ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 60 за 2011 г.

Брюно А.Д.

Степенно-эллиптические разложения решений ОДУ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Степенно-эллиптические разложения решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 60. 19 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-60

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

СТЕПЕННО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДУ

Москва, 2011 г.

А. Д. Брюно. Степенно-эллиптические разложения решений ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Для него вводится понятие степенно-эллиптического разложения решений и указывается способ их вычисления. Показывается, что для первого и второго уравнений Пенлеве они имеются.

A. D. Bruno. Power-elliptic expansions of solutions to an ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

We consider an ordinary differential equation of a very general form. For it, we introduce the notion of a power-elliptic expansion of its solutions and give a method of calculation of the expansion. We show that the first and second Painlevé equations have got such expansions of solution.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mail: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru
Персональная стр.:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno`

1 Введение

Здесь рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма [1], т. е. сумма (конечного числа) дифференциальных мономов, каждый из которых является произведением обычного монома и конечного числа производных $d^l y/dx^l$.

Пусть $x \to \infty$. Асимптотическое разложение решений уравнения (1.1)

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(u) u^{-k}, \tag{1.2}$$

где $u = x^\beta$, α и $\beta = \text{const} \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ и $\varphi_k(u)$ — комплексно-эллиптические функции от u, будем называть *степенно-эллиптическим.*

Наша цель: указать способ вычисления таких разложений и выяснить их существование для первых двух уравнений Пенлеве P_1 и P_2. Решение задачи распадается на две части: сначала находится начальный член

$$y = x^\alpha \varphi_0(u) \tag{1.3}$$

разложений (1.2), а затем — его хвост. Алгоритм решения первой задачи указан в §1 в [2]. Здесь он повторяется в §2. В §3 указан алгоритм вычисления хвоста разложения вида (1.2). В §2 в [2] были найдены начальные члены (1.3) для уравнений Пенлеве P_1–P_4. Здесь в §4 показано, что для уравнения P_1 начальный член (1.3) продолжается в разложение вида (1.2), а в §5 показано, что для уравнения P_2 начальный член (1.3) продолжается в разложение вида (1.2). Здесь изложение аналогично [3], где изучались степенно-периодические разложения, но гораздо более сложное.

2 Степенно-эллиптические асимптотики [2]

Каждому дифференциальное моному $a(x, y)$ ставится в соответствие его *трехмерный показатель степени* $\mathbf{Q}(a) = (q_1, q_2, q_3)$ по следующим правилам

$$\mathbf{Q}(cx^r y^s) = (r, s, 0);$$
$$\mathbf{Q}(d^l y/dx^l) = (0, 1, l);$$

показатель степени произведения является суммой показателей степеней сомножителей

$$\mathbf{Q}(ab) = \mathbf{Q}(a) + \mathbf{Q}(b).$$

Множество $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ показателей степеней $\mathbf{Q}(a_i)$ всех дифференциальных мономов суммы $f(x,y) = \sum a_i(x,y)$ называется *носителем суммы* $f(x,y)$. Очевидно, $\tilde{\mathbf{S}}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(f)$ носителя $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ называется *многогранником суммы* $f(x,y)$. Граница $\partial\mathbf{\Gamma}(f)$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f)$ состоит из вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Они называются *(обобщенными) гранями* $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = \sum a_i(x,y) \text{ по } \mathbf{Q}(a_i) \in \tilde{\mathbf{S}}(f) \cap \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}.$$

Пусть $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль двумерной грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Будем рассматривать только нормали с $n_1 > 0$ (ибо $x \to \infty$), поэтому можно считать, что $n_1 = 1$.

Пусть грань $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$ имеет внешнюю нормаль $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, тогда соответствующее укорочение

$$\check{f}_j^{(2)}(x,y) = x^q g(y),$$

где $g(y)$ содержит только y и его производные, но не содержит x. В этом случае полная сумма $f(x,y)$ может быть записана как

$$f(x,y) = x^q g(y) + x^{q-\gamma} h(x,y), \tag{2.1}$$

где $\gamma > 0$ и $h(x,y)$ — дифференциальная сумма.

Все эти конструкции применимы к дифференциальному уравнению (1.1). При этом укороченной сумме $\check{f}_j^{(d)}(x,y)$ соответствует *укороченное уравнение*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = 0.$$

Замечание 2.1. В случае $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, если $y(x)$ — решение уравнения $g(y) = 0$ со свойством

$$0 < \varepsilon < |y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(n)}(x)| < \varepsilon^{-1} \tag{2.2}$$

где ε — малое положительное число, то $y(x)$ может быть асимптотикой решений полного уравнения (1.1) при $x \to \infty$.

Пусть степенное преобразование переменных $x, y \mapsto u, v$:

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta \tag{2.3}$$

преобразует $f(x,y)$ в $f^*(u,v)$.

Теорема 2.1. *Пусть грань* $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$ *многогранника* $\mathbf{\Gamma}(f)$ *имеет внешнюю нормаль* $\mathbf{N}_j = (1, n_2, n_3)$ *с* $n_3 + 1 > 0$, *тогда степенное преобразование* (2.3) *с*

$\alpha = n_2$, $\beta = n_3 + 1$ преобразует укорочение $\check{f}_j^{(2)}(x, y)$ суммы $f(x, y)$ в укорочение

$$\check{f}_j^{*(2)}(u, v) = u^q g(v) \tag{2.4}$$

суммы $f^*(u, v)$, соответствующее грани $\mathbf{\Gamma}_j^{*(2)}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f^*)$ с внешней нормалью $\mathbf{N}_j^* = (1, 0, 0)$. Здесь $\check{f}_j^{*(2)}(u, v)$ равно $\check{f}_j^{(2)}(x, y)$ после постановки

$$\beta^l u^{[\alpha + l(\beta - 1)]/\beta} d^l v / du^l \tag{2.5}$$

вместо $d^l y/dx^l$.

