



Овчинников М.Ю.,
Трофимов С.П., Ширококов М.Г.

Метод виртуальных
траекторий для
проектирования
межпланетных миссий с
гравитационными
маневрами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Метод виртуальных траекторий для проектирования межпланетных миссий с гравитационными маневрами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 9. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-9>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

М.Ю. Овчинников, С.П. Трофимов, М.Г. Широбоков

**МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ МИССИЙ С
ГРАВИТАЦИОННЫМИ МАНЕВРАМИ**

Москва

2012

Метод виртуальных траекторий для проектирования межпланетных миссий с гравитационными маневрами. М.Ю. Овчинников, С.П. Трофимов, М.Г. Ширококов. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 26 страниц, 11 рисунков, библиография 22 наименований

Предлагается оригинальный подход к решению задачи проектирования межпланетных перелетов, включающих несколько гравитационных маневров. В основе этого подхода лежит разработанный авторами метод виртуальных траекторий. Наиболее ресурсоемкий этап расчетов – построение базы виртуальных траекторий – может быть выполнен для каждого планетного маршрута один раз, после чего полученная база табулируется и используется в дальнейших вычислениях. Наложение требований по продолжительности миссии и дате старта осуществляется в процессе итерационного просеивания и уточнения базы виртуальных траекторий. Приводятся результаты применения метода виртуальных траекторий к задаче проектирования миссии к Урану.

Ключевые слова: межпланетный перелет, проектирование траекторий, гравитационный маневр, импульсная тяга

Method of Virtual Trajectories for the Design of Gravity Assisted Missions. M.Yu. Ovchinnikov, S.P. Trofimov, M.G. Shirobokov. Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 26 Pages, 11 Figures, 22 References

A novel method of virtual trajectories is proposed for the design of multiple gravity assist trajectories. The database of virtual trajectories can be tabulated for any planetary sequence. Requirements on the mission duration and the start date are taken into account during the iterative procedure of database screening and refinement. The results of applying the virtual trajectories method to the design of mission to Uranus are given.

Keywords: interplanetary flight, trajectory design, gravity assist, impulsive thrust

1. Введение

Идея использовать гравитационные поля планет для изменения скорости пролетающего мимо них космического аппарата была впервые высказана еще в 20-х годах прошлого века основоположниками современной космонавтики Ю.В. Кондратьевым и Ф.А. Цандером [1], [2]. Само понятие гравитационного маневра было введено спустя несколько десятилетий М. Миновичем (США) [3]. Идею быстро подхватили и реализовали уже на раннем этапе освоения дальнего космоса в таких широко известных миссиях, как «Луна-3» (1959), «Маринер-10» (1973), «Пионер-11» (1973), «Вояджер-1,2» (1977).

До создания современных высокопроизводительных вычислительных средств проектирование траекторий, содержащих гравитационные маневры, опиралось в значительной степени на интуицию баллистиков и использование некоторых простых аналитических и графических средств типа диаграммы Тиссерана. Точный расчет полученных таким путем приближенных траекторий осуществлялся с помощью методов локальной оптимизации и теории оптимального управления и представлял собой, как правило, ньютоновский или квазиньютоновский итерационный процесс. Однако даже для простых межпланетных перелетов оптимизируемый функционал – характеристическая скорость – имеет множество локальных минимумов и может быть в некоторых точках недифференцируемым или даже разрывным [4]. Как следствие, выбор начальной точки – приближенной траектории – оказывает сильное влияние на сходимость итерационного процесса и качество выполненной оптимизации (близость найденного оптимума к глобальному).

Классический метод полного перебора, использовавшийся с самого начала космической эры для проектирования межпланетных полетов, заключается в случае прямого перелета в переборе дат старта и времени полета и численном решении получающихся при этом задач Ламберта [5,6]. Траектории же с промежуточными гравитационными маневрами разбиваются на участки планета-планета, к которым применяется та же самая процедура. Метод полного перебора оказывается весьма ресурсозатратным при решении задачи оптимизации траекторий с большим числом гравитационных маневров.

Современный подход в технологии проектирования межпланетных траекторий заключается в автоматической генерации множества локально-оптимальных приближенных траекторий методами глобальной оптимизации. Здесь можно отметить попытки использования генетических алгоритмов [7], [8], нейронных сетей [9] и методов параллельных вычислений [10]. Также в последнее десятилетие активно разрабатывалась идея применения стохастического поиска для задачи оптимизации сложных траекторий [11], [12].

Среди отечественных работ по тематике проектирования сложных межпланетных траекторий можно выделить создание метода сквозной

оптимизации траекторий аппаратов с малой тягой [13]. В качестве средства преодоления затруднений с выбором начального приближения хорошо зарекомендовал себя метод продолжения по параметру, применимый в задачах и с большой, и с малой тягой [14], [15].

2. Постановка задачи

В настоящей работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий с большим числом гравитационных маневров в следующей постановке:

- космический аппарат (КА) оснащен двигателем большой тяги (химическим двигателем большой мощности);
- траектория формируется из участков пассивного полета, соединяющихся между собой в точках приложения управляющих импульсов при выполнении активных гравитационных маневров.

Орбиты планет считаются некомпланарными кеплеровыми эллипсами, элементы которых берутся на некоторую эпоху. К примеру, авторами использовались орбитальные элементы планет по отношению к средней эклиптике и среднему равноденствию на эпоху J2000.0 [16].

Как это делается в большинстве методов проектирования межпланетных траекторий, будем пользоваться моделью сопряженных конических сечений (patched conic approximation): внутри сфер действия планет учитывается только притяжение соответствующей планеты, вне сфер действия планет – только притяжение Солнца.

На практике активные гравитационные маневры используются довольно редко из-за большой точности, предъявляемой к траекторным измерениям на припланетном участке полета, и заменяются, если необходимо, управляющими импульсами в глубоком космосе (deep space maneuvers). Однако задача в приведенной выше постановке упрощается и может быть легко алгоритмизирована, а параметры полученных траекторий служат хорошей оценкой для параметров практически реализуемых траекторий с пассивными гравитационными маневрами и импульсами в глубоком космосе.

3. Проектирование межпланетных миссий с помощью метода виртуальных траекторий

Являясь, по сути, разновидностью классического метода полного перебора, предлагаемый в настоящей работе *метод виртуальных траекторий* отличается от него пространственной, а не временной привязкой к движению планет. Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени (для целей проектирования траекторий – десятки лет), позволяет табулировать наиболее ресурсоемкую часть

расчетов и тем самым существенно сократить время работы алгоритма оптимизации. Этой цели также способствует возможность провести все вычисления по конечным формулам.

