ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2012 г.

Рябенький В.С.

Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рябенький В.С. Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 11. 32 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-11

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша РАН

В.С.Рябенький

Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях

Москва, 2012 год

Теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях
В.С.Рябенький
Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Аннотация

Излагается математическая теория управления решениями систем линейных разностных уравнений в составных областях, предложенная автором. Теория ориентирована на то, чтобы служить математической моделью технических устройств для управления звуком, в частности, защитой данной подобласти («комната с открытым окном») от внешнего («уличного») шума.

The theory of controlling solutions of linear difference schemes in composite regions
V.S.Ryaben’kii
The Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

Abstract

The mathematical theory to control the solutions of systems of linear difference equation in composite regions is considered. The theory suggested by author is oriented to be mathematical model of technical devices for controlling the sound, particularly, protect the given subregion ("the room with open window") against external ("street") noise.

Предисловие

Излагаемая математическая теория управления решениями линейных разностных схем в составных областях возникла в результате обдумывания и обобщения вопросов, наглядными примерами которых являются следующие два вопроса.

Вопрос 1. В комнате с открытым окном беседуют люди. Можно ли создать устройство, снабженное микрофонами, компьютером и динамиками, которые вставляются в проем окна, с помощью микрофонов улавливает суммарный («разговор + уличный шум») звук, перерабатывает эту информацию с помощью компьютера и с помощью дополнительных звуков динамиков полностью подавляет или ослабляет составляющую уличного шума в акустическом поле внутри комнаты?

Ответ на первый вопрос: можно. Ответ кажется ошибочным. Требование влиять на одно шумовое слагаемое (подавить или ослабить это слагаемое) на основе информации от микрофонов о сумме слагаемых «звук + шум» похоже на требование найти первое слагаемое x, зная только сумму $5 = x + y$. Сумма $5 = x + y$ не содержит информации о значениях x и y в отдельности.

Однако, построенная теория показала, что для создания требуемого устройства нет принципиальных препятствий, а аналогия с задачей определить x по сумме $x + y$ лишь кажущаяся.

Вопрос 2. Ответив на первый вопрос положительно, можно ли надеяться, что будет создан такой вариант технического устройства для ослабления уличного шума в комнате, который можно купить в хозяйственном магазине, зная лишь размеры окна, затем вставить его в проем окна и без дальнейших забот включить в электрическую сеть, подобно кондиционеру?

Ответ на второй вопрос: да, можно. На первый взгляд, кажется, что ответ должен был бы быть «нет, нельзя» исходя из следующих «информационных» соображений. Помимо размеров окна для размещения устройства в окне для выработки динамиками экранирующего комнату от уличного шума сигналы динамиков надо как-то «сообщить» устройству и учесть при выработке сигнала динамиков обстановку вдали от окна, а именно, форму комнаты и мебель в комнате; рельеф местности; расположение домов; погоду в окружающей комнату части пространства. Все эти условия надо учесть, так как сигнал динамиков, выработанный без использования этой информации, будет вызывать различный звук, подобно тому, как пение одного и того же певца звучит по разному в зависимости от акустики концертного зала.

В построенной теории показано, что необходимость учитывать обстановку вдали от проема окна действительно имеет место, но не является непреодолимым препятствием для создания технического устройства, которое можно просто вставить в проем окна и включить в сеть. Конкретнее, в теории будет показано, что в процесс управления подавлением шума в комнате можно встроить такое воздействие на окружающую проем окна среду, которое не только подавляет шум в комнате, но еще играет роль разведки среды вдали от проема окна. Эта разведка вызывает такую реакцию среды, которая улавливается микрофонами устройства и перерабатывается компьютером для выработки требуемых сигналов динамиков.

Итак, мы сделали следующие два утверждения:

1^0. Показано, что по информации микрофонов о суммарном звуке можно выработать сигналы динамиков, ослабляющие шумовое слагаемое в акустическом поле внутри комнаты.

2^0. Всю нужную для ослабления шума в комнате информацию можно получить, наблюдая за управляемым полем вблизи проема окна, то есть на границе между комнатой и улицей.

Следует подчеркнуть, что оба эти утверждения в рамках излагаемой теории строго сформулированы и доказаны в виде теорем. Что касается возможности создать технические устройства, для которых изложенная ниже теория управления является математической моделью, то эта возможность остается лишь правдоподобной гипотезой. К настоящему моменту существует только одно техническое устройство, которое подавляет шум в ситуации, когда суммарное акустическое поле, подлежащее управлению, в точках границы между подобластями заранее известно. Это устройство работает в хорошем согласии с теорией, модифицированной и конкретизированной для этого случая [6], [10].

Глава 1. Формулы управления при известной ключевой информации о целях управления.

В этой главе будут поставлены задачи управления для достижения поставленных желательных изменений. Получены формулы управления в предположении, что известна ключевая информация.

Будут приведены также необходимые сведения о разностных потенциалах, составляющие основу излагаемой теории управления.

§ 1. Необходимые сведения о разностных потенциалах.

Рассмотрим разностную схему вида

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \quad m \in M . \tag{1.1}$$

Здесь M – конечное множество индексов m. Каждому $m \in M$ сопоставлено конечное множество N_m индексов n, которое будем называть шаблоном разностной схемы в точке m. Каждому $m \in M$ сопоставлено также число или вектор f_m, скалярные или матричные коэффициенты $a_{m,n}$, $m \in M$, $n \in N_m$. Каждой точке $n \in N_m$ сопоставлено искомое число или вектор u_n. Совокупность допустимых векторов f_m, $m \in M$, образует линейное пространство F_M.Совокупность функций $u_N = \{u_n\}$, $n \in N = \bigcup N_m$, для которых определена левая часть уравнения (1.1), образует линейное пространство V_N.

Относительно всех элементов, входящих в (1.1), предполагается только, что схема (1.1) имеет одно и только одно решение $u_N \in V_N$ при произвольной правой части $f_M \in F_M$.

Пусть M^+, $M^+ \subset M$, некоторое подмножество множества M.
Обозначим $M^- = M \setminus M^+$; $N^+ = \bigcup N_m$ $N^+ = \bigcup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \bigcup N_m$, $m \in M^-$, $\gamma = N^+ \bigcap N^-$.

Сеточное множество γ назовем сеточной границей между сеточными подобластями N^+ и N^-.

Обозначим V_γ линейное пространство сужений функций $v_N \in V_N$ на подмножество $\gamma \subset N$.

Определение. Разностным потенциалом $w_N = P^-_{N\gamma} v_\gamma$ с плотностью $v_\gamma \in V_\gamma$ будем называть решение w^-_N задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w^-_n = g^-_m, \; m \in M,$$

где

$$g^-_M = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^- \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn} \theta_N(\gamma) v_n, \text{ если } m \in M^+ \end{cases}$$

и

$$\theta_N(\gamma) v_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \notin \gamma \\ v_n, \text{ если } n \in \gamma \end{cases}$$

Разностным потенциалом w^+_N с плотностью $v_\gamma \in V_\gamma$ будем называть решение задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} w^+_n = g^+_m, \; m \in M,$$

где

$$g^+_M = \begin{cases} \sum\limits_{n \in N} a_{mn} \theta_N(\gamma) v_n, \text{ если } m \in M^- \\ 0, \text{ если } m \in M^+ \end{cases}$$

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим задачу

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u^-_n = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^- \\ f_m, \text{ если } m \in M^+ \end{cases},$$

а также задачу

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n^+ = \begin{cases} f_m, \text{ если } m\in M^- \\ 0, \text{ если } m\in M^+ \end{cases}$$

Очевидно имеет место равенство $u_N = u_N^- + u_N^+$.

Пусть $u_\gamma = u_\gamma^- + u_\gamma^+$ есть сужение решения u_N задачи (1.1) на γ, $\gamma\subset N$. Очевидно, $u_\gamma \in V_\gamma$ и поэтому может служить плотностью потенциалов $\mathrm{P}_{N\gamma}^- u_\gamma$ и $\mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma$.

Справедливы формулы

$$w_n^- = \mathrm{P}_{N\gamma}^- u_\gamma \begin{cases} u_n^-, \text{ если } n\in N^- \\ -u_n^+, \text{ если } n\in N^+\setminus\gamma \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$w_n^+ = \mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma \begin{cases} -u_n^-, \text{ если } n\in N^-\setminus\gamma \\ u_n^+, \text{ если } n\in N^+ \end{cases} \qquad (1.3)$$

Подробное изложение теории разностных потенциалов, и, в частности, доказательства приведенных формул содержится в [14].

§ 2. Формулы управления при известной ключевой информации о целях управления.

В этом параграфе будут даны определения целям управления решениями разностной схемы (1.1) и ключевой информации о целях управления. Будут построены формулы управления при известной ключевой информации о целях управления.

Будут указаны также некоторые способы получения ключевой информации, а также проведено сравнение этих способов между собой с точки зрения их пригодности для использования в математических моделях технических устройств для управления звуком.

Определение управлений и целей управления.

Пусть заданы разностная схема вида

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \qquad m\in M \qquad (2.1)$$

и произвольная функция z_N, $z_N \in V_N$.