Поэтому, если $v = \varphi(u)$ — решение уравнения $g(v) = 0$ и $|\varphi(u)|$ ограничен от нуля и бесконечности как $|y(x)|$ в (2.2), то решения исходного уравнения (1.1) могут иметь асимптотику

$$y \sim x^\alpha \varphi(x^\beta), \quad x \to \infty. \tag{2.6}$$

Степенное преобразование (2.3) индуцирует следующие формулы для производных:

$$\begin{aligned}
y' &= x^\alpha v' + \alpha x^{\alpha-1} v, \\
y'' &= x^\alpha v'' + 2\alpha x^{\alpha-1} v' + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v, \\
v' &= \dot{v} \beta x^{\beta-1}, \quad v'' = \ddot{v} \beta^2 x^{2(\beta-1)} + \dot{v} \beta(\beta - 1) x^{\beta-2}; \\
y' &= \beta x^{\alpha+\beta-1} \dot{v} + \alpha x^{\alpha-1} v, \\
y'' &= \beta^2 x^{2\beta-2+\alpha} \ddot{v} + \beta(\beta - 1) x^{\beta+\alpha-2} \dot{v} + \\
&\quad + 2\alpha\beta x^{\alpha+\beta-2} \dot{v} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v = \\
&= \beta^2 x^{2\beta+\alpha-2} \ddot{v} + \beta(2\alpha + \beta - 1) x^{\beta+\alpha-2} \dot{v} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь и далее $\dot{v} = dv/du$.

3 Вычисление разложений (1.2)

Теорема 3.1. *Пусть уравнение порядка n*

$$g(v) + \sum_{k=1}^{m} h_k(v) u^{-k} = 0 \tag{3.1}$$

имеет решение вида

$$v = w + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(w) u^{-k}, \tag{3.2}$$

где $w = w(u)$ — решение укороченного уравнения

$$g(w) = 0, \tag{3.3}$$

обладающее свойством

$$0 < \varepsilon < |w|, |\dot{w}|, \dots, |w^{(n)}| < \varepsilon^{-1} < \infty. \tag{3.4}$$

Тогда $b_k(w)$ *удовлетворяет линейному уравнению*

$$\mathscr{L}(u) b_k(w) + \theta_k(w) = 0, \tag{3.5}$$

где

$$\mathscr{L}(u) = \left.\frac{\delta g}{\delta v}\right|_{v=w}, \tag{3.6}$$

$\theta_k(w)$ *— многочлен от* $w^{(l)}$*, зависящий от* $g(w)$*,* $h_j(w)$ *и* $h_j^{(l)}(w)$ *для* $j < k$ *и* $l = 0, 1, 2, \dots, n$*.*

Теперь рассмотрим случай, когда укороченное уравнение (3.3) имеет первый интеграл вида

$$\dot{w}^2 = P(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\varkappa} p_k w^k, \quad p_k = \text{const} \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

Дифференцируя это равенство по u и сокращая на $2\dot{w}$, получаем

$$\ddot{w} = \frac{1}{2} P'(w). \tag{3.8}$$

Здесь и далее штрих означает производную по w.

Используя равенства (3.7) и (3.8), всякий степенной ряд R от w и производных $w^{(l)}$ можно записать как сумму

$$R = R^*(w) + \dot{w} R^{**}(w).$$

где $R^*(w)$ и $R^{**}(w)$ — ряды только от w.

Положим

$$b_k(w) = F_k(w) + \dot{w} G_k(w), \tag{3.9}$$

где F_k и G_k суть функции только от w. Тогда, опуская индекс k, в силу (3.7) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \dot{b} &= F'\dot{w} + PG' + \frac{1}{2}P'G, \\ \ddot{b} &= PF'' + \frac{1}{2}P'F' + \dot{w}\left(PG'' + \frac{3}{2}P'G' + \frac{1}{2}P''G\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Дальнейшие производные от b нам здесь не потребуются, ибо будем рассматривать лишь уравнения (3.1) второго порядка. В нашем случае

$$\mathscr{L} b = \mathscr{F}(w) F(w) + \dot{w} \mathscr{G}(w) G(w).$$

Поэтому уравнение (3.5) распадается на два

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(w)F_k(w) + \theta_k^*(w) = 0, \\ \mathscr{G}(w)G_k(w) + \theta_k^{**}(w) = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $\theta_k(w) = \theta_k^*(w) + \dot{w}\theta_k^{**}(w)$. Заметим, что в уравнениях (3.11) дифференциальные операторы $\mathscr{F}(w)$ и $\mathscr{G}(w)$ являются операторами по w и не зависят от u. В дальнейшем предполагаем, что многочлен $P(w)$ в (3.7) не имеет кратных корней и его степень $\varkappa$ больше двух, т. е.

$$\varkappa > 2 \quad \text{и} \quad \Delta(P) \neq 0, \tag{3.12}$$

где $\Delta(P)$ — дискриминант многочлена $P(w)$.

Тогда решение $w(u)$ укороченного уравнения (3.3) является эллиптической (если $\varkappa < 5$) или гиперэллиптической (если $\varkappa \geqslant 5$) функцией.