3.1 Понятие виртуальной траектории. Расчет параметров гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории

Метод виртуальных траекторий состоит из двух этапов. На первом этапе для построения базы виртуальных траекторий необходимо провести дискретизацию: на орбите каждой из планет, входящих в выбранный планетный маршрут, отметим, идя с небольшим по истинной аномалии шагом (постоянным или переменным), набор узловых точек (рис. 1). Виртуальной траекторией будем называть траекторию, состоящую из пассивных гелиоцентрических участков полета, которые соединяются между собой в узлах. Угловая дальность полета на каждом из таких участков полагается не превосходящей 2π .¹

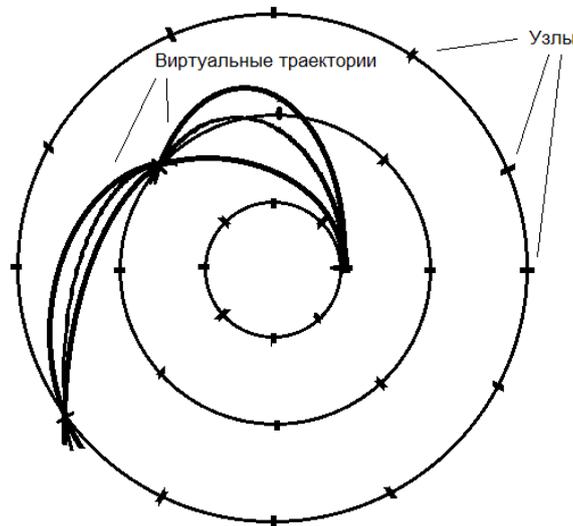


Рис. 1. Дискретизация орбит планет

Рассмотрим один из гелиоцентрических участков. Пусть \mathbf{r}_1 – радиус-вектор начальной точки участка – узла планеты 1, а \mathbf{r}_2 – радиус-вектор конечной точки участка – узла планеты 2, \mathbf{u}_1 – вектор скорости планеты 1 в точке \mathbf{r}_1 (далее, ссылаясь на точки/узлы, будем просто указывать их радиус-вектор). Местная параболическая скорость в точке \mathbf{r}_1 равна

$$v_{par} = \sqrt{\frac{2\mu_{\odot}}{r_1}}, \quad r_1 = |\mathbf{r}_1|. \quad \text{Здесь } \mu_{\odot} \text{ – гравитационный параметр Солнца.}$$

Орбитальный угловой момент планеты 1 задается вектором $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{u}_1$.

¹ Допускаются так называемые резонансные траектории, когда КА совершает несколько последовательных гравитационных маневров у одной и той же планеты. Гелиоцентрические участки таких траекторий могут иметь угловую дальность вплоть до 2π включительно.

Так как в модели учитывается некомпланарность орбит планет, то будем считать, что узлы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 не лежат одновременно на прямой, по которой пересекаются плоскости орбит планет 1 и 2. Тогда можно корректно определить вектор $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, который задает направление кратчайшего поворота от точки \mathbf{r}_1 к точке \mathbf{r}_2 .

Если $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{q} \geq 0$ (т.е., движение планеты 1 вдоль своей орбиты сонаправлено с кратчайшим поворотом от точки \mathbf{r}_1 к точке \mathbf{r}_2), то угловая дальность выражается формулой

$$\varphi = \arccos \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} \in [0; \pi].$$

Тогда говорят, что точка \mathbf{r}_2 достигается на первом полувитке. В обратном случае ($\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{q} < 0$) угловая дальность равна

$$\varphi = 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} \in [\pi; 2\pi].$$

Тогда говорят, что точка \mathbf{r}_2 достигается на втором полувитке.

Движение КА будет происходить в плоскости, содержащей векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Величина $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ скорости КА в точке \mathbf{r}_1 , необходимая для попадания в точку \mathbf{r}_2 , связана с углом наклона траектории θ по формуле [17]

$$\left(\frac{v_1}{v_{par}} \right)^2 = \frac{1}{2 \cos \theta} \frac{r_1 (1 - \cos \varphi)}{r_2 \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)}.$$

Из интервала $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ выбираются с некоторым шагом значения θ_k до тех пор, пока $v_1 < v_{par}$, то есть выполняется условие финитности движения. Для каждого θ_k и соответствующего значения v_{1k} имеем следующее выражение для вектора гелиоцентрической скорости в точке \mathbf{r}_1 :

$$\mathbf{v}_{1k} = v_{1k} \sin \theta_k \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} - v_{1k} \cos \theta_k \frac{\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)|} \text{sign}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{q}).$$

Осталось определить время перелета для рассматриваемого гелиоцентрического участка. Пусть \mathbf{v}_1 – скорость КА в точке \mathbf{r}_1 , которая гарантирует попадание КА в точку \mathbf{r}_2 , и θ – угол наклона траектории. Используя эти данные, можно вычислить следующие элементы орбиты перелета: $\mathbf{c} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1$ – орбитальный угловой момент, $\mathbf{l} = -\mu_{\odot} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{c}$ –

интеграл Лапласа, $e = \frac{|\mathbf{l}|}{\mu_{\odot}}$ – эксцентриситет, $p = \frac{|\mathbf{c}|^2}{\mu_{\odot}}$ – фокальный

параметр, $a = \frac{p}{1-e^2}$ – большая полуось. Для истинной аномалии начальной и конечной точки участка имеем

$$\cos \vartheta_i = \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{r}_i| \cdot |\mathbf{l}|}, \quad \sin \vartheta_i = \frac{|\mathbf{r}_i \times \mathbf{l}|}{|\mathbf{r}_i| \cdot |\mathbf{l}|} \text{sign}(\mathbf{c} \cdot [\mathbf{l} \times \mathbf{r}_i]), \quad i = 1, 2.$$

После этого вычисляются трансверсальная составляющая

$$v_{2n} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{p}} (1 + e \cos \vartheta_2)$$

и радиальная составляющая

$$v_{2r} = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{p}} e \sin \vartheta_2$$

скорости КА в точке \mathbf{r}_2 . Таким образом, вектор скорости в точке \mathbf{r}_2 можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{v}_2 = v_{2r} \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} + v_{2n} \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{c} \times \mathbf{r}_2|}.$$

Для эксцентрической аномалии в точках \mathbf{r}_i , $i = 1, 2$:

$$E_i = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2} \right), \quad \text{если } \sin \vartheta_i \geq 0;$$

$$E_i = 2\pi + 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_i}{2} \right), \quad \text{если } \sin \vartheta_i < 0.$$

Если при этом получилось, что $E_1 > E_2$, то следует увеличить значение E_2 на 2π . В итоге получаем время перелета из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2

$$T = \frac{a^{3/2}}{\mu_{\odot}^{1/2}} (E_2 - E_1 - e[\sin E_2 - \sin E_1]).$$

Таким образом, определены все параметры пучка виртуальных траекторий из узла \mathbf{r}_1 на орбите планеты 1 в узел \mathbf{r}_2 на орбите планеты 2. Аналогичные расчеты можно выполнить для любых двух узлов на орбитах планет, «соседствующих» в выбранном планетном маршруте. Для резонансных виртуальных траекторий перелет может совершаться между двумя узлами на орбите одной и той же планеты.

Перейдем к рассмотрению движения КА на планетоцентрических участках траектории. Будем при этом считать известными параметры соответствующих смежных гелиоцентрических участков. Из всех типов активных гравитационных маневров ограничимся лишь одноимпульсными перицентрными, когда одиночный импульс прикладывается в перифокусе гиперболической пролетной траектории. Такое допущение вполне оправданно, так как по величине импульса одноимпульсный перицентральный маневр не слишком отличается от одноимпульсного оптимального маневра [18]. Для иллюстрации этого на рисунках 2 и 3 изображены зависимости величины импульса от перицентрального расстояния в случае оптимального и перицентрального одноимпульсных маневров для углов поворота траектории¹ $\kappa = 120^\circ$ и $\kappa = 150^\circ$ соответственно. Здесь V_∞ – гиперболический избыток относительной скорости КА при входе в сферу действия планеты, ΔV – величина импульса, r_p – перицентральное расстояние, μ – гравитационный параметр планеты.

