ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 20 за 2012 г.

Аптекарев А.И.

Интегрируемые полудискретизации гиперболических уравнений – «схемная» дисперсия и многомерная перспектива

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И. Интегрируемые полудискретизации гиперболических уравнений – «схемная» дисперсия и многомерная перспектива // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 20. 28 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-20

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А.И. Аптекарев

Интегрируемые полудискретизации гиперболических уравнений – "схемная" дисперсия и многомерная перспектива

МОСКВА, 2012 г.

Аптекарев А. И.

Интегрируемые полудискретизации гиперболических уравнений – "схемная" дисперсия и многомерная перспектива [1]

Аннотация. В препринте обсуждаются аналитические методы, призванные прояснить дисперсионную регуляризацию гиперболических ударных волн в контексте вполне интегрируемых аппроксимаций для нелинейных гиперболических уравнений в частных производных. Фундаментальным аналитическим достижением здесь было бы полное асимптотическое описание непрерывных пределов интегрируемых систем. Известно, что различные семейства вполне интегрируемых систем можно рассматривать как полудискретную аппроксимацию гиперболических уравнений в частных производных. Важным примером такого семейства является цепочка Тода. Для исследования дисперсионной регуляризации необходимо провести асимптотический анализ этих систем в очень деликатном непрерывном пределе. Особое внимание будет уделено многомерным (в пространственных переменных) обобщениям.

Aptekarev A. I.

Integrable semidiscretization of hyperbolic equations – "computational"dispersion and multidimensional perpective

Abstract A goal of this preprint is to provide an analytical understanding of dispersive regularizations of hyperbolic shocks, in the context of completely integrable approximations to nonlinear hyperbolic Partial Differential Equations (PDEs) which exhibit shock formation. The fundamental analytical issue is to obtain a complete asymptotic description of continuum limits of integrable systems. Different families of completely integrable systems admit interpretation as semidiscrete approximations to hyperbolic PDEs - of these, the Toda lattice is a famous example. To investigate dispersive regularizations, it is required to carry out an asymptotic analysis of these systems in a very delicate continuum limit. Special attention will be paid to multidimensional (in space variables) generalizations.

[1] Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 11-01-12045-ОФИм, также частично поддержана грантом научных школ НШ-4664.2011.1. Препринт по материалам доклада автора на "Международном рабочем семинаре по комплексному анализу и его приложениям" 26 декабря 2011 г., посвященном 80-ти летию А.А. Гончара (см. `http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=4263`).

1 Введение

В связи с переводом многих прикладных расчетных задач с обыкновенных компьютеров на суперкомпьютеры, появилась техническая возможность радикального измельчения пространственного масштаба дискретной модели. Однако увеличение объемов расчетных сеток при сохранении общего времени расчета часто ведет к потере устойчивости вычислений. Например, в уравнениях параболического типа для сохранения устойчивости при линейном уменьшении пространственного масштаба требуется квадратичное уменьшение шага по времени, что практически останавливает расчет. Эта фундаментальная научная проблема, конечно, известна давно, но с каждым новым рывком в компьютерных возможностях она возникает с новой актуальностью. Рецепты борьбы с этой проблемой тоже известны: например, организация специальных итерационных процедур, добавление в уравнения с малым параметром производных более высокого порядка. Методам такого рода часто дают физическое объяснение - учет кинетических эффектов, вязкости, дисперсии и т.д. В тоже время, эти члены с малыми параметрами, как правило, имеют диссипативный характер, что оказывает положительное влияние на устойчивость вычислений при переходе на высокопроизводительный вычислительный комплекс. Однако, для получения корректных численных результатов и валидации новых математических моделей, ориентированных на возможности многопроцессорных вычислительных комплексов, необходимо знать точные асимптотические свойства решений, а это уже требует разработки совершенно новых современных математических подходов.

Тем самым возникает конкретная математическая задача разработки методов асимптотического анализа разномасштабных режимов в дифференциальных и разностных задачах и получении точных асимптотик решения при стремлении малого параметра к нулю. А именно, необходимо уметь строить асимптотические разложения по малому параметру решений сингулярно возмущенных уравнений. Например, уравнений и систем уравнений, переходящих из гиперболических в параболические при стремлении малого параметра к нулю. При этом важную роль играет знание спектра соответствующего эллиптического оператора в правой части. Здесь особую важность, применительно к задачам устойчивости расчетов на больших сетках, приобретают вопросы сходимости этих асимптотических разложений, что позволит дать ответ на главный для приложений вопрос о допустимых границах изменения малого параметра.

Последнее время в теории аппроксимаций аналитических функций (в связи с доказательством сходимости рациональных аппроксимаций и определения скорости их сходимости) появились новые методы и подходы. Эти методики основаны, во-первых, на связи рациональных аппроксимаций с ортогональными многочленами и их всевозможными обобщениями, а во-вторых, на связи рациональных аппроксимаций с непрерывными дробями и тем самым с решениями рекуррентных соотношений. Эти связи позволяют использовать при решении конкретных задач результаты и технику из многих различных областей современного анализа, таких как теория потенциала, ортогональные многочлены, анализ интегрируемых систем, матричная проблема Римана-Гильберта, метод поворотной точки для рекуррентных соотношений и специальные функции.

В частности, введение малой дисперсии – пространственной производной третьего порядка в дифференциальные уравнения – асимптотически описывается задачами равновесия потенциала с внешним полем и ограничением на меру. Это было замечено ещё в пионерских работах [1] Лакса и Ливермора (речь идет о возмущении одномерного уравнения Хопфа производной третьего порядка с малым параметром, в результате чего уравнение превращается в уравнение Кортвега-де-Фриза, обладающее богатым инструментарием для своего исследования).

В тоже время эта асимптотическая техника, основанная на задачах равновесия логарифмического потенциала и их обобщенях, получила особенное развитие в работах А.А. Гончара и его учеников именно в связи с вопросами сходимости и скорости сходимости рациональных аппроксимаций аналитических функций (см. [2] – [24]).

Нелинейные гиперболические уравнения в частных производных часто регуляризуются тем или иным способом (из-за возникновения ударных волн) при их численном решении. Дискретизация уравнения в частных производных по пространственным переменным приводит к задаче численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по временной переменной. Такая дискретизация и играет роль регуляризации. Здесь также появляется много преимуществ для анализа, как только система ОДУ является вполне интегрируемой. Пример вполне интегрируемой дискретизации для континуум предела цепочки Тода был исследован П.Дейфтом и К.МакЛафлином [28], (также см. [29]). В их анализе также ключевую роль играли упомянутые методы равновесия потенциала с внешним полем и ограничением на меру (см. [23] – [27], [30]).

Наконец, отличительной чертой обсуждаемого здесь подхода является возможность его распространения на многомерные задачи систем уравнений в частных производных. Эта возможность не присутствовала в упомянутых выше работах, которые ограничивались рассмотрением одной пространственной переменной. Введение нескольких пространственных переменных будет осуществляться путем рассмотрения задач равновесия векторных мер (величина каждой компоненты будет соответствовать своей пространственной переменной). Задачи равновесия векторных мер хорошо были изучены в самое последнее время в рамках теории совместных приближений ростков аналитических вектор-функций - так называемой теории аппроксимаций Эрмита-Паде и асимптотической теории совместно ортогональных или (биортогональных) многочленов (см. [12] – [20]).

2 Равновесие во внешнем поле – прямая и обратная задача

В этой секции мы введем основные понятия теории логарифмического потенциала во внешнем поле и обсудим обратную задачу поля.

2.1 Равновесные меры и слабая асимптотика ортогональных многочленов

Начнем с определения равновесной меры в поле и с ее связи с предельным распределением нулей последовательностей экстремальных многочленов.

