ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2012 г.

Рябенький В.С.

Потенциалы для абстрактных разностных схем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рябенький В.С. Потенциалы для абстрактных разностных схем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 10. 30 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-10

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша РАН

В.С. Рябенький

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Москва, 2012 год

УДК: 512.64, 517.5, 519.6, 577.9

Потенциалы для абстрактных разностных схем

В.С. Рябенький

Email: ryab@keldysh.ru

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН.

Разностные потенциалы подобные классическим интегралам типа Коши предложены в 1969 году и существенно обобщены в дальнейшем. В предлагаемой статье излагается конструкция разностных потенциалов для линейных разностных схем на произвольной сетке абстрактных точек, причем схема не подчинена каким-либо условиям согласования, кроме естественного требования существования и единственности решения при произвольной правой части. Установлено, что построенный разностный потенциал играет для решений разностной схемы роль подобную той, которую классический интеграл типа Коши играет для решений системы Коши-Римана, то есть для аналитических функций.

Метод, использующий эти разностные потенциалы для приложений, доставляет новые возможности, поскольку соединяет универсальность и алгоритмичность классических разностных схем с некоторыми достоинствами классического интеграла типа Коши.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00114.

Стр. 30, рис. 6, библ. назв. 59

Potentials for abstract difference schemes

V.S. Ryaben'kii

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS.

The difference potentials analogous to classic Cauchy integrals were supposed in 1969 and were significantly generalized later. In the article the construction of difference potentials for linear difference scheme on the arbitrary grid of abstract points is expounded. The scheme is not restricted by any conditions besides the natural request of unique existence of the solution at arbitrary right hand side. The part of generated difference potential for solutions of difference scheme is similar to part of classic Cauchy integral for solutions of Cauchy-Riemann system, i.e. for analytical functions.

The method using these difference potential for applications gives new possibilities because joins universality and algorithmicity of classic difference schemes with some dignities of classic Cauchy integral.

This work was supported by RFBR, grant № 11-01-00114.

1 Определение абстрактных линейных разностных схем

Абстрактной разностной схемой будем называть произвольную систему линейных разностных уравнений, записанную в виде

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M, \tag{1.1}$$

где M – произвольное конечное множество абстрактных индексов m, $m \in M$; f_m – вектор с числовыми компонентами, количество которых может зависеть от m; N_m – конечное множество абстрактных индексов n, $n \in N_m$; u_n – вектор с числовыми компонентами, количество которых может зависеть от n; $a_{mn},\ m \in M,\ n \in N_m$ - прямоугольные матрицы, размерности которых согласованы с размерностью вектора f_m и векторов u_n, $n \in N_m$ так, чтобы равенство (1.1) имело смысл. Область определения решения системы (1.1) есть, очевидно, конечное множество $N = \cup N_m$, $m \in M$, абстрактных индексов $n,\ n \in N$. Обозначим через F_M и V_N линейные пространства всех вектор функций $f_M = \{f_m\}$, $m \in M$, и всех вектор–функций $u_N = \{u_n\}$, $n \in N$, соответственно. Запись системы линейных разностных уравнений в форме (1.1) будем называть абстрактной разностной схемой. Множества M и N абстрактных индексов будем называть сетками, на которых задана разностная схема, а множество N_m шаблоном разностной схемы в точке $m,\ m \in M$. К рассматриваемым разностным схемам (1.1) будем предъявлять только следующее требование: *разностная схема (1.1) имеет одно и только одно решение u_N, $u_N \in V_N$, при любой правой части f_M, $f_M \in F_M$.*

Система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{s} b_{ij} x_j = \phi_i, \qquad i = 1, 2, \dots, s, \tag{1.2}$$

записанная в канонической форме (1.2), с матрицей $B = \{b_{ij}\}$, $\det\ B \neq 0$, может быть записана в форме разностной схемы (1.1). Достаточно принять за M множество целых чисел $1, 2, \dots, s$; элементами m будут каждое из этих чисел. За N_m при каждом $m = 1, 2, \dots, s$ принять то же самое множество M, одно и тоже при каждом $m \in M$. Множество $N = \cup N_m,\ m \in M$, в таком случае тоже совпадает с множеством M. Функциями f_M и u_N в схеме (1.1) в случае (1.2) будут соответственно числовые функции $\phi_m,\ m = 1, 2, \dots, s$ и $u_n,\ n = 1, 2, \dots, s$. Коэффициентами a_{mn} при записи системы (1.2) в форме разностной схемы (1.1) будут числа $a_{mn} = b_{mn}$, $m, n = 1, 2, \dots, s$.

Излагаемая ниже формальная теория разностных потенциалов типа Коши ничего не добавляет к теории систем линейных разностных уравнений общего вида (1.2). Однако формальная теория разностных потенциалов подобных интегралу типа Коши становится содержательной в случаях, если матрица системы (1.2) сильно разрежена, и эта конкретная специфика разреженности соответствующим (должным) образом учтена в записи системы (1.2) в форме абстрактной разностной схемы (1.1). В частности, использование записи системы линейных уравнений в форме абстрактной разностной схемы (1.1) естественно, а формальная теория разностных потенциалов дает новые возможности в случае классических разностных схем, аппроксимирующих линейные стационарные краевые задачи или нестационарные начально-краевые задачи для уравнений с частными производными. Приведем примеры записи классических разностных схем в канонической форме (1.1).

Пример 1. Построим разностную аппроксимацию задачи Дирихле для уравнения Пуассона в квадратной области $D:\ \{|x_1|<1,\quad |x_2|<1\}$ с границей ∂D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=\phi\left(x_1,x_2\right),\quad \left(x_1,x_2\right)\in D \tag{1.3}$$

$$u|_{\partial D}=\psi\left(x_1,x_2\right),\quad \left(x_1,x_2\right)\in \partial D. \tag{1.4}$$

Зададим шаг $h>0$, h^{-1} целое число, и построим сетку Mточек $m=(m_1h,m_2h)$, $|m_1|\le h^{-1}$, $|m_2|\le h^{-1}$, исключая четыре угловые точки квадрата D. Каждой точке сетки $m\in M$, лежащей внутри квадрата D, сопоставим шаблон, состоящий из пяти точек n:

$$N_m=\left\{\left(m_1,m_2\right),\left(m_1\pm 1,m_2\right),\left(m_1,m_2\pm 1\right)\right\},\quad m\in D.$$

Мы пишем $m=(m_1,m_2)$ вместо $m=(m_1h,\ m_2h)$ для краткости. Зададим коэффициенты a_{mn}, $m\in M$, $n\in N_m$ формулами

$$a_{mn}=\begin{cases} -4h^2, & \text{если } n=(m_1,m_2)\\ h^{-2}, & \text{если } n=(m_1\pm 1,\ m_2)\\ h^{-2}, & \text{если } n=(m_1,\ m_2\pm 1)\end{cases}.$$

Каждой точке $m\in M$, лежащей на границе ∂D квадрата, кроме четырех угловых, поставим в соответствии шаблон N_m, состоящий из одной точки, совпадающей с точкой M

$$N_m=n=m,\quad m\in\partial D.$$

Зададим коэффициент a_{mn} в этом случае то- есть в случае $m \in \partial D$, $n \in N_m$, положив

$$a_{mn} = a_{mm} = 1.$$

Далее, положим

$$f_m = \begin{cases} \phi_m, & \text{если } m \in D \\ \psi_m, & \text{если } m \in \partial D, \end{cases}$$

где $\phi_m = \phi\,(m_1 h,\ m_2 h)\,, \quad \psi_m = \psi\,(m_1 h,\ m_2 h)$.

Множество $N = \cup N_m,\ m \in M$, совпадает в этом примере с множеством M. Простейшая пятиточечная разностная аппроксимация задачи (1.3), (1.4), построенная выше, запишется при выбранных обозначениях в виде (1.1).

Пример 2. Рассмотрим вместо задачи (1.3), (1.4) для уравнения Пуассона задачу с другим краевым условием на стороне $x_1 = -1$ квадрата D и с теми же условиями Дирихле на остальных трех сторонах ∂D квадрата D:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=-1} = \psi\,(x_1, x_2)\,|_{x_1=-1}, \quad \text{если } x_1 = -1$$

$$u|_{x=(1,x_2)} = \psi\,(1, x_2)\,, \quad u|_{x=(x_1,\pm 1)} = \psi\,(x_1, \pm 1) \tag{1.5}$$

При построении аппроксимирующей задачу (1.3), (1.5) разностной схемы множество M возьмем то же, что и в примере 1. Каждой точке $m,\ m \in M$, кроме точек, лежащих на стороне $x_1 = -1$ квадрата D, сопоставим тот же шаблон N_m и те же коэффициенты a_{mn}, что и в примере 1. Точкам $m \in M$, лежащим на стороне $x_1 = -1$ квадрата D, сопоставим двухточечный шаблон N_m, $N_m = \{(-1, m_2)\,,\ (-1+h, m_2)\}$, и коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{mn} &= h^{-1}, \quad \text{если } n = (-1+h, m_2) \\ a_{mn} &= -h^{-1}, \quad \text{если } n = (-1, m_2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Выбор N_m и коэффициентов a_{mn} по формуле (1.6) означает, что мы аппроксимировали первое из условий (1.5), заменив производную $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ простейшим разностным отношением первого порядка. Сетка $N = \cup N_m$, $m \in M$, как и в примере 1, совпадает с сеткой M. Значения f_m, $m \in M$, определим той же формулой, что и в примере 1.

При сделанных обозначениях построенная простейшая пятиточечная разностная схема, аппроксимирующая задачу (1.3), (1.5), запишется в виде (1.1).

В примерах 1 и 2 сетки M и N совпадают, $M = N$. Приведем пример записи традиционной разностной схемы на разнесенных сетках в виде (1.1), в котором $M \neq N$.