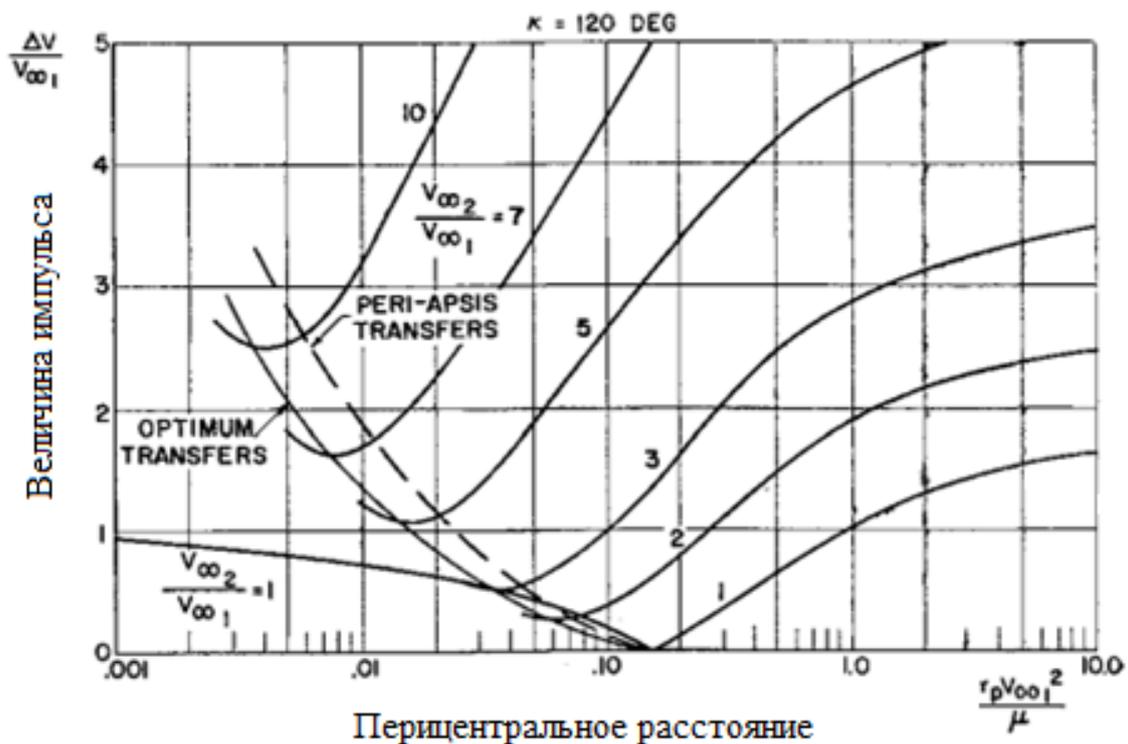


Рис. 2. Зависимости величины импульса от перицентрального расстояния в случае оптимального и перицентрального одноимпульсных маневров, угол поворота $\kappa = 120^\circ$ [18]

¹ Под углом поворота траектории при гравитационном маневре понимается угол между скоростями на бесконечности при входе в сферу действия планеты и на выходе из нее.

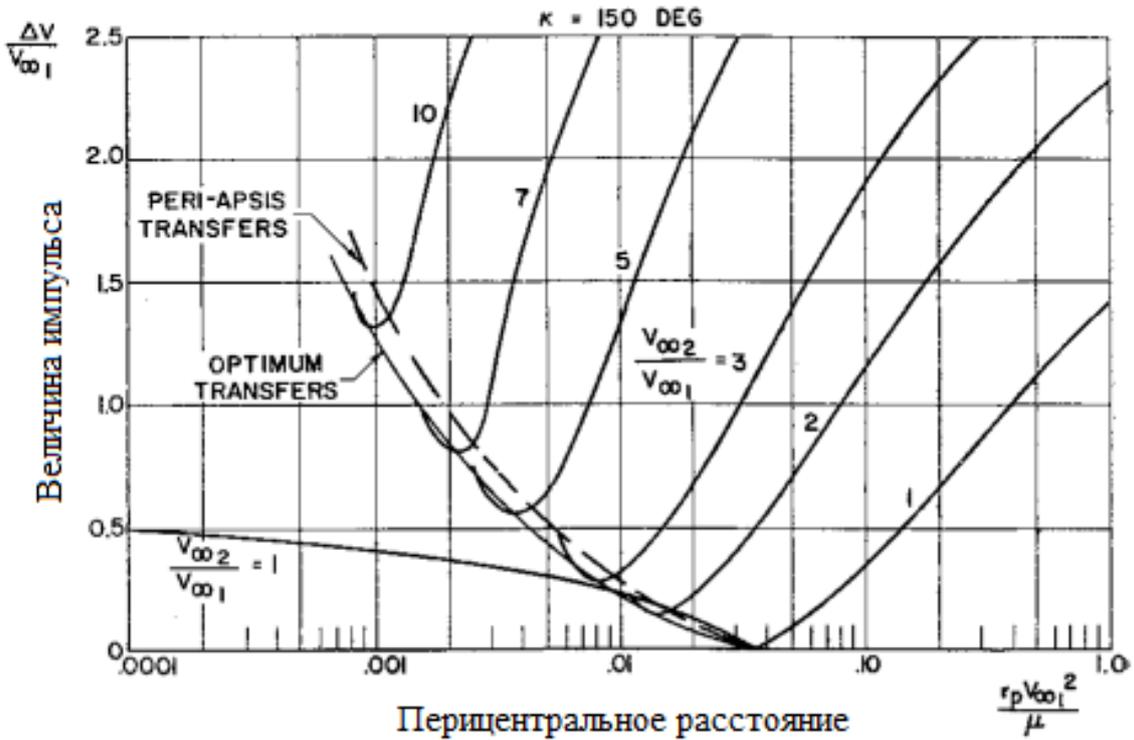


Рис. 3. Зависимости величины импульса от перицентрального расстояния в случае оптимального и перицентрального одноимпульсных маневров, угол поворота $\kappa = 150^\circ$ [18]

Кроме того, в случае одноимпульсного перицентрального маневра траектория КА в сфере действия планеты состоит из двух гиперболических участков, соединяющихся между собой в общей вершине – перицентре траектории. Следовательно, расстояние, на которое аппарат максимально приближается к планете, равно перицентральному, что удобно для учета требований безопасности.

Входными данными для расчета параметров маневра с импульсом в перицентре являются гелиоцентрические скорости прибытия \mathbf{v}_{in} в соответствующий узел и отбытия \mathbf{v}_{out} из него, полученные из рассмотрения двух смежных гелиоцентрических участков траектории. Будем трактовать эти векторы, как векторы гелиоцентрической скорости на входе в сферу действия планеты и на выходе из нее. За \mathbf{u} обозначим скорость планеты в интересующем нас узле. Элементарные формулы для определения положений и скоростей планет по заданным значениям орбитальных элементов приведены в Приложении А. Для относительных (планетоцентрических) скоростей имеем

$$\mathbf{v}_{in}^{rel} = \mathbf{v}_{in} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_{out}^{rel} = \mathbf{v}_{out} - \mathbf{u}.$$

Эти относительные скорости примем, как это обычно делается, в качестве гиперболических избытков скорости. Отметим, что при таком допущении возникает небольшая методическая ошибка, поскольку не учитывается притяжение планеты на участке полета КА от границы ее сферы действия

до бесконечно удаленной точки. Величина ошибки, равная разности скорости КА на границе сферы действия V_δ и скорости КА в бесконечно удаленной точке V_∞ , зависит от поля притяжения планеты и величины гиперболического избытка скорости [5]. Примеры расчета разности $V_\delta - V_\infty$ для некоторых планет Солнечной системы можно найти, например, в [19]. При полете КА от Земли к Марсу и Венере обычно $V_\infty = 3 - 4$ км/с, поэтому ошибка по скорости может достигать 130 м/с, а при полете от Земли к Юпитеру $V_\infty = 6 - 9$ км/с, и ошибка по скорости не превышает 75 м/с.

