



**Бессонов Р.В, Куркина А.Н.,
Сазонов В.В.**

Оценка точности
определения параметров
ориентации осей системы
координат
астроизмерительного
прибора БОКЗ-М60

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бессонов Р.В, Куркина А.Н., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М60 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 22. 39 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-22>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина, В.В. Сазонов

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРИЕНТАЦИИ
ОСЕЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ АСТРОИЗМЕРИТЕЛЬНОГО
ПРИБОРА БОКЗ-М60**

Москва – 2012

Аннотация

Исследована точность показаний звездного датчика БОКЗ-М60, полученных на стенде натуральных динамических испытаний ИКИ РАН. Стенд имеет подвижную платформу с тремя степенями свободы, к которой крепится датчик, сканирующий звездное небо. Электропривод стенда управляется ПЭВМ. Движение платформы при испытаниях задается программой в виде управляющих напряжений, подаваемых на электродвигатели, но значения углов поворота в шарнирах платформы с требуемой точностью не известны. При испытаниях звездных датчиков ошибка в знании ориентации платформы должна быть около одной угловой секунды, что соответствует ошибке в определении линейных координат контрольных точек платформы примерно 5 мкм. Аппроксимация движения платформы строится по измерениям испытываемого датчика, погрешность измерений оценивается по ошибкам аппроксимации. Используются два способа построения аппроксимации. В одном из них используется параметрическое представление реализуемого движения в виде комбинации двух эйлеровых разворотов. Первый разворот описывает вращение Земли, второй разворот – периодические колебания платформы. Параметры разворотов определяются по данным измерений. Во втором способе используется аппроксимация кватерниона ориентации с помощью рядов Фурье. Как оказалось, точность датчика зависит от типа движения платформы и лежит в пределах от 2 до 25 угловых секунд (для осей собственной системы координат, лежащих в плоскости ПЗС-матрицы датчика).

R.V. Bessonov, A.N. Kurkina, V.V.Sazonov. Accuracy estimation of determining attitude of coordinate systems of BOKZ-M60 star sensor. We investigate the accuracy of measurement data that were obtained during testing BOKZ-M60 sensor in the special testbed in RSSI RAS. The testbed has a movable platform, where the sensor BOKZ-M60 is fixed. The platform has three degrees of freedom and moves according to PC program. But its motion is not known with a sufficient accuracy. We approximate the motion of the platform in two ways and use the errors of those approximations to estimate the errors of the measurements. One way is a representation of the motion as a combination of two Euler rotations. The first rotation describes the rotation of the Earth; the second rotation is caused by periodic oscillations of the platform. The parameters of the rotations are determined by sensor measurements. The second way consists in approximation of the motion by discrete Fourier series. Both ways gives consistent estimations. The errors of measurements depend on a type of platform motion and are in the range from 2 to 25 arc seconds.

1. Системы координат. Ниже используются две правые, декартовы системы координат – инерциальная система $X_1X_2X_3$ и внутренняя система датчика $x_1x_2x_3$. В инерциальной системе плоскость X_1X_2 совпадает с плоскостью среднего земного экватора эпохи 2000.0, оси X_1 и X_3 направлены соответственно в точку среднего равноденствия этой эпохи и северный полюс мира. Это – так называемая система J2000. В системе датчика плоскость x_1x_2 параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось x_3 направлена от матрицы к объективу датчика. Связь между введенными системами координат задается нормированным кватернионом $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$. Формулы перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ записываются в кватернионной форме в виде

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{q}^{-1}.$$

2. Оценка точности определения ориентации датчика на неподвижной платформе. Датчик был закреплен на неподвижной платформе, ось x_3 направлена в зенит, ось x_1 – на восток. Показания датчика регистрировались в течение 64 мин с шагом $h = 0.25$ с. Показания получены для 15407 моментов времени. Результаты определения кватерниона \mathbf{q} в момент t_n обозначим \mathbf{q}_n ($n = 1, 2, \dots, N$). В данном случае $t_{n+1} - t_n = h$, $N = 15407$.

При аппроксимации этих данных можно считать, что датчик (вместе с Землей) равномерно вращается вокруг оси, неподвижной в обеих системах координат $X_1X_2X_3$ и $x_1x_2x_3$, т.е. совершает эйлеров разворот. Если бы оси X_i и x_j были выбраны надлежащим образом, то такое движение описывалось бы кватернионом $\mathbf{q} = (\cos \alpha(t), \mathbf{e} \sin \alpha(t)) \equiv \mathbf{p}(t)$, $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0)$, где скаляры α_0 , α_1 и орт \mathbf{e} – постоянные величины. Надлежащий выбор осей имеет место, когда компоненты орта \mathbf{e} в подвижной и неподвижной системах координат совпадают. При указанном выше выборе систем координат последнее условие не выполнено, и описывающий движение кватернион имеет вид $\mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \circ \mathbf{Q}$. В этой формуле \mathbf{Q} – постоянный нормированный кватернион, компоненты орта \mathbf{e} относятся к системе $X_1X_2X_3$.

Измерения \mathbf{q}_n представим в виде $\mathbf{q}_n = \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{F}(\xi_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Последний множитель в этой формуле – ошибка измерения, выражаемая через трехмерный случайный вектор ξ_n и нормированную кватернионную функцию $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (F_0, F_1, F_2, F_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$,

$$F_0 = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad F_i = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Параметры z_i называются модифицированными параметрами Родрига. В общем случае

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \neq \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \neq \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1),$$

но при $|\mathbf{z}_1| \ll 1$, $|\mathbf{z}_2| \ll 1$ разность $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$ будет иметь второй порядок малости относительно $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$. Ниже для любых малых $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$ принимаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1), \quad \|\mathbf{F}(\mathbf{z}) - 1\| = 2|\mathbf{z}|.$$

Такое упрощение означает линеаризации некоторых используемых ниже соотношений. Функцию, обратную функции $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$ в окрестности точки $\mathbf{s} = 1$, обозначим $\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{s})$. Имеют место соотношения $\mathbf{F}^{-1}(1) = 0$, $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(-\mathbf{z})$. Последняя формула является точной.

Приведем еще одно свойство функции $\mathbf{F}(\mathbf{z})$, выражаемое точной формулой. Пусть $\mathbf{P} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ – произвольный нормированный кватернион. Тогда $\mathbf{P} \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}) \circ \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{F}(A\mathbf{z})$, где $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$ – ортогональная матрица, связанная с кватернионом \mathbf{P} известными формулами $a_{11} = P_0^2 + P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$, $a_{12} = 2(P_1P_2 - P_0P_3)$, $a_{21} = 2(P_1P_2 + P_0P_3)$ и т. п.

Механический смысл величин ξ_n в случае $|\xi_n| \ll 1$: система координат $x_1x_2x_3$ переводится из положения, задаваемого кватернионом $\mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}$, в положение, задаваемое кватернионом \mathbf{q}_n , бесконечно малым поворотом с вектором $4\xi_n$. Компоненты вектора относятся к системе $x_1x_2x_3$. Ошибки аппроксимации можно выразить и в системе $X_1X_2X_3$, если исходить из представления измерений в виде $\mathbf{q}_n = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n) \circ \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Здесь $\mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n) = \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{F}(\xi_n) \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}(t_n)$. В силу последнего указанного свойства функции $\mathbf{F}(\mathbf{z})$ вектор $\boldsymbol{\eta}_n$ задает ту же физическую величину, что и вектор ξ_n , но его компоненты относятся к системе $X_1X_2X_3$.

Ниже будем считать, что характеризующие ошибки измерений векторы $\boldsymbol{\eta}_n$ независимы, имеют нулевые математические ожидания и одинаковые ковариационные матрицы $M\boldsymbol{\eta}_n\boldsymbol{\eta}_n^T = \sigma^2 E_3$, $E_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$, причем $\sigma \ll 1$.

Ошибки аппроксимации измерений с помощью кватернионной функции $\mathbf{q} = \mathbf{p}(t) \circ \mathbf{Q}$ представим в виде $\boldsymbol{\eta}_n = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{q}_n \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}(t_n)]$. Согласно методу наименьших квадратов при сделанных предположениях относительно величин $\boldsymbol{\eta}_n$ наиболее правдоподобной будет аппроксимация, в которой параметры этой функции доставляют минимум выражению

$$\Phi = \sum_{n=1}^N |\boldsymbol{\eta}_n|^2.$$

При достаточно точной аппроксимации ошибки $\boldsymbol{\eta}_n$ должны быть малы. Тогда $2|\boldsymbol{\eta}_n| = \|\mathbf{q}_n \circ \mathbf{Q}^{-1} \circ \mathbf{p}^{-1}(t_n) - 1\| = \|\mathbf{q}_n - \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}\|$ и можно принять

$$\Phi = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n - \mathbf{p}(t_n) \circ \mathbf{Q}\|^2. \quad (1)$$

Последнее выражение следует минимизировать по параметрам, задающим функцию $\mathbf{p}(t)$, и кватерниону \mathbf{Q} .

Кватернион \mathbf{Q} из числа определяемых параметров можно исключить с помощью следующей конструкции. Введем «средний» кватернион

$$\mathbf{q}_c = \|\mathbf{q}_*\|^{-1} \mathbf{q}_*, \quad \mathbf{q}_* = \sum_{n=1}^N \mathbf{q}_n.$$

С учетом принятой модели ошибок

$$\mathbf{q}_* = \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n) \circ \mathbf{p}(t_n) \right] \circ \mathbf{Q}.$$

Поскольку ошибки $\boldsymbol{\eta}_n$ малы, можно считать, что они входят в выражение для \mathbf{q}_* линейно и их вклад в это выражение $\sim \sqrt{N}$. Измерения охватывают сравнительно короткий отрезок времени, поэтому все \mathbf{q}_n отстоят недалеко от \mathbf{q}_* и $\|\mathbf{q}_*\| \sim N$. При $N \gg 1$ вкладом ошибок в \mathbf{q}_* можно пренебречь и принять

$$\mathbf{q}_* = \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{p}(t_n) \right] \circ \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q}_c = (\cos \alpha_c, \mathbf{e} \sin \alpha_c) \circ \mathbf{Q},$$

где α_c – некоторое число. Выражение (1) преобразуем следующим образом

$$\Phi = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{q}_n \circ \mathbf{q}_c^{-1} - \hat{\mathbf{p}}(t_n)\|^2, \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{p}(t) \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{q}_c^{-1} = \mathbf{p}(t) \circ (\cos \alpha_c, -\mathbf{e} \sin \alpha_c) = (\cos \hat{\alpha}(t), \mathbf{e} \sin \hat{\alpha}(t)),$$

$$\hat{\alpha}(t) = \alpha(t) - \alpha_c = \hat{\alpha}_0 + \alpha_1(t - t_0), \quad \hat{\alpha}_0 = \alpha_0 - \alpha_c.$$

Выражение (2) будем минимизировать по параметрам $\hat{\alpha}_0$, α_1 и компонентам орта $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$. Чтобы минимизация была безусловной, компоненты \mathbf{e} параметризуем формулами

$$e_1 = \frac{2u_1}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad e_2 = \frac{2u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \quad e_3 = \frac{1 - u_1^2 - u_2^2}{1 + u_1^2 + u_2^2}.$$

Задача состоит в минимизации функции (2) по параметрам u_1 , u_2 , $\hat{\alpha}_0$ и α_1 .