Пусть

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \qquad Q \not\equiv \infty \quad \text{on} \quad \mathbb{R}; \qquad \liminf_{|z|\to\infty} \frac{Q(z)}{\log|z|} > 1. \tag{2.1}$$

полунепрерывная снизу функция, называемая внешним полем. Энергией логарифмического потенциала во внешнем поле Q называют функционал на мерах с носителями на $\mathbb{R}$

$$J(\mu) := I(\mu) + 2\int Q(z)d\mu(z), \tag{2.2}$$

где

$$I(\mu) := \int V^\mu(z)d\mu(z), \quad V^\mu(z) := -\int \log|z - z|\, d\mu(z).$$

Экстремальная мера, минимизирующая этот функционал

$$\lambda(z) \quad : \quad J(\lambda) = \inf_{\mu\in M^+} J(\mu)\,,$$

обладает свойством равновесия

$$V^{\lambda}(z) + Q(z) \begin{cases} \geq \gamma_Q, & z \in \mathbb{R}, \\ = \gamma_Q, & z \in \operatorname{supp}(\lambda) := S_{\lambda}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Как было замечено Гончаром и Рахмановым [9] равновесная (экстремальная) мера λ удачно подходит для описания предельного распределения нулей последовательности Ортогональных Многочленов - (О М), $P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n})$, удовлетворяющих следующим соотношениям ортогональности к степенной функции:

$$\int P_n(z)\ z^k\ \exp\{-n\,Q(z) + Q_0(z)\}\ dz = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{2.4}$$

Слабое предельное распределение нулей задается пределом *меры, считающей нули*:

$$\nu_{P_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta(z - z_{k,n}) \xrightarrow{*} ? \qquad n \to \infty.$$

Справедлива

Теорема 2.1 (см. [9]) *Пусть полунепрерывная снизу функция* (2.1) *определяет весовую функцию в* (2.4). *Тогда слабый предел меры, считающей нули ОМ существует и равен равновесной мере* (2.3)

$$\nu_{P_n} \xrightarrow{*} \lambda\,.$$

При этом, слабая асимптотика ОМ имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|P_n(z)| = -V^{\lambda}(z), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus S.$$

2.2 "Переменные"веса и семейства равновесных мер

Обратим внимание, что весовая функция в (2.4) сама зависит от параметра, связанного со степенью многочлена. Такие веса называют "varying weights". Для приложений, которые будут нас интересовать, уместно рассматривать семейства многочленов $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, ($P_{n,N}(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_{j,n,N})$):

$$\int P_{n,N}(z) z^k W_N(z)\, d\lambda = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \quad W_N(z) := e^{-NQ(z)+Q_0}, \tag{2.5}$$

в которых параметры, связанные с весом (N) и со степенью многочлена (n), разделены.

Для описания асимптотик таких семейств ОМ возникает задача о семействах равновесных мер. Пусть параметр x обозначает величину массы меры, с носителем на действительной оси. В классе мер

$$M_x^+ := \{\mu\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu > 0,\ S(\mu) \subset \mathbb{R},\ \int d\mu = x\,, \tag{2.6}$$

фиксированное поле порождает семейство экстремальных (равновесных) мер, минимизирующих функционал энергии (2.2):

$$Q(z) \rightarrow \{\lambda_x\}_{x>0} \quad : \quad J(\lambda_x) = \inf_{\mu \in M_x^+} J(\mu)\,. \tag{2.7}$$

Тогда в предельном режиме ($n/N \to x$) мера, считающая нули этих многочленов слабо сходится к равновесным мерам этого семейства

$$\nu_{n,N}(z) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}\delta(z - z_{j,n,N}), \qquad \nu_{n,N}(\lambda) \xrightarrow[\substack{n/N \to x \\ N \to \infty}]{*} \lambda_x(z).$$

Изучение семейств равновесных мер было инициировано Буяровым и Рахмановым в [22]. Ключевую роль в описании этих семейств играет семейство носителей равновесных мер $\{S_x\}_{x>0} : S_x := S(\lambda_x)$. В [22] доказано, что это монотонное по x семейство

$$S_{x'} \subseteq S_x, \qquad x' \leq x,$$

и зная семейство носителей мер $S(x)$, можно определить сами равновесные меры по формуле

$$\lambda_x'(z) = \int_0^x \omega'_{S(\tilde{x})}(z)\, d\tilde{x},$$

здесь $\omega'_{S(x)}(z)$ есть плотность робеновского распределения компакта $S(x)$, т.е. равновесная мера компакта $S(x)$ в отсутствии внешнего поля.

Тем самым, мы видим, что равновесные меры $\lambda_x(z)$ оказываются звеном

$$S(x) \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_x(z) \quad \longleftrightarrow \quad Q(z)\,,$$

связывающим функции

$$S(x) \longleftrightarrow Q(z)\,,$$

от принципиально разных переменных. В наших приложениях эта связь будет иметь смысл спектральной задачи. При этом, x будет пространственной переменной, а z будет иметь смысл спектральной переменной. Приведем формулы, решающие возникающие прямые и обратные задачи.

Прямая задача: $S(x)$ —–> $Q(z)$ решается формулой Буярова - Рахманова (см. [22])

$$Q(z) = \int_0^\infty g_{S(x)}(z)\,dx. \tag{2.8}$$

Здесь $g_{S(x)}(z)$ функция Грина компакта $S(x)$.

Обратная задача: $S(x)$ <–— $Q(z)$ решается минимизацией следующего функционала

$$F_{Q,x}(K) \;:=\; -x\log\operatorname{cap}(K) \;+\; \int Q(z)\,d\omega_K(z), \tag{2.9}$$

предложенного Машкаром и Саффом в [31]. Таким образом, вариационный принцип для решения обратной задачи имеет вид:

$$F_{Q,x}(K) \;\geqslant\; F_{Q,x}(S(x)) \;=\; \gamma_Q\,.$$

3 Уравнение Хопфа – вариационный принцип выделения разрывов

Проиллюстрируем предлагаемый метод спектральной задачи на простейшем примере решения задачи Коши для уравнения Хопфа (или другое название: уравнение Бюргерса без вязкости). Для $x\in\mathbb{R}_+\,,\quad t\in\mathbb{R}_+$ ищется эволюция положительной функции:

$$B(x,0)>0\;\longrightarrow\;B(x,t)\quad:\qquad B_t+B\,B_x\;=\;0. \tag{3.1}$$

Удобнее сделать замену $B(x,t) =: b(x,t)^2$. Оказывается (см., например, [28], [29], [32], [33]), что отрезок

$$S(x,t)\;:=\;[-b(x,t),\,b(x,t)]\,, \tag{3.2}$$

является носителем равновесной меры задачи равновесия (2.2) – (2.7) для меры с массой x и зависящего от времени t поля

$$Q(z,t)\;=\;Q(z,0)\;+\;z^2t\,. \tag{3.3}$$

Тем самым для решения задачи Коши предлагается следующая процедура.

1. Начальная прямая задача $S(x)\;:=\;[-b(x,0),\,b(x,0)]\;\longrightarrow\;Q(z,0)$;
2. Эволюция $Q(z,t)\;=\;Q(z,0)\;+\;z^2t$;
3. Обратная задача для решения $Q(z,t)\;\longrightarrow\;S(x,t)\;:=\;[-b(x,t),\,b(x,t)]$.

Подчеркнем, что эволюция (3.1) концов носителя (3.2) равновесной меры соответствует эволюции поля (3.3) только в случае, когда носитель является отрезком. В ситуации, когда в какой-то момент времени поле, эволюционируя как в (3.3), разорвет носитель на несколько частей, тогда новые концевые точки носителей уже будут удовлетворять другой, более сложной чем (3.1), системе уравнений.

Конкретизируем формулы решения прямой (2.8) и обратной (2.9) задач в ситуации, когда носитель является отрезком.