Большие полуоси гиперболических дуг траектории КА в сфере действия планеты до и после импульса обозначим соответственно $a_1 = \frac{\mu}{|\mathbf{v}_{in}^{rel}|^2}$ и $a_2 = \frac{\mu}{|\mathbf{v}_{out}^{rel}|^2}$. Также понадобится угол поворота траектории при гравитационном маневре

$$\kappa = \arccos \frac{\mathbf{v}_{in}^{rel} \cdot \mathbf{v}_{out}^{rel}}{|\mathbf{v}_{in}^{rel}| |\mathbf{v}_{out}^{rel}|} \in (0; \pi).$$

Далее следует решить относительно ψ_2 следующее уравнение [18]:

$$\sin(\kappa - \psi_2) = \frac{\sin \psi_2}{\frac{a_2}{a_1} + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \sin \psi_2}.$$

Здесь $\psi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ – угол, дополнительный к углу полураствора соответствующей гиперболы. Обозначим $A = \frac{a_2}{a_1}$ и сделаем замену переменной $\psi_2 = 2 \arctg z$. При этом $2 \arctg z \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow z \in (0; 1)$. Учтем также, что справедливы соотношения

$$\sin(2 \arctg z) = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos(2 \arctg z) = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Тогда после несложных преобразований получаем, что исходное уравнение равносильно следующему уравнению 4-й степени относительно z :

$$p_1 z^4 + p_2 z^3 + p_3 z^2 + p_4 z + p_5 = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения имеют вид

$$p_1 = A \sin \kappa,$$

$$p_2 = 2(1 - A) \sin \kappa + 2A \cos \kappa + 2,$$

$$p_3 = 4(1 - A)\cos \kappa,$$

$$p_4 = -2(1 - A)\sin \kappa + 2A\cos \kappa + 2,$$

$$p_5 = -A\sin \kappa.$$

Как известно, уравнения 4-го порядка разрешимы в радикалах, соответствующие формулы носят имя итальянского математика Л. Феррари. Среди получаемых в общем случае четырех корней уравнения нужно выбрать такие, что $\psi_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Для каждого выбранного ψ_2 вычисляется угол $\psi_1 = \kappa - \psi_2 \in (0; \pi)$, после чего определяется перицентральное расстояние r_p и величина ΔV импульса в перицентре [18]

$$r_p = a_2 \frac{\frac{\sin \psi_2 \left(\frac{\operatorname{tg} \psi_1}{\operatorname{tg} \psi_2}\right)^2 - 1}{\operatorname{tg}^2 \psi_1 \left(\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} - 1\right)}}{\left(\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} - 1\right)},$$

$$\Delta V = \left| \mathbf{v}_{in}^{rel} \right| \sqrt{1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_1}{r_p} \left(2 - \sqrt{\left(2 + \frac{r_p}{a_1}\right) \left(2 + \frac{r_p}{a_2}\right)} \right)}.$$

Далее выбирается такое значение ψ_2 , для которого величина ΔV минимальна.

3.2 Построение базы виртуальных траекторий

Теперь, задав формулы для расчета параметров произвольных гелиоцентрического и планетоцентрического участков полета, можно перейти к описанию процесса построения базы виртуальных траекторий.

Будем считать, что изначально имеется база данных **PLANETS**, в которой для всех узлов на орбите каждой из планет Солнечной системы хранятся сведения о координатах узла в гелиоцентрической эклиптической системе координат, скорости планеты в узле и временах прохождения узла планетой. Элементарные формулы, используемые при создании базы **PLANETS**, приведены в Приложениях А и Б.

Пусть в выбранном планетном маршруте число промежуточных планет, то есть, планет, у которых планируется выполнение гравитационных маневров, равно G . На первом гелиоцентрическом участке любой виртуальной траектории начальная точка является одним из узлов на орбите Земли. Формируется таблица, столбцы которой имеют вид

$$\left(n_1 \quad \mathbf{r}_1 \quad n_2 \quad \mathbf{r}_2 \quad \theta_1 \quad v_{out}^{rel} \quad \mathbf{v}_{in2} \quad T_1 \right)^T.$$

Здесь n_1 и n_2 – порядковые номера начального и конечного узлов первого участка в базе данных **PLANETS**, \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 – векторы, определяющие положение этих узлов в пространстве, θ_1 – угол наклона траектории, v_{out}^{rel} – величина планетоцентрической скорости КА при выходе из сферы действия Земли, \mathbf{v}_{in2} – гелиоцентрическая скорость КА при входе в сферу действия второй (первой промежуточной) планеты в выбранном планетном маршруте, T_1 – время перелета на первом гелиоцентрическом участке. Для фиксированных начального и конечного узлов \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 имеем пучок траекторий, различающихся по углу наклона траектории θ_1 и, как следствие, значениям v_{out}^{rel} , \mathbf{v}_{in2} и T_1 .

Особенностью первого гелиоцентрического участка является требование $v_{out}^{rel} < v_{max}$, где v_{max} – максимальное значение планетоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия Земли, определяющееся характеристиками маршевых двигателей ракеты-носителя и разгонного блока, а также массой M_p полезной нагрузки и массой M_{ef} дополнительной двигательной установки вместе с запасом топлива для нее. Так, при $M_p + M_{ef} \approx 1000$ кг для ракеты-носителя «Союз-ФГ» и разгонного блока «Фрегат» значение v_{max} не превышает 4 км/с [20].

Перебираются все допустимые значения \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и θ_1 , в результате чего имеем массив **VTB** виртуальных траекторий от Земли до второй планеты в выбранном планетном маршруте. Размерность этого массива равна $14 \times N$, где N – число таких траекторий.

Далее начинаются вычисления, связанные со вторым гелиоцентрическим участком и активным гравитационным маневром у второй (первой промежуточной) планеты маршрута. Каждый 14-компонентный столбец из массива **VTB** превращается в массив 27-компонентных столбцов путем добавления различных 13-компонентных «хвостов» следующего вида:

$$(n_3 \quad \mathbf{r}_3 \quad \theta_2 \quad \mathbf{v}_{out2} \quad \mathbf{v}_{in3} \quad T_2 \quad \Delta V_1)^T.$$

Действительно, после выбора порядкового номера n_3 узла на орбите третьей планеты маршрута (\mathbf{r}_3 – вектор, определяющий положение этого узла в пространстве) и угла θ_2 наклона траектории на втором гелиоцентрическом участке, можно рассчитать необходимую гелиоцентрическую скорость \mathbf{v}_{out2} на выходе из сферы действия второй планеты маршрута, а также гелиоцентрическую скорость \mathbf{v}_{in3} при входе в сферу действия третьей планеты маршрута и время T_2 перелета на втором гелиоцентрическом участке. Последняя компонента «хвоста» ΔV_1 – величина импульса в перицентре при выполнении гравитационного маневра у второй планеты маршрута – определяется на основе скоростей

\mathbf{v}_{in2} и \mathbf{v}_{out2} и скорости \mathbf{u}_2 планеты, извлекаемой из базы данных **PLANETS** по номеру узла n_2 .

Таким образом, размерность массива **VTB** становится равна $27 \times N$, где N – уже новое, увеличившееся, число виртуальных траекторий. Далее указанная процедура повторяется.

В итоге после расчета параметров всех $G+1$ гелиоцентрических участков и G гравитационных маневров, получаем базу **VTB** виртуальных траекторий. Для каждой виртуальной траектории можно определить общее время полета

$$T = \sum_{i=1}^{G+1} T_i$$

и суммарные затраты характеристической скорости

$$\Delta V = \sum_{i=1}^G \Delta V_i.$$

Отметим, что для сложных планетных маршрутов целесообразно задать изначально некоторые разумные ограничения на максимальные значения T и ΔV . В случае их превышения по ходу процедуры построения базы виртуальных траекторий необходимо такие траектории сразу отсеивать. Это позволяет сгладить экспоненциальный рост числа виртуальных траекторий с увеличением числа промежуточных планет в маршруте.

Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени, позволяет табулировать базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута. Таким образом, при проектировании конкретной миссии расчет начинается со второго этапа метода виртуальных траекторий – наложения реального движения планет.

3.3 Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет

Процесс наложения реального движения планет в свою очередь также можно разбить на два этапа. Вначале из базы **VTB** виртуальных траекторий отбираются траектории, близкие в некотором смысле к реально реализуемым. Пусть некоторая виртуальная траектория проходит последовательно через $G+2$ узлов на орбитах планет, входящих в выбранный планетный маршрут. Времена перелета на каждом гелиоцентрическом участке обозначим, как и прежде, через T_i , $i=1, \dots, G+1$. Если существуют такие времена t_i , $i=1, \dots, G+2$ прохождения планетами соответствующих узлов, что

$$\left| t_{i+1} - t_i - T_i \right| < \frac{\Delta t_i}{2}, \quad i=1, \dots, G+1,$$

$$t_1 \in W,$$

где Δt_i – среднее время прохождения i -й планетой расстояния между узлами на ее орбите, W – допустимый интервал дат старта, то данную виртуальную траекторию будем называть приближенной. Такой критерий близости виртуальной траектории к реально реализуемой траектории можно интерпретировать следующим образом: если отправить КА по приближенной виртуальной траектории, то при прохождении им каждого узла (т.е., при совершении маневра у виртуальной планеты) соответствующая планета будет находиться ближе всего именно к этому узлу из всех узлов на ее орбите.

Взяв любую виртуальную траекторию из базы **VTB**, можно проверить выполнение указанного выше критерия последовательно для каждой пары смежных узлов, лежащих на этой траектории. При этом используются векторы времен прохождения узлов планетами, содержащиеся в базе данных **PLANETS**. Если хотя бы для одной пары смежных узлов критерий не может быть выполнен, то такая виртуальная траектория отсеивается. В результате имеем массив приближенных виртуальных траекторий.

Второй этап наложения реального движения планет состоит в уточнении полученных приближенных виртуальных траекторий. Рассмотрим пучок приближенных траекторий, проходящих через один и тот же набор узлов и отличающиеся только значениями одного или нескольких углов наклона гелиоцентрических участков траектории. Применим тот же самый алгоритм, что и для создания первоначальной базы **VTB** виртуальных траекторий, только теперь происходит дискретизация лишь участков орбит планет вблизи узлов из данного набора. Также уменьшим шаг по углу наклона траектории на каждом гелиоцентрическом участке полета. Пучок приближенных траекторий превратится при этом в некоторый новый массив виртуальных траекторий. Далее согласно изложенной выше процедуре производится отсев траекторий из этого массива. Поскольку расстояние между узлами теперь уменьшилось, значения Δt_i также должны быть уменьшены соответствующим образом. Для каждого пучка траекторий из просеянного массива проводим уже более мелкую дискретизацию участков орбит вблизи узлов, через которые проходит этот пучок, и так далее.

Описанный таким образом процесс уточнения приближенных виртуальных траекторий продолжается итерационно, пока не будет достигнута необходимая точность «попадания» в реальные планеты в каждом узле траектории.

4. Постановка модельной задачи о полете к Урану

Для демонстрации работы метода виртуальных траекторий рассмотрим задачу проектирования полета к Урану. Отметим, что, согласно планам NASA, изложенным в Planetary Science Decadal Survey 2013–2022, изучение Урана в ближайшее десятилетие ставится по важности на одно из первых мест [21]. Относительно типа траектории и

параметров двигательной установки будем придерживаться предположений, изложенных во Введении. Максимальное значение гиперболического избытка скорости при выходе из сферы действия Земли после отделения от ракеты-носителя и работы разгонного блока примем равным 4 км/с. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения активных гравитационных маневров. При этом потребуем, чтобы время полета не превосходило 20 лет, а дата старта лежала в промежутке от 2020 до 2030 года. Ограничений на скорость подлета КА к Урану не налагается.

Что касается набора планетных маршрутов-кандидатов, то, забегаая вперед, скажем, что для указанного окна старта взаимное расположение Урана и Юпитера не благоприятствует выполнению гравитационного маневра у последнего. С другой стороны, добиться минимизации затрат характеристической скорости без выполнения маневра у одной из планет-гигантов не удастся. Поэтому в качестве маршрутов-кандидатов рассмотрим следующие планетные маршруты:

1. Земля – Венера – Уран (EVU);
2. Земля – Венера – Сатурн – Уран (EVSU);
3. Земля – Венера – Земля – Сатурн – Уран (EVESU);
4. Земля – Венера – Земля – Земля – Сатурн – Уран (EVEESU).

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения:

Венера – 250 км (верхняя граница атмосферы);

Земля – 600 км;

Сатурн – 57000 км (средний радиус планеты).

5. Результаты расчетов

Поскольку первый этап предлагаемого алгоритма проектирования траекторий – построение базы виртуальных траекторий – табулируется, логично сделать так, чтобы время, затрачиваемое на вычисления на этом этапе, составляло большую часть от общего времени расчета. Тогда, имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести приближенное баллистическое проектирование траектории или, другими словами, анализ принципиальной осуществимости этой миссии (mission feasibility study).

Как показали численные эксперименты, достаточно мелкая дискретизация орбит планет и выбор подходящего шага по углу наклона траектории на гелиоцентрических участках гарантируют, что доля времени

на первоначальное построение базы виртуальных траекторий будет не меньше 80-90%. На наложение реального движения планет – отсев и уточнение базы виртуальных траекторий – уходит 10-20% от общего времени расчета (в абсолютных величинах – см. Табл. 1). Именно это время нужно брать в качестве оценки быстродействия алгоритма.

Табл. 1. Быстродействие второго этапа алгоритма (уточнение и отсев) и сравнение с классическим методом полного перебора

Число гравитационных маневров	Время на отсев и уточнение базы виртуальных траекторий, минут ^{1,2}	Время работы классического метода полного перебора, минут ¹
1	1-3	3-5
2	5-10	20-25
3	15-30	120-150
4	40-80	>400

Теперь перейдем непосредственно к результатам расчета, полученным для четырех выбранных планетных маршрутов. При построении базы виртуальных траекторий дискретизация орбит планет производилась так, чтобы линейное расстояние между соседними узлами было примерно одинаковым для всех планет. Эта величина варьировалась для разных планетных маршрутов от 18 млн. км. (0.12 а.е.) до 60 млн. км (0.4 а.е.). Шаг по углу наклона траектории на каждом гелиоцентрическом участке был равен 4.5 градусам.

5.1 Маршрут EVU

Для маршрута Земля–Венера–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 6.809$ км/с получаются для траектории с датой старта 14 марта 2028 года и временем перелета $T = 13.01$ лет (рис. 4). При этом маневр у Венеры происходит 25 июня 2028 года. КА достигает Урана 17 марта 2041 года.

5.2 Маршрут EVSU

Для маршрута Земля–Венера–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 7.067$ км/с получаются для траектории

¹ Абсолютные значения потраченного на расчеты времени получены для процессора Intel® Core™ i3-330M с тактовой частотой 2.13 ГГц. Все вычисления проводились последовательно на одном ядре. Объем оперативной памяти 2 Гб (в процессе расчетов загрузка, как правило, не превышала 500 Мб).