Минимизация была выполнена методом Гаусса – Ньютона. В качестве точки t_0 была принята средняя точка отрезка $[t_1, t_N]$. Результаты минимизации: $u_1 = -2.24 \cdot 10^{-5}$ ($2.1 \cdot 10^{-6}$), $u_2 = 1.52 \cdot 10^{-5}$ ($2.1 \cdot 10^{-6}$), $\hat{\alpha}_0 = 0$ ($1.7 \cdot 10^{-7}$), $\alpha_1 = 3.64551 \cdot 10^{-5}$ ($1.5 \cdot 10^{-10}$), $\sigma = 1.05 \cdot 10^{-5}$. Здесь и ниже в скобках рядом с оценками указаны их стандартные отклонения. Корреляция между найденными оценками практически отсутствует. Расчет стандартных отклонений выполнен в рамках метода наименьших квадратов. Пусть Φ_{\min} – значение функции (2) в точке минимума, \mathbf{C} – вычисленная в этой точке матрица системы нормальных уравнений, возникающей при минимизации Φ методом Гаусса-Ньютона (в точке минимума Φ матрица $2\mathbf{C}$ приближенно равна матрице квадратичной

формы $d^2\Phi$). Стандартное отклонение σ и ковариационная матрица K оцениваемых параметров находились по формулам

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi_{\min}}{3N-4}}, \quad K = \sigma^2 C^{-1}.$$

Найденным значениям u_1, u_2 отвечает орт, имеющий в системе $X_1X_2X_3$ вид $\mathbf{e} = (-4.48 \cdot 10^{-5}, 3.047 \cdot 10^{-4}, 1.000)$. Найденному значению α_1 отвечает оценка угловой скорости Земли $2\alpha_1 = 15.03882''/\text{с}$ ($7.0 \cdot 10^{-5}''/\text{с}$). Истинное значение этой угловой скорости $15.04107''/\text{с}$. Таким образом, часы датчика немного спешили.

Графики компонент ошибок аппроксимации

$$\Delta \mathbf{q}^{(n)} = \mathbf{q}_n \circ \mathbf{q}_c^{-1} - \hat{\mathbf{p}}(t_n) = (\Delta q_0^{(n)}, \Delta q_1^{(n)}, \Delta q_2^{(n)}, \Delta q_3^{(n)})$$

приведены на рис. 1а. Каждый график представляет собой ломаную, смежные вершины которой суть соседние члены последовательности точек $(t_n, \Delta q_i^{(n)})$. Графики на рис. 1а иллюстрируют погрешность аппроксимации измеренных значений кватерниона принятой математической моделью, но не очень наглядно описывают отклонения измеренных положений системы координат $x_1x_2x_3$ относительно построенной аппроксимации ее движения. Прямые оценки таких отклонений дают векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{q}_c^{-1} \circ \hat{\mathbf{p}}^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n]$ ($n = 1, 2, \dots, N$), представляющие собой реализации ошибок $\boldsymbol{\xi}_n$. Согласно сказанному выше величина $\boldsymbol{\theta}_n = 4\boldsymbol{\varepsilon}_n$ представляет собой вектор бесконечно малого поворота, который переводит сглаженное на момент времени t_n положение системы $x_1x_2x_3$ в ее измеренное положение на тот же момент. Графики компонент векторов $\boldsymbol{\theta}_n = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)})$ приведены на рис. 1б; компоненты относятся к системе $x_1x_2x_3$. Каждый график представляет собой ломаную с вершинами в точках $(t_n, \theta_i^{(n)})$, $i = 1, 2, 3$. Среднеквадратичные значения $\langle \theta_i \rangle$ компонент последовательностей $\theta_i^{(n)}$ равны $\langle \theta_1 \rangle = 1.68''$, $\langle \theta_2 \rangle = 1.83''$, $\langle \theta_3 \rangle = 14.8''$. Для иллюстрации этих среднеквадратичных значений на рис. 1б приведены прямые $\theta_i = \pm \langle \theta_i \rangle$.

Как видно из графиков на рис. 1, отклонения измерений от построенной аппроксимации содержат плавно меняющуюся со временем составляющую – тренд, которая явно имеет неслучайный характер. Причиной возникновения тренда могли быть изменения теплового режима датчика, деформации основания и т. п. Звездный датчик "чувствовал" тренд, поэтому последний не следует относить к случайной погрешности датчика. Чтобы точнее оценить эту погрешность, тренд из ошибок аппроксимации (2) необходимо исключить. Выделение тренда опишем ниже, оно лишь незначительно уменьшит указанные выше среднеквадратичные значения $\langle \theta_i \rangle$.

3. Оценка точности определения ориентации датчика на подвижной платформе. Стенд натуральных динамических испытаний ИКИ РАН позволяет проверять функционирование звездного датчика, совершающего движение. Датчик крепится на подвижной платформе, которая управляется компьютером и качается в соответствии с заданной программой. Платформа имеет три степени свободы и может совершать довольно сложные движения. Однако при получении обрабатываемых ниже файлов была задействована только одна такая степень, поэтому платформа с закрепленным на ней датчиком совершали относительно земной поверхности эйлеров разворот. Были проведены два сеанса таких испытаний, и соответственно получены два файла данных. Назовем их файл 1 и файл 2. Направления осей разворота и вид колебаний вокруг оси в этих сеансах существенно отличались. Файл 1 получен в сеансе с медленными и плавными колебаниями, при получении файла 2 платформа совершала более быстрые колебания с чередованием разгонов и остановок. Однако в обоих случаях колебания были периодическими. Указанное обстоятельство и тот факт, что эти сеансы и сеанс измерений, описанный в предыдущем пункте, были проведены с одним и тем же датчиком в течение нескольких часов, определили способ обработки.

Примем, что движение датчика в каждом сеансе описывалось кватернионом

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_1(t) \circ \mathbf{p}_2(t) \circ \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p}_k(t) = (\cos \alpha_k(t), \mathbf{e}_k \sin \alpha_k(t)) \quad (k = 1, 2),$$

$$\alpha_1(t) = \omega_E(t - t_0),$$

$$\alpha_2(t) = a_1 + \sum_{m=1}^M [a_{2m} \cos 2\pi m f(t - t_0) + a_{2m+1} \sin 2\pi m f(t - t_0)].$$

Здесь \mathbf{Q} и параметры функций $\alpha_k(t)$ – постоянные величины. Кватернион $\mathbf{p}_1(t)$ описывает вращение Земли. Орт \mathbf{e}_1 и угловая скорость ω_E определены по измерениям, описанным в предыдущем пункте, и имеют указанные там значения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}$, $\omega_E = \alpha_1$. Таким образом, кватернион $\mathbf{p}_1(t)$ известен. Кватернион $\mathbf{p}_2(t) \circ \mathbf{Q}$ описывает эйлеров разворот платформы стенда относительно поверхности Земли. Параметры этого кватерниона подлежат определению.

Измерения в файлах 1 и 2 по-прежнему обозначим \mathbf{q}_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Для файла 1 $N = 6025$, для файла 2 $N = 5444$. В качестве точки t_0 примем среднюю точку отрезка $[t_1, t_N]$. Иной выбор t_0 изменил бы значения оценок \mathbf{e}_2 и \mathbf{Q} , но сохранил вид принятой модели движения. Вводя в модель ошибки измерений, приходим к соотношениям $\mathbf{q}_n = \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n) \circ \mathbf{p}_1(t_n) \circ \mathbf{p}_2(t_n) \circ \mathbf{Q}$. В силу этих соотношений

$$\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n = [\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}_n) \circ \mathbf{p}_1(t_n)] \circ \mathbf{p}_2(t_n) \circ \mathbf{Q} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Графики компонент кватернионных последовательностей \mathbf{q}_n и $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n$ приведены на рис. 2а,б и 3а,б. Рис. 2 получен для файла 1, рис. 3 для файла 2.

Графики представляют собой ломаные, абсциссы вершин которых образуют сетку $\{t_n\}$ на оси времени, а ординаты вершин – соответствующие значения компонент кватернионов. Поскольку ошибки $\boldsymbol{\eta}_n$ весьма малы, графики компонент последовательностей $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n$ на рис. 2б и 3б выглядят как периодические функции.

Чтобы выделить из кватернионной последовательности $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n$ эйлеров разворот в чистом виде (ошибками измерений пока пренебрежем), члены этой последовательности умножим справа на кватернион $(\mathbf{q}'_c)^{-1}$, где

$$\mathbf{q}'_c = \|\mathbf{q}'_*\|^{-1} \mathbf{q}'_*, \quad \mathbf{q}'_* = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n.$$

С весьма высокой точностью

$$\mathbf{q}'_* = \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{p}_2(t_n) \right] \circ \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q}'_c = (\cos \alpha'_c, \mathbf{e}_2 \sin \alpha'_c) \circ \mathbf{Q},$$

На рис. 2в и 3в приведены графики компонент кватернионной последовательности $\hat{\mathbf{p}}_2(t_n) = \mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n \circ (\mathbf{q}'_c)^{-1}$. Элементы этой последовательности можно преобразовать к виду (ср. п. 2)

$$\hat{\mathbf{p}}_2(t_n) = \mathbf{p}_2(t_n) \circ (\cos \alpha'_c, -\mathbf{e}_2 \sin \alpha'_c) = (\cos \hat{\alpha}_2(t_n), \mathbf{e}_2 \sin \hat{\alpha}_2(t_n)),$$

$$\hat{\alpha}_2(t) = \hat{a}_1 + \sum_{m=1}^M [a_{2m} \cos 2\pi m f(t - t_0) + a_{2m+1} \sin 2\pi m f(t - t_0)], \quad \hat{a}_1 = a_1 - \alpha'_c.$$

Формула $\hat{\mathbf{p}}_2(t) = (\cos \hat{\alpha}_2(t), \mathbf{e}_2 \sin \hat{\alpha}_2(t))$ согласуется с видом графиков на рис. 2в и 3в. Из этих графиков можно заключить, что вторая, третья и четвертая компоненты кватерниона $\hat{\mathbf{p}}_2(t)$ получаются одна из другой умножением на постоянный множитель. В обоих случаях первая компонента $\hat{\mathbf{p}}_2(t)$ близка к 1.