Пример 3. Выберем $h > 0$, h^{-1} – целое число, и рассмотрим разностный аналог задачи

$$\frac{du}{dx} + au = \phi(x), \quad 0 < x < 1$$

$$u\big|_{x=0} = \psi,$$

а именно разностную задачу

$$\begin{array}{l} \frac{u_{m+1}-u_m}{h} + a\frac{u_{m+1}+u_m}{2} = \phi_{m+\frac{1}{2}}, \;\; 0 < \left(m+\frac{1}{2}\right)h < 1 \\ u_0 = \psi \end{array} \tag{1.7}$$

Определим сетку точек M, отнеся к этой сетке все “полуцелые” точки m с координатами $x_{m+\frac{1}{2}} = \left(m+\frac{1}{2}\right)h$, $0 < x_{m+\frac{1}{2}} < 1$, а также точку $m = 0$ с координатой $x_0 = 0h = 0$.

Сопоставим каждой полуцелой точке m, $m \in M$ с координатой $x_m = (m+\frac{1}{2})h$, шаблон N_m, состоящий из двух точек n с координатами $x_n = mh$ и $x_n = (m+1)\,h$, положив $N_m = \{n = mh,\ n = (m+1)\,h\}$. Сопоставим точке $m = 0$ с координатой $x_0 = 0h = 0$ шаблон N_0, состоящей из одной точки $N_0 = 0h$.

Тогда $N = \cup N_m$, $\quad m \in M$, состоит из всех “целых” точек $n = 0$, $h, \ldots, 1-h$, 1, лежащих на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Коэффициенты a_{mn} определим равенствами

$$a_{mn} = \frac{1}{h} + \frac{a}{2}, \quad \text{если} \;\; x_m = (m+\frac{1}{2})h, \;\; x_n = (m+1)h \in N_m$$

$$a_{mn} = -\frac{1}{h} + \frac{a}{2}, \quad \text{если} \;\; x_m = (m+\frac{1}{2})h, \;\; x_n = (m-1)h \in N_m$$

$$a_{mn} = 1, \quad \text{если} \;\; x_0 = Oh, \qquad x_n = x_0 = 0 \in N_m.$$

Положим $f_m = \phi_m$, если m полуцелая точка, и $f_0 = \psi$, если $m = 0$.

При сделанных обозначениях разностная задача (1.7) запишется в каноническом виде (1.1).

Можно привести к каноническому виду (1.1) разностные краевые задачи, аппроксимирующие линейные краевые задачи для уравнений с частными производными на нерегулярных сетках в многомерном пространстве; в областях с разрезами; для уравнений на сфере или другом многообразии; для краевых задач в случае систем разностных линейных разностных уравнений.

2 Абстрактные разностные схемы в составных сеточных областях

Зададим произвольно $M^+,\ M^+ \subset M$. Обозначим $M^- = M \backslash M^+$; $N^+ = \cup N_n, \quad m \in M^+$; $N^- = \cup N_m, \quad m \in M^-, \quad \gamma = N^+ \cap N^-$. Множество γ будем называть сеточной границей между сеточными подобластями N^+ и N^- составной области $N = N^+ \cup N^-$.

Введем линейное пространство V_γ всех тех функций u_γ, которые являются сужениями $u_N\mid_\gamma$, функций $u_N \in V_N$ на подмножество γ, $\gamma \in N^+ \cap N^-$, множества N.

Наряду с абстрактной схемой (1.1), рассмотрим следующие две абстрактные разностные схемы:

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = \theta_M \left(M^+\right) f_m, \quad m \in M \tag{2.1}$$

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^+ = \theta_M \left(M^-\right) f_m, \quad m \in M \tag{2.2}$$

Здесь $\theta_Y(X)$, $X \subset Y$, характеристическая функция подобласти X области Y. Очевидно, что решение $u_N = \{u_n\}$ задачи (1.1), связано с решениями u_N^+ и u_N^- задач (2.1) и (2.2) равенством

$$u_N = u_N^+ + u_N^-, \tag{2.3}$$

или, подробнее,

$$u_n = u_n^+ + u_n^-, \quad n \in N. \tag{2.4}$$

Решение u_N^+ задачи (2.1) будем называть вкладом влияния источников $\theta_M(M^-) f_m$ в решение u_N задачи (1.1), а u_N^- - вкладом влияния источников $\theta_M(M^+) f_M$ в решение u_N той же задачи (1.1).

Примеры задач в составных областях. Воспользуемся разностной краевой задачей, рассмотренной в примере 1 в §1, и рассмотрим три примера составных областей. В первом примере отнесем к подмножеству $M^+,\ M^+ \in M$ все те точки $m \in M$, которые попали внутрь или на границу Γ подобласти D^+ квадрата D, изображенной на рис.1. Во втором примере отнесем к M^+ те точки $m \in M$, которые попали внутрь или на границу Γ несвязной области $D^+ = D_1^+ \cup D_2^+$, изображенной на рис.3 На рисунке 5

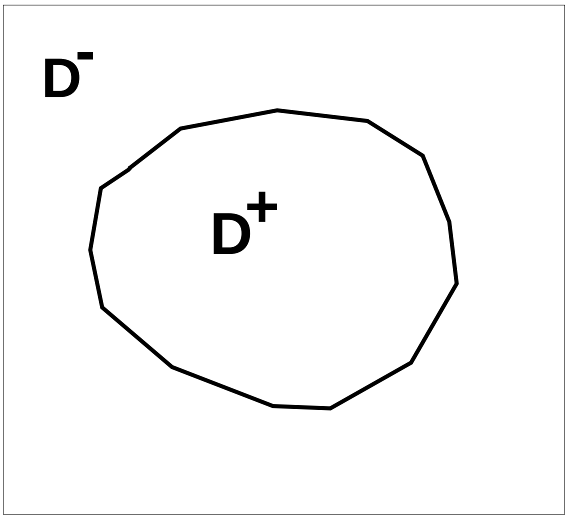

Рис. 1:

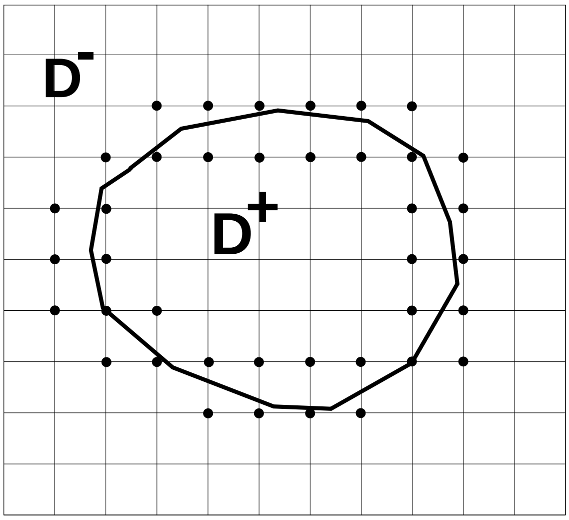

Рис. 2:

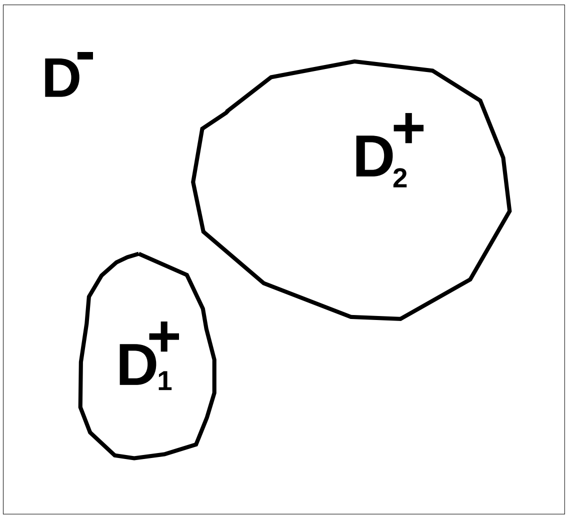

Рис. 3:

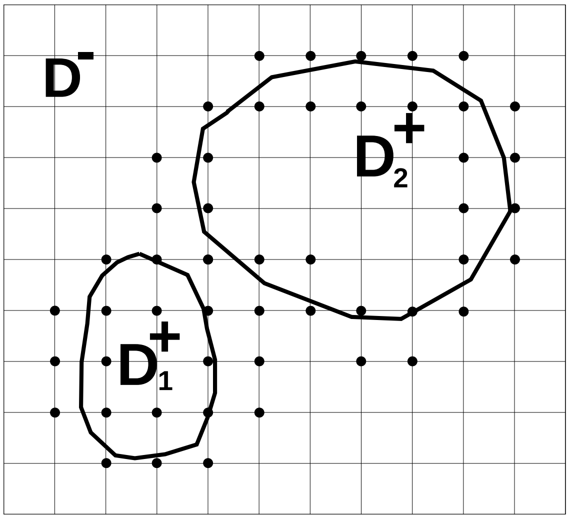

Рис. 4:

граница раздела Γ выходит на границу ∂D области D. В этом случае к M^+ отнесем точки $m \in M$, попавшие в область D^+ или на ее границу Γ.

После того как M^+ выбрано, автоматически определятся подмножества M^-, $N^+ = \cup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \cup N_m$, $m \in M^-$, и граница $\gamma = N^+ \cap N^-$ между подобластями N^+ и N^-.

На рис. 2, 4 и рис. 6 изображена граница γ для каждого из трех сделанных нами выборов подмножеств M^+, $M^+ \subset M$.

Рассмотрим еще четвертый пример, связанный с той же разностной задачей, рассмотренной в примере 1, §1. В этом четвертом примере отнесем к M^+ все те и только те точки $m = (m_1 h,\ m_2 h)$, $m \in M$, каждая из которых лежит внутри квадрата D, либо на какой-нибудь из сторон этого квадрата, причем $m_1 + m_2$ четное число.