Если решения $F_k(w)$ и $G_k(w)$ системы (3.11) имеют ветвления не более второго порядка и только в корнях многочлена $P(w)$, то они также являются (гипер) эллиптическими функциями. Наконец, если для последовательности уравнений (3.11) при $k = 1, 2, \ldots$ существуют решения $F_k(w)$ и $G_k(w)$, имеющие только такие ветвления, то решения уравнения (3.1) имеют степенно-(гипер)эллиптическое асимптотическое разложение решений (3.2).

Наша цель — доказать наличие таких разложений для уравнений (3.1), полученных из первых двух уравнений Пенлеве P_1, P_2.

Согласно [2] для них в интеграле (3.7) степень $\varkappa = 3$ или 4, т. е. $w(u)$ — эллиптическая функция.

Характер ветвления функций $F_k(w)$ и $G_k(w)$ в точках $w = w_0 = \text{const}$ будем определять по собственным числам укорочений уравнений (3.11), соответствующих тем вершинам (левым и правым) их многоугольников, которые расположены на высоте $q_2 = 1$. Они находятся из однородных частей $\mathscr{F}(w)F_k$ и $\mathscr{G}(w)G_k$ уравнений (3.11) и одинаковы при всех k. А именно, в обычных точках w_0 (где $P(w_0) \neq 0$) эти собственные числа суть 0 и 1, т. е. все решения в этих точках не имеют ветвления. В корне w_0 многочлен $P(w)$ эти собственные числа суть $-1/2$ и 0, т. е. решения в этой точке могут иметь ветвление не более второго порядка, а могут и не иметь его вовсе. Поэтому надо показать существование последовательности таких решений $F_k(w)$, $G_k(w)$, $k = 1, 2, \ldots$ уравнений (3.11), которые не имеют ветвления в бесконечности.

4 Уравнение $\mathbf{P}_1$

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -y'' + 3y^2 + x. \tag{4.1}$$

Согласно разделу 2.1 в [2] и формулам (2.7) степенное преобразование $y = x^{1/2}v$, $u = x^{5/4}$ приводит уравнение (4.1) к виду

$$-\left(\frac{5}{4}\right)^2 \ddot{v} + 3v^2 + 1 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{\dot{v}}{u} + \frac{1}{4}\frac{v}{u^2} = 0. \tag{4.2}$$

В записи (3.1) здесь $m = 2$,

$$\begin{gathered} g(v) = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \ddot{v} + 3v^2 + 1, \\ h_1 = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \dot{v}, \quad h_2 = \frac{1}{4}v. \end{gathered} \tag{4.3}$$

В первом интеграле (3.7)

$$P(w) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 2(w^3 + w + C_0). \tag{4.4}$$

где C_0 — произвольная постоянная. Дискриминант многочлена $w^3 + w + C_0$ равен $\Delta = -4 - 27C_0^2$. Согласно условию (3.12) предполагаем, что $\Delta \neq 0$, т.е.

$$4 + 27C_0^2 \neq 0. \tag{4.5}$$

Согласно (3.6) и (4.3) здесь

$$\mathscr{L}b = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \ddot{b} + (3w^2 + 1)b. \tag{4.6}$$

Согласно (3.10) и (4.4)

$$\begin{aligned} \mathscr{F}F = -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}P'F' + PF''\right) + 6wF = \\ = -\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F' + \tilde{P}F''\right) + \frac{1}{2}\tilde{P}''F, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\mathscr{G}G = -\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G' + \tilde{P}G''\right), \tag{4.8}$$

где $\tilde{P}(w) \stackrel{\text{def}}{=} 2(w^3 + w + C_0) = (5/4)^2 P(w)$.

Лемма 4.1. *Если $P(w_0) \neq 0$, то в локальной координате $\xi = w - w_0$ левые точки Q_l носителей $\mathbf{S}\big(\mathscr{F}F(\xi)\big)$ и $\mathbf{S}\big(\mathscr{G}G(\xi)\big)$ имеют вид $Q_l = (-2, 1)$, соответствующие укорочения суть*

$$\hat{\mathscr{F}} = -\tilde{P}(w_0)F'', \quad \hat{\mathscr{G}} = -\tilde{P}(w_0)G'', \tag{4.9}$$

а их собственные числа суть $r = 0$ *и* $r = 1$.

Доказательство. Формулы (4.9) очевидно следуют из формул (4.7), (4.8), так же как и вид Q_l. Характеристические уравнения для укорочений (4.9) суть $-\tilde{P}(w_0)(r^2 - r)$. Их корни суть $r = 0$ и $r = 1$. Доказательство окончено.

Лемма 4.2. *Если* $P(w_0) \neq 0$, *то в уравнениях* (3.11) *в локальной координате* $\xi = w - w_0$ *носители* $\mathbf{S}(\theta^*)$ *и* $\mathbf{S}(\theta^{**}) \geqslant 0$.

Доказательство следует из теоремы 3.1.

Следствие 4.1 из лемм 4.1 и 4.2. *Если* $P(w_0) \neq 0$, *то решения* $F_k(w)$ *и* $G_k(w)$ *уравнений* (3.11) *аналитичны в точке* w_0.