Определение. Будем говорить, что z_N есть целевая функция управления, а функция $g_M \in F_M$ есть управление, переводящее решение u_N задачи (1.1) в целевую функцию z_N, если z_N является решением задачи

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m , \quad m \in M \tag{2.2}$$

Теорема 1. Какова бы ни была целевая функция z_N существует одно и только одно управление g_M, переводящее решение u_N задачи (1.1) целевую функцию z_N.

Доказательство. Очевидно, что g_M, $m \in M$, однозначно вычисляется по заданной функции z_N в силу формулы

$$g_m = \sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n - f_m , \quad m \in M . \tag{2.3}$$

Теорема доказана.

Вклады влияния источников, локализованных в подобластях, на решение.

Наряду с задачей (1.1) рассмотрим следующие две задачи

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} u_n^- = \theta_M\left(M^+\right) f_m , \quad m \in M \tag{2.4}$$

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} u_n^+ = \theta_M\left(M^-\right) f_m , \quad m \in M \tag{2.5}$$

Здесь и далее $\theta_Y\left(X\right)$, $X \subset Y$, характеристическая функция подмножества X множества Y.
Очевидно, ввиду линейности задач (1.1) , (2.1) и (2.2) имеет место равенство

$$u_N = u_N^- + u_N^+ , \tag{2.6}$$

Слагаемое u_N^- есть в силу (2.1) вклад в решение u_N влияния источников f_m, локализованных в точках $m \in M^+$ в решение u_N.
Слагаемое u_N^+ есть соответственно вклад влияния f_m, $m \in M^-$.

§ 3. Рассматриваемые цели управления.

В дальнейшем в качестве целей управления будем рассматривать функции $z_N \in V_N$, имеющие вид

$$z_n = z_n\left(A^-, A^+\right) = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, \text{ если } n \in N^- \\ u_n^- + A^+ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь A^- и A^+ - два независимых вещественных параметра.
В соответствии с формулой (2.6) имеет место равенство $z_N\left(1,1\right) = u_N$.

Управление g_M, переводящее u_N в $z_N\left(A^-,A^+\right)$, будем обозначать

$g_M \equiv g_M\left(A^-,A^+\right)$.

В частности, если $A^- = 0$, то вклад влияния источников f_m, локализованных в точках $m \in M^+$, в решение $z_N\left(A^-,A^+\right)$, под влиянием управления $g_M\left(0,A^+\right)$ полностью подавляется.

§ 4. Определение ключевой информации.

Определение. Ключевой информацией для управления переходом от u_N к $z_N\left(A^-,A^+\right)$ будем называть ту функцию $w_\gamma\left(A^-,A^+\right) \in V_\gamma$ из пространства

V_γ плотностей потенциалов V_γ, о которой известно, что она совпадает с функцией

$$w_n\left(A^-,A^+\right) = \left(A^- - 1\right)u_n^- + \left(1 - A^+\right)u_n^+, \qquad n \in \gamma, \tag{4.1}$$

Замечание 1. Подчеркнем, что в силу введенного определения ключевой информации эта информация задана, если известны значения w_n в точках n, $n \in \gamma$, а также сам факт выполнения равенства (4.1), но функции u_γ^- и u_γ^+ могут быть неизвестны. Так, например, ключевая информация

$$w_\gamma\left(0,2\right) = \left(0-1\right)u_\gamma^- + \left(1-2\right)u_\gamma^+ = -u_\gamma^- - u_\gamma^+ = -u_\gamma$$

задана, если известно сужение u_γ решения u_N на границу $\gamma = N^+ \bigcap N^- \subset N$. Но значения функций u_γ^- и u_γ^+ остаются неизвестными и могут быть различными для различных разностных схем (1.1).

Замечание 2. Если для системы (1.1) известны u_n^- и u_n^+, $n \in \gamma$, то ключевая информация $w_\gamma = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+$ для управления $g_M\left(A^-,A^+\right)$ при любых A^+ и A^- известна и задается формулой (4.1).

§ 5. Формулы управления при известной ключевой информации.

Теорема 2. Управление $g_M\left(A^-,A^+\right)$, переводящее u_N в $z_N\left(A^-,A^+\right)$, в случае заданной ключевой информации $w_\gamma\left(A^-,A^+\right)$может быть вычислено по формуле

$$g_m\left(A^-,A^+\right)=\begin{cases} 0, \text{ если } m\in M^- \\ \sum\limits_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N\left(\gamma\right)w_n\right], \text{ если } m\in M^+ \end{cases}. \tag{5.1}$$

Доказательство. Из формулы для (1.2) разностного потенциала $\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(u_\gamma\right)$ с плотностью $u_\gamma=u_\gamma^++u_\gamma^-$,

в случае $u_\gamma=u_\gamma^-+o_\gamma=u_\gamma^-$ следует

$$\left.\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(u_\gamma^-\right)\right|_n=\begin{cases} u_n^-, \text{ если } n\in N^- \\ 0, \text{ если } n\in N^+\setminus\gamma \end{cases} \tag{5.2}$$

Аналогично, из (1.2) в случае $u_\gamma=o_\gamma+u_\gamma^+=u_\gamma^+$ следует

$$\left.\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(u_\gamma^+\right)\right|_n=\begin{cases} 0, \text{ если } n\in N^- \\ -u_n^+, \text{ если } n\in N^+\setminus\gamma \end{cases} \tag{5.3}$$

Далее, решение $u_N\in V_N$ задачи

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}v_n=g_m, \quad m\in M, \tag{5.4}$$

где g_m, $m\in M$, задано формулой (5.1), в соответствии с определением разностного потенциала $\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(w_\gamma\right)$, $w_\gamma\in V_\gamma$, совпадает с этим разностным потенциалом

$$v_n=\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(w_\gamma\right) \tag{5.5}$$

В силу равенства (4.1) формулу (5.5) можно переписать так

$$v_n=\left(A^--1\right)\left.\mathrm{P}_{N\gamma}^-\left(u_\gamma^-\right)\right|_n+\left(1-A^+\right)\left.\left(\mathrm{P}_{N\gamma}^-u_\gamma^+\right)\right|_n \tag{5.6}$$

Из (5.6) в силу (5.2) и (5.3) следует

$$v_n=\begin{cases} \left(A^--1\right)u_n^-, \text{ если n} \in \mathrm{N}^- \\ o+\left(A^+-1\right)u_n^+, \text{ если n} \in \mathrm{N}^+\backslash\gamma \end{cases}, \tag{5.7}$$

но решение $z_N\left(A^-,A^+\right)$ задачи

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}z_n=f_m+g_m, \quad m\in M \tag{5.8}$$

в виду линейности этой задачи выражается формулой

$$z_n=u_n+v_n, \quad n\in N \tag{5.9}$$

В силу $u_n \equiv u_n^- + u_n^+$ и формулы (5.6) формула (5.9) совпадает с формулой

$$z_n\left(A^-, A^+\right) = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, \text{ если } n \in N^- \\ u_n^- + A^+ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{5.10}$$

Итак, управление (5.1) приводит к формуле (5.10), которая связывает между собой функции $z_N\left(A^-, A^+\right), u_N^-$ и u_N^+.

Замечание 3. Подчеркнем, что утверждение о наличии связи (5.10) между $z_N\left(A^-, A^+\right), u_N^-$ и u_N^+ не предполагает, что эти функции известны.

В § 2 была получена формула управления (2.3), переводящего u_N в произвольную наперед заданную функцию z_N. Эта формула (2.3) имеет смысл, в частности, и в том случае, когда в качестве z_N рассматривается функция вида (3.1). С другой стороны наряду с тривиальной формулой управления (2.3) мы получили для перехода от u_N к функции $z_N\left(A^-, A^+\right)$, являющейся целью управления, еще и формулу (5.1). Обе формулы (2.3) и (5.1) приводят к одному и тому же управлению $g_m\left(A^-, A^+\right)$. Сопоставим эти формулы.

Для вычисления $g_M\left(A^-, A^+\right)$ по тривиальной формуле (2.3) требуется знать целевую функцию $z_N\left(A^-, A^+\right)$.

Для вычисления $z_N\left(A^-, A^+\right)$ было бы достаточно знать полную информацию о схеме (1.1), а именно,

$$M;\ N_m,\ m \in M;\ N = \bigcup N_M,\ m \in M;\ a_{mn};\ f_m,\ m \in M,\ n \in N_M, \tag{5.11}$$

а также задать числа A^-, A^+.
Заметим, что при заданных числах A^-, A^+ и полных данных (5.11) о схеме (1.1) можно вычислить u_γ^-, u_γ^+ и ключевую информацию
$w_\gamma\left(A^-, A^+\right) = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+$, а затем для вычисления $g_M\left(A^-, A^+\right)$ воспользоваться формулой (5.1).

Однако знание полной информации (5.11) для отыскания ключевой информации $w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$ не всегда обязательно. Так, мы видели, что для любой схемы (1.1), сужение u_γ, $u_\gamma = u_N\big|_\gamma$, на границу γ, $\gamma \subset N$, всегда определяет ключевой информацией $w_\gamma(0,2) = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+ = -u_\gamma$.