Очевидно, M^+ и M^- будут расположены в квадрате D подобно черным

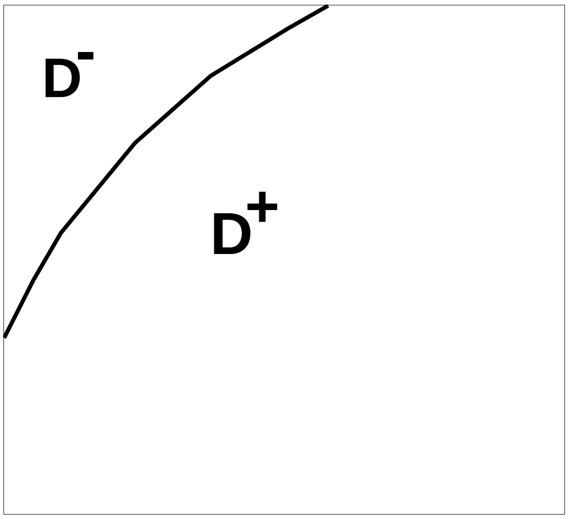

Рис. 5:

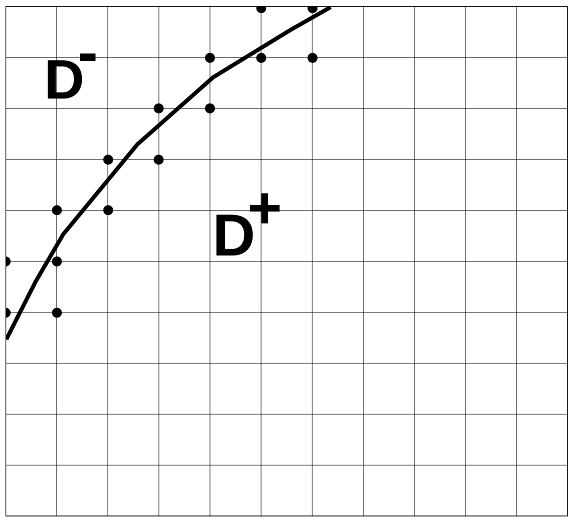

Рис. 6:

и белым полям шахматной доски.

В этом случае, $N^+ = N^- = M$, причем все три этих множества совпадают с границей γ, $\gamma = N^+ \cap N^-$ между N^+ и N^-. Построенный ниже формализм охватывает и этот случай разностной задачи, но содержательность теряется.

3 Определение и свойства разностных потенциалов

Здесь мы построим разностные потенциалы, которые играют для абстрактных разностных схем (1.1), роль, аналогичную той роли, которую классические интегралы типа Коши играют для аналитических функций, или для решений системы Коши-Римана.

Обозначим G_{nm} функцию Грина разностной схемы (1.1), определив матричную функцию G_{nm} как такую функцию двух аргументов $m \in M$ и $n \in N$, при которой при любой правой части $f_M \in F_M$ уравнения (1.1) решение $u_N = \{u_n\}$, $n \in N$, может быть записано формулой

$$u_n = \sum_{m \in M} G_{nm} f_m, \quad n \in N.$$

Существование и единственность функции Грина G_{nm} следуют, очевидно, из требования к (1.1), иметь одно и только одно решение $u_N \in V_N$ при любой $f_M \in F_M$. Обозначим V_γ линейное пространство всех функций γ, каждая из которых является сужением какой-либо $u_N, u_N \in V_N$, на сеточную границу γ, $\gamma \subset N$. Пусть v_γ есть какой-нибудь элемент пространства V_γ, которое будем называть пространством плотностей.

Определение. Разностными потенциалами $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ и $v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma$ с плотностью v_γ назовем соответственно решения следующих двух задач:

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } m \in M^+ \\ \sum\limits_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N(\gamma)\, v_n\right] & \text{если } m \in M^- \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n^- = \begin{cases} \sum\limits_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N(\gamma)\, v_n\right], & \text{если } m \in M^+ \\ 0, \ \text{если } m \in M^- \end{cases} \tag{3.2}$$

В (3.1) и (3.2) использовано обозначение

$$\Theta_N(\gamma) v_n \equiv \begin{cases} v_\gamma|_n & \text{если} \quad n \in \gamma \\ 0 & \text{если} \quad n \in N\backslash\gamma \end{cases}$$

Замечание 1. Заметим, что правая часть формулы (3.1) может отличаться от нуля только в тех точках $m \in M^-$, для которых пересечение множеств N_m и γ непусто, $N_m \cap \gamma \neq \emptyset$. Аналогично, правая часть формулы (3.2) может отличаться от нуля в тех точках $m \in M^+$, для которых пересечение множеств N_m и γ непусто, $N_m \cap \gamma \neq \oslash$.

Очевидно, что функции $v_N^+ = \{v_n^+\}$, $n \in N$, и $v_N^- = \{v_n^-\}$, $n \in N$, могут быть записаны в виде

$$v_n^+ = \sum_{m\in M^-} G_{nm}\left(\sum_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N(\gamma)\, v_n\right]\right), \quad n \in N \tag{3.3}$$

$$v_n^- = \sum_{m\in M^+} G_{nm}\left(\sum_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N(\gamma)\, v_n\right]\right), \quad n \in N \tag{3.4}$$

Правые части формулы (3.3) или (3.4) суть суммы по тем $m \in M^-$ или $m \in M^+$, для которых шаблон N_m пересекается с сеточной границей γ.

Замечание 2. Вычисления разностного потенциала $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ и разностного потенциала $v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma$ с плотностью v_γ можно осуществить, численно решая уравнение (3.1) или уравнение (3.2). Использования формул (3.3) или (3.4) для этого не требуется.

Теорема 1. Имеет место равенство

$$v_N^+ + v_N^- = \theta_N(\gamma)\, v_N, \tag{3.5}$$

где

$$\Theta_N(\gamma) v_\gamma|_n = \begin{cases} v_n, & \text{если} \quad n \in \gamma \\ 0, & \text{если} \quad n \in N\backslash\gamma \end{cases}$$

Доказательство. Введем обозначение v_N, $v_N = v_N^+ + v_N^-$, и сложим почленно левые и правые части уравнений (3.1) и (3.2). Получим уравнение

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n = \sum_{n\in N_m} a_{mn} \left[\theta_N(\gamma)\, v_n\right],\ m \in M = M^+ \cup M^- \tag{3.6}$$

Очевидно, что подстановка функции $\theta_N(\gamma)\, v_n$ вместо v_N в левую часть уравнения (3.6) обратит уравнение (3.6) в тождество. Ввиду единственности решения v_N задачи (3.6), являющейся частным случаем задачи (1.1), получаем равенство (3.5).

Обозначим V_γ^+ линейное подпространство пространства плотностей V_γ, отнеся к V_γ^+ те и только те элементы v_γ^+ пространства V_γ, которые можно доопределить всюду на $N^+\backslash\gamma$ до некоторой функции $v_{N^+}^+ = \{v_n^+\}$, $n \in N^+$, удовлетворяющей однородному уравнению

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n^+ = 0,\ m \in M^+ \quad . \tag{3.7}$$

Обозначим V_γ^- линейное подпространство пространства плотностей V_γ, отнеся к V_γ^- те и только те функции v_γ, $v_\gamma \in V_\gamma$, которое можно доопределить всюду на N^- до некоторой функции $v_{N^-}^-$, удовлетворяющей однородному уравнению

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n^- = 0,\ m \in M^- \quad . \tag{3.8}$$

Определение. Введем операторы $P_\gamma^+ : V_\gamma \to V_\gamma$ и $P_\gamma^- : V_\gamma \to V_\gamma$, определив эти операторы равенствами

$$v_\gamma^+ = P_\gamma^+ v_\gamma = P_{N\gamma}^+ v_\gamma \,|_\gamma \tag{3.9}$$

$$v_\gamma^- = P_\gamma^- v_\gamma = P_{N\gamma}^- v_\gamma \,|_\gamma \tag{3.10}$$

Теорема 2. Вектор-функция (или, короче, функция) v_γ, $v_\gamma \in V_\gamma$, принадлежит V_γ^+ в том и только в том случае, если она удовлетворяет условию

$$P_\gamma^+ v_\gamma = v_\gamma \quad . \tag{3.11}$$

Если условие (3.11) выполнено, то восполнение v_{N^+}, удовлетворяющее условию (3.7), единственно и совпадает на N^+, $N^+ \subset N$, с разностным потенциалом $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$:

$$v_n^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma \Big|_n,\ \text{если}\ n \in N^+ \,. \tag{3.12}$$

Если v_γ удовлетворяет условию (3.11), то разностный потенциал $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ с плотностью v_γ обращается в ноль на сеточной подобласти $N \backslash N^+ = N^- \backslash \gamma$ области N:

$$P_{N\gamma}^+ v_\gamma \,|_n = \begin{cases} v_n^+, \text{ если } n \in N^+ \\ 0, \text{ если } n \in N \backslash N^+ = N^- \backslash \gamma \end{cases} \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть $v_\gamma \in V_\gamma^+$, то есть пусть существует восполнение функции v_γ, $v_{N^+}^+ = \{v_n^+\}$, $n \in N^+$, удовлетворяющее равенству (3.7). Доопределим функцию $v_{N^+}^+$ всюду на $N \backslash N^+$ до функции v_N^+ нулем, положив

$$v_n^+ = \begin{cases} v_{N^+}^+ \,|_n \text{, если } \quad n \in N^+ \\ 0, \text{ если } \quad n \in N \backslash N^+ \end{cases} \tag{3.14}$$

Покажем, что функция v_N^+, заданная равенством (3.14), совпадает с разностным потенциалом $P_{N\gamma}^+ v$, то есть что (3.14) можно записать в виде

$$P_{N\gamma}^+ v_\gamma^+ = \begin{cases} v_{N^+}^+ \,|_n, \quad \text{если} \quad n \in N^+ \\ 0, \text{ если } \quad n \in N \backslash N^+ \end{cases} \quad . \tag{3.15}$$

Тогда, рассматривая (3.15) лишь в точках $n \in \gamma$, увидим, что условие (3.11) выполнено. Кроме того, тогда будет доказано также, что если восполнение $v_{N^+}^+$, удовлетворяющее условию (3.7), существует, то только одно, а именно, совпадающее с $P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ на N^+, $N^+ \subset N$.

Итак, докажем, что левая часть формулы (3.14) совпадает с $P_{N\gamma}^+ v_\gamma$. В соответствии с определением $P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ для этого надо проверить, что функция (3.14) при заданном $v_\gamma \in V_\gamma^+$ удовлетворяет уравнению (3.1). Убеждаемся в этом: подставляя (3.14) в левую часть (3.1) и принимая во внимание (3.7), получаем тождество.