Лемма 4.3. *Если* $P(w_0) = 0$, *то в локальной координате* $\xi = w - w_0$ *левые точки* Q_l *носителей* $\mathbf{S}\big(\mathscr{F}F(\xi)\big)$ *и* $\mathbf{S}\big(\mathscr{G}G(\xi)\big)$ *имеют вид* $Q_l = (-1, 1)$, *соответствующие укорочения суть*

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{F}} &= -\frac{1}{2}\tilde{P}'(w_0)F' - \xi\tilde{P}'(w_0)F'', \\ \hat{\mathscr{G}} &= -\frac{3}{2}\tilde{P}'(w_0)G' - \xi P'(w_0)G'', \end{aligned} \tag{4.10}$$

а их собственные числа суть $r = 0$ *и* $r = 1/2$ *для* F *и* $r = -1/2$ *и* $r = 0$ *для* G.

Доказательство. Формулы (4.10) очевидно следуют из формул (4.7), (4.8), так же как и вид Q_l, ибо $P'(w_0) \neq 0$ по условию (4.5). Для F из укорочения (4.10) получаем характеристический многочлен

$$\chi_F(r) \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{P}'(w_0)\left[r^2 - r + \frac{1}{2}r\right].$$

Его корни $r = 0$ и $r = 1/2$. Для G из укорочения (4.10) получаем характеристический многочлен

$$\chi_G(r) = -\tilde{P}'(w_0)\left[r^2 - r + \frac{3}{2}r\right].$$

Его корни $r = -1/2$ и $r = 0$. Доказательство окончено.

Лемма 4.4. *Если* $P(w_0) = 0$, *то в уравнениях* (3.11) *в локальной координате* $\xi = w - w_0$ *носитель* $\mathbf{S}(\theta_k^*) \geqslant 0$ *и носитель* $\mathbf{S}(\theta_k^{**}) \geqslant -1/2$.

Доказательство основано на индукции по k и будет дано в конце этого параграфа.

Следствие 4.2 из лемм 4.3 и 4.4. *Если* $P(w_0) = 0$, *решения* $F_k(w)$ *и* $G_k(w)$ *уравнений* (3.11) *в точке* $w = w_0$ *не имеют логарифмического ветвления и их ветвления не более второго порядка.*

Следствие 4.3 *Решения $F_k(w)$ и $G_k(w)$ уравнений (3.11) могут иметь конечными точками ветвления только корни многочлена $P(w)$. При этом порядок ветвления не превышает двух.*

Лемма 4.5. *Правые точки Q_r носителей $\mathbf{S}\big(\mathscr{F}F\big)$ и $\mathbf{S}\big(\mathscr{G}G\big)$ имеют вид $Q_r = (1,1)$, соответствующие укорочения в точке $w=\infty$ суть*

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{F}} &= -2w^3F'' - 3w^2F' + 6wF, \\ \hat{\mathscr{G}} &= -2w^3G'' - 9w^2G', \end{aligned} \tag{4.11}$$

а их собственные числа суть $r=-2$ и $r=3/2$ для F и $r=-7/2$ и $r=0$ для G.

Доказательство. Формулы (4.11) очевидно следуют из формул (4.7), (4.8) и из выражения для $\tilde{P}$, так же как вид Q_r. Для F из укорочения (4.11) получаем характеристический многочлен

$$\chi_F(r) \stackrel{\text{def}}{=} -2(r^2-r) - 3r + 6 = -(2r-3)(r+2).$$

Его корни $r=-2$ и $r=3/2$. Для G из укорочения (4.11) получаем характеристический многочлен

$$\chi_G(r) \stackrel{\text{def}}{=} -2(r^2-r) - 9r = -r(2r+7).$$

Его корни $r=-7/2$ и $r=0$. Доказательство окончено.

Согласно (4.3) $\theta_1^* \equiv 0$, $\theta_2^{**} = -\left(\dfrac{5}{4}\right)^2$ и уравнения (3.11) для $k=1$ имеют вид

$$\mathscr{F}F_1(w) \equiv 0, \quad \mathscr{G}G_1(w) - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0. \tag{4.12}$$

Согласно (4.7) первое уравнение имеет тривиальное решение $F_1(w) \equiv 0$, а второе уравнение имеет вид

$$2(w^3+w+C_0)G_1'' + 3(w^2+1)G_1' + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0. \tag{4.13}$$

Будем искать решения уравнения (4.13) в виде ряда по целым убывающим степеням w. Многоугольник Γ уравнения (4.13) является треугольником. Его правое ребро единственно и дает укороченное уравнение

$$2w^3G_1'' + 9w^2G_1' + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0 \tag{4.14}$$

и нормальный конус $\mathbf{U} = \{(p_1,p_2) = \lambda(-1,1), \lambda > 0\}$. Поэтому ищем решение уравнения (4.14) в виде $G_1 = \gamma_{11}w^{-1}$. Получаем $\gamma_{11} = 5/16$. Следовательно, уравнение (4.13) имеет единственное решение вида

$$G_1(w) = \gamma_{11} w^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{1k} w^{-k}, \tag{4.15}$$