² Время, затрачиваемое на отсев и уточнение базы виртуальных траекторий, может быть различным для одного и того же планетного маршрута в зависимости от требуемой точности финальной траектории и значений параметров дискретизации, используемых при первоначальном построении базы виртуальных траекторий.

с датой старта 1 января 2025 года и временем перелета $T = 15.75$ лет (рис. 5). При этом маневр у Венеры происходит 13 апреля 2025 года, у Сатурна – 26 декабря 2030 года. КА достигает Урана 2 октября 2040 года.

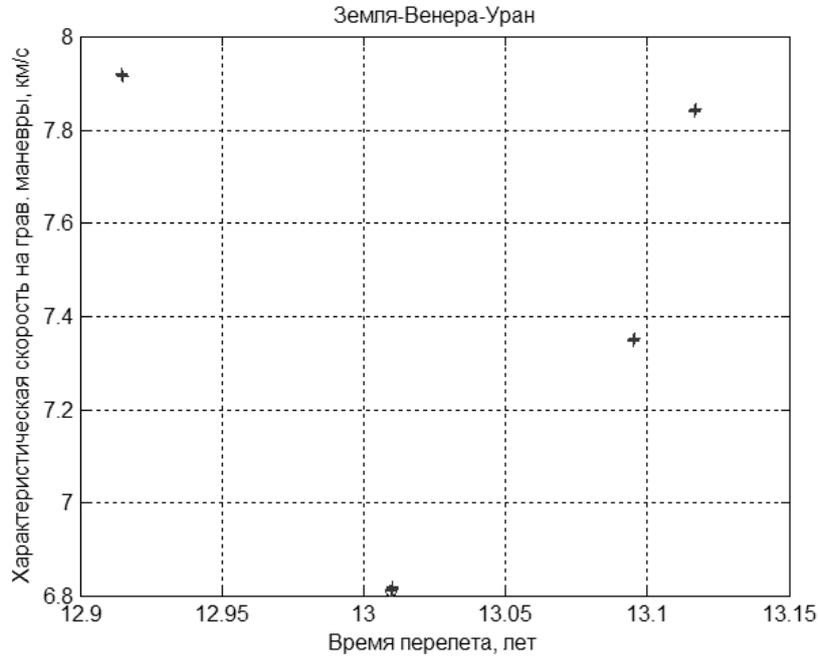


Рис. 4. Характеристическая скорость и время перелета траекторий для маршрута EVSU

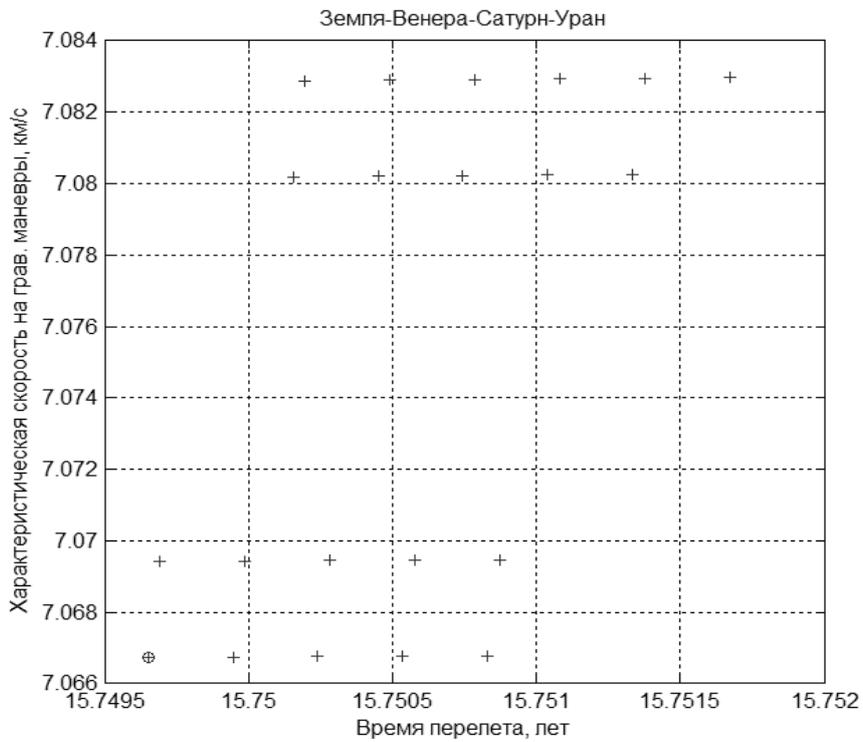


Рис. 5. Характеристическая скорость и время перелета траекторий для маршрута EVSU

5.3 Маршрут EVESU

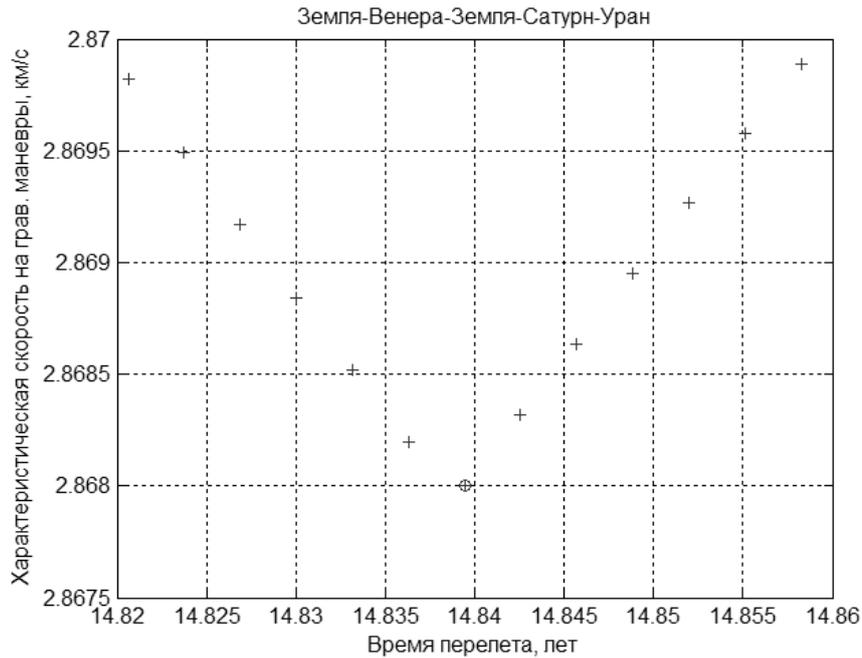


Рис. 6. Характеристическая скорость и время перелета траекторий для маршрута EVESU

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 2.868$ км/с получаются для траектории с датой старта 18 октября 2021 года и временем перелета $T = 14.84$ лет (рис. 6). При этом маневр у Венеры происходит 19 апреля 2022 года, у Земли – 26 марта 2025 года, у Сатурна – 17 января 2030 года. КА достигает Урана 28 июля 2036 года. Траектория полета изображена на рис. 7 и 8.