Покажем, наконец, что в случае, если v_γ удовлетворяет условию (3.11), то v_γ принадлежит V_γ^+, то есть что в этом случае существует восполнение v_γ всюду на N^+ до функции $v_{N^+}^+$, удовлетворяющей однородному уравнению (3.7). Таким восполнение является сужение $v_{N^+}^+$ потенциала $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ на N^+, $N^+ \subset N$. Действительно, это сужение $v_{N^+}^+$ удовлетворяет условию (3.7) в силу вида правой части уравнения (3.1), решением которого является v_N^+. Далее, сужение $v_\gamma^+ = P_\gamma^+ v_\gamma$ на γ, $\gamma \subset N^+$, в силу (3.11) совпадает на γ с v_γ и тем самым v_N^+ является восполнением v_γ всюду на N и в частности на $N^+ \subset N$.

Теорема 3. Вектор-функция (или, короче, функция) v_γ принадлежит V_γ^- в том и только в том случае, если она удовлетворяет условию

$$P_\gamma^- v_\gamma = v_\gamma \quad . \tag{3.16}$$

Если условие (3.16) выполнено, то восполнение v_{N^-}, удовлетворяющее условию (3.8), единственно и совпадает на N^-, $N^- \subset N$, с разностным потенциалом $v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma$:

$$v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma \,|_n\,, \text{ если } n \in N^-.$$

Если v_γ удовлетворяет условию (3.16), то разностный потенциал $v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma$ с плотностью v_γ обращается в нуль на сеточной подобласти $N \backslash N^- = N^+ \backslash \gamma$ сеточной области N:

$$P_{N\gamma}^- v_\gamma \,|_n = \begin{cases} v_n, \text{ если } n \in N^- \\ 0, \text{ если } n \in N \backslash N^- \end{cases}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Доказательство совпадет с доказательством теоремы 2, если в доказательстве теоремы 2 всюду поменять "верхний индекс" знак плюс на "верхний индекс" знак минус и, кроме того, вместо уравнения (3.1) использовать уравнение (3.2).

Теорема 4. Операторы P_γ^+ и P_γ^- суть проекторы, то есть

$$\left(P_\gamma^+\right)^2 = P_\gamma^+; \quad \left(P_\gamma^-\right)^2 = P_\gamma^-; \tag{3.18}$$

выполнено равенство

$$P_\gamma^+ + P_\gamma^- = E_\gamma, \tag{3.19}$$

где E_γ – единичный оператор: $E_\gamma v_\gamma \equiv v_\gamma$;
имеют место следующие равенства между линейными пространствами:

$$ImP_\gamma^+ = V_\gamma^+ \quad \text{и} \quad ImP_\gamma^- = V_\gamma^- \tag{3.20}$$

$$KerP_\gamma^+ = V_\gamma^- \text{и} \quad KerP_\gamma^- = V_\gamma^+. \tag{3.21}$$

Доказательство. Докажем первое из равенств (3.18). В соответствии со стандартным определением проектора надо показать, что для любой $v_\gamma \in V_\gamma$ имеет место

$$\left(P_\gamma^+\right)^2 v_\gamma = P_\gamma^+ v_\gamma. \tag{3.22}$$

Обозначим v_γ^+ функцию $P_\gamma^+ v_\gamma$. Тогда (3.22) примет вид

$$P_\gamma^+ v_\gamma^+ = v_\gamma^+. \tag{3.23}$$

Но v_γ^+ является сужением на γ разностного потенциала $P_{N\gamma}^+ v_\gamma = v_N^+$, так что v_N^+ является восполнением v_γ^+ всюду на N, и в частности, на $N^+ \subset N$.

Это восполнение удовлетворяет условию (3.7) в силу структуры правой части уравнения (3.1) . Поэтому в силу определения подпространства V_γ^+ имеет место включение $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$. Но в силу теоремы 2 элемент v_γ^+ удовлетворяет условию (3.11), которое совпадает с доказываемым равенством (3.23). Второе равенство (3.18) доказывается аналогично.

Докажем второе утверждение теоремы, то есть равенство (3.19). Равенство (3.19) означает, что для любой v_γ имеет место равенство

$$P_\gamma^+ v_\gamma + P_\gamma^- v_\gamma = v_\gamma, \quad v_\gamma \in V_\gamma \quad , \tag{3.24}$$

которое можно записать в виде

$$v_\gamma^+ + v_\gamma^- = v_\gamma \quad . \tag{3.25}$$

Но равенство (3.25) имеет место в силу теоремы 1 и получается сужением левой и правой частей тождества (3.5) с сеточной области N на ее сеточную подобласть γ, $\gamma \subset N$.

Докажем теперь первое из двух равенств (3.20). В силу стандартного определения ImP_γ^+ надо показать, что для каждой $v_\gamma \in V_\gamma$ имеет место включение $P_\gamma^+ v_\gamma \in V_\gamma^+$, а также что для каждого элемента $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$ найдется такой элемент $v_\gamma \in V_\gamma$, для которого имеет место равенство $P_\gamma v_\gamma = v_\gamma^+$. В силу доказанного выше для любой $v_\gamma \in V_\gamma$ имеет место включение $P_\gamma^+ v_\gamma = v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$, и кроме того, любая v_γ^+, $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$, получается из некоторой $v_\gamma \in V_\gamma$ при преобразовании $P_\gamma^+ : V_\gamma \to V_\gamma$; такой функцией v_γ может служить сама функция v_γ^+, $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+ \subset V_\gamma$, поскольку в силу теоремы 2 для любой $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$ выполнено равенство $P_\gamma^+ v_\gamma^+ = v_\gamma^+$. Первое равенство (3.20) доказано; второе доказывается аналогично.

Докажем первое утверждение (3.21) теоремы. Равенство $KerP_\gamma^+ = V_\gamma^-$ в развернутом виде означает, что для всех v_γ^-, $v_\gamma^- \in V_\gamma^-$, и только для них имеет место равенство $P_\gamma^+ v_\gamma^- = 0_\gamma$. Но в силу уже доказанных второго равенства (3.20) и равенства (3.25)

$$P_\gamma^+ v_\gamma^- = v_\gamma^- - P_\gamma^- v_\gamma^- = v_\gamma^- - v_\gamma^- = 0_\gamma \quad . \tag{3.26}$$

Второе равенство (3.21) доказывается аналогично.

Определение. Проекторы $P_\gamma^+ : V_\gamma \leftarrow V_\gamma$ и $P_\gamma^- : V_\gamma \leftarrow V_\gamma$ будем называть граничными проекторами.

Теорема 5. Каждый элемент $v_\gamma \in V_\gamma$ может быть представлен в виде суммы

$$v_\gamma = v_\gamma^+ + v_\gamma^-, \quad v_\gamma^+ \in V_\gamma^+, \quad v_\gamma^- \in V_\gamma^-, \tag{3.27}$$

причем представление (3.27) единственно, то есть $V_\gamma = V_\gamma^+ \oplus V_\gamma^-$, или V_γ есть прямая сумма подпространств V_γ^+ и V_γ^-. Кроме того, имеют место следующие формулы для u_γ^+ и u_γ^-:

$$v_\gamma^+ = P_\gamma^+ v_\gamma; \quad v_\gamma^- = P_\gamma^- v_\gamma. \tag{3.28}$$

Доказательство. В силу равенства (3.24) элемент $v_\gamma \in V_\gamma$ можно представить в виде

$$v_\gamma = P_\gamma^+ v_\gamma + P_\gamma^- v_\gamma = v_\gamma^+ + v_\gamma^-,$$

где

$$v_\gamma^+ = P_\gamma^+ v_\gamma, \quad v_\gamma^- = P_\gamma^- v_\gamma,$$

Далее, поскольку $ImP_\gamma^+ = V_\gamma^+$, $ImP_\gamma^- = V_\gamma^-$, имеет место включения $v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$; $v_\gamma^- \in V_\gamma^-$. Таким образом, существование представления (3.27) доказано.

Остается доказать единственность представления (3.27). Ввиду линейности достаточно показать, что в случае $v_\gamma = 0_\gamma$ не существует нетривиального представления v_γ в виде (3.27).

Допустим противное, и пусть

$$0_\gamma = v_\gamma^+ + v_\gamma^-, \tag{3.29}$$

$v_\gamma^+ \in V_\gamma^+, \quad v_\gamma^- \in V_\gamma^-$ и хотя бы одно из слагаемых v_γ^+ или v_γ^- отлично от 0_γ. Поскольку $v_\gamma^- \in V_\gamma^-$, то в силу (3.29) следует, что v_γ^+, $v_\gamma^+ = -v_\gamma^- \in V_\gamma^-$. Таким образом, v_γ^+ принадлежит как V_γ^+, так и V_γ^-. Точно также, $v_\gamma^- \in V_\gamma^-$ и $v_\gamma^- \in V_\gamma^+$. Покажем теперь, что если какая-либо $z_\gamma \in V_\gamma$ принадлежит одновременно и к V_γ^+ и к V_γ^-, то $z_\gamma = 0$. В самом деле, функцию z_γ можно доопределить на N^+ до z_{N^+} так, что выполнено

$$\sum_{n \in N_M} a_{mn} z_n = 0, \quad \text{если } m \in M^+. \tag{3.30}$$

Эту же функцию z_γ можно доопределить на N^- до некоторой z_N так, что будет выполняться

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = 0, \quad \text{если } m \in M^-. \tag{3.31}$$

Таким образом, существует доопределение z_γ всюду на N, при котором z_N удовлетворяет как уравнению (3.30), так и уравнению (3.31), то есть z_N является решением уравнения (3.1) с нулевой правой частью. Поэтому ввиду единственности решения задачи (3.1) справедливо $z_N = 0_N$. Поскольку $\gamma \subset N$, то также $z_\gamma = 0_\gamma$. Теорема доказана.