которое сходится при больших $|w|$. Вычислим несколько начальных коэффициентов γ_{1k}. Это делается подстановкой ряда (4.15) в уравнение (4.13) и приравниванием к нулю коэффициентов при $w^0, w^{-1}, w^{-2}, \ldots$. Тогда для каждого коэффициента γ_{1k} получаем линейное уравнение, из которого он однозначно определяется. Получаем

$$G_1 = \frac{5}{16} w^{-1} + \frac{5}{48} w^{-3} + \ldots. \tag{4.16}$$

В дальнейшем нам потребуется вычислить $b_2(w)$–$b_6(w)$ в разложении (3.2) для уравнения (4.2). Выпишем соответствующее разложение для $v, \dot{v}, \ddot{v}, v^2$ до u^{-6} включительно:

$$\begin{aligned}
&v = w + \frac{b_1}{u} + \frac{b_2}{u^2} + \frac{b_3}{u^3} + \frac{b_4}{u^4} + \frac{b_5}{u^5} + \frac{b_6}{u^6} + \ldots, \\
&\dot{v} = \dot{w} + \frac{\dot{b}_1}{u} + \frac{\dot{b}_2 - b_1}{u^2} + \frac{\dot{b}_3 - 2b_2}{u^3} + \frac{\dot{b}_4 - 3b_3}{u^4} + \frac{\dot{b}_5 - 4b_4}{u^5} + \frac{\dot{b}_6 - 5b_5}{u^6} + \ldots, \\
&\ddot{v} = \ddot{w} + \frac{\ddot{b}_1}{u} + \frac{\ddot{b}_2 - 2\dot{b}_1}{u^2} + \frac{\ddot{b}_3 - 4\dot{b}_2 + 2b_1}{u^3} + \frac{\ddot{b}_4 - 6\dot{b}_3 + 6b_2}{u^4} + \\
&\qquad + \frac{\ddot{b}_5 - 8\dot{b}_4 + 12b_3}{u^5} + \frac{\ddot{b}_6 - 10\dot{b}_5 + 20b_4}{u^6} + \ldots, \\
&v^2 = w^2 + \frac{2wb_1}{u} + \frac{1}{u^2}(b_1^2 + 2wb_2) + \frac{1}{u^3}(2wb_3 + 2b_1b_2) + \\
&\qquad + \frac{1}{u^4}(b_2^2 + 2wb_4 + 2b_1b_3) + \frac{1}{u^5}(2wb_5 + 2b_1b_4 + 2b_2b_3) + \\
&\qquad + \frac{1}{u^6}(b_2^2 + 2wb_6 + 2b_1b_5 + 2b_2b_4) + \ldots
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (4.2) и приравнивая нулю сумму членов при фиксированной степени u^{-k}, получаем уравнение для b_k. В частности для b_2 получается уравнение

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{5}{4}\right)^2 (\ddot{b}_2 - 2\dot{b}_1) + 3(b_1^2 + 2wb_2) - \left(\frac{5}{4}\right)^2 \dot{b}_1 + \frac{1}{4} w = \\
= -\left(\frac{5}{4}\right)^2 \ddot{b}_2 + 6wb_2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \dot{b}_1 + 3b_1^2 + \frac{1}{4} w = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Чтобы переходить от b_k к $F_k(w)$ и $G_k(w)$, выпишем соответствующие формулы:

$$
\begin{aligned}
&b = F + \dot{w}G, \quad \dot{b} = \frac{1}{2}P'G + PG' + \dot{w}F',\\
&\ddot{b} = \frac{1}{2}P'F' + PF'' + \dot{w}\left(\frac{1}{2}P''G + \frac{3}{2}P'G' + PG''\right).
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Теперь уравнение (4.18) распадается на два:

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{5}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}P'F_2' + PF_2''\right) + 6wF_2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}P'G_1 + PG_1'\right) +\\
&\quad + 3(F_1^2 + PG_1^2) + \frac{1}{4}w = 0,\\
&-\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}P''G_2 + \frac{3}{2}P'G_2' + PG_2''\right) + 6wG_2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 F_1' + 2F_1G_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Поскольку $F_1 \equiv 0$, то второе уравнение имеет тривиальное решение $G_2 \equiv 0$. Первое уравнение (4.20) записывается в виде линейного уравнения

$$
-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_2' + \tilde{P}F_2''\right) + 6wF_2 + \frac{1}{2}\tilde{P}'G_1 + \tilde{P}G_1' + 3PG_1^2 + \frac{1}{4}w = 0. \tag{4.21}
$$

Старший член его неоднородной части равен

$$
\left(3\gamma_{11} - 2\gamma_{11} + 6\left(\frac{4}{5}\right)^2\gamma_{11}^2 + \frac{1}{4}\right)w = \frac{3}{16}w.
$$

Из леммы 4.3 следует, что решение уравнения (4.21) имеет вид

$$
F_2 = \varphi_{20} + \sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{2l}w^{-l}, \quad \varphi_{20}, \varphi_{2l} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \tag{4.22}
$$

если выполнено условие совместности для $r = -2$, т. е. для $l = 2$. Подставляя разложение (4.22) в уравнение (4.21) и учитывая (4.16), получаем

$$
F_2 = -\frac{5}{32} + 0 \cdot w^{-1} + \varphi_{22}w^{-2} + \ldots, \tag{4.23}
$$

где φ_{22} — произвольное комплексное число. При этом условие совместности для $l = 2$ выполнено.

Лемма 4.6. *В последовательности уравнений для $b_k = F_k + \dot{w}G_k$, получаемых из уравнения* (4.2) *по формулам* (4.17), *$F_k \equiv 0$, если k нечётно, и $G_k \equiv 0$, если k чётно. При этом старшие члены в F_k и G_k имеют порядки*

$$
\begin{aligned}
&-(k-2)/2 \quad \text{для} \quad F_k,\\
&-(k+1)/2 \quad \text{для} \quad G_k.
\end{aligned}
$$

Доказательство проводится индукцией по k.

Поскольку разложения для G_k однозначны (также как для G_1), то надо вычислять F_k и проверять для F_4 и F_6 условия совместности, ибо при $k=4$ имеем $-(k-2)/2=-1>-2=r$, при $k=6$ имеем $-(k-2)/2=-2=r$, а при $k>6$ имеем $-(k-2)/2<-2=r$.

