов по сравнению с оптимальным двухимпульсным решением.

## Литература

1. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют – б» - «Союз» - «Прогресс», под редакцией Петрова Б.Н., Бажинова И.К. М.: Наука, 1985. 375 стр.
2. Shuttle Press Kit: STS-92 [on line press kit], <http://www.shuttlepresskit.com/STS-92/> ,[retrieved 25 March 2007].
3. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966. 152 стр.
4. Marec J.-P. Optimal Space Trajectories, Studies in Astronautics; V. 1. Elsevier Sci. Pub. Co. Amsterdam-Oxford-New York, 1979. 329 p.

5. Баранов А.А., Терехова Е.О. Оптимальная четырехимпульсная встреча на компланарных почти круговых орбитах // Космические исследования 1994. Т. XXXIII. № 4. с. 420-425.
6. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976. 744 стр.
7. Баранов А.А., Численно-аналитическое определение параметров маневров многовитковой встречи КА на близких околокруговых некомпланарных орбитах // Космические исследования 2008. т. XLVI. № 5. с. 430-439.