Следовательно функция $|\hat{\alpha}_2(t)|$ мала, и $\cos \hat{\alpha}_2(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\alpha}_2(t)}$. Судя по графикам, период τ зависимости от времени первой компоненты в два раза меньше общего периода остальных компонент. Сопоставив этот факт с последней формулой, получим $\hat{\alpha}_2(t + \tau) = -\hat{\alpha}_2(t)$. Это означает, что в выражении для $\hat{\alpha}_2(t)$ присутствуют гармоники только с нечетными значениями m . Разумеется, из-за ошибок измерений все указанные свойства функции $\hat{\mathbf{p}}_2(t)$ выполняются приближенно, но они подсказывают способ определения ее параметров.

Компоненты орта \mathbf{e}_2 параметризуем двумя параметрами a и b , положив

$$\mathbf{e}_2 = \frac{(a, 1, b)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

Обозначим $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n \circ (\mathbf{q}'_c)^{-1} = \mathbf{h}_n = (h_0^{(n)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots, N$. Поскольку $\hat{\mathbf{p}}_2(t_n) \approx \mathbf{h}_n$, должно быть $h_1^{(n)} \approx ah_2^{(n)}$, $h_3^{(n)} \approx bh_2^{(n)}$. Параметры a и b найдем, минимизируя по ним выражения

$$\sum_{n=1}^N \left(h_1^{(n)} - ah_2^{(n)} \right)^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^N \left(h_3^{(n)} - bh_2^{(n)} \right)^2.$$

Для файла 1 имеем $a = -1.71130(7.5 \cdot 10^{-5})$, $b = -0.06721(6.5 \cdot 10^{-5})$. По этим параметрам находим орт $\mathbf{e}_2 = (-0.863, 0.504, -0.034)$. Он указан во вспомогательной системе координат. Компоненты этого орта в системе $x_1x_2x_3$ имеют вид $\mathbf{e}'_2 = (\mathbf{q}'_c)^{-1} \circ \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{q}'_c = (0.982, 0.189, 0.004)$. В случае файла 2 получаем $a = 0.092901(7.0 \cdot 10^{-6})$, $b = 0.326253(9.0 \cdot 10^{-6})$, $\mathbf{e}_2 = (0.088, 0.947, 0.309)$, $\mathbf{e}'_2 = (-0.014, 1.000, 0.003)$. Последовательности остатков $e_1^{(n)} = h_1^{(n)} - ah_2^{(n)}$ и $e_2^{(n)} = h_3^{(n)} - bh_2^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) приведены на рис. 4а (файл 1) и 5а (файл 2).

С использованием найденных оценок параметров a и b можно записать соотношения

$$\sin \hat{\alpha}_2(t_n) \approx \frac{ah_1^{(n)} + h_2^{(n)} + bh_3^{(n)}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \equiv s_n, \quad \cos \hat{\alpha}_2(t_n) \approx h_0^{(n)} \equiv c_n.$$

Графики последовательности s_n приведены в верхней части рис. 4б (файл 1) и 5б (файл 2). В нижней части этих рисунков приведены графики ошибки $\varepsilon_n = s_n^2 + c_n^2 - 1$. Поскольку функция $|\hat{\alpha}_2(t)|$ оказалась малой, аппроксимирующий тригонометрический полином строился для $\sin \hat{\alpha}_2(t)$:

$$\sin \hat{\alpha}_2(t) = \hat{a}_1 + \sum_{m=1}^M [a_{2m} \cos 2\pi mf(t - t_0) + a_{2m+1} \sin 2\pi mf(t - t_0)] \equiv T_M(t); \quad (3)$$

и принималось $\text{Re} \hat{\mathbf{p}}_2(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\alpha}_2(t)}$.

Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов. Значение M задавалось заранее. Поскольку аппроксимирующее выражение зависит от частоты f нелинейно, вычисления были организованы в два уровня. На нижнем уровне при фиксированном значении f выражение

$$\sum_{n=1}^N [s_n - T_M(t_n)]^2$$

минимизировалось по коэффициентам полинома $T_M(t)$. Такая минимизация – эффективно решаемая линейная задача. Найденное минимальное значение этого выражения обозначим $\Psi_M(f)$. На верхнем уровне минимизировалась функция $\Psi_M(f)$. Искомая оценка частоты $f_* = \arg \min \Psi_M(f)$, реализующий значение $\Psi_M(f_*)$ полином $T_M(t)$ – искомая аппроксимация $\sin \hat{\alpha}_2(t)$. В рамках метода наименьших квадратов стандартное отклонение σ ошибок аппроксимации и стандартное отклонение σ_f оценки f_* вычисляются по формулам

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Psi_M(f_*)}{N - 2M - 1}}, \quad \sigma_f = \sigma \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \Psi_M(f_*)}{df^2} \right)^{-1/2}.$$

Предположения метода наименьших квадратов в данном случае не выполнены, но величины σ и σ_f служат удобными характеристиками точности найденных оценок.

Описанным способом аппроксимация последовательности s_n была построена при нескольких значениях M (производная в последней формуле вычислялась разностным методом). В итоге были найдены такие значения этого параметра, которые, с одной стороны, оказались не очень велики, а с другой стороны, при небольшом варьировании слабо влияли на искомые оценки. Примеры построенной аппроксимации приведены на рис. 4в (файл 1) и 5в (файл 2). В верхней части рисунков приведены графики построенных полиномов, в нижней части приведены графики остатков $\varepsilon'_n = s_n - T_M(t_n)$. Для файла 1 $M = 30$, $\sigma = 4.5''$, $f_* = 0.00270168(1.1 \cdot 10^{-8})$ Гц; для файла 2 $M = 70$, $\sigma = 31''$, $f_* = 0.007040563(2.6 \cdot 10^{-9})$ Гц. Более содержательные соображения о выборе M в терминах спектрального анализа приведены ниже.

Как отмечалось при обсуждении рис. 2в и 3в, в полиноме $T_M(t)$ можно попробовать оставить гармоники только с нечетными значениями m . Такие пробы были сделаны. При аппроксимации данных из файла 2 полином с гармониками $m = 1, 3, 5, \dots, 35$ дает практически тот же результат, что представлен на рис. 5в. При аппроксимации данных из файла 2 в графиках остатков ε'_n появляется гармоника с частотой $2f_*$ и амплитудой $21''$ и гармоника с частотой $4f_*$ и амплитудой $5.9''$. По-видимому, гармоники с четными m есть и в случае данных из файла 2, но там они не заметны из-за больших ошибок аппроксимации.

Сопоставление верхнего и нижнего графиков на рис. 4в и 5в показывает, что ошибки аппроксимации последовательности s_n выражением (3) тем выше, чем больше угловая скорость датчика – круче график функции $\sin \hat{\alpha}_2(t)$. Чтобы точнее характеризовать эту зависимость, на рис. 6 приведены графики угловой скорости датчика на платформе в функции времени. Расчет угловой скорости выполнялся на основании аппроксимации движения системы $x_1 x_2 x_3$ кватернионом $\mathbf{q}_*(t) = \mathbf{p}_1(t) \circ \hat{\mathbf{p}}_2(t) \circ \mathbf{q}'_c$. Угловая скорость этой системы в проекциях на ее оси x_i имеет вид $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{q}_*^{-1} \circ \dot{\mathbf{q}}_* = \mathbf{q}'_c{}^{-1} \circ (\hat{\mathbf{p}}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\Omega}_1 \circ \hat{\mathbf{p}}_2 + \boldsymbol{\omega}_2) \circ \mathbf{q}'_c = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = 2\omega_E \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2 = 2(d\hat{\alpha}_2/dt)\mathbf{e}_2$. На рис. 6а, относящемся к файлу 1, видны малые участки немонотонности. Они обусловлены некоторой задержкой («залипанием») платформы в ее крайних положениях при колебаниях. Аналогичные «залипания» видны и на рис. 6б. При получении файла 2 они вводились намеренно и более продолжительны.

Ошибки построенной аппроксимации движения датчика на стенде характеризуются векторами $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{q}_*^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n]$. Однако более интересны векторы $\boldsymbol{\theta}_n = 4\boldsymbol{\varepsilon}_n$, представляющие собой векторы бесконечно малого поворота, которые переводят сглаженные на моменты времени t_n положения системы $x_1 x_2 x_3$

в ее измеренные положения на те же моменты. Графики компонент векторов $\theta_n = (\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)})$ приведены на рис. 7а (файл 1) и 8а (файл 2); в обоих случаях компоненты относятся к системе $x_1x_2x_3$. Эти графики аналогичны графикам на рис. 1б. Среднеквадратичные значения $\langle \theta_i \rangle$ компонент последовательностей $\theta_i^{(n)}$ составляют $\langle \theta_1 \rangle = 9.3''$, $\langle \theta_2 \rangle = 2.5''$, $\langle \theta_3 \rangle = 12''$ в случае данных файла 1 и $\langle \theta_1 \rangle = 30''$, $\langle \theta_2 \rangle = 62''$, $\langle \theta_3 \rangle = 92''$ в случае данных файла 2. Для иллюстрации этих среднеквадратичных значений на рисунках приведены прямые $\theta_i = \pm \langle \theta_i \rangle$. Сравнение рис. 7а и 8а с рис. 1б показывает, что ошибки аппроксимации колебаний платформы получились заметно больше ошибок аппроксимации движения Земли. Чтобы выяснить природу ошибок, был выполнен их спектральный анализ. Использование спектрального анализа в данном случае оправдано, поскольку графики на рис. 7а, 8а и 1б выглядят как графики стационарных временных рядов.

4. Спектральный анализ данных измерений. Будем рассматривать последовательность чисел x_n ($n = 1, 2, \dots, N$), полагая, что это значения некоторой функции $x(t)$, в точках равномерной сетки $t_n: t_{n+1} - t_n = h$, $h > 0$ – шаг дискретизации. Периодограммой называется функция $I(f)$, рассматриваемая на отрезке $0 \leq f \leq F$, $F = (2h)^{-1}$, и определенная соотношениями [1]

$$I(f) = \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \cos\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x}) \sin\left(\frac{\pi n f}{F}\right) \right]^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n.$$

Здесь f – пробная частота, F – частота Найквиста. Если моменты времени t_n выражены в секундах, то f и F измеряются в герцах. Для измерений датчика $F = 2$ Гц.