В результате описанных вычислений, получаем последовательность уравнений

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_3'+\tilde{P}G_3''\right)+3\left(\frac{5}{4}\right)^2F_2'-\frac{21}{16}G_1+6G_1F_2=0,\\
&-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_4'+\tilde{P}F_4''\right)+6wF_4+5\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'G_3'+\tilde{P}G_3'\right)-6F_2+3F_2^2+\\
&\qquad\qquad+6G_1G_3P=0,\\
&-\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_5'+\tilde{P}G_5''\right)+7\left(\frac{5}{4}\right)^2F_4'-\frac{221}{16}G_3+6G_1F_4+6F_2G_3=0,\\
&-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_6'+\tilde{P}F_6''\right)+6wF_6+9\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'G_5+\tilde{P}G_5'\right)-\frac{99}{4}F_4+\\
&\quad+3PG_3^2+6PG_1G_5+6F_2F_4=0
\end{aligned}\tag{4.24}$$

и также начальные участки их решений

$$\begin{aligned}
G_3&=\frac{30}{16^2}w^{-2}+0\cdot w^{-3}+\ldots,\\
F_4&=-\frac{723}{20\cdot 16^2}w^{-1}+\varphi_{42}w^{-2}+\ldots,\\
G_5&=\frac{2451}{4\cdot 16^3}w^{-3}+\ldots,\\
F_6&=\varphi_{62}w^{-2}+\ldots,
\end{aligned}$$

где φ_{42} и φ_{62} — произвольные комплексные постоянные, а условия совместности в уравнениях для F_4 и F_6 выполнены.

Итак, доказана

Теорема 4.1. *Для решений уравнения* P_1 *при условии* (4.5) *имеется степенно-эллиптическое разложение* (3.2). *При этом функции* b_2, b_4 *и* b_6 *содержат по одной произвольной постоянной, а остальные* b_k *однозначны.*

Доказательство леммы 4.4. Для $k=1$ утверждение леммы следует из формул (4.2). Для $k=2$ согласно (4.20) и $F_1\equiv 0$ имеем, что

$$\theta_2^*=\frac{1}{2}\tilde{P}'G_1+\tilde{P}G_1'+3PG_1^2+\frac{1}{4}w\quad\text{и}\quad\theta_2^{**}\equiv 0.\tag{4.25}$$

Согласно лемме 4.3 разложение G_1 по локальной координате $\xi=w-w_0$

имеет вид

$$G_1 = \alpha\xi^{-1/2} + \beta + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\xi^{k/2}.$$

Тогда в (4.25) в сумме $\dfrac{1}{2}\tilde{P}'G_1 + \tilde{P}G_1'$ младшие члены с $\xi^{-1/2}$ взаимно уничтожаются, в PG_1^2 нет членов с отрицательной степенью ξ, ибо $P \sim \xi$ и $G_1^2 \sim \xi^{-1}$. Следовательно, $\mathbf{S}(\theta_2^*) \geqslant 0$.

Для $k = 3, 4, 5, 6$ выражения для $\theta_k^*(w)$ и $\theta_k^{**}(w)$ выписаны в формулах (4.24). Для них утверждение леммы доказывается последовательно по росту k в предположении, что $\mathbf{S}(F_j) \geqslant 0$ и $\mathbf{S}(G_j) \geqslant -1/2$ для $j < k$, с использованием рассуждений, приведённых выше для θ_2^*. Аналогично утверждение леммы 4.4 доказывается индукцией по k для любого $k > 0$. Доказательство окончено.

5 Уравнение $\mathbf{P}_2$

$$f(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -y'' + 2y^3 + xy + a = 0, \tag{5.1}$$

где a — комплексный параметр. Согласно разделу 2.2 в [2] и формулам (2.7) степенное преобразование

$$y = x^{1/2}v, \quad u = x^{3/2} \tag{5.2}$$

приводит уравнение (5.1) к виду

$$u\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2\ddot{v} + 2v^3 + v\right] + a - \left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{v} + \frac{1}{4}vu^{-1} = 0. \tag{5.3}$$

В записи (3.1) здесь $m = 2$,

$$g(v) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2\ddot{v} + 2v^3 + v, \quad h_1 = a - \left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{v}, \quad h_2 = \frac{1}{4}v. \tag{5.4}$$

В первом интеграле (3.7)

$$P(w) = \left(\frac{2}{3}\right)^2(w^4 + w^2 + C_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^2\tilde{P}(w), \tag{5.5}$$

C_0 — произвольная постоянная. Поскольку дискриминант многочлена $\tilde{P} = w^4 + w^2 + C_0$ есть $\Delta = C_0(C_0 - 1/4)^2$, то полагаем, что

$$C_0 \neq 0, \quad C_0 \neq \frac{1}{4}. \tag{5.6}$$

Тогда выполнено условие (3.12). Поскольку

$$\frac{\delta g}{\delta v} = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{d^2}{du^2} + 6v^2 + 1,$$

$$\text{то} \quad \mathscr{L}(w)b_k = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \ddot{b}_k + (6w^2+1)b_k.$$

Согласно формулам (4.19), получаем

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}F_k &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}P'F_k' + PF_k''\right) + (6w^2+1)F_k = \\
&= -\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_k' + \tilde{P}F_k''\right) + (6w^2+1)F_k = \\
\mathscr{G}G_k &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}P''G_k + \frac{3}{2}P'G_k' + PG_k''\right) + (6w^2+1)G_k = \\
&= -\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_k' + \tilde{P}G_k''\right),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ибо $-\dfrac{1}{2}\tilde{P}'' + 6w^2 + 1 \equiv 0$.