Если ключевая информация $w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$ уже получена каким угодно способом, то для построения управления $g_M\left(A^-, A^+\right)$ по формуле (5.1) уже не требуется ни полная информация (5.11) , ни громоздкая обработка этой информации для вычисления $z_N\left(A^-,A^+\right)$.

Как мы показали, по числам A^-,A^+ и полной информации (5.11) можно вычислить ключевую информацию, но очевидно, что ключевая информация является лишь следствием полной информации, и по ключевой информации нельзя ни найти полную информацию, ни определить функцию $z_N\left(A^-,A^+\right)$, являющуюся целью управления. Можно лишь найти управление $g_M\left(A^-,A^+\right)$, действие которого приводит к переходу от решения u_N к решению $z_N\left(A^-,A^+\right)$, о котором известно, что $z_N\left(A^-,A^+\right)$ связано с $u_N=u_N^-+u_N^+$ равенствами

$$z_n=\begin{cases}A^-u_n^-+u_n^+, & \text{если } n\in N^-\\ u_n^-+A^+u_n^+, & \text{если } n\in N^+\setminus\gamma\end{cases}$$

Но при этом все три функции $z_N\left(A^-,A^+\right)$, u_n^-,u_n^+, $n\in N$ остаются неизвестными.

§ 6. Второй вариант расположения управляющих источников.

Управление $g_M\left(A^-,A^+\right)$ решением u_N управления (1.1) есть функция, которая может быть вычислена по ключевой информации $w_\gamma\left(A^-,A^+\right)$ по формуле (5.1). Из формулы (5.1) видно, что $g_M\left(A^-,A^+\right)$, $m\in M$, может отличаться от нуля только в тех точках *m*, которые принадлежат множеству $M^+\bigcap\left(N_m\bigcap\gamma\right)$, то есть в тех точках *m*, которые принадлежат M^+, $m\in M^+$, и для которых шаблон N_m, пересекается с границей γ, $N_m\bigcap\gamma$.

Можно перенести источники управляющего воздействия из множества M^+ в некоторые точки $m\in M^-$ $N_m\bigcap\gamma$ и воспользоваться этим новым управлением, которое обозначим $g_M^*\left(A^-,A^+\right)$.

Теорема. Управление $g_M^*=g_M^*\left(A^-,A^+\right)$, задаваемое формулой

$$g_m^*\left(A^-,A^+\right)=\begin{cases}\sum\limits_{n\in N_m}a_{mn}\left[\theta_N\left(\gamma\right)w_\gamma^*\right], & \text{если } m\in M^-\\ 0, & \text{если } m\in M^+\end{cases} \tag{6.1}$$

где
$$w_n^*=\left(1-A^-\right)u_n^-+\left(A^+-1\right)u_n^+,\quad n\in\gamma \tag{6.2}$$

преобразует решение u_N задачи (1.1) в решение

$$z_n^* = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma \\ u_n^- + A^+ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \end{cases} \tag{6.3}$$

задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n^* = f_m + g_m^*, \qquad m \in M \tag{6.4}$$

Доказательство. Заметим, что решение v_N^* задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^* = g_m^* \ , \qquad m \in M \tag{6.5}$$

В соответствии с определением потенциала $\mathrm{P}_{N\gamma}^+ \xi_\gamma$ с плотностью $\xi_\gamma \in V_\gamma$ есть функция

$$v_N^* = \mathrm{P}_{N\gamma}^+ w_\gamma^* . \tag{6.6}$$

Из (6.2) и (6.6) следует

$$v_N^* = \left(1 - A^-\right) \mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma^- + \left(A^+ - 1\right) \mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma^+ \tag{6.7}$$

В силу формулы

$$\mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma = \begin{cases} -u_n^-, \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma \\ \ \ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \end{cases}$$

справедливы также формулы

$$\mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma^- = \begin{cases} -u_n^-, \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma \\ \ \ 0, \text{ если } n \in N^+ \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\mathrm{P}_{N\gamma}^+ u_\gamma^+ = \begin{cases} 0, \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma \\ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \end{cases} \tag{6.9}$$

Из (6.7), (6.8), (6.9) следует

$$v_n^* = \begin{cases} \left(A^- - 1\right) u_n^-, \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma \\ \left(A^+ - 1\right) u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \end{cases} \tag{6.10}$$

В силу (6.4)

$$z_n^* = u_n + v_n^*, \quad n \in N \tag{6.11}$$

Учитывая $u_n \equiv u_n^- + u_n^+$, $n \in N$, а также (6.9) и (6.10), из (6.11) получаем, что решение z_N^* задачи (6.4) есть функция (6.3), что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что z_N и z_N^*, полученные из u_N под воздействием управлений (5.1) и (6.1), могут отличаться только в точках *n* границы γ.

§ 7. Первое техническое устройство для подавления шума.

Первое техническое устройство, реализующее изложенную математическую модель применительно к задаче защиты акустического поля в одной половине отрезка трубы от влияния источников звука, расположенных во второй ее половине, создано в Манчестерском университете при $A^- = 0$ и $A^+ = 2$.

Ключевая информация $w_\gamma(0,2) = -u_\gamma$ при этом задана до начала управляющего процесса. Эта информация записывается при первой вспомогательной реализации исходного процесса, когда на процесс не оказывается какого-либо управляющего воздействия.

Натурные эксперименты, проведенные с помощью этой установки, показали хорошее согласование результатов с теоретическими ожиданиями.

Указанная установка, а также необходимая для этого конкретизация и модификация теории осуществлены под руководством С.В.Утюжникова в Манчестерском университете [6], [10].

Глава 2. Управление со встроенной текущей разведкой ключевой информации.

В гл.1 мы получили формулы для управляющего воздействия $g_M\left(A^-, A^+\right)$ на решения u_N задачи вида

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M,$$

которое переводит процесс u_N в процесс z_N,

$$z_n = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, \text{ если } n \in N^- \\ u_n^- + A^+ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases},$$

удовлетворяющий уравнению

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m, \quad m \in M.$$

Здесь A^- и A^+ - два вещественных параметра.

Формула для $g_M\left(A^-, A^+\right)$ позволяет вычислить значения g_m, $m \in M$, с помощью нескольких арифметических операций при каждом *m*, если известна ключевая информация $w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$ об управляемом процессе при заданных значениях A^- и A^+. Таким образом, выработка управляющего импульса $g_M\left(A^-, A^+\right)$ редуцирована к задаче своевременного отыскания ключевой информации, состоящей в знании функции $w_\gamma = w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$, которая связана с u_γ^- и u_γ^+ формулой

$$w_\gamma\left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+ .$$

При этом не предполагается, что известны оба слагаемых, входящих в правую часть последнего равенства.

В гл. 1 были приведены примеры, иллюстрирующие управление на базе заранее известной ключевой информации. Среди этих примеров наиболее важным является физическое устройство, созданное в Манчестере, работающее в хорошем соответствии с теорией. Напомним, что это устройство работает в предположении, что ключевая информация задана до начала управляемого процесса. Эта информация записана при предварительной реализации подлежащего управлению процесса. В приложениях такое повторное управляемое течение процесса может быть полезно, например, с целью очистки акустического поля в защищаемой подобласти от засоряющего это поле шума.

Однако в важном для приложений случае, когда подлежащий управлению процесс, который моделирует разностная схема, протекает однократно в реальном времени, ключевая информация о цели управления недоступна прямому физическому измерению. Примером такой задачи может служить уже упоминавшаяся задача о защите акустического поля в комнате с открытым окном, где разговаривают люди, от шума уличного транспорта.

Перечислим некоторые причины, по которым ключевая информация $w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$ об управляемом процессе недоступна прямому наблюдению даже в случае, когда разностная схема имеет смысл разностной модели распространения звука. Ограничимся рассмотрением этих причин в случае $A^- = 0,\ A^+ = 2$, когда

$$w_\gamma\left(A^-, A^+\right) = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+ = -u_\gamma^- - u_\gamma^+ = -u_\gamma .$$

Ввиду того, что процесс протекает однократно, нет возможности измерить и записать $w_\gamma\left(0,2\right) = -u_\gamma$ еще до начала управляемого процесса, проводя предварительную реализацию процесса без управляющего воздействия. Нельзя измерить ключевую $w_\gamma = -u_\gamma$ информацию непосредственно не только заранее, но и в текущий момент однократно протекающего процесса. В самом деле, если предположить, что это можно сделать, то возникает следующее противоречие. Пусть управление $g_m\left(0,2\right)$, подавляющее шум в сеточной области N^-, построено при $m_t < p$. Тогда исходного акустического поля $-u_\gamma$, которое и есть $w_\gamma\left(0,2\right) = -u_\gamma$, к текущему моменту времени не существует: оно заменилось тем полем, которое возникло в результате управляющего воздействия за время $t < p\tau$.

Конечно, если бы об исходной схеме

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \quad m \in M$$

в текущий момент времени $t = p\tau$ были бы известны ее коэффициенты a_{mn}, правая часть f_m, $m_t < p$, то можно было бы вычислить

$$w_\gamma\left(A^-, A^+\right) = -u_\gamma, \quad n \in \gamma, \quad n_t \le p,$$

в силу разностной схемы. Однако, это трудоемко, а потому решение системы для отыскания u_γ и g_m к текущему моменту времени $t = p\tau$ трудно успеть осуществить.