Практическое использование периодограммы основано на следующем ее свойстве. Предположим, что исследуемые данные суть значения функции

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^K (\alpha_k \cos 2\pi \lambda_k t + \beta_k \sin 2\pi \lambda_k t),$$

где α_k , β_k и λ_k – параметры, причем все $\lambda_k \in (0, F)$ и среди них нет одинаковых. Тогда $\bar{x} \approx \alpha_0$, периодограмма имеет максимумы в точках $f = f_k \approx \lambda_k$ и $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \approx 4I(f_k)/N^2$. В общем случае точность выписанных приближенных соотношений увеличивается с ростом N . Таким образом, поиск гармонических составляющих – циклических трендов – в данных измерений сводится к поиску максимумов функции $I(f)$.

Ниже вместо графиков периодограммы приводятся графики функции $A(f) = 2\sqrt{I(f)}/N$, называемой амплитудным спектром. Амплитудный спектр удобен тем, что его максимальные значения являются оценками амплитуд соответствующих циклических трендов. Графики амплитудных спектров рядов

$\theta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$), представленных на рис. 7а и 8а, приведены соответственно на рис. 7б и 8б. Спектр ряда $\theta_i^{(n)}$ обозначен $A_i(f)$. На рисунках представлен только отрезок частот $0 \leq f \leq 0.1$ Гц. При $f \geq 0.1$ Гц графики спектров $A_i(f)$ весьма точно совпадают с графиками функций $\tilde{A}_i(f)$ на рис. 9в и 10в. Как видно из этих рисунков, при $f \geq 0.1$ Гц функции $\tilde{A}_i(f)$ малы.

Рассмотрим спектры $A_i(f)$, относящиеся к файлу 1 (рис. 7б). Значимые максимумы спектров отвечают частотам и амплитудам:

$$\begin{aligned} f = 0.000486 \text{ Гц}, \quad A_1 = 3.90'', \quad f = 0.001514 \text{ Гц}, \quad A_1 = 2.14''; \\ f = 0.001371 \text{ Гц}, \quad A_2 = 0.90'', \quad f = 0.005743 \text{ Гц}, \quad A_2 = 0.62''; \\ f = 0.002886 \text{ Гц}, \quad A_3 = 3.39'', \quad f = 0.005629 \text{ Гц}, \quad A_3 = 2.42'', \\ f = 0.008157 \text{ Гц}, \quad A_3 = 2.88''. \end{aligned}$$

Лишь часть из них можно как-то связать с частотой $f_* = 0.00270168$ Гц. Для сравнения на рис. 7в приведены спектры последовательностей ε'_n , $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$. Эти спектры обозначены соответственно $A_\alpha(f)$, $A'_1(f)$ и $A'_2(f)$. Как видно из рисунков 7б и 7в, $A_1(f) \approx 2A_\alpha(f)$. Это можно объяснить тем, что угол $\hat{\alpha}(t)$ – половина угла эйлера разворота и ось разворота почти совпадает с осью x_1 (ср. компоненты орта e'_2). В таком случае ошибка аппроксимации ε'_n составляет примерно половину ошибки аппроксимации $\theta_1^{(n)}$. Последовательности $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$ связаны с последовательностями $\theta_2^{(n)}$, $\theta_3^{(n)}$ более сложно. Отметим только достаточно точную пропорциональность спектров $A'_2(f)$ и $A_3(f)$. Отметим также, что в спектрах $A_1(f)$ и $A_\alpha(f)$ нет частот вида mf_* при $m = 1, 2, \dots, 30$. При $m > 30$ такие частоты есть. О них будет сказано ниже, но отвечающие им амплитуды малы (см. на рис. 7б пики графика функции $A_1(f)$ при $0.08 \leq f \leq 0.1$ Гц).

Перейдем к спектрам $A_i(f)$, относящимся к файлу 2 (рис. 8б). Значимые максимумы спектров отвечают частотам и амплитудам:

$$\begin{aligned} f = 0.01409 \text{ Гц} \approx 2f_*, \quad A_1 = 38'', \quad f = 0.02813 \text{ Гц} \approx 4f_*, \quad A_1 = 16''; \\ f = f_1 = 0.005957 \text{ Гц}, \quad A_2 = 20'', \quad f = f_2 = 0.008114 \text{ Гц}, \quad A_2 = 42'', \\ f = f_3 = 0.020057 \text{ Гц}, \quad A_2 = 43'', \quad f = f_4 = 0.022114 \text{ Гц}, \quad A_2 = 17''; \\ f = 0.007171 \text{ Гц} \approx f_*, \quad A_3 = 25'', \quad f = 0.02101 \text{ Гц} \approx 3f_*, \quad A_1 = 16''. \end{aligned}$$

При этом $f_1 + f_2 \approx 2f_*$, $f_3 + f_4 \approx 6f_*$. Здесь имеет место очевидная связь частот с частотой f_* . На рис. 8в приведены спектры последовательностей ε'_n , $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$. В данном случае $A_2(f) \approx 2A_\alpha(f)$. Это можно объяснить тем, что ось эйлера разворота практически совпадает с осью x_2 (ср. компоненты орта e'_2).

Зависимость между последовательностями $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$ и $\theta_1^{(n)}$, $\theta_3^{(n)}$ проследить еще сложнее, чем в случае файла 1. В последовательностях $e_1^{(n)}$, $e_2^{(n)}$ хорошо заметны гармонические составляющие с частотами $(1 \div 5)f_*$, в $\theta_1^{(n)}$ хорошо выделяются только частоты $2f_*$ и $4f_*$, в $\theta_3^{(n)}$ выделяются только частоты f_* и $3f_*$. В спектрах $A_2(f)$ и $A_\alpha(f)$ нет частот вида mf_* ($m=1, 2, \dots, 70$).

5. Исключение низкочастотного тренда. Как видно из графиков, на рис. 7а,б и 8а,б, остатки $\theta_i^{(n)}$ ($i=1, 2, 3$) содержат меняющуюся со временем составляющую – тренд, которая явно имеет неслучайный характер. Причиной возникновения тренда могли быть как систематические ошибки датчика, обусловленные его достаточно большой угловой скоростью, так и ошибки в реализации эйлеровых разворотов платформы. Остановимся на второй причине. Если собственную погрешность звездного датчика принять равной $2''$, то при характерном линейном размере подвижных частей стенда 0.5 м, погрешность определения движения этих частей составит 5 мкм. Ошибки реализации периодического эйлерова разворота платформы, по крайней мере, на порядок больше. Звездный датчик «чувствовал» тренд, обусловленный такими ошибками, поэтому этот тренд не следует относить к случайной погрешности датчика. Чтобы точнее оценить эту погрешность, указанный тренд из последовательностей $\theta_i^{(n)}$ ($i=1, 2, 3$) следует исключить.

Выделение тренда выполнялось с помощью конечных рядов Фурье [2]. Тренд в последовательности $\theta_i^{(n)}$ задавался выражением

$$\chi_i(t) = b_{i, N_1+1} + b_{i, N_1+2}(t - t_1) + \sum_{m=1}^{N_1} b_{i, m} \sin \frac{\pi m(t - t_1)}{t_N - t_1};$$

коэффициенты $b_{1,i}, b_{2,i}, \dots, b_{i, N_1+2}$ находились методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания этим выражением точек $(t_n, \theta_i^{(n)})$. Поскольку временная сетка $\{t_n\}_{n=1}^N$ была равномерной, использовались удобные расчетные формулы [2]. Числа N_1 в выражениях для всех функций $\chi_i(t)$ брались равными. При выборе N_1 учитывалось, что новые последовательности $\tilde{\theta}_i^{(n)} = \theta_i^{(n)} - \chi_i(t_n)$ имеют спектры $\tilde{A}_i(f)$, практически равные нулю на отрезке $0 \leq f \leq N_1 F / N$. Чтобы исключить из последовательностей $\theta_i^{(n)}$ гармонические составляющие с низкими частотами, взято $N_1=60$ в случае файла 1 и $N_1=150$ в случае файла 2. В первом случае из первоначальных спектров был вырезан отрезок частот $0 \leq f \leq 0.020$ Гц, во втором случае – отрезок частот $0 \leq f \leq 0.055$ Гц.

Графики функций $\chi_i(t)$, $\tilde{A}_i(f)$ и последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ приведены на рис. 9 (файл 1) и 10 (файл 2). Сравнение графиков на рис. 7а, 8а с графиками

на рис. 9б, 10б показывает, что в последовательностях $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ по сравнению с последовательностями $\theta_i^{(n)}$ отсутствуют низкочастотные составляющие. На отрезке $0 \leq f \leq N_1 F / N$ спектры $\tilde{A}_i(f)$ практически равны нулю (рис. 9в, 10в), тогда как спектры $A_i(f)$ на этом отрезке принимают свои максимальные значения. Интересны верхний график на рис. 9в и средний график на рис. 10в. На них видны следы двух преобразований спектра. На отрезках $0 \leq f \leq 0.020$ Гц (рис. 9в) и $0 \leq f \leq 0.055$ Гц (рис. 10в) спектр изменен только что описанным преобразованием, а на отрезках $0 \leq f \leq 0.081$ Гц (рис. 9в) и $0 \leq f \leq 0.49$ Гц (рис. 10в) – построением периодической аппроксимации в п. 3.

Среднеквадратичные значения $\langle \tilde{\theta}_i \rangle$ последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ составляют $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = 8.7''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.3''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11''$ в случае данных файла 1 и $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = 5.4''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 25''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88''$ в случае данных файла 2. Для иллюстрации этих среднеквадратичных значений на рис. 9б и 10б изображены прямые $\tilde{\theta}_i = \pm \langle \tilde{\theta}_i \rangle$. В случае файла 2 удаление низкочастотных трендов существенно снизило оценки случайных ошибок датчика. Дальнейшее увеличение N_1 приводит только к медленному уменьшению среднеквадратичных ошибок. В случае файла 1 аналогичное медленное уменьшение имеет место, начиная с $N_1 = 0$. После того как низкочастотные тренды удалены, можно заметить, что если не рассматривать всегда плохо определяемый поворот датчика вокруг оси x_3 , то наихудшая точность имеет место при определении положения датчика вокруг оси поворота – оси x_1 в случае файла 1 и оси x_2 в случае файла 2. При этом ошибки определения поворотов вокруг осей x_1 и x_2 в обоих случаях примерно пропорциональны частоте колебаний платформы f_* .

6. Выбор числа гармоник при аппроксимации периодических колебаний платформы. Спектральный анализ позволяет получить дополнительную информацию, характеризующую выбор M при построении тригонометрического полинома $T_M(t)$ в (3). На рис. 11, 12 приведены спектры последовательностей $\theta_i^{(n)}$ и $\tilde{\theta}_i^{(n)}$, построенных для файлов 1, 2 при двух новых значениях M и прежних значениях N_1 . Новые значения M заметным образом влияют только на спектры $A_i(f)$, $\tilde{A}_i(f)$ и др. Графики рассмотренных выше функций времени остаются практически без изменений, только их экстремальные значения изменяются на несколько процентов.