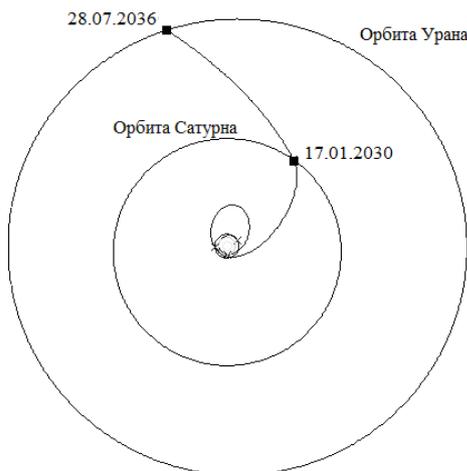


Рис. 7. Оптимальная траектория маршрута EVESU

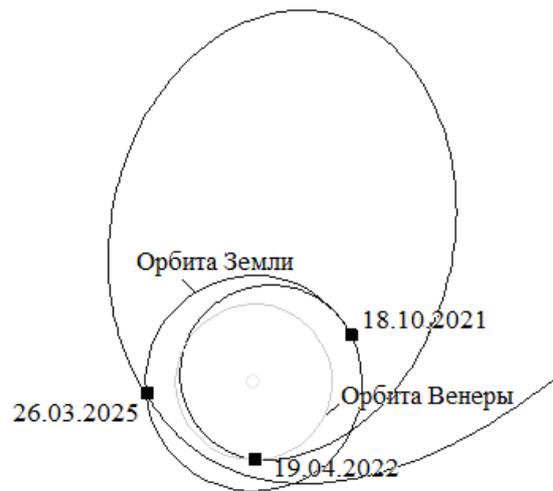


Рис. 8. Участок EVE оптимальной траектории маршрута EVESU

5.4 Маршрут EVEESU

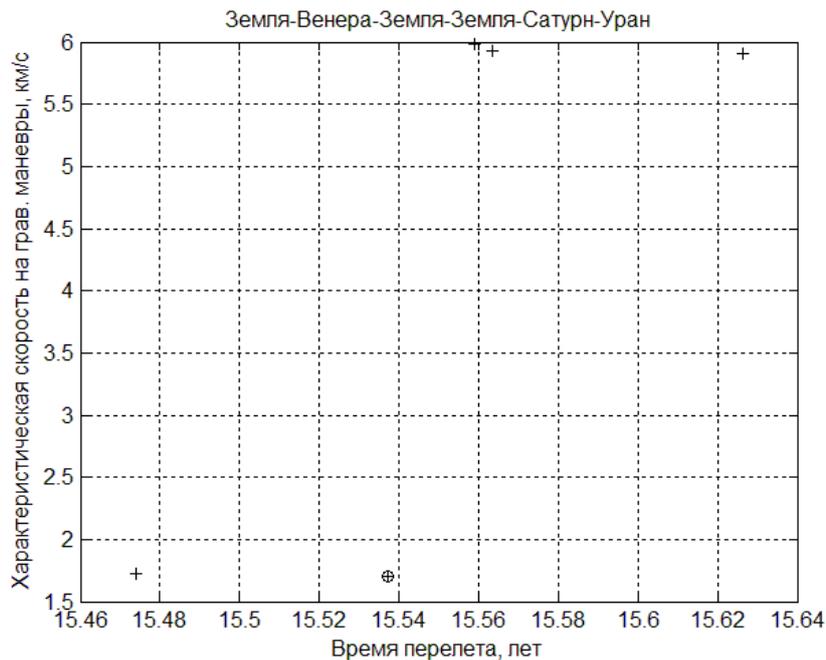


Рис. 9. Характеристическая скорость и время перелета траекторий для маршрута EVEESU

Этот планетный маршрут подразумевает резонансную траекторию: на участке Земля–Земля КА должен совершить один оборот вокруг Солнца.

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 1.703$ км/с получаются для траектории с датой старта 27 ноября 2021 года и временем перелета $T = 15.54$ лет (рис. 9). При этом маневр у Венеры происходит 12 мая 2022 года, у Земли – 23 марта 2023 года и 14 июня 2026 года, у Сатурна – 25 августа 2030 года. КА достигает Урана 19 мая 2037 года. Траектория полета изображена на рис. 10 и 11.

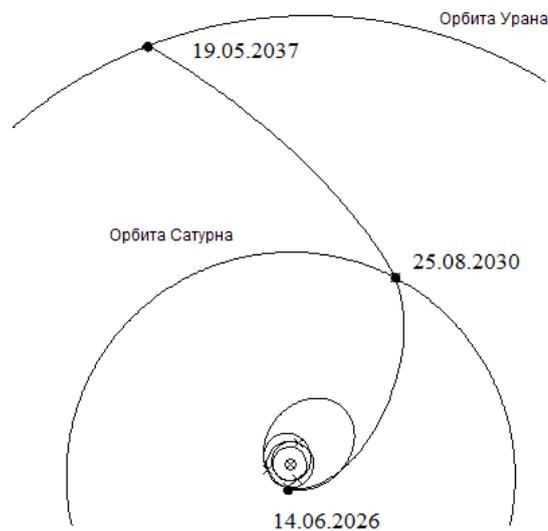


Рис. 10. Оптимальная траектория на маршруте EVEESU

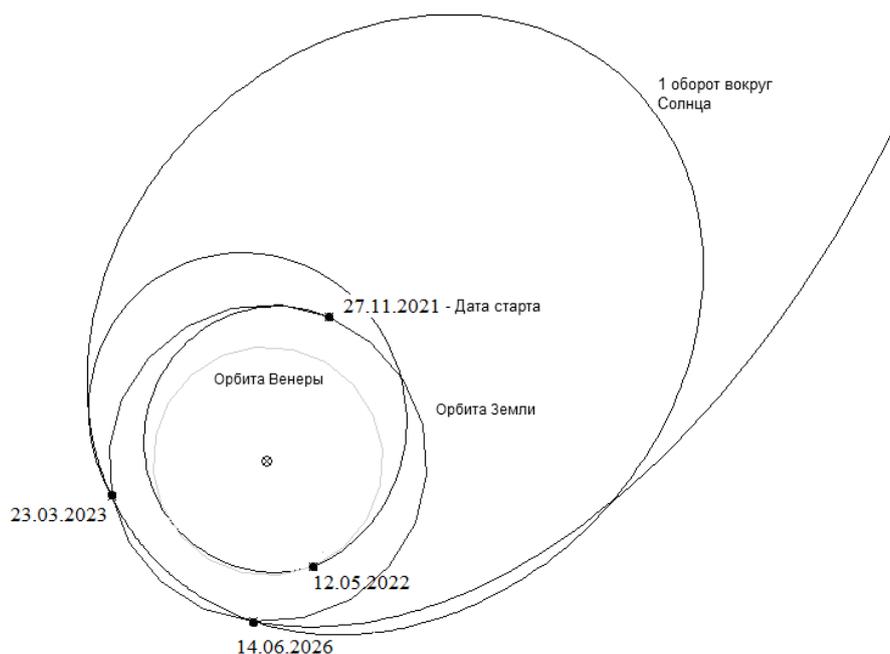


Рис. 11. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEESU

Похожая траектория предложена в проекте Uranus Pathfinder [22]. Действительно, с точки зрения затрат характеристической скорости она является наилучшей среди всех траекторий для всех рассмотренных планетных маршрутов.

Заключение

Разработан метод виртуальных траекторий, который может быть с успехом использован при проектировании сложных межпланетных траекторий, включающих несколько гравитационных маневров. Являясь, по сути, разновидностью классического метода полного перебора, метод виртуальных траекторий отличается от него пространственной, а не временной привязкой к движению планет. Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени (для целей проектирования траекторий – десятки лет), позволяет табулировать для каждого планетного маршрута наиболее ресурсоемкую часть расчетов – построение базы виртуальных траекторий – и тем самым существенно сократить время работы алгоритма оптимизации. Имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести анализ принципиальной осуществимости этой миссии.

Применение метода виртуальных траекторий продемонстрировано на примере задачи полета к Урану. Как результат, была обнаружена резонансная траектория, позволяющая существенно сократить затраты топлива на гравитационные маневры. Эта траектория близка к траектории, найденной другими исследователями с помощью классических методов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Минобрнауки. Авторы выражают искреннюю благодарность Станиславу Барабашу (IRF) за помощь в постановке задачи и полезные критические обсуждения работы.