Кроме трудоемкости, трудность еще и в том, что, скажем, в рассматриваемом примере (о защите комнаты от уличного шума) практически невозможно полностью построить разностную схему (1.1), моделирующую процесс. В самом деле, невозможно учесть форму комнаты и свойства обоев, определяющих граничные условия, передвижения разговаривающих в комнате людей; невозможно полностью учесть конфигурацию и расположение здания; невозможно знать коэффициенты a_{mn}, характеризующие состояние среды (дождь, туман, снег) в каждой точке в каждый момент времени.

Реально доступны прямому наблюдению только среда, то есть a_{mn} и значения z_n управляемого поля вблизи границы $\gamma = N^- \bigcap N^+$ в текущий момент времени.

Таким образом, требование к теории управления звуком и шумом в составной области быть математической моделью соответствующих технических устройств диктует поиски таких способов получения ключевой информации, которые получаются при обработке данных, полученных наблюдениями за управляемым полем z_N вблизи границы, то есть «приграничных данных».

Однако ниже будет показано, что одних только приграничных данных недостаточно для построения управлений $g_M\left(A^-, A^+\right)$ в случае если $A^- = 0$.

Поэтому при управлении на основе одной только приграничной информации приходится отказаться от цели полного подавления шума. Приходиться искать возможность лишь ослабить шум, то есть убрать $z_N\left(A^-, A^+\right)$ при малых значениях A^-, $A^- = \varepsilon \ne 0$.

Оказалось, что такая возможность существует, и мы это покажем и будем использовать это ниже.

Допущенный хотя бы слабый шум вызывает такие изменения приграничных данных, в результате которых эти данные, оставаясь доступными наблюдениям, станут еще и достаточными для своевременного вычисления текущей ключевой информации, поддерживающей заданный ход $z_N\left(A^-,A^+\right)$управляемого процесса.

§ 1. Разностные схемы и постановки задач.

Для простоты изложения мы будем использовать две простейшие разностные схемы, аппроксимирующие следующие две начально-краевые задачи для волнового уравнения, отвечающие значениям $\alpha=0$ и $\alpha=1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\varphi\left(t,x,y\right)\;,\quad (t,x,y)\subset D, \tag{1.1}$$

где

$$D<\left\{\left(t,x,y\right)\right| \qquad |x|<1,\;|y|<1,\quad 0<t<T\;.$$

$$u\left(0,x,y\right)=\varphi^{(0)}\left(x,y\right),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi^{(1)}\left(x,y\right) \tag{1.2}$$

$$u\left(t,x,y\right)=\psi\left(t,x,y\right),\quad \text{если } x=-1,\quad \text{или } y=-1,\quad \text{или } y=1 \tag{1.3}$$

$$\alpha u\left(t,1,y\right)+\left(1-\alpha\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=\psi\left(t,1,y\right) \tag{1.4}$$

Здесь $\varphi\left(t,x,y\right)$, $\varphi^{(0)}\left(x,y\right)$, $\varphi^{(1)}\left(x,y\right)$, $\psi\left(t,x,y\right)$ - заданные функции.

В области *D*, то есть в параллелепипеде $D=\left\{|x|<1;|y|\le 1,0\le t<T\right\}$, где определены решения волнового уравнения (1.1), вводим подобласть $D^+=\left\{\left(t,x,y\right)\right|,\;x^2+y^2<1,\;0\le t<T\right\}$.

1⁰. Сетка и разностная схема.

Для построения разностных схем, аппроксимирующих задачи (1.1)-(1.4) при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ и имеющих вид

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n=f_m,\quad m\in M \tag{1.5}$$

Введем сетку точек $m=\left(m_t\tau,m_xh,m_yh\right)$с координатами $t=m_t\tau$, $x=m_xh$, $y=m_yh$, где $h>0$ и $\tau>0$ - шаги сетки, а m_t,m_x,m_y - всевозможные целые числа или нуль. Обозначим *M* совокупность точек $m=\left(m_t\tau,m_xh,m_yh\right)$, лежащих либо внутри параллелепипеда *D*, либо на его основании, либо на его сторонах $x=\pm1$, $y=\pm1$. Для аппроксимации волнового уравнения (1.1) каждой точке *m* сетки, лежащей строго внутри *D*, сопоставим разностное уравнение

$$u_{t\bar{t}} - \left(u_{x\bar{x}} + u_{y\bar{y}}\right)\Big|_m = \varphi_m \ , \qquad m \in D , \qquad m \in \partial D \ , \qquad (1.6)$$

где $u_{t\bar{t}}, u_{x\bar{x}}, u_{y\bar{y}}$ - разделенные симметричные разностные отношения, вычисленные в точке $m = \left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right)$ и аппроксимирующие $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ соответственно в точке m.

Соотношение (1.6) связывает значения сеточной функции $\{u_n\}$, аппроксимирующей решение задачи (1.1)-(1.4), в следующих семи точках множества N_m разностной схемы (1.6)

$$\begin{gathered} N_m = \left\{n = \left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right), n = \left[\left(m_t \pm 1\right)\tau, m_x h, m_y h\right],\right. \\ n = \left[m_t\tau, \left(m_x \pm 1\right)h, m_y h\right], n = \left[m_t\tau, m_x h, \left(m_y \pm 1\right)h\right] \end{gathered} \qquad (1.7)$$

Множество N_m, состоящее из семи точек (1.7), назовем шаблоном разностной схемы (1.5) во внутренней точке сетки $m \in D$, параллелепипеда D. Разностное уравнение (1.6) можно записать теперь в виде (1.5) в этой точке m сетки, положив

$$a_{mn} = \begin{cases} \tau^{-2}, \text{ если } n_t = m_t \pm 1 \\ -h^{-2}, \text{ если } n_x = m_x \pm 1 \text{ или } n_y = m_y \pm 1 \\ 4h^{-2} - 2\tau^{-2}, \text{ если } n = m \end{cases} \qquad (1.8)$$

$$f_m = \varphi\left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right) \qquad (1.9)$$

Начальные условия (1.2) дифференциальной задачи в точке $m = \left(0, m_x h, m_y h\right)$ сетки M аппроксимируем разностными начальными условиями

$$\begin{gathered} u_m = \varphi^{(0)}\left(m_x h, m_y h\right) \ , \qquad m_t = 0 \, , \qquad m \in M \\ \left[u_{\left(\tau, m_x h, m_y h\right)} - u_{\left(0, m_x h, m_y h\right)}\right]\tau^{-1} = \varphi^{(1)}\left(m_x h, m_y h\right) \end{gathered} \qquad (1.10)$$

Два скалярных равенства (1.10), выражающих разностные начальные условия, можно записать теперь в виде

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m , \qquad m = \left(0, m_x h, m_y h\right), \qquad m \in M \ , \qquad (1.11)$$

положив

$$N_m = \left\{n = \left(0, m_x h, m_y h\right), n = \left(\tau, m_x h, m_y h\right)\right. \qquad (\ 1.12)$$

$$a_{mn} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau^{1} \end{pmatrix}, \text{ если } \quad n = \left(0, m_x h, m_y h\right) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \tau^{-1} \end{pmatrix}, \text{ если } \quad n = \left(\tau, m_x h, m_y h\right) \end{cases} \tag{1.13}$$

Условие (1.3) для волнового уравнения (1.1) аппроксимируем в точках $m = \left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right)$, лежащих на границах $x = -1$, $|y| = 1$ параллелепипеда *D*, условиями

$$u_n = \psi\left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right), \quad \text{если } n{=}m, \quad m_x h = -1 \text{ или } \left|m_y h\right| = 1. \tag{1.14}$$

Далее, сопоставим точке *m* шаблон N_m, состоящий из одной точки *n*=*m*,

$$N_m = \{n = m\} \tag{1.15}$$

Теперь условие (1.14) можно записать в виде (1.5), положив

$$a_{mn} = a_{mm} = 1, \quad \text{если } m_x h = -1, \quad \text{или } m_y h = \pm 1 \tag{1.16}$$

$$f_m = \psi\left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right)$$

Наконец условие (1.3) для волнового уравнения на боковой границе $x = 1$ аппроксимируем в точке $m = \left(m_t\tau, 1, m_x h\right) \in M$ сетки равенством

$$\alpha u_{\left(m_t\tau,1,m_y h\right)} + \left(1-\alpha\right)\left[u_{\left(m_t\tau,1,m_y h\right)} - u_{\left(m_t\tau,1-h,m_y h\right)}\right]h^{-1} = \psi_{\left(m_t\tau,1,m_y h\right)} \tag{1.17}$$

Запишем уравнение (1.17) в виде (1.5), положив шаблон N_m состоящим из двух точек

$$N_m = \{n|_{n=m_t\tau,1-h,m_y h} \tag{1.18}$$

$$a_{mn} = \begin{cases} \alpha + \left(1-\alpha\right)h^{-1}, \text{ если } \quad n = \left(m_t\tau, 1, m_y h\right) \\ -\left(1-\alpha\right)h^{-1}, \text{ если } \quad n = \left(m_t\tau, 1-h, m_y h\right) \end{cases} \tag{1.19}$$

$$f_m = \psi\left(m_t\tau, 1, m_y h\right)$$

После введения всех этих обозначений (1.5)-(1.10) для N_m, a_{mn}, f_m построенные выше простейшие разностные схемы, аппроксимирующие две задачи (1.1) –(1.4) для волнового уравнения при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, запишутся в виде (1.5).