Для симметрического семейства $\{[-b(x), b(x)]\}_{x>0}$ формула Буярова–Рахманова имеет вид:

$$Q(z) = \int_0^\infty \ln\left|\frac{z + \sqrt{z^2 - b^2(x)}}{b(x)}\right| dx. \tag{3.4}$$

Функционал Машкара-Саффа $F_{Q,x}$ выглядит теперь так

$$F_{Q,x}([-b,\, b]) = -x\ln\frac{b(x,t)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{Q(z,t)}{\sqrt{b(x,t)^2 - z^2}}\, dz. \tag{3.5}$$

Подставляя сюда явный вид эволюции (3.3) получаем вариационный принцип для решений $b(x,t)$ гиперболического уравнения $\; b_t + b^2\, b_x \,=\, 0$:

$$-x\ln\frac{b}{2} + \frac{b^2}{2}t + \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{Q(z,0)}{\sqrt{b^2 - z^2}}\, dz \to \min_b \quad \text{for fixed } t, x. \tag{3.6}$$

Отметим важное обстоятельство (мы приведем соответствующее формальное доказательство чуть ниже). На этот вариационный принцип можно смотреть теперь безотносительно его связи с семейством равновесных мер. Все экстремумы функционала (3.6) локально по (x,t) удовлетворяют уравнению (3.1), и что особенно важно это имеет место даже в той ситуации, когда имеется несколько экстремумов и когда носитель равновесной меры уже не является отрезком. То есть когда функционал (3.5) уже не является функционалом Машкара-Саффа (3.5) описывающим носитель равновесной меры, но в это же время его экстремумы продолжают удовлетворять уравнению (3.1). Это обстоятельство позволяет нам построить вариационное представление для обобщенных (не обязательно непрерывных) решений квазилинейного уравнения

$$(\ln B)_t + B_x = 0, \tag{3.7}$$

где $B = B(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}$ и $B(0,x) = B_0(x)$, $B_0(x) \geqslant 0$ - гладкая, монотонная и ограниченная функция. Заметим, что в гладком случае уравнение (3.7) эквивалентно невязкому уравнению Бюргерса.

Справедлива

Теорема 3.1 (см. [32], [33]) *В случае единственности минимума в задаче (3.6) функция $B(t,x) = b^2(t,x)$ является гладким решением задачи (3.7); те точки (t,x), где таких минимумов два, локально образуют кривую $x(t)$, вдоль которой для (3.7) справедливо соотношение Гюгонио:*

$$\dot{x}\ln B_1 - B_1 = \dot{x}\ln B_2 - B_2 \qquad \textit{на } x(t)\,. \tag{3.8}$$

Замечание 3.1. Соотношения Гюгонио выражают законы сохранения потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва. (см. [34], [33]). В нашей ситуации именно запись уравнения (3.1) в форме (3.7) обеспечивает выполнение физически осмысленных законов сохранения при возникновение разрывов решения.

Доказательство. Поскольку (3.6) в некоторой точке достигает минимума, то производная по b в этой точке обращается в нуль, то есть

$$-\frac{x}{b} + bt + \frac{d}{db}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{b} \frac{Q_0(\lambda)}{\sqrt{b^2-\lambda^2}}\,d\lambda\right) = 0\,. \tag{3.9}$$

Однако известно, что при $t = 0$ задача минимизации энергии заряда во внешнем поле приводит к начальной мере с носителем $[-b_0(x), b_0(x)]$, $b_0^2(x) = B_0(x)$, то есть

$$\frac{d}{db}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{b} \frac{Q_0(\lambda)}{\sqrt{b^2-\lambda^2}}\,d\lambda\right) = \frac{b_0^{-1}(b)}{b},$$

откуда

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-b}^{b} \frac{Q_0(\lambda)}{\sqrt{b^2-\lambda^2}}\,d\lambda = \int\limits_{0}^{b} \frac{b_0^{-1}(s)}{s}\,ds. \tag{3.10}$$

То есть из (3.9) получаем

$$-\frac{x}{b} + bt + \frac{b_0^{-1}(b)}{b} = 0,$$

или

$$x = b^2 t + b_0^{-1}(b). \tag{3.11}$$

Поскольку (3.11) является характеристическим соотношением для (3.7) при $B = b^2$, то первое утверждение Теоремы 3.1 доказано.

Если же существуют две точки глобального минимума в (3.6) b_1 и b_2, то справедливо соотношение

$$-x \ln \frac{b_1}{2} + \frac{b_1^2}{2} t + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-b_1}^{b_1} \frac{Q_0(z)}{\sqrt{b_1^2 - z^2}}\, dz = -x \ln \frac{b_2}{2} + \frac{b_2^2}{2} t + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-b_2}^{b_2} \frac{Q_0(z)}{\sqrt{b_2^2 - z^2}}\, dz.$$

Это соотношение локально определяет некоторую кривую $x(t)$. Продифференцируем его по t и, учитывая (3.9), получим

$$-\dot{x} \ln \frac{b_1}{2} + \frac{b_1^2}{2} = -\dot{x} \ln \frac{b_2}{2} + \frac{b_2^2}{2},$$

что очевидно является соотношением Гюгонио (3.8). Таким образом, второе утверждение Теоремы 3.1 доказано. ■

Замечание 3.2. Вследствие соотношения (3.10) вариационная задача (3.6) для решения (3.1) в итоге превращается в:

$$-x \ln \frac{b}{2} + \frac{b^2}{2} t + \int\limits_0^b \frac{b_0^{-1}(s)}{s}\, ds \to \min_b \quad . \tag{3.12}$$

Рассмотрим пример применения вариационного принципа (3.6) для выделения кривой разрыва $x(t)$ и построения разрывного решения (Ударной волны) для уравнения (3.7). В качестве начального условия берем $b(z, 0)$ являющееся концом отрезка носителя равновесной меры в поле $Q(z, 0) := 3z^6 - 2z^4 + z^2$. Если в начальный момент времени поле выпукло и обеспе-

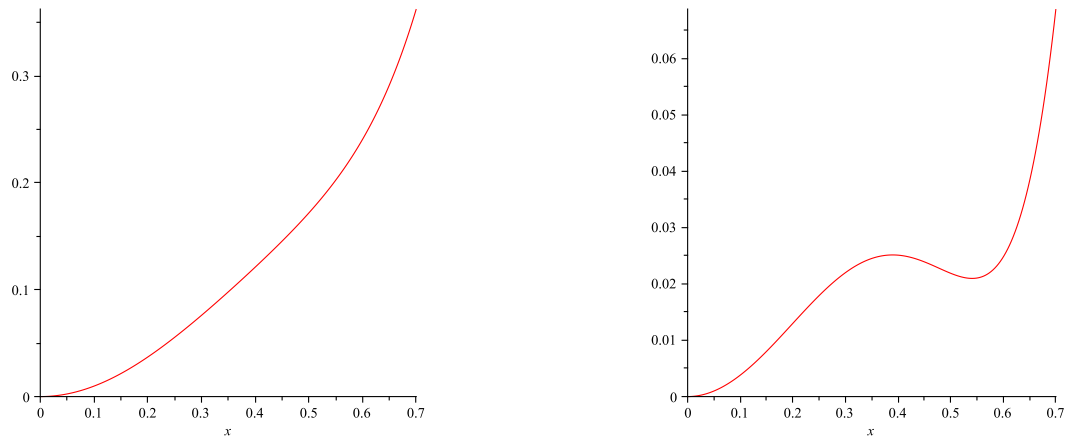

Рис. 1: Поле $Q(z, t) := 3z^6 - 2z^4 + (1 - t)z^2$ в моменты времени $t = 0$ и $t = 0.6$.