В случае файла 1 (рис. 11) взяты $M = 8$ и $M = 15$. Графики спектров $A_i(f)$ (рис. 11а,б) построены при $0 \leq f \leq 0.2$ Гц. При $f \geq 0.2$ Гц эти графики весьма точно совпадают с графиками спектров $\tilde{A}_i(f)$ на рис. 11в. Эквидистантные пики на двух верхних графиках рис. 11а при $f > 0.022$ Гц отвечают частотам $9f_*$, $10f_*$ и т. д. ($f_* = 0.00270168$ Гц). Эквидистантные пики на двух

верхних графиках на рис. 11б в области $f > 0.041\text{Гц}$ отвечают частотам $16f_*$, $17f_*$, ... Приведем среднеквадратичные значения последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ для нескольких M :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 11'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.6'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 8 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 9.5'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.4'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 15 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 8.7'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.3'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 30 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 8.1'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.2'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 60 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 7.0'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 2.0'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 150 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.0'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 1.8'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 11'' \quad \text{при } M = 300 . \end{aligned}$$

Графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ для случая $M = 300$ приведены на рис. 13а. Сопоставление графиков спектров на рис. 9, 11, 13а и приведенных среднеквадратичных значений $\langle \tilde{\theta}_i \rangle$ показывает, что значение $M = 30$ вполне приемлемо. Если его увеличить или уменьшить в 2 раза, то наиболее интересное значение $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle$ (напомним, ось колебаний платформы близка оси x_1) изменится менее, чем на 10%. Остальные среднеквадратичные значения при этом практически не меняются. С другой стороны, маловероятно, что пики спектра $\tilde{A}_2(f)$ при $f > 100f_*$ (см. рис. 13а) в случае плавных движений платформы обусловлены ошибками аппроксимации ее движений. Скорее всего, они обусловлены ошибками датчика.

В случае файла 2 (рис. 12) были взяты $M = 15$ и $M = 30$. Графики спектров $A_i(f)$ (рис. 12а,б) построены при $0 \leq f \leq 0.3\text{Гц}$. При $f \geq 0.3\text{Гц}$ эти графики весьма точно совпадают с графиками спектров $\tilde{A}_i(f)$ на рис. 12в. Эквидистантные пики на среднем графике рис. 12а при $f > 0.11\text{Гц}$ отвечают частотам $16f_*$, $17f_*$ и т. д. ($f_* = 0.007040563\text{Гц}$). Эквидистантные пики на среднем графике рис. 12б в области $f > 0.21\text{Гц}$ отвечают частотам $31f_*$, $32f_*$, ... Среднеквадратичные значения последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ для нескольких M :

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.6'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 100'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88'' \quad \text{при } M = 15 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.5'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 34'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88'' \quad \text{при } M = 30 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.4'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 25'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88'' \quad \text{при } M = 70 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.4'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 21'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88'' \quad \text{при } M = 120 ; \\ \langle \tilde{\theta}_1 \rangle &= 5.4'' , \quad \langle \tilde{\theta}_2 \rangle = 16'' , \quad \langle \tilde{\theta}_3 \rangle = 88'' \quad \text{при } M = 150 . \end{aligned}$$

Графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ для случая $M = 150$ приведены на рис. 13б. Сопоставление графиков спектров на рис. 10, 12, 13б и приведенных среднеквад-

тичных значений $\langle \tilde{\theta}_i \rangle$ показывает, что значение $M = 70$ вполне приемлемо. Если его уменьшить или увеличить в 2 раза, то наиболее интересное значение $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle$ (ось колебаний платформы в данном случае близка оси x_2) изменится на 9". Это довольно большая величина, но при $M = 150$ из спектра удаляются высокочастотные пики, которые, как и в случае файла 1, естественно связать с ошибками датчика. Значение $M = 30$ представляется недостаточным. При получении файла 2 движение платформы не было плавным (см. рис. 3), поэтому при аппроксимации ее движения в выражении $T_M(t)$ следует взять больше гармоник, чем в случае данных из файла 1. Заметим, что среднеквадратичные значения $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle$ в широком диапазоне изменения M практически не меняются.

7. Спектральный анализ измерений датчика, полученных на неподвижной платформе (см. п. 2), был проведен, чтобы подтвердить обсуждавшиеся выше необходимость исключения низкочастотных трендов из последовательностей $\theta_i^{(n)}$ и необходимость сохранения в этих последовательностях сравнительно высокочастотных гармоник с частотами, кратными f_* . Спектры соответствующих последовательностей $\theta_i^{(n)}$ приведены на рис. 1в. Как видно из этого рисунка и рис. 1б, в последовательностях $\theta_2^{(n)}$ и $\theta_3^{(n)}$ присутствует заметная низкочастотная составляющая. Она имеет очень низкую частоту и обусловлена причинами, не связанными прямо с функционированием датчика. Указанная низкочастотная составляющая была удалена описанным выше способом при $N_1 = 60$ и $N_1 = 150$. Результаты удаления представлены на рис. 14, 15. Удаление практически не повлияло на среднеквадратичные оценки ошибок. При $N_1 = 60$ было получено $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 1.50''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 1.60''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 12.8''$, при $N_1 = 150$ получено $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 1.36''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 1.55''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 12.5''$. Эти результаты и сопоставление спектров $A_i(f)$ и $\tilde{A}_i(f)$ на рис. 1в, 14в и 15в показывают, что случайные ошибки сосредоточены в области достаточно высоких частот.

Пики на отрезке $0.13 \leq f \leq 0.2$ Гц в спектрах $\tilde{A}_2(f)$ и $\tilde{A}_3(f)$ аналогичны (с поправкой на угловую скорость датчика) обсуждавшимся выше пикам спектров на рис. 11 – 13 в диапазоне $0.4 \leq f \leq 1$ Гц. По-видимому, эти пики имеют одну и ту же природу. В случае покоя датчика никакая периодическая аппроксимация колебаний платформы не строилась, и вопрос об удалении этих пиков не встает. Отвечающие этим пикам циклические тренды должны быть включены в ошибку. Аналогичный вывод следует сделать и относительно пиков в диапазоне $0.4 \leq f \leq 1$ Гц в случае данных из файлов 1, 2.

8. Аппроксимация движений платформы с помощью конечных рядов Фурье. Рассмотрим более простой и универсальный способ аппроксимации колебаний датчика на платформе. Примем, что движение датчика в каждом сеансе описывается кватернионом $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1(t) \circ \mathbf{q}_2(t)$, а функции $\mathbf{q}_1(t)$ и $\mathbf{q}_2(t)$

строятся с помощью дискретных рядов Фурье. Функция $\mathbf{q}_1(t)$ имеет вид

$$\mathbf{q}_1(t) = \frac{\mathbf{Q}(t)}{\|\mathbf{Q}(t)\|}, \quad \mathbf{Q}(t) = (Q_0(t), Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)),$$

$$Q_i(t) = B_{i, K_1+1} + B_{i, K_1+2}(t - t_1) + \sum_{k=1}^{K_1} B_{i, k} \sin \frac{\pi k(t - t_1)}{(t_N - t_1)} \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

где коэффициенты $B_{i, k}$ вычисляются методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания каждой компоненты измерений (t_n, \mathbf{q}_n) , $n = 1, 2, \dots, N$. В случае равномерной временной сетки $\{t_n\}_{n=1}^N$ можно использовать удобные расчетные формулы [2]. Числа K_1 в выражениях для всех функций $Q_i(t)$ брались равными.

Функция $\mathbf{q}_2(t)$ строилась в виде

$$\mathbf{q}_2(t) = \mathbf{F}[\mathbf{z}(t)], \quad \mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t)),$$

$$z_i(t) = b_{i, K_2+1} + b_{i, K_2+2}(t - t_1) + \sum_{k=1}^{K_2} b_{i, k} \sin \frac{\pi k(t - t_1)}{(t_N - t_1)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где коэффициенты $b_{i, k}$ вычисляются методом наименьших квадратов из условия наилучшего сглаживания данных

$$(t_n, z_i^{(n)}), \quad (z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, z_3^{(n)}) = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{q}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n] \equiv \mathbf{z}_n \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Числа K_2 в выражениях для всех функций $z_i(t)$ брались равными.

Числа K_1 и K_2 должны выбираться из физических соображений. Метод проб и ошибок без привлечения содержательных гипотез может привести как к искажению оценки случайной ошибки измерений датчика. Здесь может оказаться полезным спектральный анализ ошибок аппроксимации – компонент векторов

$$(\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}) = 4\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{q}_2^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n] \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

задающих бесконечно малые повороты системы $x_1 x_2 x_3$ из сглаженных положений в измеренные. Можно указать простые эмпирические рекомендации. Число K_1 надо выбирать так, чтобы величины \mathbf{z}_n были малы по абсолютной величине, т. е. так, чтобы с приемлемой точностью выполнялись соотношения $\mathbf{F}(\mathbf{z}_n) = (1, 2\mathbf{z}_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$). Число K_2 должно быть больше K_1 . Варьируя K_2 , следует добиваться удаления нужного отрезка низких частот из последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$).

При надлежащем выборе K_1 и K_2 можно получить правильный результат. Примеры приведены на рис. 16 – 21. Рис. 16, 17 построены для файла с

данными, полученными при неподвижной платформе. Здесь $K_1 = 50$, $K_2 = 100$. Рис. 18, 19 построены для данных из файла 1 при $K_1 = 100$ и $K_2 = 300$. Рис. 20, 21 построены для данных из файла 2 при $K_1 = 600$, $K_2 = 1050$. На рис. 16а, 18а и 20а приведены графики компонент ошибок аппроксимации

$$\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_1(t_n) = (\Delta q_0^{(n)}, \Delta q_1^{(n)}, \Delta q_2^{(n)}, \Delta q_3^{(n)}).$$

На рис. 16б, 18б и 20б приведены графики последовательностей $\theta_i^{(n)} = 4z_i^{(n)}$, на рис. 16в, 18в и 20в – графики функций $\phi_i(t) = 4z_i(t)$, на рис. 17а, 19а и 21а – графики последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$, наконец, на рис. 17б, 19б и 21б – графики спектров этих последних последовательностей – функций $\tilde{A}_i(f)$. Прямые на рис. 16б, 18б и 20б задаются уравнениями $\theta_i = \pm \langle \theta_i \rangle$, прямые на рис. 17а, 19а и 21а задаются уравнениями $\tilde{\theta}_i = \pm \langle \tilde{\theta}_i \rangle$. Здесь скобки $\langle \dots \rangle$ означают вычисление среднеквадратических значений соответствующих последовательностей $\theta_i^{(n)}$ и $\tilde{\theta}_i^{(n)}$. Эти среднеквадратические значения приведены в подписях к рисункам. Сопоставление этих значений со значениями, полученными ранее, а также составление графиков последовательностей $\tilde{\theta}_i^{(n)}$ и функций $\tilde{A}_i(f)$ на рис. 17, 19, 21 с графиками одноименных последовательностей и функций на рис. 15, 9 и 10, свидетельствует о хорошем совпадении результатов, полученных разными методами.