Разностная схема (1.5) имеет одно и только одно решение при любой правой части f_m, поскольку только обозначениями отличается от простейших разностных схем в случае $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$, для которых существование и единственность очевидны.

Таким образом, разностная схема (1.5) как при $\alpha = 1$, так и при $\alpha = 0$ принадлежит к классу разностных схем, для которых построены разностные потенциалы, обладающие установленными выше свойствами.

2[0]. Разностные задачи в составной области.

Введем в множество M, $M \subset D$, сеточное подмножество M^+, $M^+ \subset M$, состоящее из точек $m = \left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right)$, лежащих внутри или на границе подобласти $D^+ = \left\{\left(t,x,y\right) \middle| \ x^2+y^2 \le \frac{1}{4}, \quad 0 \le t < T\right\}$ исходного параллелепипеда D. Тогда по общей схеме метода разностных потенциалов определятся подмножества $M^- = M \setminus M^+$; $N^+ = \bigcup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \bigcup N_m$, $m \in M^-$, граница $\gamma = N^- \bigcap N^+$, пространство плотностей V_γ и разностные потенциалы с плотностью v_γ, $v_\gamma \in V_\gamma$. Приобретает смысл представление решения u_N разностной схемы (1.1) в виде суммы

$$u_N = u_N^- + u_N^+,$$

где u_N^- и u_N^+ - соответственно вклады влияний источников f_m, $m \in M^+$ и f_m, $m \in M^-$ в решение u_N. Приобретает смысл задача построения управления $g_M\left(A^-, A^+\right)$, переводящего решение u_N задачи (1.5) в решение

$$z_n\left(A^-, A^+\right) = \begin{cases} A^- u_n^- + u_n^+, \text{ если } n \in N^- \\ u_n^- + A^+ u_n^+, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}$$

задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m\left(A^-, A^+\right).$$

Приобретет смысл и станет справедлива формула

$$g_M\left(A^-, A^+\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^- \\ \sum\limits_{n \in N_M} a_{mn}\left[\theta_N\left(\gamma\right) w_n\right], \text{ если } m \in M^+ \end{cases}$$

для управления $g_M\left(A^-, A^+\right)$, где функция w_γ

$$w_\gamma\left(A^-, A^+\right) = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+$$

есть ключевая информация о режиме $z_N\left(A^-, A^+\right)$, являющемся целью управляющего воздействия на первоначальный ход u_N процесса (1.5).

§ 2. Возможные базы данных для получения ключевой информации.

Перечислим и обсудим возможности использовать следующие три источника для отыскания ключевой информации $w_\gamma\left(A^-, A^+\right)$ для управления процессом u_N

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \qquad m\in M \tag{2.1}$$

с целью перевести этот процесс в процесс $z_N\left(A^-,A^+\right)$

$$z_n\left(A^-,A^+\right)=\begin{cases} A^-u_n^- + u_n^+, \text{ если } n\in N^- \\ u_n^- + A^+u_n^+, \text{ если } n\in N^+\setminus\gamma \end{cases}$$

1. Прямое измерение. Ключевая информация $w_\gamma\left(A^-,A^+\right)$ может оказаться доступной непосредственному измерению, если процессы или состояния u_N и $z_N\left(A^-,A^+\right)$ имеют физический смысл.

Пример. Пусть разностная схема

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \qquad m\in M$$

описывает электрический потенциал, создаваемый зарядами с плотностью f_m, $m\in M$. Пусть, далее, цель управления $z_N(0,1)$ или $z_N(0,2)$. В обоих случаях электрический потенциал $z_N(0,1)$ и $z_N(0,2)$ в точках $n\in N^-$ защищен от влияния зарядов f_m, $m\in M^+$. Ограничимся случаем, когда $f_m=0$ в точках $m\in M^-$, так что тогда $z_N(0,1)=z_N(0,2)$

$$z_N(0,1)=z_N(0,2)=\begin{cases} 0, \text{ если } n\in N^- \\ u_N^-, \text{ если } n\in N^+\setminus\gamma \end{cases}.$$

Ключевая информация в этом случае есть $w_\gamma\left(A^-,A^+\right)=\left(A^- -1\right)u_\gamma^- = -u_\gamma^-$. Значения $u_\gamma = -w_\gamma\left(A^-,A^+\right)$ можно измерить вольтметром, а затем вычислить $g_M\left(A^-,A^+\right)$.

Заметим, однако, применение прямого измерения ключевой информации далеко не всегда возможно. Даже в рассмотренном примере в случае отказа от условия $f_m\equiv 0$, $m\in M^-$ ключевую информацию $w_\gamma\left(A^-,A^+\right)$ нельзя было бы получить прямым измерением.

2. **Абстрактная разностная схема (2.1) полностью задана**, то есть известны

$$M;\quad N_m,\quad m\in M;\quad a_{mn},\quad m\in M,\quad n\in N_n,\quad f_m,\quad m\in M \tag{2.2}$$

В этом случае в принципе можно вычислить

u_N^-, u_N^+, $u_\gamma^- = u_N^-\big|_\gamma$; $u_\gamma^+ = u_N^+\big|_\gamma$ и ключевую информацию

$w_\gamma\left(A^-,A^+\right)=\left(A^- -1\right)u_\gamma^- + \left(1-A^+\right)u_\gamma^+$.

Препятствие состоит в том, что знание полной информации (2.2) в случае реальных физических задач может быть практически недоступно. Но даже если полная информация доступна, то ее обработка для вычисления u_γ^- и u_γ^+ может быть слишком трудоемка для своевременного получения ключевой информации и управляющего воздействия g_m.

3. Доступные приграничные данные в качестве базы данных для ключевой информации. В этом пункте мы будем иметь в виду задачу (1.1) для волнового уравнения, выбранную в качестве сравнительно простого примера.

Зададим число $a > 0$ и обозначим $M_{\gamma a}$ совокупность тех точек *m,* $m \in M$ расстояние которых до γ не превосходит a.

Определение 1. Приграничной сеточной полосой ширины *2a* назовем множество $N_{\gamma a}$, $N_{\gamma a} = \bigcup N_{\gamma a}$, $m \in M_{\gamma a}$. Будем предполагать, что $a > 0$ достаточно малое число, чтобы имело место включение $N_{\gamma a} \subset N$.

Определение 2. Приграничной информацией об управляемом процессе $z_N\left(A^-, A^+\right)$,

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m\left(A^-, A^+\right), \quad m \in M \tag{2.3}$$

будем называть следующий набор данных

$$M_{\gamma a}, \quad N_m, \quad f_m, \quad a_{nm}, \quad m \in M_{\gamma a}, \quad n \in N_m; \quad z_n, \quad n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}, \quad m_t = p \tag{2.4}$$

4. Смешанная база данных. Возможно совместное использование информации (2.3), заданной аналитически, а также информации (2.4), доступной прямым измерениям.

Пример. Рассмотрим задачу о подавлении внешнего шума, то есть об управлении переводящем режим u_N в $z_N\left(A^-, A^+\right)$, $A^- = 0$.

Будем предполагать дополнительно, что $f_m \equiv 0$, если $m \in M^-$. В этом случае $u_N^+ = o_N$, так что $z_N\left(A^-, A^+\right)$ не зависит от A^+:

$$z_N\left(0,1\right) = z_N\left(0,2\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } n \in N^- \\ u_n^-, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}.$$

$$u_n = u_n^+ + u_n^- = u_n^- \tag{2.5}$$

Далее, $w_\gamma\left(0, A^+\right) = w_\gamma\left(0,1\right) = w_\gamma\left(0,2\right) = -u_\gamma^- = -u_\gamma$.

Поэтому отсюда в случае $u_\gamma^+ = 0$

$$g_m(0,1)=g_m(0,2)=\begin{cases} 0, \quad \text{если } m\in M^- \\ \sum\limits_{n\in N_m} a_{mn}\left[\theta_N(\gamma)w_n\right], \text{ если } m\in M^+ \end{cases}$$

или, что то же самое

$$g_m(0,1)=g_m(0,2)=\begin{cases} 0, \quad \text{если } m\in M^- \\ -\sum\limits_{n\in N_m} a_{mn}\theta_N(\gamma)u_n, \text{ если } m\in M^+ \end{cases} \qquad (2.6)$$

Пусть в текущий момент времени известны приграничная информация (2.4) и, кроме того, заданы следующие данные из полного набора информации (2.3)

$$\alpha; \quad M; \quad a_{mn}, \quad m\in M^-\bigcup M_{\gamma a}, \quad n\in N_m \qquad (2.7)$$

Подчеркнем, что данные (2.7) есть только часть полных данных (2.3), поскольку не содержит данных при $M^+\setminus M_{\gamma a}$.