чивает единственный минимум (3.6), то для бо́льших t это уже не так (см. Рис. 1).

В результате для моментов времени t бо́льших чем $t^* \approx 0.55$ функционал (3.6) имеет три экстремума – два локальных минимума и один максимум. Точка $x(t)$, в которой два локальных минимума принимают одинаковое значение (т.е. функционал имеет два минимума), принадлежит линии разрыва (см. Рис. 2).

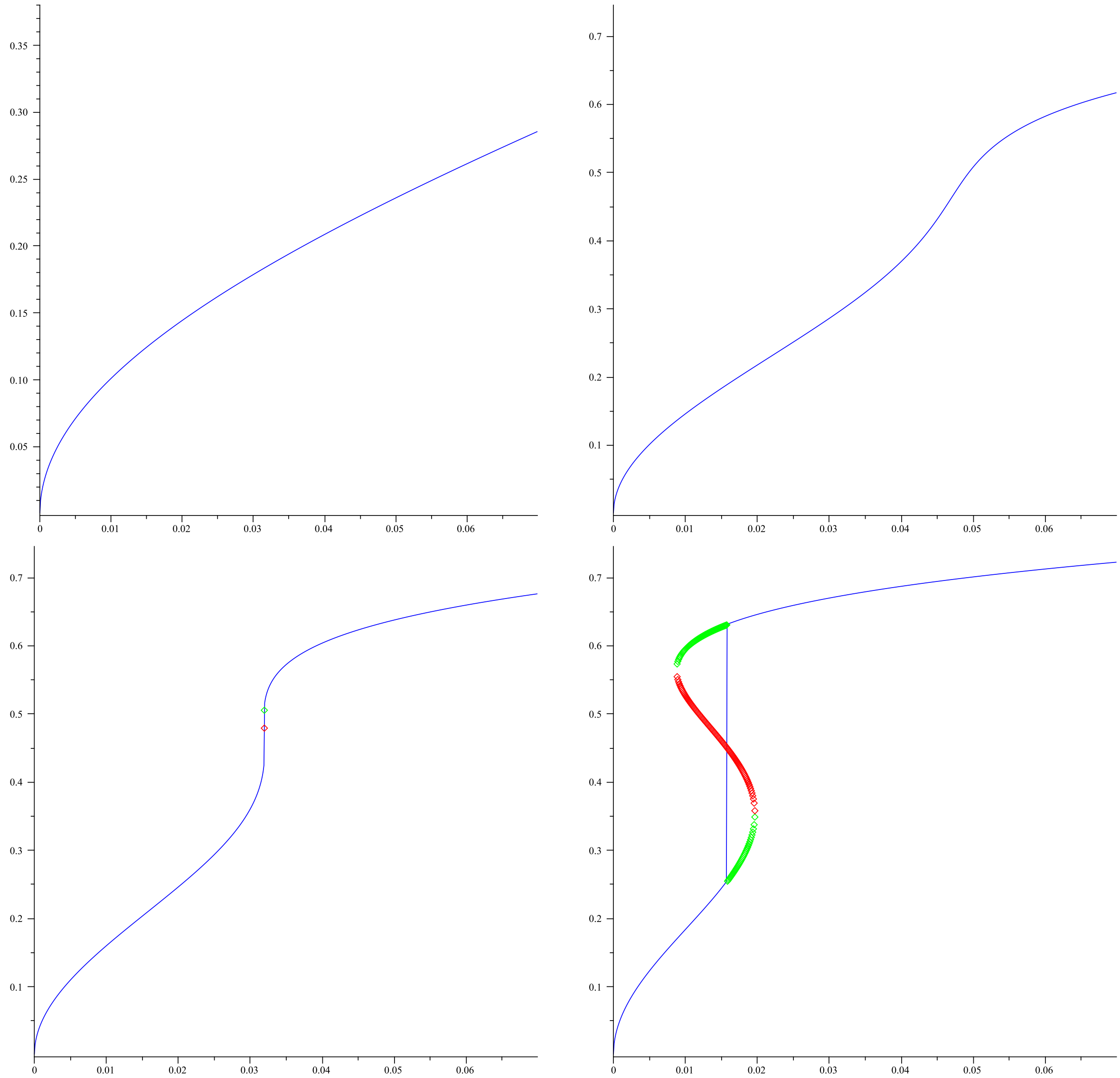

Рис. 2: Графики решений $b(x)$ гиперболического уравнения $b_t + b^2\, b_x = 0$ в различные моменты времени $t := 0$; 0.5; 0.57; 0.6. Начальные условия $b(x)$ при $t := 0$ находятся минимизацией функционала Машкара-Саффа (3.5)–(3.6) при $t := 0$ и $Q(z, 0) := 3z^6 - 2z^4 + z^2$.

4 "Интегрируемая"дискретизация гиперболической системы

Приведенное в предыдущей секции формальное доказательство того факта, что вариационный принцип нахождения носителя равновесной меры, чудесным образом оказывается вариационным принципом нахождения решения гиперболического уравнения, не дает ответа на вопрос почему это чудо произошло. В этой секции мы постараемся пояснить ситуацию. По крайней мере, будет ясно почему мы используем терминологию прямой и обратной спектральной задачи рассуждая о связи $S(x) \longleftrightarrow Q(z)$. Мы сделаем это на примере задачи Коши для системы уравнений в частных производных, обобщающей задачу (3.1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b \, \dfrac{\partial b}{\partial x} \,, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2} \, \dfrac{\partial a}{\partial x} \,, \end{cases} \tag{4.1}$$

для $a(x,t) \in \mathbb{R}$, $b(x,t) \in \mathbb{R}^+$ и $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

4.1 "Varying"рекуррентные коэффициенты

Вернемся к конструкции ОМ ортогональных относительно зависящего от параметра N веса ("varying weights") $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, см.(2.5). Для каждого фиксированного N последовательность многочленов удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

коэффициенты которого, в свою очередь, также зависят от параметра N – ("varying recurrence coefficients"):

$$\{a_{n,N}, b_{n,N}\}_{n=0}^{\infty}, \qquad b_{n,N} > 0\,.$$

Важный класс "varying" рекуррентных коэффициентов может быть задан дискретизацией непрерывных функций : $a(x)$, $b(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^+$ с шагом $h := \frac{1}{N}$

$$a_{n,N} := a(nh) = a\left(\frac{n}{N}\right), \qquad b_{n,N} := b(nh) = b\left(\frac{n}{N}\right).$$

Обсудим связь между пределами "varying" веса и "varying" рекуррентных коэффициентов. Речь идет о пределе веса при стремлении параметра N к бесконечности

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z)^{1/N} =: W(z) =: e^{-Q(z)} \tag{4.2}$$

и о пределе рекуррентных коэффициентов в режиме $(n/N \to x\,, \quad N \to \infty)$

$$\lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} a_{n,N} =: a(x), \qquad \lim_{\substack{n/N\to x\\ N\to\infty}} b_{n,N} =: b(x). \tag{4.3}$$

Соотношение между этими пределами

$$\begin{Bmatrix} a(x)\\ b(x)\end{Bmatrix} \longleftrightarrow \{Q(z)\} \tag{4.4}$$

и лежит в основе нашего подхода.

Отметим сначала классический случай ОМ на отрезке $[\alpha,\, \beta]$ относительно независящего от параметра N веса $W(z) := e^{Q_0(z)}$. Эта ситуация вкладывается в общий случай (2.5) "varying" ортогональности, если главный член "varying" веса в (2.5) – (внешнее поле) $Q(z)$ равен нулю на отрезке $[\alpha,\, \beta]$ и равен бесконечности вне его. В этом случае связь пределов коэффициентов трехчленной рекурсии (а они существуют при $Q_0 > -\infty$ на $[\alpha, \beta]$):

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n =: b,$$

с весом ортогональности $W(z)$ хорошо известна. Концы носителя весовой функции – отрезка $S = [\alpha,\, \beta]$ (который также можно охарактеризовать как носитель равновесной меры в поле $Q(z)$) связаны с этими пределами соотношениями $\alpha = a - 2b, \quad \beta = a + 2b\,$.