9. Заключение. Проведенное исследование показало, что при неподвижной платформе среднеквадратичные ошибки показаний звездного датчика составляют около 1.5" по углам поворота вокруг осей x_1 , x_2 и около 11" по углу его поворота вокруг оси x_3 . В случае периодических колебаний платформы вокруг оси x_1 или x_2 (всегда плохо определяемый поворот датчика вокруг оси x_3 не рассматриваем) наихудшая точность имеет место при определении положения датчика вокруг оси колебаний. Среднеквадратичная ошибка вокруг оси колебаний пропорциональна частоте. Для частоты 0.0027 Гц она составляет 9", для частоты 0.0070 Гц – 25". Ошибка вокруг другой оси, лежащей в плоскости ПЗС-матрицы датчика в несколько раз меньше, но превышает указанные выше 1.5".

Даная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00262).

Литература

1. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М., Наука, 1992.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.

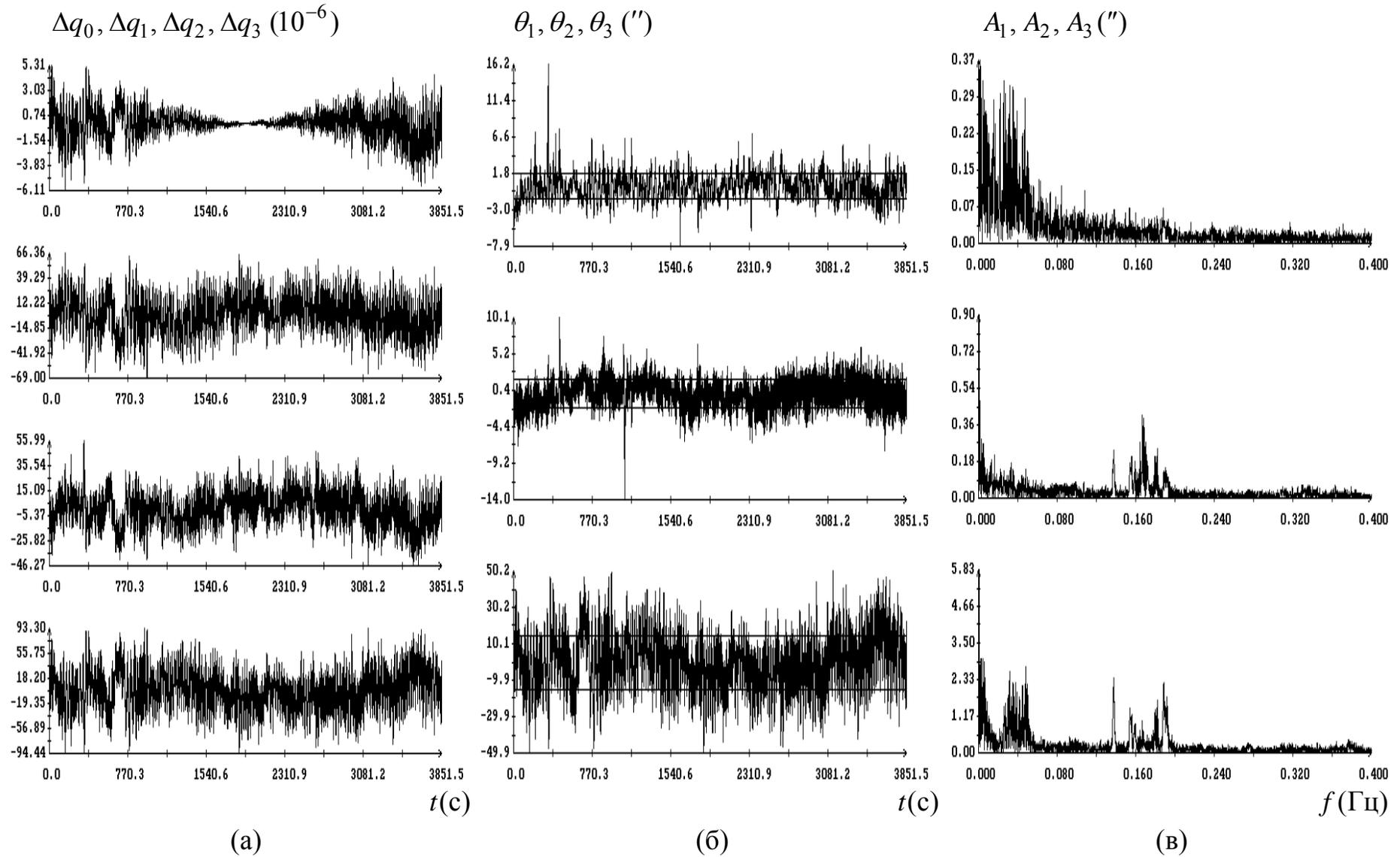


Рис. 1; (а) графики ошибок аппроксимации компонент кватерниона, (б) графики компонент вектора θ , горизонтальные прямые: $\theta_1 = \pm 1.68''$, $\theta_2 = \pm 1.83''$, $\theta_3 = \pm 14.8''$, (в) спектры остатков $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$, $\theta_3^{(n)}$.

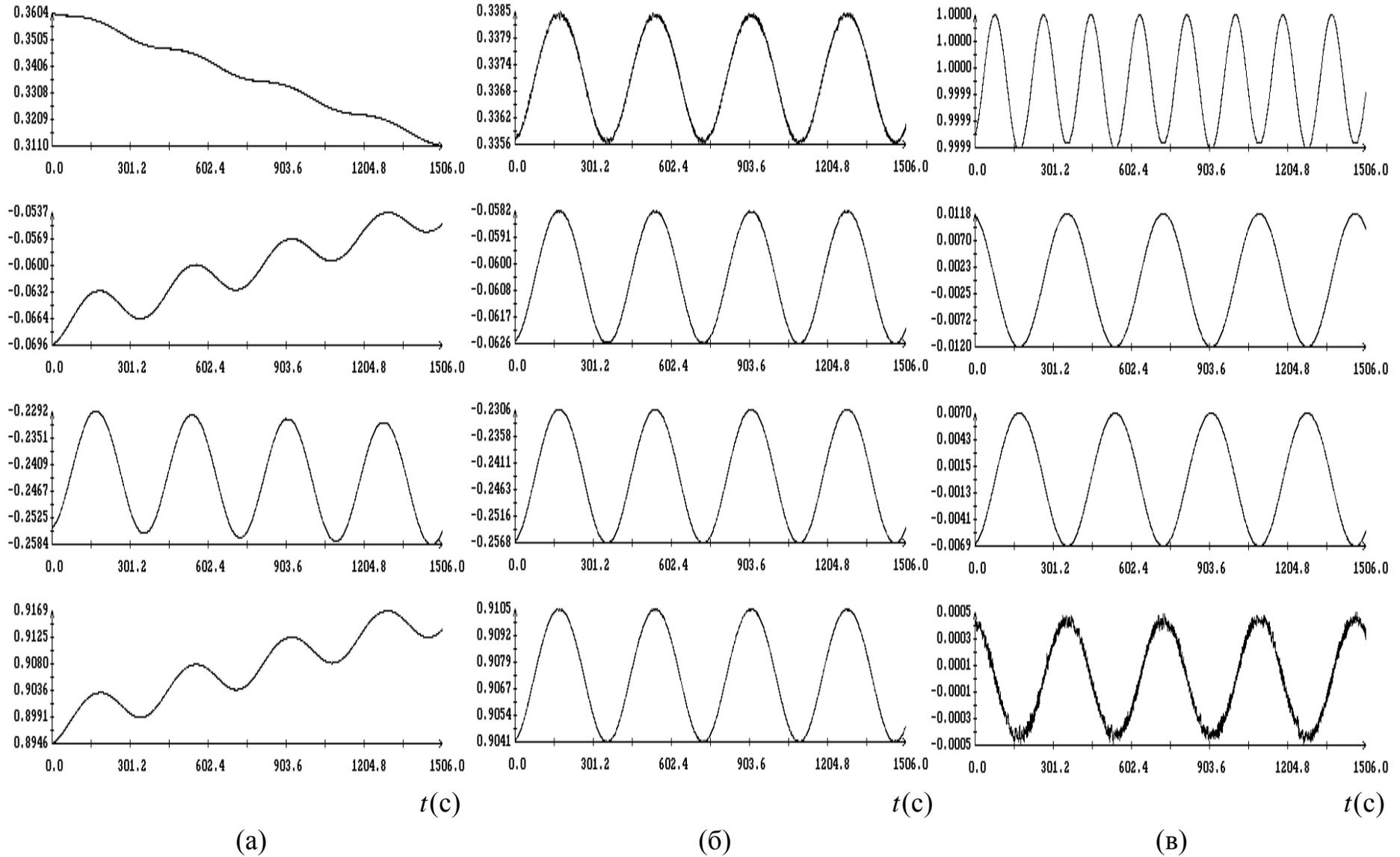


Рис. 2. Компоненты последовательностей кватернионов для файла 1: (а) \mathbf{q}_n , (б) $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n$, (в) $\hat{\mathbf{p}}_2(t_n)$.