Опишем алгоритм вычисления очередного управляющего импульса $g_m=g_m(0,1)=g_m(0,2)$ при $m_t=p$.

Обозначим $A(k)$ следующую таблицу, или пару функций

$$A(k)=\begin{cases} u_n, \quad \text{если } n\in M^-\bigcup M_{\gamma a}, \quad \text{если } n_t=k \\ u_n, \quad \text{если } n\in M^-\bigcup M_{\gamma a}, \quad \text{если } n_t=k-1 \end{cases} \qquad (2.8)$$

В силу начальных данных для разностной схемы (1.1) таблица *A(*1*)* известна. Пусть при некотором $p\ge 1$ таблица *A(p)* уже известна. Для построения управления $g_m=g_m(0,1)=g_m(0,2)$ при $u_n^+\equiv 0$ в момент $t=p\tau$ и для перехода от таблицы *A(p)* к таблице *A(p*+1*)* с целью подготовки к построению g_m при $m_t=p+1$, осуществим следующие шаги.

1$^{\mathbf{0}}$. В момент $t=p\tau$, когда станут известны f_m, $m_t=p$, по формуле (2.6) вычисляем g_m, $m_t=p$, $m\in M$ и включаем управляющее воздействие g_m, $m_t=p$, действующее на течение процесса в момент $t=p\tau$.

2$^{\mathbf{0}}$. Восполняем таблицу *A(p)* до таблицы , которую определим равенством $\overline{A}(p)$

$$\overline{A}(p)\overset{def}{=}\begin{cases} u_n, \quad \text{если } n\in N^-\bigcup N_{\gamma a} \text{ при } n_t=p \\ u_n, \quad \text{если } n\in N^-\bigcup N_{\gamma a} \text{ при } n_t=p-1 \end{cases},$$

значениями u_n, $n\in\left(N^-\cup N_{\gamma a}\right)\setminus\left(N^-\cup M_{\gamma a}\right)$.

Такое восполнение таблицы $A(p)$ до $\overline{A}(p)$ в момент $t=p\tau$ становится возможным, так как становятся известны (и могут быть измерены) значения z_n в точках $n \in N^+ \setminus \gamma$ и, в частности, в точках $n \in \left(N^- \bigcup N_{\gamma a}\right) \setminus \left(N^- \bigcup M_{\gamma a}\right) \subset M^+ \setminus \gamma$.

Значения u_n, $n_t = p$, становятся известны в силу равенства $u_n = z_n$ при $n \in N^+ \setminus \gamma$.

3⁰. Строим таблицу $A(p+1)$. Первая строчка таблицы $A(p+1)$ вычисляется в силу исходной явной разностной схемы по таблице $A(p)$ и граничному условию при заданном α, $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Вторая строчка таблицы $A(p+1)$ совпадает с первой строчкой уже вычисленной таблицы $\overline{A}(p+1)$.

Итак, переход от $t = p\tau$ к $t = (p+1)\tau$ завершен. Отметим, что вычисления таблицы $A(p+1)$ должно быть завершено в момент $t = (p+1)\tau$, когда эта таблица должна быть готова для вычисления очередного управляющего импульса g_m, $m_t = p+1$. Таким образом, время за которое осуществляются вычисления $A(p+1)$ по $A(p)$ не должно превосходить τ.

Важно подчеркнуть, что использование приграничной информации позволило обойтись лишь частью (2.4) полной информации (2.3), отказавшись от использования f_m, a_{mn} при $m \notin M^- \bigcup M_{\gamma a}$.

Итак, очевидна польза использования приграничной информации (2.4) для управления полной защитой подобласти N^-, $N^- \subset N$, от влияния источников f_m, $m \in M^+$, то есть для достижения цели $z_N(0,1)$ или $z_N(0,2)$, или $z_N\left(0, A^+\right)$ в случае $u_n^+ \equiv 0$.

Однако оказывается, что одной только приграничной информации (2.4) недостаточно для выработки управления $g_m\left(0, A^+\right)$, целью которого $z_N\left(0, A^+\right)$ является полное подавление влияния источников f_m, $m \in M^+$ на решение в точках $n \in N^-$.

§ 3. Теоремы о недостаточности приграничной информации для управления полной защитой тишины.

Рассмотрим задачу об управлении полным подавлением шума источников f_m, $m \in M^+$, в подобласти N^-, $N^- \subset N$, при дополнительном предположении, что $f_m = 0$, если $n \in M^-$. Задача приобретает смысл задачи защиты полной тишины в N^-.

Теорема 1. Информация о процессе (1.1), содержащаяся в приграничных данных (2.4) при достаточно больших значениях $t = p\tau$ не определяет очередной управляющий импульс $g_m\left(0, A^+\right)$, $m_t = p$, поддерживающий защиту полной тишины при $n \in N^-$

$$z_n = \begin{cases} 0, \text{ если } n \in N^- \\ u_n, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Предположим противное и получим противоречие. Во-первых, очевидно, что решение u_n исходной задачи при достаточно больших значениях $m_t = p$ различается в некоторых точках n, $n \in N^+ \setminus \gamma$, в зависимости от того будет ли $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$:

$$u_n\big|_{\alpha=0} \neq u_n\big|_{\alpha=1} \text{ при некоторых } n \in N^+ \setminus \gamma \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) будет иметь место в некоторых точках $n \in N^+$ при $n_t = p > \frac{3}{2}h^{-1}$. Действительно, за это количество p шагов по времени отклонение решения u_n от нуля, заданное начальными условиями, успеет за h^{-1} шагов дойти до границы $|x| = 1$, $|y| = 1$ области N. Отраженное от границы значение u_n будет зависеть от того, является ли число α нулем или единицей. Это отраженное от границы возмущение достигнет сеточной подобласти $N^+, N^+ \subset N$, еще за число шагов, равное $\frac{1}{2}h^{-1}$. Поэтому при $p > \frac{1}{2}h^{-1}$ в некоторых точках $n \in N^+$ выполнено (3.2).

Предположим теперь, что приграничные данные (2.4), при некотором $m_t = p \geq 1$ содержат информацию, достаточную для вычисления $g_m, m \in M, m_t = p$. Покажем, что в таком случае выполнено тождество

$$u_n\big|_{\alpha=0} \equiv u_n\big|_{\alpha=1}, \quad \text{ если } n \in N^- \setminus \gamma\ , \tag{3.3}$$

которое противоречит (3.2).

Заметим, что в силу (3.1) для доказательства тождества (3.3) достаточно доказать тождество

$$u_n\big|_{\alpha=0} \equiv u_n\big|_{\alpha=1}, \quad n \in N \tag{3.4}$$

В силу начальных условий, очевидно, что тождество (3.4) имеет место при $n_t = 0$ и $n_t = 1$.

Допустим, что тождество (3.4) уже доказано при некотором $p \geq 1$ для $n_t \leq p$. Покажем, что при сделанном предположении о том, что приграничные данные определяют ключевую информацию, а значит, и управление $g_m = g_m\big|_\alpha$, тождество (3.4) выполнено при $n_t = p + 1$. Тогда, очевидно, в силу принципа математической индукции тождество (3.4) окажется установленным при всех n_t .

Итак, пусть (3.4) уже установлено для тех n, у которых $n_t < p$. Тогда приграничные данные z_n, $n \in N_{\gamma a} \setminus M_{\gamma a}$, при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ совпадают при $n_t = p$.

Следовательно,

$$g_m\big|_{\alpha=0} \equiv g_m\big|_{\alpha=1} \text{ при } m_t \le p. \tag{3.5}$$

Но в силу уравнения

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} z_n = f_m + g_m \ , \quad m \in M \tag{3.6}$$

из (3.4) при $n_t \le p$, из (3.5) и (3.6) следует, что z_n, $n_t = p+1$, не зависит от α:

$$z_n\big|_{\alpha=0} = z_n\big|_{\alpha=1} \ , \quad n_t \le p.$$

Теорема доказана.

Покажем, что теорема 1 отражает не только свойства использованной разностной схемы, но также и самой дифференциальной начально-краевой задачи при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ для волнового уравнения, которую эта схема аппроксимирует.

Будем полагать, что $u(t,x,y,\alpha)$ есть решение задачи (1.1), причем функции $\varphi(t,x,y) \ge 0$, $\psi^{(0)}(x,y) \ge 0$, $\psi^{(1)}(x,y) \ge 0$ - достаточно гладкие и обращаются в нуль, если $x^2 + y^2 > \frac{1}{4}$. Введем функцию $z(t,x,y)$, $(t,x,y) \in D$, определив ее равенством

$$z(t,x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } (t,x,y) \in D^- \\ u(t,x,y), \text{ если } (t,x,y) \in D^+ \end{cases} \tag{3.7}$$

Обратим внимание на аналогию между (3.7) и (3.1).

Теорема 2. Пусть на решение $u(t,x,y)$ оказывается некоторое управляющее воздействие $g(t,x,y)$, зависящее от времени t и переводящее решение $u(t,x,y)$ в функцию $z(t,x,y)$, то есть защищающее тишину в подобласти D^-, $D^- \subset D$.