Лемма 5.1. *Если $P(w_0) \neq 0$, то при $w = w_0$ левые точки Q_l носителей $\mathbf{S}(\mathscr{F}F)$ и $\mathbf{S}(\mathscr{G}G)$ имеют вид $Q_l = (-2, 1)$, соответствующие укорочения в точке w_0 имеют вид* (4.3), *а их собственные числа суть $r = 0$ и $r = 1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.1.

Лемма 5.2. *Если $P(w_0) \neq 0$, то в уравнениях* (3.11) *в локальной координате $\xi = w - w_0$ носители $\mathbf{S}(\theta_k^*)$ и $\mathbf{S}(\theta_k^{**}) \geqslant 0$.*

Доказательство следует из теоремы 3.1.

Следствие 5.1 *из лемм* 5.1 *и* 5.2. *Если $P(w_0) \neq 0$, то решения $F_k(w)$ и $G_k(w)$ уравнений* (3.11) *аналитичны в точке $w = w_0$.*

Лемма 5.3. *Если $P(w_0) = 0$, то при $w = w_0$ левые точки носителей $\mathbf{S}(\mathscr{F}F)$ и $\mathbf{S}(\mathscr{G}G)$ имеют вид $(-1, 1)$, соответствующие укорочения в точке w_0 имеют вид* (4.10), *а их собственные числа суть $r = 0$ и $r = 1/2$ для F, $r = -1/2$, $r = 0$ для G.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.3.

Лемма 5.4. *Если $P(w_0) = 0$, то в уравнениях* (3.11) *в локальной координате $\xi = w - w_0$ носитель $\mathbf{S}(\theta_k^*) \geqslant 0$ и носитель $\mathbf{S}(\theta_k^{**}) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.*

Доказательство основано на индукции по k и будет дано в конце этого параграфа.

Следствие 5.2 *из лемм* 5.3 *и* 5.4. *Если* $P(w_0) = 0$, *то решения* $F_k(w)$ *и* $G_k(w)$ *уравнений* (3.11) *в точке* $w = w_0$ *не имеют логарифмического ветвления и их ветвление не более второго порядка.*

Здесь справедливо следствие 4.3.

Лемма 5.5. *Правые точки носителей* $\mathbf{S}(\mathscr{F}F)$ *и* $\mathbf{S}(\mathscr{G}G)$ *имеют вид* $(2,1)$, *соответствующие укорочения в точке* $w = \infty$ *суть*

$$\hat{\mathscr{F}} = -2w^3F' - w^4F'' + 6w^2F,$$
$$\hat{\mathscr{G}} = -6w^3F' - w^4F'',$$

а их собственные числа суть $r = -3$ *и* $r = 1$ *для* F, $r = -5$ *и* $r = 0$ *для* G.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.5.

Выпишем уравнения для b_k, учитывая уравнения (5.3), формулы (4.17) и разложение

$$v^3 = w^3 + 3w^2\sum_{k=1}^{\infty} b_k u^{-k} + 3w(b_1^2u^{-2} + b_2^2u^{-4} + \\ + 2b_1b_2u^{-3}) + b_1^3u^{-3} + 3b_1^2b_2u^{-4} + \dots. \tag{5.8}$$

Получаем для b_1 уравнение

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^2 b_1 + (6w^2+1)b_1 + a - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dot{w} = 0.$$

Учитывая (4.19) получаем два уравнения

$$\begin{gathered} -\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_1' + \tilde{P}F_1''\right) + (6w^2+1)F_1 + a = 0, \\ -\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_1' + \tilde{P}G_1''\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0. \end{gathered} \tag{5.9}$$

В силу леммы 5.3 разложения для $F_1(w)$ и $G_1(w)$ начинаются в с порядка $-r$. Кроме того, они содержат только чётные степени w, ибо таковы многочлены $\tilde{P}$ и $6w^2+1$. Поскольку в силу леммы 5.3, собственные числа r либо нечётны, либо больше -2, то разложения для F_1 и G_1 однозначны. При этом

$$F_1 = -\frac{a}{4}w^{-2} + \frac{a}{8}w^{-4} + \dots,$$
$$G_1 = \frac{3}{8}w^{-2} - \frac{3}{16}w^{-4} + \dots.$$

Для b_2 получаем уравнение

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\ddot{b}_2 - 2\dot{b}_1) + 2(3w^2b_2 + 3wb_1^2) + b_2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{b}_1 + \frac{1}{4}w = \\ = -\left(\frac{3}{2}\right)^2\ddot{b}_2 + (6w^2+1)b_2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{b}_1 + 6wb_1^2 + \frac{1}{4}w = 0.$$

Согласно (4.19) оно распадается на два линейных уравнения

$$-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_2' + \tilde{P}F_2''\right) + (6w^2+1)F_2 + \frac{1}{2}\tilde{P}G_1 + \tilde{P}G_1' + 6w(F_1^2 + PG_1^2) + \\ + \frac{1}{4}w = 0, \qquad -\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_2' + \tilde{P}G_2''\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 F_1' + 12wF_1G_1 = 0. \tag{5.10}$$

Порядки старших членов неоднородных частей равны 1 и -3 для F_2 и G_2 соответственно. В силу леммы 5.3 ряд F_2 начинается со степени -1, а ряд G_2 — со степени -5. Кроме того, ряды для F_2 и G_2 содержат только нечётные степени. Поскольку $r = -3$ для F и $r = -5$ для G, то надо проверить соответствующие условия совместности. Получаем, что условия совместности выполнены и

$$F_2 = -\frac{35}{3\cdot 64}w^{-1} + \varphi_{23}w^{-3} + \ldots, \\ G_2 = \gamma_{25}w^{-5} + \ldots,$$

где φ_{23} и γ_{25} — произвольные постоянные.