В принципе, также обстоит дело и в общем случае (2.5) "varying" ортогональности. Если предел (4.2) переменного веса существует и получаемое при этом внешнее поле в классе (2.6) дает равновесие на семействе отрезков $S(x) = [\alpha(x),\, \beta(x)]$ для $0 < x < x^*$, то концы отрезков из этого семейства связаны с предельными функциями (4.3) "varying" рекуррентных коэффициентов соотношениями:

$$S(x) = [\alpha(x),\, \beta(x)] : \qquad \alpha(x) = a(x) - 2b(x), \quad \beta(x) = a(x) + 2b(x)\,. \tag{4.5}$$

Только что сформулированное утверждение строго доказано для "хороших" весов (2.5). Например, для аналитических $Q(z)$, $Q_0(z)$ и (2.1). Оно следует из *сильной асимптотики* ОМ, определяемых (2.5),

$$\lim_{N\to\infty} P_{[xN],N}(z)\,, \qquad 0 < x < x^*, \tag{4.6}$$

получаемой, например, *методом матричной задачи Римана-Гильберта*, разработанным для сильных асимптотик в [35] (также см. необходимые детали в [11]), и связей *асимптотики отношения* (см. [29])

$$\lim_{N\to\infty} \frac{P_{[xN]-1,N}(z)}{P_{[xN],N}(z)}\,, \qquad 0 < x < x^*$$

с пределами (4.3) "varying" рекуррентных коэффициентов. Хотя в общих условиях: *поле* $Q(z)$ *аппроксимативно непрерывно снизу и справедливо* (2.1)*, а измеримая* $Q_0 > -\infty$ *почти всюду* (что было бы обобщением знаменитой теоремы Рахманова о существовании пределов рекуррентных соотношений [37]) – подобное утверждение остается открытой проблемой.

Обратная задача о существовании предела (4.2) при наличии пределов (4.3) впервые исследовалась в [36]. Отметим, что изучение в общих классах взаимосвязи (4.4) является очень интересной задачей, в которой некоторые вещи уже поняты и доказаны, но остается еще много открытых вопросов.

4.2 Continuum Limit of the Toda Lattice

Вернемся теперь к гиперболической системе PDE (4.1). Эта система называется *"континуальный предел цепочки Тода"*. Понятно происхождение этого названия. Зафиксируем параметр N и проведем полудискретизацию с шагом ($h := \frac{1}{N}$) по пространственной переменной системы (4.1). Обозначая

$$a_{n,N} := a\left(\frac{n}{N}, \cdot\right), \; b_{n,N} := b\left(\frac{n}{N}, \cdot\right)$$

и масштабируя временную переменную $T := Nt$, мы (для фиксированного N) приходим к известной вполне интегрируемой системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{da_{k,N}}{dT} = (b_{k,N}^2 - b_{k-1,N}^2), \\ \dfrac{db_{k,N}}{dT} = \dfrac{b_{k,N}}{2}(a_{k+1,N} - a_{k,N}), \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots\;, \tag{4.7}$$

называемой *цыпочкой Тода.* Поэтому естественно связывать предел семейства решений (4.7)

$$\lim_{N\to\infty, k/N\to x} \{a_{k,N}(Nt),\, b_{k,N}(Nt)\} = \{a(x,t),\, b(x,t)\}$$

с системой (4.1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = 2b\,\dfrac{\partial b}{\partial x}\;, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\partial a}{\partial x}\;. \end{cases}$$

Хорошо известна (см., например, [38]) процедура нахождения решений задачи Коши $\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty}$ для системы (4.7). Эта процедура называется *метод обратной спектральной задачи.* С нелинейной системой связывается линейная рекурсия

$$\begin{cases} zP_{n,N}(z) = P_{n+1,N}(z) + a_{n+1,N}P_{n,N}(z) + b_{n,N}^2 P_{n-1,N}(z), \\ P_{0,N} = 1, \qquad P_{-1,N} = 0, \end{cases}$$

определяющая систему многочленов $\{P_{n,N}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ см.(2.5), ортогональных относительно веса $W_N(z)$, являющегося (для фиксированного N) плотностью спектральной меры линейного разностного оператора второго порядка – матрицы Якоби:

$$L_N = \begin{pmatrix} a_{1,N} & b_{1,N} & & \\ b_{1,N} & a_{2,N} & b_{2,N} & \\ & b_{2,N} & a_{3,N} & b_{3,N} \\ & & \ddots & \ddots \ddots \end{pmatrix}.$$

Ключевым в методе обратной задачи является то обстоятельство, что если коэффициенты линейного оператора L_N:

$$\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty}$$

эволюционируют во времени согласно нелинейному закону цепочки Тода (4.1), то плотность его спектральной меры эволюционируют во времени согласно линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dW_N}{dT} = -zW_N \;\Rightarrow\; W_N(z,T) \;=\; \exp\{-z\,T\}\,W_N(z,0)\,. \tag{4.8}$$

Тем самым, процедура нахождения решений задачи Коши для системы (4.7) состоит из трех шагов:

1. Начальная прямая спектральная задача $\{a_{n,N}(0),\, b_{n,N}(0)\}_{n=0}^{\infty} \;\to\; W_N(z,0)$;
2. Эволюция $W_N(z,0) \longrightarrow W_N(z,T)$ согласно (4.8);
3. Обратная спектральная задача $W_N(z,T) \;\longrightarrow\; \{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty}$.

Далее, предельному переходу (4.3) при $(n/N \to x\,, \quad N \to \infty)$

$$\{a_{n,N}(T),\, b_{n,N}(T)\}_{n=0}^{\infty} \longrightarrow \{a(x,t),\, b(x,t)\}\,, \tag{4.9}$$

связывающему решения задач (4.7) и (4.1), можно поставить в соответствие предельный переход

$$\lim_{N\to\infty} W_N(z,t)^{1/N} = W(z,t) =: e^{-2Q(z,t)}, \qquad (\,t := NT\,)\,,$$

и тогда эволюция (4.8) повлечет эволюцию внешнего поля

$$Q(z,t) = zt + Q(z,0)\,,$$

которую можно взять за основу метода обратной задачи для решения системы PDE (4.1).

Таким образом, соотношение (4.4) между пределами

$$\begin{Bmatrix} a(x,t) \\ b(x,t) \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \{Q(z,t)\},$$

играет роль "спектральной" задачи для системы PDE (4.1). В частном случае (4.5), рассмотренном в предыдущем пункте, когда $\{a(x,t),\, b(x,t)\}$ связаны с концами отрезка носителя равновесной меры в поле $Q(z,t)$, решения прямой и обратной "спектральных" задач (4.4) мы обсудили в секции 2, и теперь прояснена процедура интегрирования уравнения Хопфа, которую мы использовали в секции 3. Такая же процедура, приводящая к вариационному принципу для нахождения решений и выделению линий разрыва, может быть использована для нелинейной системы PDE (4.1) континуального предела цепочки Тода.