Знания функции $z(t,x,y)$ в текущий момент времени t^*, $0 < t^* < T$, недостаточно для управления поддержанием процесса $z(t,x,y)$ при $t > t^*$.

Доказательство. Заметим, что решение $u(t,x,y,\alpha)$ как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha = 1$ непрерывно зависит от своих аргументов *t,x,y* всюду в замкнутой области $\overline{D}$. Заметим далее, что в момент времени $t = 0$ и некоторое время после начала процесса $u(t,x,y,\alpha)$ при $x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$ имеет место тождество

$$u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=1} \equiv u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=0} \text{ при } x^2+y^2 \le \frac{1}{4}. \qquad (3.8)$$

Однако после того как влияние отклонения начальных данных $\varphi^{(0)}(x,y)$ и $\varphi^{(1)}(x,y)$ от нуля дойдет до границы области $\bar{D}$, отразится от этой границы и достигнет области $x^2+y^2<\frac{1}{4}$ тождество (3.8) нарушится. Поэтому в силу известной теоремы математического анализа существует точная верхняя грань t^* всех тех значений $0<t$, при которых имеет место тождество (3.8). Далее, разность $u(t,x,y,1)-u(t,x,y,0)$ двух непрерывных функций есть непрерывная функция своих аргументов *t,x,y* . Поэтому точная верхняя грань t^* достигается, то есть тождество (3.8) имеет место не только при $t<t^*$, но и при $t=t^*$

$$u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=1} \equiv u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=0} \text{ , если } x^2+y^2 \le \frac{1}{4},\ t \le t^*.$$

Таким образом, функция $z(t,x,y,\alpha)$, заданная равенством (3.7) при $t\le t^*$ не зависит от α. Но при любом $\Delta t>0$ найдутся точки (t,x,y), $t<t^*+\Delta t$, в которых $u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=1} \ne u(t,x,y,\alpha)\big|_{\alpha=0}$. Поэтому в момент $t=t^*$ знания функции $z(t,x,y)$ становится недостаточно, чтобы продолжить вычисление решения $u(t,x,y,\alpha)$ при $t<t^*$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Семейство целей, достижимых управлением на основе только приграничной информации.

В § 3 было показано, что одной только приграничной информации вообще говоря недостаточно для управления, целью которого является $z_N(0,1)$ или $z_N(0,2)$, то есть режим с полным подавлением влияния источников f_m, $m\in M^+$, локализованных в M^+, на значения z_n в точках $n\in N^-$.

Между тем, в прикладных задачах часто только приграничные данные и доступны наблюдению и измерению с помощью микрофонов, составляющих часть физического устройства для управления звуком и шумом в составной области (например, комната с открытым окном + улица с шумящим транспортом).

Поэтому поставим такую цель управления, которая реализует ослабление шума в защищаемой подобласти N^-, $N^-\subset N$, но требует использования при управлении только приграничных входных данных.

Мы установим, что семейство целей $z_N\left(A^-, A^+\right)$, где $A^- = \varepsilon \neq 0$, $A^+ = \dfrac{1}{A^{-1}} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ обладают этим свойством. Мы построим также соответствующий алгоритм обработки текущих приграничных данных, приводящий к своевременному получению ключевой информации

$$w_\gamma\left(A^-, A^+\right) = \left(A^- - 1\right)u_\gamma^- + \left(1 - A^+\right)u_\gamma^+ = \left(\varepsilon - 1\right)\left[u_\gamma^- + \frac{1}{\varepsilon}u_\gamma^+\right] \qquad (4.1)$$

и вычислению очередного управляющего импульса

$$g_m\left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \in M^- \\ \sum\limits_{n \in N_m} a_{mn}\left[\theta_N\left(\gamma\right)w_n\right], \text{ если } m \in M^+ \end{cases} \qquad (4.2)$$

§ 5. Управление со встроенной разведкой ключевой информации.

Построим алгоритм вычисления ключевой информации (4.1) для $z_N\left(\varepsilon, \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$.

Определение. Формулу управления (4.2), оснащенную алгоритмом обработки текущей ключевой информации, будем называть управлением со встроенной разведкой ключевой информации.

Заметим, что функция

$$w_n = w_n^{(\varepsilon)} = \left(\varepsilon - 1\right)u_n^- + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)u_n^+ , \qquad n \in N \qquad (5.1)$$

удовлетворяет уравнению

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn}w_n = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} f_m, \text{ если } m \in M^- \\ \left(\varepsilon - 1\right) f_m, \text{ если } m \in M^+ \end{cases} \qquad (5.2)$$

Заметим также, что сужение w_N на $\gamma \subset N$ является ключевой информацией для целевой функции z_N $(\varepsilon, \varepsilon - 1)$ управления.

Заметим еще, что имеет место равенство

$$w_n = \left(\varepsilon - 1\right)u_n^- + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)u_n^+ =$$

$$= \begin{cases} \left(\varepsilon - 1\right)\dfrac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon u_n^- + u_n^+\right) = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} z_n, \text{ если } n \in N^- \\ \left(\varepsilon - 1\right)\left(u_n^- + \dfrac{1}{\varepsilon}u_n^+\right) = \left(\varepsilon - 1\right)z_n, \text{ если } n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases} \qquad (5.3)$$

Введем теперь обозначение $A(k)$, $k=1,2,...$, положив

$$A(k)=\begin{cases} w_n, \text{ если } n\in M_{\gamma a},\ \ n_t=k \\ w_n, \text{ если } n\in N_{\gamma a},\ \ n_t=k-1 \end{cases} \tag{5.4}$$

При $k=1$ значения w_n, входящие в $A(k)$, известны в силу заданных начальных и граничных условий для исходной разностной схемы, то есть в силу заданных функций $\varphi^{(0)}(x,y)$, $\varphi^{(1)}(x,y)$ и $\psi(t,x,y)$. Пусть $A(k)$ уже известно при $k=p\geq 1$. Опишем алгоритм вычисления очередного управляющего импульса g_m, $m_t=p$, а также вычисления выражения $A(p+1)$.

Шаг 1. В момент $t=p\tau$ становятся известны значения f_m, $m_t=p$, $m\in M_{\gamma a}$. Поэтому в силу явной разностной схемы (5.2), используя $A(p)$, можно вычислить первую строчку таблицы $A(p+1)$. При этом ключевая информация станет известна в точках γ при $n_t=p+1$.

Шаг 2. Зная значения ключевой информации $w_\gamma\left(\varepsilon,\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ в точках $n\in\gamma$, $n_t=p-1,\ p,\ p+1$, вычисляем очередной управляющий импульс g_m, $m_t=p$, $m\in M$, используя для этого формулу (4.3).

Шаг 3. В момент $t=p\tau$ должны быть известны (в физических задачах – измерены) значения $z_N\left(\varepsilon,\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ в точках $n\in N_{\gamma a}\setminus M_{\gamma a}$. Тогда станут известны

$$\begin{aligned} w_n&=z_n, \text{ если } n\in N^{+}\bigcap\left(N_{\gamma a}\setminus M_{\gamma a}\right) \\ w_n&=\frac{1}{\varepsilon}z_n, \text{ если } n\in N^{-}\bigcap\left(N_{\gamma a}\setminus M_{\gamma a}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Используя (5.5), восполним первую строчку таблицы $A(p)$, чтобы получить следующую таблицу $\overline{A}(p)$:

$$\overline{A}(p)=\begin{cases} w_n, \text{ если } n\in N_{\gamma a}, n_t=p \\ w_n, \text{ если } n\in N_{\gamma a}, n_t=p-1 \end{cases} \tag{5.6}$$

Шаг 4. Вычисляем в силу явной разностной схемы (5.2) значения w_n при $n\in M_{\gamma a}$, $n_t=p+1$, используя для этого таблицу $\overline{A}(p)$.

Шаг 5. Принимаем за первую строчку таблицы $A(p+1)$ набор значений w_n, $n_t=p+1$, $n\in M_{\gamma a}$, заготовленный на предыдущем шаге алгоритма. Принимаем за вторую строчку таблицы $A(p+1)$ первую строчку таблицы $\overline{A}(p)$.

На этом цикл алгоритма для вычисления ключевой информации $w_\gamma\left(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ в наступающий момент времени $t = p+1$ закончен.

Замечание. Вычисление таблицы $A(p+1)$ должно быть закончено к моменту $t = (p+1)\tau$, то есть за интервал времени продолжительностью τ.

Этого, по-видимому, можно достичь в задачах об управлении звуком или вибрацией, поскольку скорость звука много меньше, чем скорость света, ограничивающая быстродействие компьютера.

Обсудим роль управления со встроенной разведкой ключевой информации, воспользовавшись для этого задачей о защите комнаты от уличного шума, о которой говорилось в предисловии к статье. Возможность взять произвольное $\varepsilon \neq 0$, позволяет в любое число раз уменьшить уличный шум в комнате. Если взять $\varepsilon > 1$, то можно наоборот, в комнате лучше слышать внешние звуки, но уменьшить вне комнаты слышимость разговора, происходящего в комнате.