Список литературы

1. Ю.В. Кондратюк. Тем, кто будет читать, чтобы строить. 1918-1919.
2. Ф.А. Цандер. Перелеты на другие планеты // *Техника и жизнь*, Вып. 13, 1924.
3. M. Minovitch. A method for determining interplanetary free-fall reconnaissance trajectories // *JPL Technical Memo TM-312-130*, 1961, pp. 38-44.
4. P. Di Lizia, G. Radice, D. Izzo, M. Vasile. On the solution of interplanetary trajectory design problems by global optimisation methods // *Proceedings of Global Optimisation Workshop*, Almeria, Spain, 2005, pp. 159-164.
5. Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полета. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. – 448 с.
6. В.И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении, 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.
7. G. Hughes, C. R. McInnes. Solar Sail Hybrid Trajectory Optimisation // *Advances in the Astronautical Sciences*, 2001, V. 109, pp. 2369-2380.
8. P. Rogata, E. Di Sotto, M. Graziano, F. Graziani. Guess value for interplanetary transfer design through genetic algorithms // *Proceedings of 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, AAS 03-140, Ponce, Puerto Rico, 2003.

9. B. Dachwald. Optimization of solar sail interplanetary trajectories using evolutionary neurocontrol // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2004, V. 27, No. 1, pp. 66-72.
10. D.J. Wirthman, S.Y. Park, S.R. Vadali. Trajectory optimization using parallel shooting method on parallel computer // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, V. 18, No. 2, pp. 377-379.
11. M. Vasile. A global approach to optimal space trajectory design // *Advances in the Astronautical Sciences*, 2003, V. 114, pp. 621-640.
12. D.Izzo, V.M. Becerra *et al.* Search pruning and global optimization of multiple gravity assist spacecraft trajectories // *Journal of Global Optimization*, 2007, V. 38, No. 2, pp. 283-296.
13. Г.Г. Федотов. Оптимизация траекторий полета КА с ЭРД при использовании гравитационного маневра // *Космические исследования*, 2004, Т. 42, №4, с. 404-413.
14. И.С. Григорьев, К.Г. Григорьев. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // *Космические исследования*, 2007, Т. 45, №4, с. 358-366.
15. В.Г. Петухов. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // *Космические исследования*, 2008, Т. 46, №3, с. 224-237.
16. <http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm>
Дата получения информации 24 марта 2011 года.

17. Р.Ф. Аппазов, О.Г. Сытин. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. – 440 с.
18. F.W. Gobetz. Optimum Transfers between Hyperbolic Asymptotes // *AIAA Journal*, 2006, V. 1, No. 9, pp. 2034-2041.
19. В.Н. Кубасов, А.А. Дашков. Межпланетные полеты. – М.: Машиностроение, 1979.
20. Soyuz CSG User's Manual, Issue 1, Arianespace, 2006.
Доступно по ссылке http://www.arianespace.com/launch-services-soyuz/Soyuz_Users_Manual_CSG_June06.pdf, дата получения информации 21 сентября 2011 года.
21. <http://solarsystem.nasa.gov/2013decadal/>
Дата получения информации 14 апреля 2011 года.
22. C.S. Arridge, C.B. Agnor, N. André *et al.* Uranus Pathfinder: exploring the origins and evolution of Ice Giant planets // *Experimental Astronomy*, Online First, DOI: 10.1007/s10686-011-9251-4. Доступно по ссылке <http://www.springerlink.com/content/67471t823t067v63/>, дата получения информации 19 октября 2011 года.

Приложение А. Определение положений и скоростей планет в пространстве

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, ω – аргумент перицентра, Ω – аргумент восходящего узла, i – наклонение. Возьмем гелиоцентрическую эклиптическую систему координат, где орт \mathbf{e}_x направлен в точку весеннего равноденствия, орт \mathbf{e}_z направлен по нормали к плоскости эклиптики в сторону ее северного полюса и орт \mathbf{e}_y дополняет систему до правой тройки. Тогда линия узлов орбиты планеты проходит вдоль вектора

$$\mathbf{n}_1 = \cos\Omega \cdot \mathbf{e}_x + \sin\Omega \cdot \mathbf{e}_y.$$

Движение планеты происходит в плоскости векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , где

$$\mathbf{n}_2 = \sin i \cdot \mathbf{e}_z + \cos i \cdot (\cos\Omega \cdot \mathbf{e}_y - \sin\Omega \cdot \mathbf{e}_x).$$

Радиус-вектор планеты может быть выражен через истинную аномалию \mathcal{G} следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\mathcal{G}} \cos(\omega+\mathcal{G})\mathbf{n}_1 + \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\mathcal{G}} \sin(\omega+\mathcal{G})\mathbf{n}_2.$$

Пусть $\mu_\odot = 1.3276 \cdot 10^{11} \text{ км}^3 / \text{с}^2$ – гравитационный параметр Солнца.

Тогда радиальная составляющая скорости планеты

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a(1-e^2)}} e \sin \mathcal{G},$$

а трансверсальная –

$$v_n = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos \mathcal{G}).$$

Таким образом, для гелиоцентрической скорости планеты имеем:

$$\mathbf{v} = v_r \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} + v_n \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Приложение Б. Определение соответствия между положением планеты и временем

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, ω – аргумент перицентра, Ω – аргумент восходящего узла. Если λ_0 – средняя долгота на некоторую начальную эпоху, то средняя аномалия на начальную эпоху равна

$$M_0 = \lambda_0 - \omega - \Omega.$$

Методом Ньютона-Рафсона

$$\begin{cases} E_0^{(0)} = 0 \\ E_0^{(n+1)} = E_0^{(n)} - \frac{E_0^{(n)} - e \sin E_0^{(n)} - M_0}{1 - e \cos E_0^{(n)}}, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

решается уравнение Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

относительно E_0 – эксцентрической аномалии, которая соответствует начальному положению планеты. Вычисления продолжаются до тех пор, когда $|E_0^{(n+1)} - E_0^{(n)}| < TOL$. Здесь TOL – требуемая точность определения решения E_0 .

Пусть $\mathcal{G} \in [0; 2\pi)$ – истинная аномалия планеты в некоторый момент времени. Тогда соответствующее значение эксцентрической аномалии вычисляется по следующим формулам:

$$E = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \right), \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \geq 0,$$

$$E = 2\pi + 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \right), \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} < 0.$$

Времена t_k прохождения планетой положения, которому соответствует истинная аномалия \mathcal{G} , определяются из соотношения

$$t_k = \frac{a^{3/2}}{\mu_{\odot}^{1/2}} (2\pi k + E - E_0 - e(\sin E - \sin E_0)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оглавление

1. Введение	3
2. Постановка задачи.....	4
3. Проектирование межпланетных миссий с помощью метода виртуальных траекторий.....	4
3.1 Понятие виртуальной траектории. Расчет параметров гелиоцентрических и планетоцентрических участков траектории	5
3.2 Построение базы виртуальных траекторий	11
3.3 Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет	13
4. Постановка модельной задачи о полете к Урану	14
5. Результаты расчетов.....	15
5.1 Маршрут EVU	16
5.2 Маршрут EVSU	16
5.3 Маршрут EVESU	18
5.4 Маршрут EVEESU	19
Заключение.....	20
Благодарности	21
Список литературы	21
Приложение А. Определение положений и скоростей планет в пространстве.....	24
Приложение Б. Определение соответствия между положением планеты и временем	25