Также этот подход позволяет исследовать регуляризацию этой гиперболической системы, заменяя ее на близкую пространственную полудискретизацию (4.1) и изучая особенности предельного перехода (4.9). Регуляризации гиперболических уравнений, получаемые с помощью их дискретизаций хорошо известны. Например, часто пространственная дискретизация PDE имеет смысл введения второй производной ("вязкости") с малым параметром, и ее называют "схемной вязкостью" (от понятия разностная схема). В нашей же ситуации, по аналогии введения Лаксом и Ливермором в [1] в уравнение Хопфа третьей производной ("дисперсии") с малым параметром, где в качестве регуляризованного уравнения получалось вполне интегрируемое уравнение Кортевега-до Фриза, мы теперь можем говорить о нашей регуляризации, как о "схемной дисперсии". Изучению поведения этой регуляризации посвящена монография Дейфта и Мак Лафлина [28]. Ключевым инструментом здесь являются сильные асимптотики (4.6) семейств многочленов ортогональных по отношению к "varying" весам.

5 Многомерные обобщения

В этой секции мы получим многомерные (*по пространственной переменной!*) аналоги гиперболической системы (4.1). Примером двумерного (по пространственной переменной) аналога этой системы является система для векторов $\vec{a}(x,y,t)$, $\vec{b}(x,y,t) \in \mathbb{R}_2$, где $(x,y,t) \in \mathbb{R}_2^+ \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \nabla |\vec{b}|^2, \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial t} = \dfrac{b_1}{2} \dfrac{\partial a_1}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial b_2}{\partial t} = \dfrac{b_2}{2} \dfrac{\partial a_2}{\partial y}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Для получения этой системы и ее d-мерных (по пространственной переменной) обобщений мы проведем рассуждения аналогичные рассуждениям предыдущей секции.

Мы стартуем с последовательности многочленов, определяемых соотношениями ортогональности относительно набора мер:

$$\int P_{\vec{n}}(z)\ z^k\ d\mu_j(z) = 0, \quad k = 0, \ldots, n_j - 1,\ \ j = 1, \ldots, d.$$

Такие многочлены называются *совместно ортогональными многочленами* (см., например, [39] – [43]). Отличительной чертой этих многочленов $P_{\vec{n}}(z)$, $\deg P_{\vec{n}} = |\vec{n}| := \sum n_j$ является то, что с ними теперь связан мультииндекс $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$. Так как в наших предыдущих рассуждениях индекс многочлена превращался в пространственную переменную, то теперь мультииндекс породит векторную пространственную переменную.

Следующий шаг – $(d+2)$-членные рекурсии для совместно ортогональных многочленов. Отметим, что более пристальное внимание (в связи со спектральной теорией разностных операторов высокого порядка см. [44] – [48]) привлекали рекуррентные соотношения вдоль диагональной "лестницы" ("step-line"), т. е. рекурсии связывающие многочлены

$$P_{\vec{n}+e_1},\ \ P_{\vec{n}},\ \ P_{\vec{n}-e_1},\ \ P_{\vec{n}-e_1-e_2},\ \cdots P_{\vec{n}-e_1-e_2-e_3-\cdots-e_d},$$

где $\vec{n} := (n, n, \ldots, n))$ диагональный мультииндекс, а вектор $e_k \in \{0;1\}^d$ имеет k -тую координату равную единице, а остальные координаты равны нулю. Для реализации нашего подхода мы будем использовать рекурсии, связывающие многочлен с произвольным мультииндексом $\vec{n} := (n_1, \ldots, n_d)$ с многочленами, соответствующими ближайшим мультииндексам, т. е.

$$P_{\vec{n}+e_k},\ \ P_{\vec{n}},\ \ P_{\vec{n}-e_1},\ \ P_{\vec{n}-e_2},\ \cdots P_{\vec{n}-e_d}.$$

Рекурсии такого вида предложил рассматривать Ван Ассе[2]. В результате у нас появляются два d -мерных вектора коэффициентов рекуррентных соотношений

$$b_{\vec{n},j},\ \ a_{\vec{n},j},\quad j = 1, \ldots, d.$$

[2]мы, с согласия W. Van Assche, используем его неопубликованные записки 2004 года.

Далее мы устраиваем эволюцию вектора мер ортогональности, также как и в (4.8)

$$d\mu_j(z,t) := \exp(-tz)d\mu_j(z,0)\,, \qquad j=1,\dots,d.$$

В результате получаем, что коэффициенты рекурсии эволюционируют во времени в соответствии с нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений[3]

$$\begin{cases} \dot a_{\vec n,k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{d}(b^2_{\vec n,j} - b^2_{\vec n+e_k,j}), \quad k=1,\dots,d, \\ \dot b_{\vec n,k} = \dfrac{b_{\vec n,k}}{2}(a_{\vec n+e_k,k} - a_{\vec n,k}), \quad k=1,\dots,d\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

которую можно назвать *многомерной цепочкой Тода.*

Наконец, континуальный предельный переход типа (4.3) приводит к многомерным по пространственной переменной системам PDE. Для $d=2$ так получается (5.1).

В заключительных подсекциях мы введем необходимые понятия и выведем уравнения (5.2).

5.1 Предварительные результаты о совместно ортогональных многочленах

Дадим определения совместно ортогональных многочленов. Есть два типа таких многочленов. Многочлены типа I – $(A_{\vec n,1},\dots,A_{\vec n,d})$ таковы, что $A_{\vec n,j}$ многочлен степени не более n_j-1, удовлетворяющий соотношениям

$$\sum_{j=1}^{d}\int x^k A_{\vec n,j}(x)\,d\mu_j(x) = \delta_{k,|\vec n|-1}, \quad k=0,1,\dots,|\vec n|-1\,. \tag{5.3}$$

Мы предполагаем, что d мер $\mu_1,\dots,\mu_d$ все абсолютно непрерывны по отношению к мере μ и что $d\mu_j(x) = w_j(x)\,d\mu(x)$. Обозначим

$$r_{\vec n}(x) = \sum_{j=1}^{d} A_{\vec n,j}(x)\,w_j(x)\,, \qquad A_{\vec n,j}(x) = k_{\vec n,j}x^{n_j-1}+\dots\,.$$

Совместно ортогональный многочлен типа II – $P_{\vec n}$ есть многочлен со старшим коэффициентом единица, степени $|\vec n|$, такой что

$$\int P_{\vec n}(x)x^k d\mu_j(x) = 0, \quad k=0,1,\dots,n_j-1\,, \quad j=1,\dots,d\,. \tag{5.4}$$

[3]Отметим, что эти рассмотрения для околодиагональных step-line рекурсий приводят к т. н. уравнениям цепочки Богоявленского см. [49], [50], [45], но те уравнения не имеют многомерного характера.

Очевидно, справедлива

Теорема 5.1 (биортогональность) *Совместно ортогональные многочлены типа I и типа II образуют биортогональную систему*

$$\int P_{\vec{n}}(x)\, r_{\vec{m}}(x)\, d\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } \vec{m} \le \vec{n} \text{ или } |\vec{n}| \le |\vec{m}| - 2\ , \\ \\ 1 & \text{для } \vec{m} = \vec{n} + \vec{e}_k\ ,\ \text{при } 1 \le k \le d\ . \end{cases}$$

Для совместно ортогональных многочленов имеют место рекурсии высокого порядка. Для многочленов типа II справедливо

$$x\, P_{\vec{n}}(x) = P_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x) + a_{\vec{n},0}(k) P_{\vec{n}}(x) + \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x)\ , \tag{5.5}$$

где

$$a_{\vec{n},0}(k) = \int x P_{\vec{n}} r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x) d\mu(x)\,, \qquad a_{\vec{n},j} = \frac{\int x^{n_j} P_{\vec{n}}(x)\, d\mu_j(x)}{\int x^{n_j-1} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x)\, d\mu_j(x)}\ . \tag{5.6}$$

Для типа I имеется подобная рекурсия

$$x r_{\vec{n}}(x) = r_{\vec{n}-\vec{e}_k}(x) + b_{\vec{n},0}(k) r_{\vec{n}}(x) + \sum_{j=1}^{d} b_{\vec{n},j} r_{\vec{n}+\vec{e}_j}(x) \tag{5.7}$$