Наличие встроенной разведки ключевой информации делает возможным изготовление устройств для защиты комнаты, зная только размеры окна: всю остальную информацию об окружающем окно пространстве, нужную для управления процессом, автоматически доставляет встроенная в управление синхронная управлению разведка ключевой информации.

§ 6. Обобщение результатов.

Изложенные в этой главе результаты были точно сформулированы и доказаны применительно к разностной схеме вида

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n = f_m, \qquad m \in M . \tag{6.1}$$

При этом для избежания громоздкости и для наглядности результатов в качестве схемы (6.1) была использована разностная аппроксимация двух (при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$) начально-краевых задач для волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \varphi(t, x, y)$. Однако все использованные понятия и доказательства не опираются на конкретную структуру использованной конкретной разностной схемы вида (6.1) и пригодны для разностных схем (6.1) гораздо более общего вида. Возможность этих обобщений без преодоления принципиальных трудностей обеспечиваются тем, что разностные потенциалы и формулы изложенные в § 1, гл.1, построены [14] для абстрактных разностных схем вида (6.1), удовлетворяющих лишь требованию существования и единственности решения $u_N = \{u_n\}$ при произвольной правой части $f_M = \{f_m\}$.

Приведем примеры таких обобщений. Излагая теорию применительно к конкретной разностной схеме вида (6.1), аппроксимирующей две (при $\alpha=0$ и при $\alpha=1$), начально-краевые задачи, мы использовали в качестве a_{mn} числа, заданные формулами

$$a_{mn}=\begin{cases} \tau^{-2}, \text{ если } m\in M\bigcap D, \quad n=\left(\left(m_t+1\right)\tau, m_x h, m_y h\right) \\ -h^{-2}, \text{ если } m\in M\bigcap D, \quad n=\left(m_t\tau,\left(m_x\pm 1\right)h, m_y h\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad n=\left(m_t\tau, m_x h,\left(m_y\pm 1\right)h\right) \\ 2\left(h^{-2}-\tau^{2}\right), \text{ если } m\in M\bigcap D, \quad n=\left(m_t\tau, m_x h, m_y h\right) \\ -\tau^{-2}, \text{ если } m\in M\bigcap D, \quad n=\left(\left(m_t-1\right)\tau, m_x h, m_y h\right) \end{cases} \tag{6.2}$$

Однако, конкретный вид (6.2) этих формул a_{mn} нигде в наших построениях не был использован. Поэтому коэффициенты a_{mn}, характеризующие среду распространения колебаний в точке (t,x,y) могут быть переменными.

Если f_m, $m\in M$ и u_n, $n\in N$ - векторы, а a_{mn} матрицы соответствующих размерностей, то скалярная разностная схема превращается в систему разностных уравнений. Если при этом

$$a_{mn}=E, \text{ если } n=\left(\left(m_t+1\right)\tau, m_x h, m_y h\right)$$

где E – единичная матрица, то разностная схема (6.1) окажется явной по времени разностной схемой.

При рассмотрении примера разностной схемы вида (6.1) в главе 2 мы считали, что $m\in M^{+}$, если $m\in\overline{D}$, а также что $m\in M^{+}$, если $m\in\overline{D}^{+}$, где областью D служил параллелепипед $D=\left\{\left(t,x,y\right)\middle|\, |x|\le 1, |y|<1, 0<t<T\right\}$, а подобласть D^{+} - круговой цилиндр

$$D^{+}=\left\{\left(t,x.y\right)\middle|\, x^2+y^2<\frac{1}{4}, 0<t<T\right\}.$$

Однако при всех построениях мы не пользовались этой спецификой. Важно было только то, чтобы область D была ограничена, а подобласть $D^{+}\subset D$ лежала строго внутри D, то есть чтобы их границы не пересекались. Поэтому можно вместо D допустить, скажем, двусвязную область, а пересечение границы ∂D этой области с плоскостью *t=const* можно считать кривой на плоскости *t=const* в пространстве $\left(t,x,y\right)$, изменяющей форму при изменении *t* от *t*=0 до *t+T*.

То же можно сказать о подобласти D^{+}, $D^{+}\subset D$. Граница $\Gamma=\partial\overline{D}^{+}\bigcap\partial\overline{D}^{-}$ тоже может пересекаться плоскостью *t=const* по кривой, которая движется при изменении *t* от *t*=0 *до* *t=T*.

Указанные изменения в D и D^{+} вызовут автоматические изменения в определениях $M, M^{+}, M^{-}, N^{+}, N^{-}$ и $\gamma = N^{+} \bigcap N^{-}$, в терминах которых были сформулированы результаты в этой главе.

Заметим, что точки $m \in M$, $n \in N_m$; $N = \bigcup N_m$, $m \in M$

$M^{+}, M^{-}, N^{+}, N^{-}$, $\gamma = N^{+} \bigcap N^{-}$ сеток могут лежать в четырехмерном пространстве (t, x, y, z), на сфере, торе, листе Мебиуса или другом многообразии с краем или без края.

Возможны и другие обобщения рассмотренной в главе 2 задачи об управлении колебаниями, не приводящие к дополнительным принципиальным трудностям при построении управлений, определений приграничных данных и использовании управлений со встроенной разведкой ключевой информацией.

Библиографическая справка.

В основе теории активного управления звуком и управления шума, изложенной выше, лежит теория разностных потенциалов, предложенная автором в 1969 году в его докторской диссертации и существенно развитая в дальнейшем.

В [14] изложен наиболее полный вариант теории разностных потенциалов и, в частности, доказаны формулы из §1 гл.1 настоящей статьи.

Задачами активного управления шума занимались [1], [2] и многие другие авторы.

Задачами активной защиты подобласти от внешнего шума при требовании сохранить акустическое поле от источников, лежащих внутри защищаемой подобласти, посвящены работы [3-15], а также некоторые другие работы, указанные в списках литературы к [6-14]. Первая физическая установка, реализующая теорию, создана в Манчестерском университете [6]-[10].

Эта работа была выполнена под руководством С.В.Утюжникова и потребовала от С.В.Утюжникова помимо конкретизации также и модификации результатов об управлении решением разностной схемы.

Понятие приграничных данных об управляемом процессе, а также синхронная управлению звуком разведка ключевой информации, впервые предложены в [8,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. M.J.Jessel and G.A.Mangiante, Active sound absorbers in an air duct., J. Sound Vib.
2. P.A.Nelson and S.J.Elliot. Active control of Sound (Academic Press San Diego, CA, (1992, pp 116-122, 143-146, 311-378).
3. Рябенький В.С. Разностная задача экранирования // Функциональный анализ и его приложения. 1995. 1995. Т.29. №1, с.70-71.

4. Вейцман Р.Н., Рябенький В.С. Разностные задачи экранирования и имитации. // Докл. РАН. 1997. Т.354. №2. с.151-154.
5. V.S.Ryaben'kii, S.V.Tsynkov, and S.V.Utyuzhnikov. Inverse Source Problem and Active Shielding for Composite Domains. //Applied Mathematics Letters. 2007. V.20, №5. p.511-515.
6. H.Lim, S.V.Utyuzhnikov, Y.W.Lam, A.Turan, M.Avis, V.S.Ryaben'kii, and S.V.Tsynkov. An Experimental Validation of the Noise Control Methodology Based on Difference Potentials. // AIAA Journal. 2009. V.47. №4. p.874-884.
7. V.S.Ryaben'kii, S.V.Tsynkov, and S.V.Utyuzhnikov/ Active Control of Sound with Variable Degree of Cancellation. // Applied Mathematics Letters. 2009. V.22. №12. p.1846-1851.
8. В.С.Рябенький. Метод разностных потенциалов и его приложения. М. Физматлит. 2010.
9. В.С.рябенький. Идея использования слабого шума для управления подавлением сильного шума в экранируемой подобласти в реальном времени. // Доклады РАН. 2010ю Т.430. №2. с.166-168.
10. H.Lim, S.V.Utyuzhnikov, Y.W.Lam, A.Turan. Multi-domain active sound control and noise shielding. J. Acoust. Soc. Am., 129(2), 2011.
11. В.С.Рябенький. Подавление в реальном времени шума в защищаемой подобласти трехмерного пространства на основе информации от синхронной разведки шумом. // Доклады РАН, 2011, Т.439. №3.с.319-322.
12. В.С.Рябенький. Разностная модель активного экранирования заданной подобласти от шума внешних источников в текущем времени. // ЖВМ и МФ. 2011. Т.51. №3. с.
13. В.С.Рябенький. Синхронная разведка для управления подавлением внешнего шума в трехмерной подобласти в реальном времени. // ЖВМ и МФ. 2011. Т.51. №10. с.1889-1904.
14. В.С.Рябенький. Потенциалы для абстрактных разностных схем. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН , № . 2012.
15. В.С.Рябенький. Разностные потенциалы аналогичные интегралам Коши, УМН. Т. , №4. 2012, в печати.
16. В.С.Рябенький. Ключевая информация для управления решениями разностных схем в составных областях.// Доклады АН, , 2012, в печати.