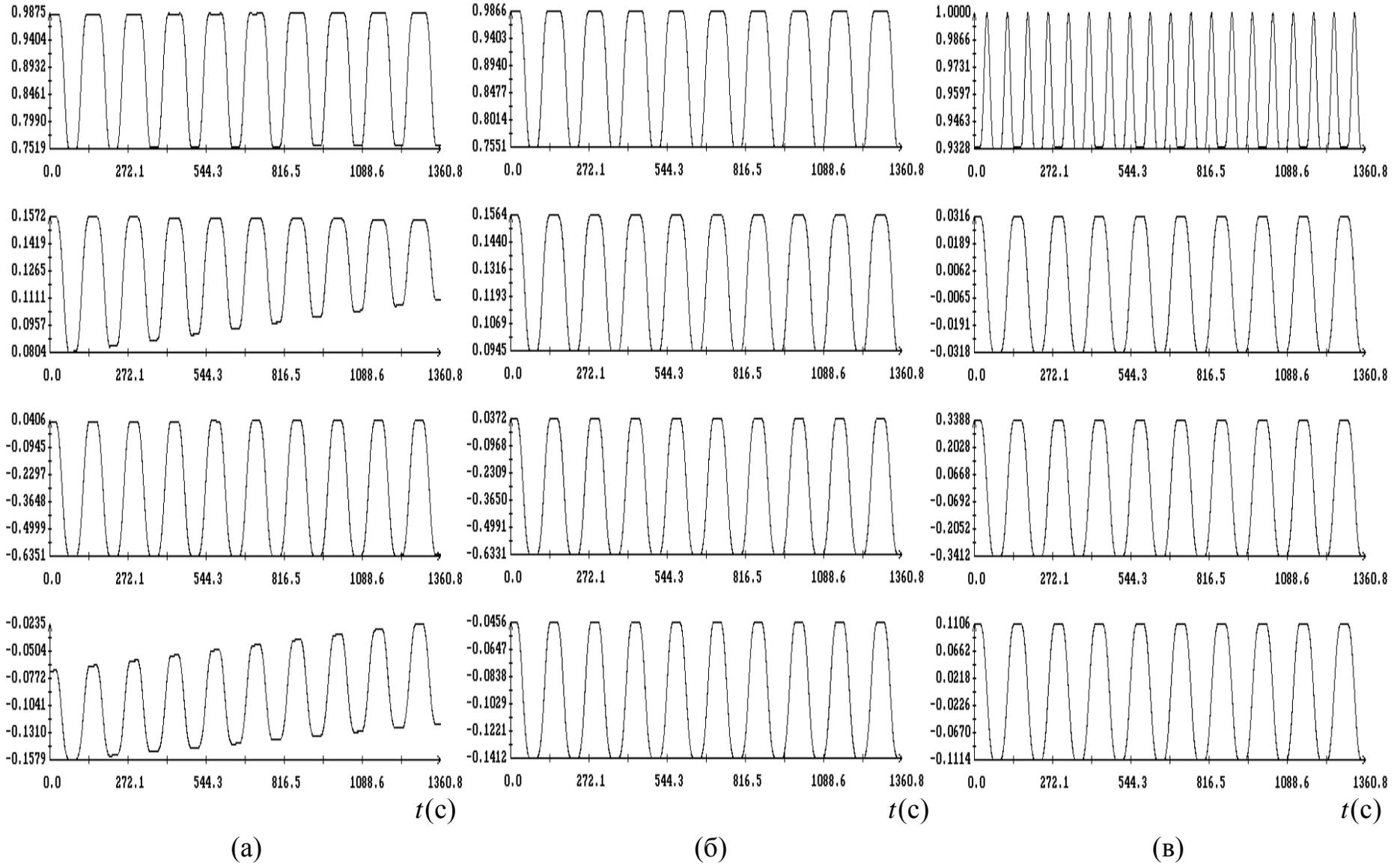


Рис. 3. Компоненты последовательностей кватернионов для файла 2: (а) \mathbf{q}_n , (б) $\mathbf{p}_1^{-1}(t_n) \circ \mathbf{q}_n$, (в) $\hat{\mathbf{p}}_2(t_n)$.

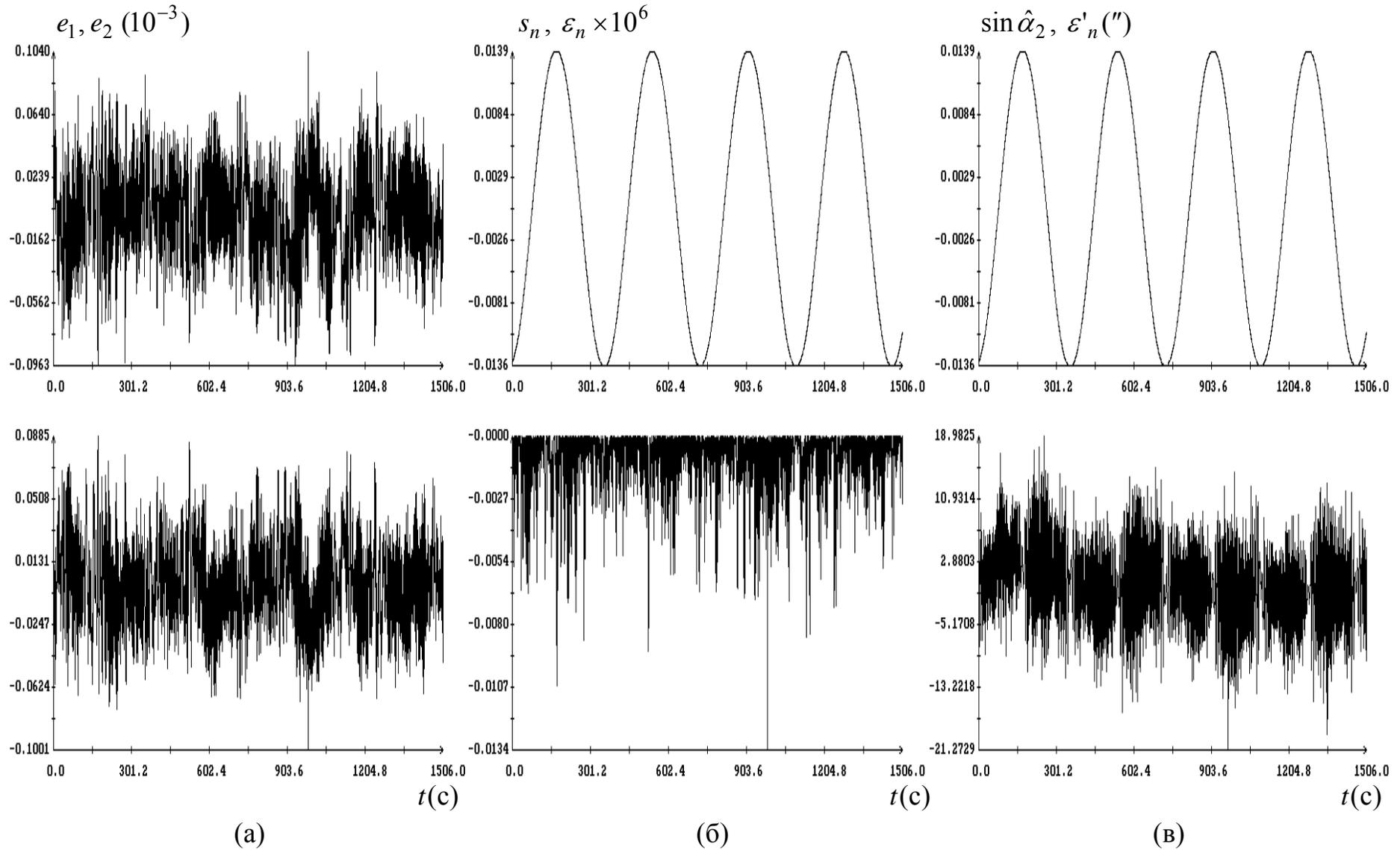


Рис. 4. Файл 1; (а) графики остатков $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}$; (б) графики последовательностей s_n, ε_n ; (в) тригонометрическая аппроксимация $M = 30, f = 0.002702$ Гц.