Теорема 6. Рассмотрим семейство разностных схем вида (3.1) с различными множествами M, N_m, N, с различными коэффициентами a_{mn}, $m \in M$, $n \in N_m$, однако с одними и теми же для всех схем семейства подмножествами M^+; N_m, $m \in M^+$; коэффициентами a_{mn}, $m \in M^+$, $n \in N_m$; границей γ; пространством плотностей V_γ. Тогда для всех схем семейства подпространство $V_\gamma^+ \subset V_\gamma$ будет одним и тем же. Одним и тем же останется также критерий (3.11) того, что справедливо включение $v_\gamma \in V_\gamma^+$.

Доказательство. В силу определения уравнения (3.7), это уравнение останется одним и тем же для всех разностных схем семейства. Поэтому линейное подпространство V_γ^+ тех элементов u_γ^+, которые можно доопределить всюду на N^+ до решения уравнения (3.7), не изменится. Следовательно, в силу теоремы 4 не изменится ImP_γ^+. Тем самым не изменится и пространство решений уравнения (3.11), так как в силу теоремы 2 выполнение уравнения (3.11) есть критерий справедливости включения $v_\gamma \in V_\gamma^+$.

Следует подчеркнуть, однако, что сам проектор $P_\gamma^+ : V_\gamma \to U_\gamma$ будет различным для различных схем из описанного выше семейства разностных схем вида (3.1).

Теорема 7. Формулировка теоремы 6 останется справедливой, если всюду заменить "верхний индекс" знак плюс на знак минус.

Доказательство. Следует воспользоваться доказательством теоремы 6, заменив в этом доказательстве плюс на минус.

Теорема 8. Пусть v_N - произвольный элемент пространства V_N. Рассмотрим разностную схему вида (3.1)

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w_n = f_m, \quad m \in M \tag{3.32}$$

со следующей правой частью $f_M = \{f_m\}$, $m \in M$:

$$f_m = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^+ \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} v_n, \text{ если } m \in M^- \end{cases} . \tag{3.33}$$

Решение w_N задачи (3.32) с правой частью (3.33) всюду на N^+ не зависит от значений v_n в точках $n \notin \gamma$ и всюду на N^+ совпадает с разностным потенциалом $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma$, то есть с решением задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^+ = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^+ \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N(\gamma) v_n\right], \text{ если } m \in M^- \end{cases} . \tag{3.34}$$

Доказательство. В силу определения множества N^- имеют место включения $N_m \in N^-$ для всех $m \in M^-$. Поэтому

$$f_m = \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(N^-\right) v_n\right], \text{ если } m \in M^-.$$

Далее, очевидно, в точках $n \in N^-$ имеет место равенство

$$\theta_N \left(N^-\right) v_n = \theta_N \left(\gamma\right) v_n + \theta_N \left(N \backslash N^+\right) v_n \quad . \tag{3.35}$$

Поэтому в точках $m \in M^-$ справедливо следующее представление второй строчки формулы (3.33):

$$\begin{gathered} \sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n = \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left\{ \left[\theta_N \left(\gamma\right) v_n\right] + \theta_N \left[\left(N \backslash N^+\right) v_n\right] \right\} = \\ = \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(\gamma\right) v_n\right] + \sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(N \backslash N^+\right) v_n\right], \quad \text{ если } m \in M^- \quad . \end{gathered} \tag{3.36}$$

В силу формулы (3.36) и линейности задачи (3.32) функция w_N есть сумма решений задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^+ = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^+ \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(\gamma\right) v_n\right], \text{ если } m \in M^- \end{cases} \tag{3.37}$$

и задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^+ \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(N \backslash N^+\right) v_n\right], \text{ если } m \in M^- \ . \end{cases} \tag{3.38}$$

В силу того, что для $m \in M^+$ справедливо включение $N_m \subset N^+$, правую часть (3.38) можно записать в виде

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} \left[\theta_N \left(N \backslash N^+\right) v_n\right], \quad m \in M = M^+ \cup M^-.$$

Теперь видно, что функция $z_N = \{z_n\}$, $n \in N$, задавемая формулой

$$z_n = \theta_N \left(N \backslash N^+\right) v_n, \quad n \in N = N^+ \cup N^-, \tag{3.39}$$

при подстановке в уравнение (3.38) обращает это уравнение в тождество, то есть функция

$$z_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \in N^+ \\ v_n, & \text{если } n \in N \backslash N^+ = N^- \backslash \gamma \end{cases} \tag{3.40}$$

есть решение задачи (3.38).

Решение v_N^+ задачи (3.37) по определению есть разностный потенциал

$$v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma \quad . \tag{3.41}$$

Складывая формулы (3.40) и (3.41) почленно, получаем

$$w_n = v_n^+ + z_n = \begin{cases} v_n^+, \text{ если } n \in N^+ \\ v_n^+ + v_n, \text{ если } n \in N \backslash N^+ \; = N^- \backslash \gamma \,, \end{cases} \tag{3.42}$$

что доказывает утверждение теоремы.

Теорема 9. Пусть v_γ^+ произвольный элемент подпространства $V_\gamma^+, v_\gamma^+ \in V_\gamma^+$ и $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ v_\gamma^+$. Тогда

$$P_{N\gamma}^- v_\gamma^+ \,|_n = \begin{cases} -v_n^+, \text{ если } n \in N^+ \backslash \gamma \\ 0, \text{ если } n \in N^- \end{cases} \quad . \tag{3.43}$$

Пусть v_γ^- – произвольный элемент подпространства V_γ^-, $v_\gamma^- \in V_\gamma^-$ и $v_N^- = P_{N\gamma}^- v_\gamma^-$. Тогда

$$P_{N\gamma}^+ v_\gamma^- \,|_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \in N^+ \\ -v_n^-, \text{ если } n \in N \backslash N^+ = N^- \backslash \gamma \end{cases} \tag{3.44}$$

Доказательство. Докажем утверждение (3.43). В силу равенства (3.5) из теоремы 1 в случае $v_\gamma \in V_\gamma^+$ в силу теоремы 2 имеет место $v_\gamma = v_\gamma^+$ и следующее

$$P_{N\gamma}^+ v_\gamma^+ + P_{N\gamma}^- v_\gamma^+ = \theta_N \left(\gamma\right) v_\gamma^+$$

Отсюда с учетом (3.13) получим равенство

$$P_{N\gamma}^- v_\gamma^+ \,|_n = \theta_N \left(\gamma\right) v_\gamma^+ \,|_n - P_{N\gamma}^+ v_\gamma^+ \,|_n = \begin{cases} -v_n^+, \text{ если } \; n \in N^+ \backslash \gamma \\ o_n, \text{ если } n \in N^- \end{cases} \quad ,$$

которое совпадает с равенством (3.43). Второе утверждение теоремы, то есть равенство (3.44), доказывается аналогично. Теорема доказана.

Наряду с задачей (3.1) рассмотрим задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^+ = \theta_m \left(M^-\right) f_m, \quad \text{ если } m \in M = M^+ \cup M^- \tag{3.45}$$

и задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = \theta_m \left(M^+\right) f_m, \quad \text{если } m \in M = M^+ \cup M^- \,. \tag{3.46}$$

Решение задачи (3.1) есть, очевидно, сумма решений u_N^+ и u_N^- задач (3.45) и (3.46):

$$u_N = u_N^+ + u_N^-. \tag{3.47}$$

Слагаемое u_N^+ есть вклад в u_N влияния источников f_m, локализованных в точках $m \in M^-$, а u_N^- - вклад источников f_m, локализованных в точках $m \in M^+$.

Теорема 10. Вклад u_N^+ источников f_m, $m \in M^-$, локализованных на M^-, в решение u_n задачи (3.1) в точках $n \in N^+$ совпадает с разностным потенциалом $v_N^+ = P_{N\gamma}^+ u_\gamma$ с плотностью u_γ, то есть имеет место равенство

$$u_n^+ = v_n^+ = P_{N\gamma}^+ u_\gamma \Big|_n, \text{ если } n \in N^+ \quad . \tag{3.48}$$

Вклад u_N^- источников f_m, $m \in M^+$, локализованных на M^+ в решение u_n задачи (3.1) в точках $n \in N^-$ совпадает с разностным потенциалом $v_N^- = P_{N\gamma}^- u_\gamma$ с плотностью u_γ, то есть имеет место равенство

$$u_n^- = v_n^- = P_{N\gamma}^- u_\gamma \Big|_n, \text{ если } n \in N^- .$$

Доказательство. Справедливость теоремы есть непосредственное следствие теоремы 8.

Наряду с $P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ и $P_{N\gamma}^- v_\gamma$ введем тесно связанные с ними разностные потенциалы $P_{N\gamma}^\pm v_\gamma$ и $P_{N\gamma}^\mp v_\gamma$, положив

$$v_N^\pm = P_{N\gamma}^\pm v_\gamma = \begin{cases} P_{N\gamma}^+ v_\gamma \,|_n, & n \in N^+ \\ -P_{N\gamma}^- v_\gamma \,|_n \,, & n \in N^- \end{cases} \tag{3.49}$$

$$v_N^\mp = P_{N\gamma}^\mp v_\gamma = -P_{N\gamma}^\pm v_\gamma, \quad n \in N \quad . \tag{3.50}$$

Потенциалы (3.49) и (3.50) можно записать подробнее в виде формул

$$v_n^\pm = \begin{cases} v_n^+, & n \in N^+ \\ -v_n^-, & n \in N^- \end{cases} \tag{3.51}$$

$$v_n^\mp = \begin{cases} v_n^-, & n \in N^- \\ -v_n^+, & n \in N^+ \end{cases} \tag{3.52}$$

Разностные потенциалы $v_N^\pm$ и $v_N^\mp$ суть функции, определенные на $N = N^+ \cup N^-$ и двузначные в точках $n \in \gamma = N^+ \cap N^-$.