с

$$b_{\vec{n},0}(k) = \int x r_{\vec{n}} P_{\vec{n}-\vec{e}_k}(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x)\ , \qquad b_{\vec{n},j} = \frac{k_{\vec{n},j}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_j,j}}\ .$$

Из (5.5) с помощью биортогональности следует

$$\int x P_{\vec{n}}(x) r_{\vec{n}}(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j}\ , \tag{5.8}$$

а свойства ортогональности $P_{\vec{n}}$ влекут

$$\int P_{\vec{n}}(x) r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x)\, d\mu(x) = \int P_{\vec{n}}(x) A_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}(x)\, d\mu_k(x)\,,$$

так что

$$1 = k_{\vec{n}+\vec{e}_k,k} \int P_{\vec{n}}(x)\, x^{n_k}\, d\mu_k(x)\ . \tag{5.9}$$

Это означает

$$b_{\vec{n},k} = \frac{k_{\vec{n},k}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}} = \frac{\int x^{n_k} P_{\vec{n}}(x)\, d\mu_k(x)}{\int x^{n_k-1} P_{\vec{n}-\vec{e}_k}(x)\, d\mu_k(x)} = a_{\vec{n},k}\ . \tag{5.10}$$

Из определения мы также видим

$$b_{\vec{n}+\vec{e}_k,0}(k) = a_{\vec{n},0}(k)\ . \tag{5.11}$$

5.2 Эволюция векторной меры

Справедлива

Теорема 5.2 (Ван Ассе) *Даны d мер $(\mu_1, \dots, \mu_d)$, которые изменяются во времени по закону*

$$d\mu_k(x,t) = e^{-tx}\, d\mu_k(x)\,, \qquad 1 \le k \le r\ . \tag{5.12}$$

Тогда для совместно ортогональных многочленов $P_{\vec{n}}(x,t)$ коэффициенты (5.5)– (5.6) рекуррентных соотношений $a_{\vec{n},0}(k,t)$ и $a_{\vec{n},k}(t)$ $(1 \le k \le r)$, как функции от t удовлетворяют системе ODE

$$\dot{a}_{\vec{n},k} = a_{\vec{n},k}[a_{\vec{n}-\vec{e}_k,0}(k) - a_{\vec{n},0}(k)]\,, \tag{5.13}$$

$$\dot{a}_{\vec{n},0}(k) = \sum_{j=1}^{d}(a_{\vec{n},j} - a_{\vec{n}+\vec{e}_k,j})\ . \tag{5.14}$$

для $1 \le k \le r$.

Доказательство. Теорема 5.1 дает

$$\int P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = 1\ .$$

Продифференцируем это выражение по t

$$\int \dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) + \int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) =$$

$$= \int x P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x)\,.$$

Заметим что $\dot{P}_{\vec{n}}$ многочлен степени не выше $|\vec{n}| - 1$ и так как $P_{\vec{n}}$ многочлен со старшим коэффициентом единица, то ортогональность (5.3) для многочленов типа I дает

$$\int \dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = 0\ .$$

Ортогональность (5.4) для многочленов типа II дает

$$\int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{A}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu_k(x)$$

$$= \dot{k}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k} \int x^{n_k}\, P_{\vec{n}}(x;t)\, e^{-xt} d\mu_k(x) = \frac{\dot{k}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}}\ ,$$

где последнее равенство следует из (5.9). Комбинируя эти результаты с (5.6), получаем

$$a_{\vec{n},0}(k;t) = \frac{\dot{k}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}} \ .$$

Дифференцирование выражения (5.10) дает

$$\frac{\dot{k}_{\vec{n},k}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_k},k} - \frac{\dot{k}_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}}{k_{\vec{n}+\vec{e}_k,k}} = \frac{\dot{a}_{\vec{n},k}}{a_{\vec{n},k}} \ .$$

Тем самым (5.13) получено

$$a_{\vec{n}-\vec{e}_k,0}(k,t) - a_{\vec{n},0}(k,t) = \frac{\dot{a}_{\vec{n},k}}{a_{\vec{n},k}} \, .$$

Для доказательства (5.14) начнем с выражения (5.6) для $a_{\vec{n},0}(k,t)$. Продифференцируем это выражение по t

$$\begin{gathered}\dot{a}_{\vec{n},0}(k,t) = \int x\dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) \ + \\ \int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) - \int x^2 P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) \, ,\end{gathered} \tag{5.15}$$

Подставляя в первый интеграл полученного выражения рекурсию (5.7), преобразуем его с помощью соотношений ортогональности для многочленов типа I (с учетом того что степень $\dot{P}_{\vec{n}}$ не выше $|\vec{n}|-1$)

$$\begin{aligned}\int \dot{P}_{\vec{n}}(x;t) \left(r_{\vec{n}}(x;t) + a_{\vec{n},0}(k)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t) + \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n}+\vec{e}_k,j} r_{\vec{n}+\vec{e}_j+\vec{e}_k}(x;t) \right) e^{-xt} d\mu(x) \\ = \int \dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \int x\dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x).\end{aligned}$$

Дифференцирование тождества

$$\int P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = 0$$

дает

$$\int \dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \int x P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j}(t) \ .$$

Следовательно получили выражение для первого интеграла в (5.15)

$$\int x\dot{P}_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j}(t) \ .$$

Обратимся теперь ко второму интегралу в (5.15). Подставляя в него рекурсию (5.5) имеем

$$\int \left(P_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t) + a_{\vec{n},0}(k,t)\, P_{\vec{n}}(x;t) + \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t) \right) \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) \ .$$

Соотношения ортогональности (5.4) для многочленов типа II дают

$$\int x P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = a_{\vec{n},0}(k) \int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x)$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} \int P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) \ .$$

При доказательстве (5.13) мы заметили, что

$$\int P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = a_{\vec{n},0}(k) \ .$$

Если мы продифференцируем тождество

$$\int P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = 0 \ ,$$

то мы найдем

$$\int P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \int x P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) \, .$$

Используя рекурсию (5.5) и биортогональность, получаем

$$\int P_{\vec{n}-\vec{e}_j}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = 1 \ .$$

Это дает для второго интеграла в (5.15)

$$\int x P_{\vec{n}}(x;t)\, \dot{r}_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = a_{\vec{n},0}^2(k) + \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} \ .$$

Наконец, с помощью (5.5), (5.7) и биортогональности для третьего интеграла в (5.15) имеем

$$\int x^2 P_{\vec{n}}(x;t)\, r_{\vec{n}+\vec{e}_k}(x;t)\, e^{-xt} d\mu(x) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n}+\vec{e}_k,j} + a_{\vec{n},0}^2(k) + \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} \ .$$

Собирая вместе полученные выражения для интегралов в (5.15), находим

$$\dot{a}_{\vec{n},0}(k) = \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n},j} - \sum_{j=1}^{d} a_{\vec{n}+\vec{e}_k,j} \ ,$$

что есть ничто иное, как (5.14). Теорема доказана.

6 Заключение

Во многих физических системах главное поведение описывается нелинейными гиперболическими уравнениями в частных производных, для решений которых при дискретизации в задачу вносится возмущение производными высшего порядка. С другой стороны в моделируемых физических системах эти возмущения зачастую проявляются в виде микропроцессов, не учтенных в начальной гиперболической аппроксимации. Такого сорта возмущения (т.н. регуляризации) очень важны для устойчивости численного расчета. Известен пример регуляризации с помощью диффузионных процессов; эта ситуация получила подробный анализ как в физическом так и математическом сообществах, и детализированная природа диффузионного процесса регуляризации в настоящее время осмыслена в достаточно общих ситуациях. Другой механизм регуляризации, дисперсионная регуляризация, изучен значительно меньше, хотя столь же естественен. Для таких систем анализ дисперсионной регуляризации нелинейных гиперболических уравнений в частных производных особенно важен для того, чтобы понять и моделировать систему, когда она проходит через критическую точку потери устойчивости. Имеется набор примеров, когда система после регуляризации становится интегрируемой. Такая регуляризация полезна не только для описания микроструктур, которые адекватны модели, но так же доставляет новые методы анализа и решения исходной нелинейной гиперболической системы.