Для b_3 получаем уравнение

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\ddot{b}_3 - 4\dot{b}_2 + 2b_1) + (6w^2+1)b_3 + 12wb_1b_2 + 2b_1^3 - \\ -\left(\frac{3}{2}\right)^2(\dot{b}_2 - b_1) + \frac{1}{4}b_1 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2\ddot{b}_3 + (6w^2+1)b_3 + \\ + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{b}_2 - 2b_1 + 12b_1b_2w + 2b_1^3 = 0.$$

Согласно (4.19) оно распадается на два

$$-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_3' + \tilde{P}F_3''\right) + (6w^2+1)F_3 + 3\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'G_2 + \tilde{P}G_2'\right) - 2F_1 + \\ + 12w(F_1F_2 + PG_1G_2) + 2(F_1^3 + 3PF_1G_1^2) = 0, \\ -\left(\frac{3}{2}\tilde{P}'G_3' + \tilde{P}G_3''\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 F_2' - 2G_1 + 12w(F_1G_2 + G_1F_2) + \\ + 2(3F_1^2G_1 + PG_1^3) = 0. \tag{5.11}$$

Старшие члены неоднородных частей имеют порядки -2. Согласно лемме 5.3 разложения для $F_3(w)$ и $G_3(w)$ начинаются с членов порядков -4. Кроме того, они идут по чётным степеням w. Поэтому условия совместности здесь не возникают и разложения однозначные. При этом

$$G_3 = \frac{15}{128}w^{-4} + \ldots$$

Для b_4 получаем уравнение

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\ddot{b}_4-\dot{b}_3+6b_2)+2(3w^2b_4+3wb_2^2+6wb_1b_3+$$

$$+3b_1^2b_2)+b_4-\left(\frac{3}{2}\right)^2(\dot{b}_3-2b_2)+\frac{1}{4}b_2=$$

$$=-\left(\frac{3}{2}\right)^2\ddot{b}_4+(6w^2+1)b_4+5\left(\frac{3}{2}\right)^2\dot{b}_3-\frac{35}{4}b_2+$$

$$+6wb_2^2+12wb_1b_3+6wb_1^2b_2=0.$$

Согласно (4.17) из него получаем уравнение для F_4

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'F_4'+\tilde{P}F_4''\right)+(6w^2+1)F_4+5\left(\frac{1}{2}\tilde{P}'G_3+\tilde{P}G_3'\right)-\frac{35}{4}F_2+\\&+6w(F_2^2+PG_2^2)+12w(F_1F_3+PG_1G_3)+6(F_1^2+PG_1^2)F_2+\\&+2PF_1G_1G_2=0.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Старший порядок членов, не зависящих от F_4 равен -1. Поэтому разложение для F_4 начинается со степени -3, что соответствует значению r в лемме 5.3. Поэтому в уравнении надо проверить условие совместности для $l=-3$, т. е. убедиться, что аннулируется коэффициент при w^{-1} в сумме членов, не зависящих от F_4. Это так, т. е.

$$F_4=\varphi_{43}w^{-3}+\ldots,$$

где φ_{43} — произвольная постоянная.

Лемма 5.6. *В последовательности уравнений для F_k и G_k, полученных для уравнения* (5.3) *разложения F_k и G_k содержат только чётные степени w и начинаются членами порядка $-2k$, если k нечётно, и только нечётные степени w и начинаются членами порядка $-(k-1)$ для F_k и $-(k+3)$ для G_k, если k чётно.*

Доказательство проводится индукцией по k.

Согласно лемме 5.6 порядки старших членов в F_k меньше наименьшего собственного числа для $\hat{\mathscr{F}}F_k$, равного $r=-3$, для $k>4$, а в G_k порядка $-(k+3)<-5$ для $k>2$. Итак, доказана

Теорема 5.1. *Для решений уравнения P_2 при условии* (5.6) *имеется степенно-эллиптическое разложение* (3.2)*. При этом функции F_2, G_2, F_4 имеют по одной произвольной постоянной. Остальные $F_k(w)$ и $G_k(w)$ однозначны.*

Доказательство леммы 5.4 аналогично доказательству леммы 4.4. Для $k=1$ утверждение леммы следует из формул (5.9). Для $k=2,3,4$ функции

$\theta_k^*(w)$ и $\theta_k^{**}(w)$ содержатся в формулах (5.10), (5.11), (5.12), соответственно. Для них утверждение леммы доказывается последовательно по росту k в предположении, что $\mathbf{S}(F_j) \geqslant 0$ и $\mathbf{S}(G_j) \geqslant -1/2$ для $j < k$ с использованием рассуждений, приведённых в начале доказательства леммы 4.4. Аналогично утверждение леммы 5.4 доказывается индукцией по k для любого $k > 0$. Доказательство окончено.

Список литературы

[1] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 2004, т. 59, №3, с. 31–80.

[2] A. D. Bruno. Space Power Geometry for an ODE and Painlevé equations. // International Conference "Painlevé Equations and Related Topics". St. Petersburg, June, 2011. P. 36-41.

[3] А. Д. Брюно. Степенно-экспоненциальные разложения решений ОДУ. Препринт № 54, ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, 2011.