Определение . Функции вида

$$w_n^\pm = \begin{cases} w_n^+, & n \in N^+ \\ -w_n^-, & n \in N^- \end{cases} \quad , \tag{3.53}$$

где $w^+_{N^+} = \{w^+_n\}$, $n \in N^+$ и $w^-_{N^-} = \{w^-_n\}$, $n \in N^-$ какие-нибудь решения соответственно уравнений (3.7) и (3.8)

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w^+_n = 0, \quad m \in M^+ \quad ; \quad \sum_{n \in N_m} a_{mn} w^-_n = 0, \quad m \in M^+,$$

будем называть кусочно-регулярными решениями однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1). Функцию

$$v_\gamma = [w^\pm_N] = w^+_\gamma - w^-_\gamma, \tag{3.54}$$

будем называть скачком кусочно-регулярного решения $w^\pm_N$ на границе γ.

Теорема 11. Разностный потенциал $v^\pm_N = P^\pm_{N\gamma} v_\gamma$ с плотностью v_γ есть кусочно-регулярное решение уравнения (1.1), со скачком v_γ, $\left[v^\pm_N\right]_\gamma = v_\gamma$, на сеточной границе γ.

Доказательство. В силу теоремы 2 сужение $v^+_{N^+} = P^+_{N\gamma} v_\gamma \,|_{N^+}$ потенциала $P^+_{N\gamma} v_\gamma$ с плотностью v_γ удовлетворяет уравнению (3.7). В силу теоремы 2, аналогично, $v^-_{N^-} = P^-_{N\gamma} v_\gamma \,|_{N^-}$ в силу той же теоремы 2, удовлетворяет уравнению (3.8). Таким образом, разностный потенциал $P^\pm_{N\gamma} v_\gamma$ есть кусочно-регулярное решение, скачок которого

$$\left[P^\pm_{N\gamma} v_\gamma\right] = P^+_{N\gamma} v_\gamma \,|_\gamma + P^-_{N\gamma} v_\gamma \,|_\gamma = P^+_\gamma v_\gamma + P^-_\gamma v_\gamma$$

в силу теоремы 1 совпадает с плотностью v_γ.

Теорема 12. Пусть v_γ произвольный элемент пространства плотностей V_γ, $v_\gamma \in V_\gamma$. Существует одно и только одно кусочно-регулярное решение уравнения (1.1), имеющее этот скачок.

Доказательство. Существование доказано тем, что функция $v^\pm_N = P^\pm_{N\gamma} v_\gamma$, заданная равенством (3.49), в силу (3.5) является кусочно-регулярными решением со скачком γ. Остается доказать единственность.

В виду линейности достаточно установить, что в случае $v_\gamma = 0_\gamma \in V_\gamma$ единственным кусочно-регулярным решением является функция

$$w^\pm_n = \begin{cases} 0_n, & n \in N^+ \\ 0_n, & n \in N^- \end{cases} .$$

Установим это. Кусочно-регулярное решение (3.49) с нулевым скачком $\left[w^\pm_N\right]_\gamma = w^+_\gamma - w^-_\gamma = 0_\gamma$ есть однозначная на границе γ функция, так что $w^\pm_N \in V_N$. В то же время эта функция удовлетворяет как уравнению (3.7), так и уравнению (3.8), то есть удовлетворяет однородному уравнению вида (1.1)

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w_n^{\pm} = 0, \quad m \in M^+ \cup M^- = M. \tag{3.55}$$

Но в силу единственности решений задачи (1.1), из (3.55) следует, что $w_n^{\pm} \equiv 0$.

4 Аналогия между разностными потенциалами и интегралами Коши

Имеет место глубокая аналогия между разностными потенциалами с плотностью на сеточном контуре γ и интегралами Коши с плотностью на несамопересекающемся гладком замкнутом контуре Γ, разделяющем комплексную плоскость D на ограниченную подобласть D^+ и ее дополнение D^-.

Для выяснения этой аналогии предварительно изложим некоторые известные сведения об интегралах типа Коши в удобной для сравнения этих интегралов и их свойств с разностными потенциалами и их свойствами.

Обозначим V_Γ линейное пространство всех комплекснозначных функций $v_\Gamma(\xi)$ аргумента $\xi \in \Gamma$, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости.

Запишем интегралы Коши $u_D^+ = P_{D\Gamma}^+ v_\Gamma$ и $u_D^- = P_{D\Gamma}^- v_\Gamma$ с плотностью v_Γ, $v_\Gamma \in V_\Gamma$, в следующем виде

$$u_D^+(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{v_\gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi & \text{если} \quad z \notin \gamma \\ \frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{z_0 \to z} \oint \frac{v_\Gamma(\xi)}{\xi - z_0} d\xi & \text{если} \quad z \in \Gamma, z_0 \in D^+ \end{cases} \tag{4.1}$$

$$u_D^-(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{v_\gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi & \text{если} \quad z \notin \gamma \\ \frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{z_0 \to z} \oint \frac{v_\Gamma(\xi)}{\xi - z_0} d\xi & \text{если} \quad z \in \gamma, z_0 \in D^- \end{cases} \tag{4.2}$$

В формуле (4.1) интегрирование ведется с обходом Γ против часовой стрелки, а в формуле (4.2) обход Γ ведется по часовой стрелке. Известно, что имеет место равенство

$$u_D^+ + u_D^- |_z = \begin{cases} 0, \text{ если } z \notin \Gamma \\ v_\Gamma(z), \text{ если } z \in \Gamma \end{cases}. \tag{4.3}$$

Запишем граничные проекторы Коши $P_\Gamma^+ : V_\Gamma \to V_\Gamma$, $\left(P_\Gamma^+\right)^2 = P_\Gamma^+$ и $P_\Gamma^- : V_\Gamma \to V_\Gamma$, $\left(P_\Gamma^-\right)^2 = P_\Gamma^-$ следующим образом

$$P_\Gamma^+ v_\Gamma \Big|_{\xi \in \Gamma} = \lim\ u_D^+(z), \quad z \to \xi, \quad z \in D^+$$

$$P_\Gamma^- v_\Gamma \big|_{\xi\in\Gamma} = \lim\ u_D^+(z), \quad z \to \xi, \quad z \in D^-$$

или короче:

$$v_\Gamma^+ = P_\Gamma^+ v_\Gamma = P_{D\Gamma}^+ v_\Gamma \,|_\Gamma\ , \tag{4.4}$$

$$v_\Gamma^- = P_\Gamma^- v_\Gamma = P_{D\Gamma}^- v_\Gamma \,|_\Gamma\ \ . \tag{4.5}$$

Обозначим через V_Γ^+ и V_Γ^- соответственно линейные подпространства всех тех v_Γ, $v_\Gamma \in V_\Gamma$, которые являются граничными значениями аналитических внутри D^+ функций или граничными значениями аналитических внутри D^- функций, стремящихся к нулю при $z \to \infty$. Справедливо утверждение, что $v_\Gamma^+ \in V_\Gamma^+$ и что $v_\Gamma^- \in V_\Gamma^-$ в том и только том случае, если выполнены следующие сингулярные интегральные соотношения

$$P_\Gamma^+ v_\Gamma^+ = v_\Gamma^+ \quad \text{и} \quad P_\Gamma^- v_\Gamma^- = v_\Gamma^- \tag{4.6}$$

соответственно. Если условия (4.6) выполнены, то соответствующие аналитические функции $u_{D^+}^+(z)$, $z \in D^+$, и $u_{D^-}^-(z)$, $z \in D^-$, совпадают на D^+ и D^- соответственно с интегралами (4.1), (4.2) Коши. При этом имеют место формулы:

$$P_{D\Gamma}^+ v_\Gamma^+ \,|_z = \begin{cases} v_D^+(z), \text{ если } z \in D^+ \cup \Gamma \\ 0, \text{ если } z \in D^- \end{cases} \tag{4.7}$$

$$P_{D\Gamma}^+ v_\Gamma^- \,|_z = \begin{cases} 0, \text{ если } z \in D^+ \cup \Gamma \\ -v_{D^+}^+(z), \text{ если } z \in D^- \end{cases} \tag{4.8}$$

$$P_{D\Gamma}^- v_\Gamma^- \,|_z = \begin{cases} v_D^-(z), \text{ если } z \in D^- \cup \Gamma \\ 0, \text{ если } z \in D^+ \end{cases} \tag{4.9}$$

$$P_{D\Gamma}^- v_\Gamma^+ \,|_z = \begin{cases} 0, \text{ если } z \in D^- \cup \Gamma \\ -v_D^+(z), \text{ если } z \in D^+ \end{cases} \quad . \tag{4.10}$$

Введем обозначение

$$u_D^\pm(z) = \begin{cases} u_{D^+}^+(z), \quad z \in D^+ \cup \Gamma \\ -u_{D^-}^-(z), \quad z \in D^- \cup \Gamma, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $u_{D^+}^+(z)$ и $u_{D^-}^-(z)$ определены формулами (4.1) и (4.2) соответственно. Функция $u_D^\pm(z)$ обладает следующим свойством. Функция $u_D^\pm(z)$ есть кусочно-аналитическая функция, двухзначная в точках $z \in \Gamma$, претерпевающая скачок $v_\Gamma(\xi)$ при переходе z в точке $\xi \in \Gamma$ через контур Γ со стороны области

D^- в область D^+ на комплексной плоскости и стремящаяся к нулю при $z \to \infty$. Известно, что наличие этого свойства является характеристическим, так что функцию $u_D^{\pm}(z)$ можно определить не используя формулу (4.11), а просто как кусочно-аналитическую функцию, претерпевающую заданный скачок $v_\Gamma(\xi)$ в точках $\xi \in \Gamma$ и стремящуюся к нулю при $z \to \infty$.

Теперь проследим аналогию между конструкциями, свойствами и ролью для аналитических функций в областях D^+ и D^- комплексной плоскости интегралов типа Коши с одной стороны и между конструкциями, свойствами и ролью разностных потенциалов для решений разностной схемы (1.1) в сеточных областях N^+ и N^- с другой стороны.

1^o. Прежде всего заметим, что интегралы типа Коши можно интерпретировать как некоторые потенциалы для решений системы дифференциальных уравнений Коши-Римана, связывающей вещественные и мнимые части аналитических функций

2^o. Сеточные подобласти N^+ и N^- сеточной области N аналогичны подобластям D^+ и D^- комплексной плоскости D, а сеточная граница $\gamma = N^+ \cap N^-$ аналогична контуру Γ на комплексной плоскости.