Список литературы

[1] P. D. Lax and C. D. Levermore, *The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I, II, III*, Comm. Pure Appl. Math., 36, (1983), 253–290, 571–593, 809–830.

[2] А. А. Гончар, *Рациональные аппроксимации аналитических функций*, Труды междунар. конгресса математиков. Беркли 1986, (1987), 739–748.

[3] А. А. Гончар, *О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями*, Матем. сб., 78(120), 4, (1969), 640–654.

[4] А. А. Гончар, *О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций*, Труды МИАН., 116, (1984), 52–60.

[5] А. А. Гончар, *О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций*, Матем. сб., 105(147), 2, (1978), 147–163.

[6] А. А. Гончар, *Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитических функций в окрестности изолированной особой точки*, Матем. сб., 94(136), 2, (1974), 266–282.

[7] A. A. Gonchar, *Rational approximation of analytic functions*, Linear and complex analysis problems, Springer-Verlag, Berlin, 1984, 471–474. (Lecture Notes in Math. V. 1043.)

[8] А. А. Гончар, Г. Лопес Г, *О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде*, Матем. сб., 105(147), 4, (1978), 512–524.

[9] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов*, Матем. сб., 125(167) (1984), 117–127.

[10] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций*, Матем. сб., 134, 3, (1987) 306–352.

[11] А. И. Аптекарев, *Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций*, Матем. сб., 193, 1, (2002) 3–72.

[12] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа*, Труды МИАН.,157 (1981), 31–48.

[13] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, *О задаче равновесия для векторных потенциалов*, УМН., 40, 4, (1985), 155–156.

[14] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, *Аппр. Эрмита–Паде для систем функций марковского типа*, Матем. сб., 188, 5, (1997), 33–58.

[15] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, *Системы марковских функций генерируемых графами и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде*, Матем. сб., 201, 2, (2010), 27–78.

[16] В. Г. Лысов, *Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лаггера*, Матем. сб., 196, 12, (2005), 99-122.

[17] М.А. Лапик, *О носителе экстремальной меры в векторной задаче равновесия*, Матем. сб.,197:8, (2006), 101-118

[18] M.A. Lapik, *Interval of Equilibrium for the Logarithmic potential of an Extremal Measure with a Constraint, and the Continuum Limit of the Toda Lattice*, Russian Journal of Mathematical Physics, 13, 1, (2006), 119-121.

[19] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars and W. Van Assche, *Asymptotics of Hermite-Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)*, International Mathematics Research Papers, (2008) , Article ID rpm007, 128 pages

[20] А. И. Аптекарев, *Асимптотика аппроксимаций Эрмита—Паде для пары функций с точками ветвления*, Доклады РАН 422:4, (2008), 1-3.

[21] В. С Буяров, *Логарифмическая асимптотика многочленов ортогональных на действительной оси с несимметричными весом* , Мат. Заметки, 50, (1991), 28–36.

[22] В. С Буяров, Е. А. Рахманов, *Семейства равновесных мер во внешнем поле на действительной оси*, Матем. сб., 190, (1999), 11–22.

[23] Е. А. Рахманов, *Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов дискр. переменной*, Матем. сб., 187 (1996), 109–124.

[24] A. B. J. Kuijlaars, E. A. Rakhmanov, *Zero distributions for discrete orthogonal polynomials* J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 255–274.

[25] P. Dragnev and E. B. Saff, *Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable*, J. Anal. Math. **72** (1997), 223–259.

[26] P. D. Dragnev and E. B. Saff, *A problem in potential theory and zero asymptotics of Krawtchouk polynomials*, J. Approx. Theory **102** (1999), 120–140.

[27] B. Beckermann, *On a conjecture of E. A. Rakhmanov*, Constr. Approx. **16** (2000), 427–448.

[28] P. Deift and K. T-R McLaughlin, *A Continuum Limit of the Toda Lattice*, Memoirs Amer. Math. Soc. **624**, Providence, RI, 1998.

[29] A. I. Aptekarev and W. Van Assche, *Asymptotics of discrete orthogonal polynomials and the continuum limit of the Toda lattice* , Journal of Physics A: Mathematics and General, 34(48), (2001), 10627-10639.

[30] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, *New results on the equilibrium measure of logarithmic potentials in the presence of an external field*, J. Approx. Theory.,95 (1998), 388–475.

[31] H.N. Maskar, E.B. Saff. Where does the sup norm of a weighted polynomial live? Constr. Approx., 1, (1985), 71–91.

[32] А.И. Аптекарев, Ю.Г. Рыков, *О вариационном представлении решений некоторой гиперболической системы уравнений с помощью логарифмического потенциала во внешнем поле*, Доклады Академии Наук РАН, 409, 1, (2006), 12–14.

[33] A.I. Aptekarev, Yu.G. Rykov, *On the Variational Representation of Solutions to Some Quasilinear Equations and Systems of Hyperbolic Type on the Basis of Potential Theory*, Russian Journal of Mathematical Physics, 13, 1, (2006), 4-12.

[34] P.D. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws, II. Comm. Pure Appl. Math., **10**, No. 4 (1957), 537–566.

[35] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T-R. McLaughlin, S. Venakides, and X. Zhou, *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), no. 11, 1335–1425.

[36] A.I. Aptekarev, J. Geronimo and W. Van Assche, *Varying weights for orthogonal polynomials with monotonically varying recurrence coefficients*, Journal Approximation Theory, 150, 2008, 214-238.

[37] Е. А. Рахманов, *Об асимптотике отношения ортогональных многочленов*, Матем. сб., 103(145) (1977), 237–252.

[38] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math., 16, (1975), 197–220.

[39] J. Nuttall, *Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials*, J. Approx. Theory, 42, (1984), no. 4, 299–386.

[40] Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, Москва, 1988.

[41] A. I. Aptekarev and H. Stahl, *Asymptotics of Hermite-Padé polynomials*, in 'Progress in Approximation Theory' (A. Gonchar, E. B. Saff, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1992, pp. 127–167.

[42] A. I. Aptekarev, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., 99, (1998), no. 1–1, 423–448.

[43] W. Van Assche, *Padé and Hermite-Padé approximation and orthogonality* Surveys in Approximation Theory, 2, (2006), 61–91.

[44] A.I. Aptekarev and V.A. Kaliaguine, *Complex rational approximation and difference operators*, Rend. Circ. Mathem. Palermo, Ser.II, suppl., 52, (1998), 3-21.

[45] A.I. Aptekarev, V.A. Kaliaguine and J. Van Iseghem, *The Genetic Sum's Representation for the Moments of a System of Stieltjes Functions and its Application,* Constr. Approx., 16 (2000), 487-524.

[46] В.А. Калягин, *Аппроксимации Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных разностных операторов,* Матем. сб., 185, (1994), 79-100.

[47] V.A. Kaliaguine, *The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials,* J. Comput. Appl. Math., 65, (1995), 181-193.

[48] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin and E. B. Saff, *Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials*, Constr. Approx., 30, 2, (2009), 175–223.

[49] О. Богоявленский, *Интегрируемые динамические системы ассоциированные с уравнением КдФ,* Изв. Акад. Наук СССР, сер. Мат., 51, (1987), n. , 435–454.

[50] В. Сорокин, *Интегрируемые нелинейные динамические системы типа цепочки Ленгмюра*, Мат. Заметки, **62**(1997), 588-602.