3^o. Разностные потенциалы $P_{N\gamma}^+ v_\gamma$ и $P_{N\gamma}^- v_\gamma$ с плотностью $v_\gamma \in V_\gamma$, записанные в форме (3.3) и (3.4), аналогичны интегралам типа Коши (4.1) и (4.2).

4^o. Формула (3.5) аналогична формуле (4.3).

5^o**.** Разностные граничные проекторы $P_\gamma^+ : V_\gamma \to V_\gamma$ и $P_\gamma^- : V_\gamma \to V_\gamma$ аналогичны граничным проекторам Коши $P_\Gamma^+ : V_\Gamma \to V_\Gamma$ и $P_\Gamma^- : V_\Gamma \to V_\Gamma$, определенным формулами (4.4) и (4.5).

6^o. Уравнения (3.11), (3.16) относительно v_γ^+ и v_γ^- на сеточной границе γ аналогичны сингулярным интегральным уравнениям (4.6) на контуре Γ.

7^o. Критерий (3.11) того, что v_γ^+ является следом какого-нибудь регулярного на N^+ решения и критерий (3.16) того, что v_γ^- является следом какого-нибудь регулярного на N^- решения разностной схемы (1.1), аналогичны соответственно критериям (4.6) того, что v_Γ^+ и v_Γ^- являются граничными значениями какой-нибудь непрерывной на $D^+ \cup \Gamma$ и аналитической внутри D^+ функции $v^+(z)$ или, соответственно, непрерывной на $D^- \cup \Gamma$ и аналитической внутри D^- функции $v^-(z)$, стремящейся к нулю при $z \to \infty$.

8^o. Формулы (3.13), (3.17), (3.43), (3.44) для разностных потенциалов аналогичны формулам (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) для интегралов типа Коши.

9^o. Формула $V_\gamma = V_\gamma^+ \oplus V_\gamma^-$, доказанная в теореме 5, аналогична формуле $V_\Gamma = V_\Gamma^+ \oplus V_\Gamma^-$, имеющей место для аналитических функций.

10^o**.** Теорема 11 о том, что разностный потенциал $v_N^{\pm} = P_{N\gamma}^{\pm} v_\gamma$ можно равносильно определить как кусочно-регулярное решение уравнения (1.1) со скачком v_γ на сеточном контуре, есть точный аналог того, что интеграл Коши (4.11) можно равносильно определить как кусочно-аналитическую функцию с заданным скачком $v_\Gamma(\xi)$ на контуре Г.

Список аналогий между разностными потенциалами и интегралами Коши можно продолжить. Но и сказанного достаточно для обоснования утверждения, сделанного в начале этого раздела 4.

Замечание 3. Подчеркнем, что выяснение аналогии между разностными потенциалами и интегралами Коши не используется для обоснования теории разностных потенциалов, но способствует созданию правильной интуиции при использовании этой теории для приложений.

5 Теория разностных потенциалов как база для некоторых приложений

Линейные разностные задачи вида (1.1) возникают при разностной аппроксимации линейных стационарных краевых или эволюционных начально-краевых задач; при вычислений решений нелинейных стационарных разностных краевых задач методом итераций Ньютона, поскольку на каждом шаге итераций нужно вычислять решение некоторой линейной разностной задачи; при решении нелинейных начально-краевых задач по неявным разностным схемам на "верхнем" по времени слое; при математическом моделировании задач управления подавлением внешнего шума.

Основу большинства уже реализованных приложений теории разностных потенциалов к вычислительным задачам математической физики и к задачам моделирования подавления внешнего шума в защищаемой подобласти составляют следующие три свойства 1^o, 2^o, 3^o.

Свойство 1^o установлено в теореме 2, §3. В силу этого свойства уравнение в сеточной подобласти $N^+,\ N^+ \subset N$,

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = 0, \quad m \in M^+ \tag{5.1}$$

и уравнение

$$u_\gamma - P_\gamma^+ u_\gamma = 0 \tag{5.2}$$

на границе $\gamma = N^+ \cap N^-$ подобласти равносильны.

Благодаря свойству 1^o можно осуществлять редукцию задач с дополнительными краевыми условиями для уравнения (5.1) в области к задачам на границе γ.

Благодаря свойству 1^o можно также при рассмотрении задач вида

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \quad m \in M \tag{5.3}$$

равносильно заменять подсистему вида (5.1) системы (5.3) уравнением (5.2). При этом γ играет роль искусственной границы, а условие (5.2) – роль искусственных граничных условий.

Свойство 2^o установлено в теореме 6. Пусть задача (1.1) заменена другой задачей того же вида, для которой, однако, остаются неизменными M^+; N_m, $m \in M^+$; a_{mn}, $m \in M^+$, $n \in N_m$, граница γ и пространство V_γ. Тогда потенциал $P^+_{N\gamma}v_\gamma$, $v_\gamma \in V_\gamma$ и разностный проектор P^+_γ, вообще говоря, изменяются, но линейное пространство V^+_γ решений задачи (5.2) остается прежним. Для $v_\gamma \in V^+_\gamma$ потенциал $P_{N^+\gamma}v_\gamma$ также остается прежним.

Благодаря свойству 2^o при редукции уравнения (5.1) к уравнению (5.2) на границе γ, а также при использовании (5.2) в качестве искусственного граничного условия можно воспользоваться допустимой свободой в выборе схемы (1.1), чтобы получить удобное для работы уравнение (5.2).

Свойство 3^o установлено в теореме 5. Оно состоит в том, что по сумме u_γ, $u_\gamma = u^+_\gamma + u^-_\gamma$ влияний u^+_γ и u^-_γ соответственно источников f_m, $m \in M^+$ и f_m, $m \in M^-$, можно судить о каждом вкладе отдельно, а именно

$$u^+_\gamma = P^+_\gamma u_\gamma; \quad u^-_\gamma = P^-_\gamma u_\gamma$$

Свойство 3^o позволяет строить управление подавлением внешнего шума в точках защищаемой подобласти N^- от нежелательного влияния (шума) внешних источников f_m, $m \in M^+$.

6 Библиографическая справка

Теория разностных потенциалов аналогичных интегралам Коши была предложена автором в 1969 году в его докторской диссертации и существенно развита в последующие годы автором, А.Я. Белянковым, Д.С. Каменецким, М.И. Лазаревым, М.Н. Мишковым, А.А. Резником, И.Л. Софроновым, В.И Торгашовым, В.И. Турчаниновым, С.В. Утюжниковым, С.В. Цынковым в работах [1-23], монографиях [24, 25], где имеется также библиография оригинальных работ, относящихся к теме и принадлежащих многим авторам.

Назовем основные направления, в которых к настоящему времени получены приложения теории.

Алгоритмы численного решения некоторых краевых задач математической физики путем редукции на сеточную границу расчетной подобласти, не требующие разностной аппроксимации граничных условий, разработаны А.Я. Белянковым, Е.В. Зиновьевым, А.А. Резником, В.В. Огневой, И.Л. Софроновым, Д.С. Каменецким, М.Ю. Лохановым, В.И. Турчаниновым, В.А. Торгашовым, М.Н. Мишковым, К.В. Брушлинским, А.В. Забродиным, Н.М. Зуевой, М.С. Михайловой, А.В. Воронковым, Е.П. Сычуговой, Н.Б. Тузовой, Б.З. Оссеровичем и автором [26-34].

Серия работ по нелокальным искусственным граничным условиям при расчете обтекания тела параллельным потоком набегающего газа выполнена С.В. Цынковым. Обзор этих работ, написанный по просьбе автора самим С.В. Цынковым, составляет гл. 2, ч. IV книги [25], а также [36-39].

Задачу о замене уравнений приграничного высокоградиентного слоя при турбулентном течении газа около стенки нелокальными искусственными граничными условиями поставил и рассмотрел С.В. Утюжников [40, 41].

Работы по точной замене волнового уравнения, а также системы уравнений Максвелла вне ограниченной расчетной подобласти неотражающими искусственными граничными условиями выполнены В.И. Турчаниновым, С.В. Цынковым и автором [42-46]. Аналогичная работа для системы Максвелла в собственном времени выполнена С.В. Петропаловским [47].

Способ синтеза алгоритмов для решения краевых задач в составных областях не требующий согласования сеток в подобластях и разностной аппроксимации условий состыковки на границах между подобластями предложен в [48].

Ряд работ В.С. Рябенького, Р.И. Вейцмана, Е.В. Зиновьева, С.В. Утюжникова, С.В. Цынкова и других авторов посвящен активному управлению подавлением внешнего шума в защищаемой подобласти. См. [49-59] и имеющуюся там библиографию.

Литература

1. *Рябенький В.С.* Суммы для решений разностных уравнений, аналогичные интегралу Коши для аналитических функций, и некоторые приложения этих сумм. - М., 1969. Деп. В ВИНИТИ, № 635-69.

2. *Рябенький В.С.* Некоторые вопросы теории разностных краевых задач: Дисс. докт. физ.-мат. наук. М., 1969.

3. *Рябенький В.С.* Оператор граничного проектирования. // Докл. АН СССР. 1969. Т.185, № 3. С.521-523.

4. *Рябенький В.С.* О разностных уравнениях на полиэдрах. // Матем. сб. 1969. – Т.79, № 1. С.78-90.

5. *Рябенький В.С.* Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач. //Успехи матем. наук. 1971. Т.26, № 3. С.105-160

6. *Белянков А.Я.* К развитию метода внутренних граничных условий в теории разностных схем: Дисс. канд. физ.-мат. наук. МФТИ, 1977.

7. *Рябенький В.С., Белянков А.Я.* Разностные потенциалы и проекторы. // Докл. АН СССР. 1980. Т.254, № 5, С.1080-1084.

8. *Белянков А.Я., Рябенький В.С.* Проекторы для разностных схем на нерегулярных сетках. //Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша СССР. М., 1981. №70.

9. *Резник А.А.* Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными потенциалами. // Докл. АН СССР. 1982. Т.263, № 6. С.1318-1320.

10. *Резник А.А.* Аппроксимация поверхностных потенциалов эллиптических операторов разностными и решение краевых задач. //Дисс. канд. физ.-мат. н. М.: МФТИ, 1983.

11. *Софронов И.Л.* Развитие метода разностных потенциалов и применение его к решению стационарных задач дифракции: Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 1984.

12. *Софронов И.Л.* Новый метод численного решения регулярных эллиптических задач. // ДАН СССР. 1986. Т.294, № 3. С.573-577.

13. *Рябенький В.С.* Обобщенные проекторы Кальдерона и граничные уравнения на основе концепции четкого следа, ДАН СССР, 270(1983) № 2, с. 288-292.

14. *Рябенький В.С.* Проекторы Кальдерона для системы Стокса. // Успехи матем. наук. 1983. Т.38. вып.5. С.157-158.

15. *Рябенький В.С.* Граничные уравнения с проекторами. //Успехи матем. наук. 1985. Т.40, № 2, С.221-239.

16. *Рябенький В.С.* Потенциалы типа Коши для общих линейных систем разностных уравнений на абстрактных сетках. //ЖВМ и МФ. Т.36. вып.4, 1996.

17. *Рябенький В.С.* Кусочно-регулярные решения разностных уравнений и разностные потенциалы с плотностью из пространства скачков. //Докл. РАН. 1999. Т. 347, № 2. С.160-163.

18. *Каменецкий Д.С.* Разностные потенциалы и параметризация решений однородных разностных уравнений, //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 11. С.1829-1843.

19. *Каменецкий Д.С.* Разностные обобщенные операторы Пуанкаре-Стеклова и потенциалы с плотностью из пространства скачков. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 8. С.

20. *Ryaben'kii V.S.* Difference potentials method and its application. // Mathematische Nachrichten. 1996. № 177.

21. *Резник А.А., Рябенький В.С., Софронов И.Л., Турчанинов В.И.* Об алгоритме метода разностных потенциалов для численного решения реду-

цированных на границу краевых задач. // ЖВМ и МФ. 1985. Т.25, № 10. С.1496-1505.

22. *Зиновьев Е.В.* Решение внешних задач для уравнения Гельмгольца. Приложение к расчету осесимметричных элементов машин. Дисс. канд. физ.-мат. наук - М., ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1990.

23. *Каменецкий Д.С., Рябенький В.С., Цынков С.В.* Граничные уравнения с проекторами в составных областях. М., 1991. //Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. № 112 и № 113. М., 1991.

24. *В.С. Рябенький.* Метод разностных потенциалов и его приложения. Физматлит. 2002

Ryaben'kii V.S. Method of difference potentials and its Applications, Springer-Verlag, 2002.

25. *В.С. Рябенький.* Метод разностных потенциалов и его приложения. М. Физматлит, 2010.

26. *Забродин А.В, Огнева В.В.* Решение уравнения теплопроводности в областях сложной структуры, Препринт /ИПМ АН СССР, М., 1973. № 21. С.1-22.

27. *Белянков А.Я., Резник А.А., Рябенький В.С.* Численное решение уравнений метода разностных проекторов. Препринт /ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, М., 1981, № 105.

28. *Рябенький В.С., Софронов И.Л.* Численное решение пространственных внешних задач для уравнений Гельмгольца методом разностных потенциалов. // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.: Наука, 1986.

29. *Лоханов М.Ю.* Численное решение задачи Трикоми методом разностных потенциалов. Тр. XXX научно-технической конференции, МФТИ, М., 1984

30. *Зуева Н.М., Михайлова М.С., Рябенький В.С.* Перенос граничных условий из бесконечности на искусственную границу для разностного уравнения Лапласа. Препринт /ИПМ им. М.В. Келдыша. № 110. М., 1991.

31. *Брушлинский К.В., Рябенький В.С., Тузова Н.Б.* Перенос граничного условия через вакуум в осесимметричных задачах. //ЖВМ и МФ, 1992, № 12, с.1929-1939.

32. *Рябенький В.С., Торгашов В.А.* Метод разностных потенциалов для численного решения внутренней задачи о плоском течении вязкой несжимаемой жидкости // Доклады РАН, 1994. Т. 337. С.450-453.

33. *Рябенький В.С., Торгашов В.А.* Безытерационный метод численного решения неявной разностной схемы для системы Навье-Стокса в переменных функциях тока-вихрь. //Матем. моделир., 1996, т.8, № 10, с.100-112.

34. *Торгашов В.А.* Метод разностных потенциалов для численного решения системы Навье-Стокса в естественных переменных для несжимаемой жидкости. // Матем. моделир. 1998. Т.10. № 9. С.81-102

35. *Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V.* Artificial Boundary Conditions for the Numerical Solution of external Viscous Flow Poblems // SIAM J. Numer. Anal. 1995. V.32. P.1355-1389.

36. *S.V. Tsynkov.* Numerical Solution of Problems on Unbounded Domains. A Review. // Appl. Math. 1998. V.27. P.465-532.

37. *S.V. Tsynkov.* External Boundary Conditions for Three-Dimensional Problems of Computational Aerodynamics, SIAM J. Sci. Comp., 21 (1999) pp.166-206.

38. *S.V.Tsynkov, S. Abarbanel, J. Nordstram, V.S.Ryaben'kii, Vatsa V.N.* Global Artificial Boundary Conditions for Computation of external Flow Problems with propulsive jets //Proc. 14th AIAA CFD Conference, Norfolk, VA, June-July 1999- AIAA Paper № 99-3351 - A Collection of Technical Papers, V. 2. - P. 836-846.

39. *Ryaben'kii V.S.* Nonreflecting time-depended boundary conditions on artificial boundaries of varying location and chape. Applied Numerical Mathematics 33 (2000), 481-492.

40. *Utyuzhnikov, S.V.* The method of boundary condition transfer in application to modeling near-wall turbulent flows. // Int. J. Computers Fluids. 2006. V. 35. №10. P. 1193-1204.

41. *Utyuzhnikov S.V.* Domain decomposition for near-wall turbulent flows, Int. J. Computers Fluids, 2009. V. 38. № 9. P. 1710-1717.

42. *Рябенький В.С., Турчанинов В.И., Цынков С.В.* Использование лакун решений 3D-волнового уравнения для вычисления решения задачи Коши на больших временах. // Матем. моделирование. 1999. Т.11, № 12. С.113-126.

43. *Ryaben'kii V.S., Tsynkov S.V., Turchaninov V.I.* Long-Time numerical computation of wave type solutions driven by moving sources. //Applied Numerical Mathematics. 2001. V.38. P. 187-222.

44. *Рябенький В.С., Турчанинов В.И., Цынков С.В.* Неотражающие искусственные граничные условия для замены отбрасываемых уравнений с лакунами. //Математ. моделирование. 2000. т. 12, № 12. С. 108-127.

45. В.С. Рябенький, В.И. Турчанинов. Использование лакун гиперболических уравнений и метода разностных потенциалов для расчета дифракции волн в окрестности рассеивателя на больших временах. ЖВМ и МФ (2005), т.45, № 8, с.1435-1449

46. *В.С. Рябенький, В.Н. Турчанинов.* Неотражающие граничные условия на основе использования лакун для вычисления решений системы Макс-

велла на больших временах. //Доклады РАН . 2005. Т. 404. № 1. С. 21-24.

47. В.С. Петропавловский. Экономный алгоритм расчета длительных электромагнитных явлений в собственном времени в ограниченной расчетной области, но на больших временах. //ЖВМ и МФ. 2005.Т.45. №10. С.1826-1836

48. *В.С. Рябенький, В.И. Турчанинов, Е.Ю. Эпштейн.* Схема композиции алгоритмов для задач в составных областях на базе метода разностных потенциалов. // ЖВМ и МФ. 2006. т.46. № 10. С. 1853-1870.

49. *Рябенький В.С.* Разностная задача экранирования //Функциональный анализ и его приложения. 1995. 1995. Т. 29. № 1, с.70-71.

50. *Вейцман Р.Н., Рябенький В.С.* Разностные задачи экранирования и имитации. // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 2. с. 151-154.

51. *V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, and S. V. Utyuzhnikov.* Inverse Source Problem and Active Shielding for Composite Domains. //Applied Mathematics Letters. 2007. V. 20, №. 5. P. 511-515.

52. H. *Lim, S. V. Utyuzhnikov, Y. W. Lam, A. Turan, M. Avis, V. S. Ryaben'kii, and S. V. Tsynkov.* An Experimental Validation of the Noise Control Methodology Based on Difference Potentials. //AIAA Journal. 2009. V.47. № 4. P. 874-884.

53. *V. S. Ryaben'kii, S. V. Tsynkov, and S. V. Utyuzhnikov.* Active Control of Sound with Variable Degree of Cancellation. // Applied Mathematics Letters. 2009.V. 22. №. 12. P. 1846-1851.

54. *Utyuzhnikov, S.V.* Active wave control and generalized surface potentials, \ J. Advances in Applied Mathematics, 2009, 43 (2): 101-112.

55. *В.С. Рябенький.* Метод разностных потенциалов и его приложения. М. Физматлит. 2010. 3-е дополненное издание

56. *Рябенький В.С.* Идея использования слабого шума для управления подавлением сильного шума в экранируемой подобласти в реальном времени. // Доклады РАН. 2010. Т.430, № 2. С. 166-168

57. *В.С. Рябенький.* Разностная модель активного экранирования заданной подобласти от шума внешних источников в текущем времени. //ЖВМ и МФ, 2011. Т.51. № 3. С.480-491.

58. *В.С. Рябенький.* Синхронная разведка для управления подавлением внешнего шума в трехмерной подобласти в реальном времени. // ЖВМ и МФ 2011. Т.51. № 10. С.1889-1904.

59. *В.С. Рябенький.* Подавление в реальном времени шума в защищаемой подобласти трехмерного пространства на основе информации от синхронной разведки шумом. //Доклады РАН, 2011. Т.439. № 3. С.319-322.