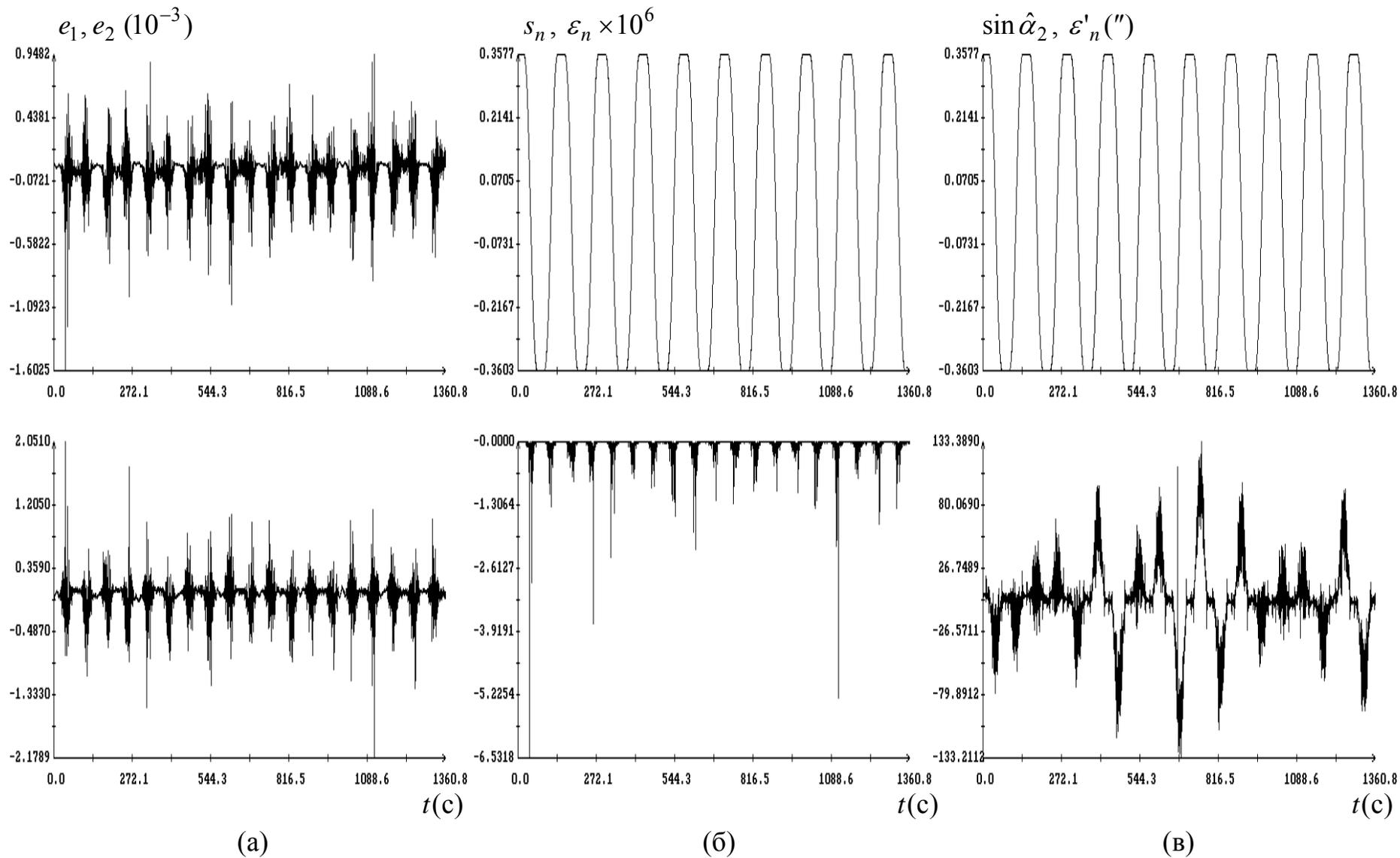
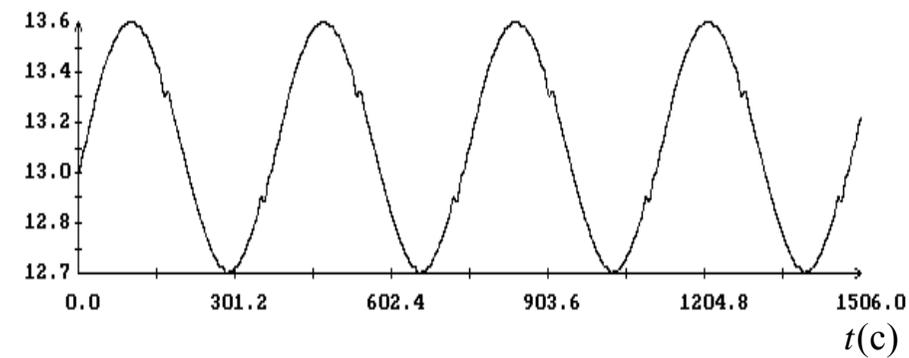
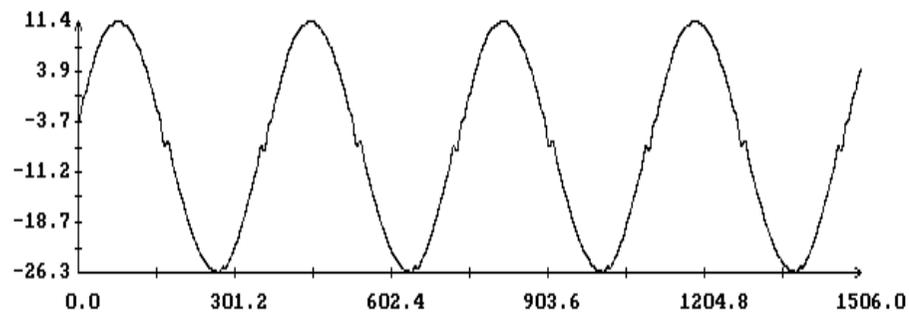
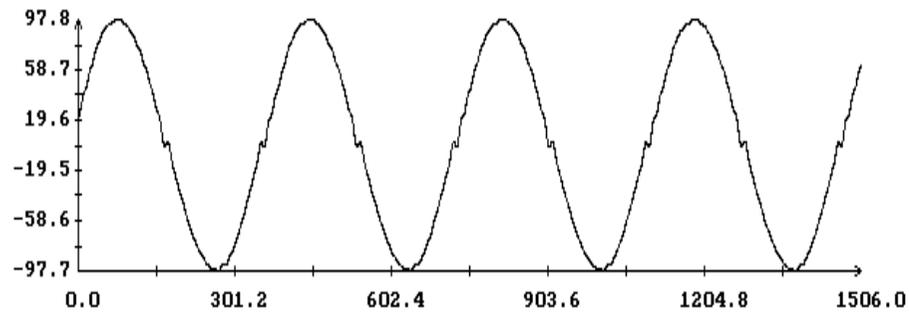
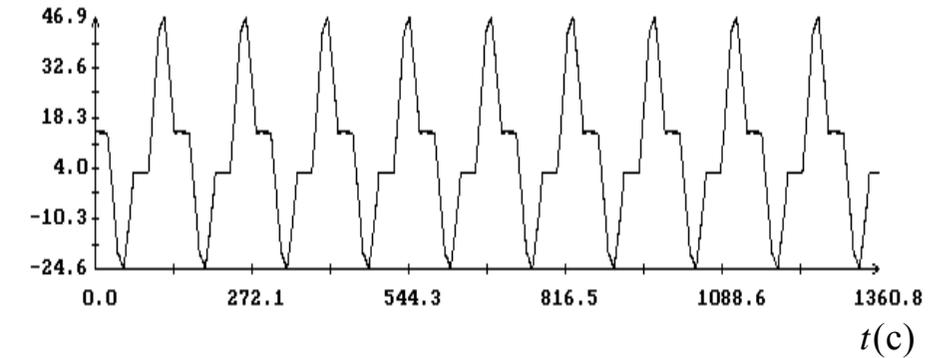
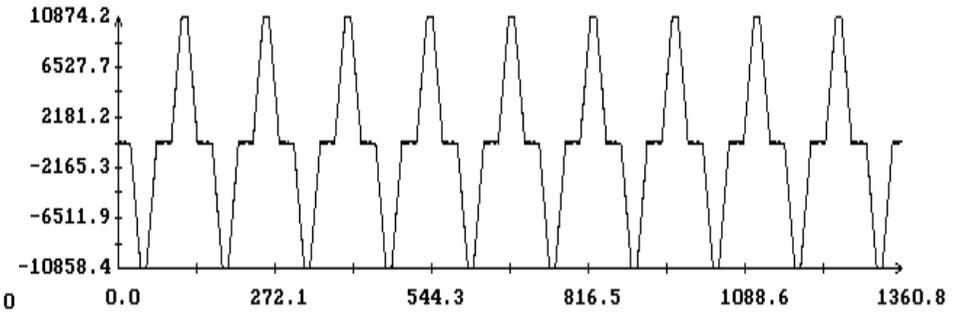
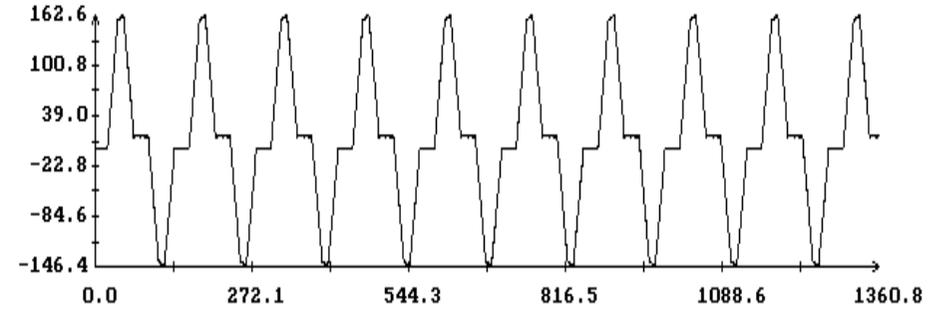


Рис. 5. Файл 2; (а) графики остатков $e_1^{(n)}, e_2^{(n)}$; (б) графики последовательностей s_n, ε_n ; (в) тригонометрическая аппроксимация $M = 70, f = 0.007041$ Гц.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ("/с)

(a)

 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ("/с)

(б)

Рис. 6. Угловая скорость датчика (а) при получении данных в файле 1, (б) при получении данных в файле 2.

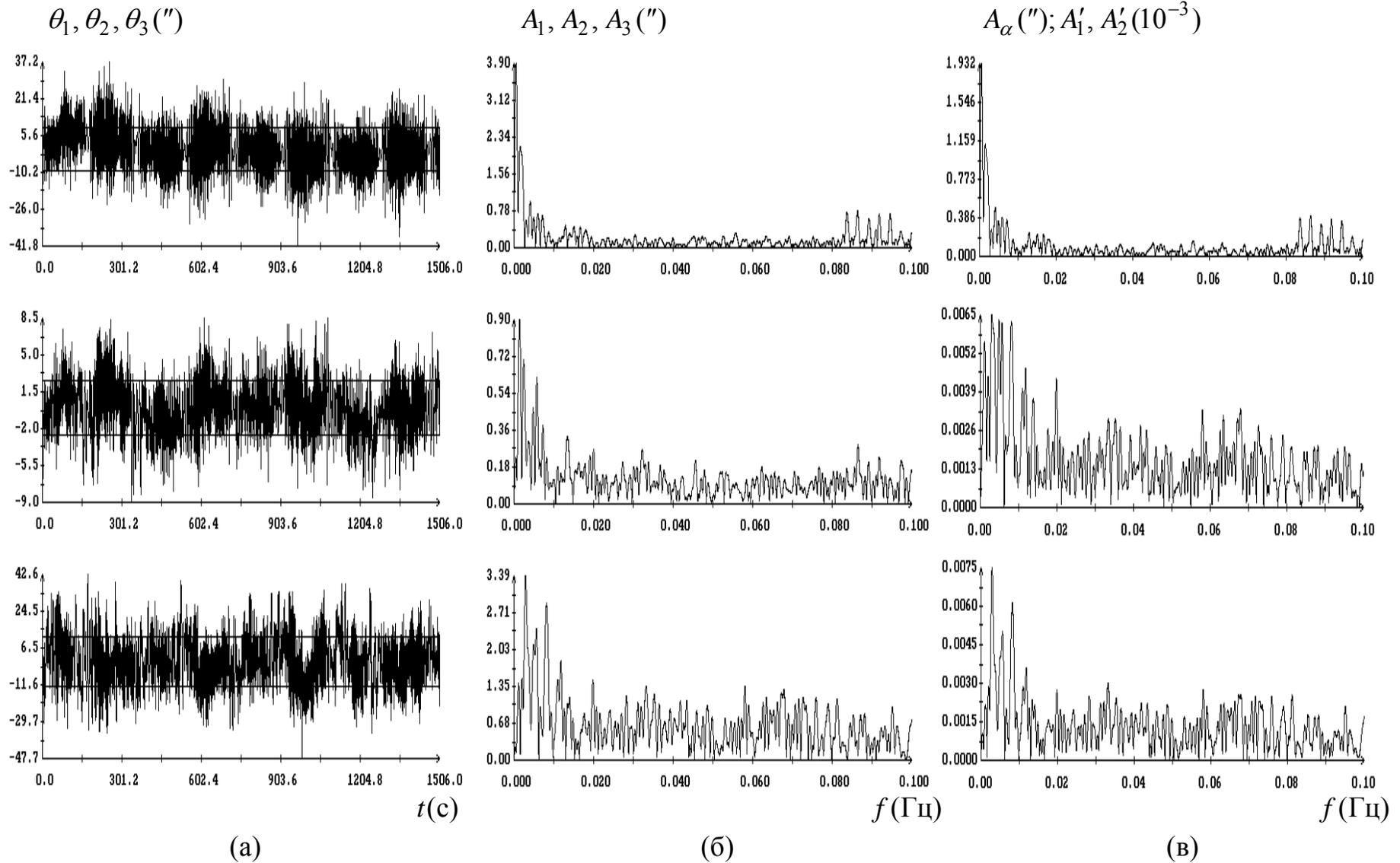


Рис. 7. Файл 1; (а) графики остатков $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\theta_1 = \pm 9.3''$, $\theta_2 = \pm 2.5''$, $\theta_3 = \pm 12''$; (б) спектры остатков $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)}$; (в) спектры остатков $\varepsilon'_n, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}$.

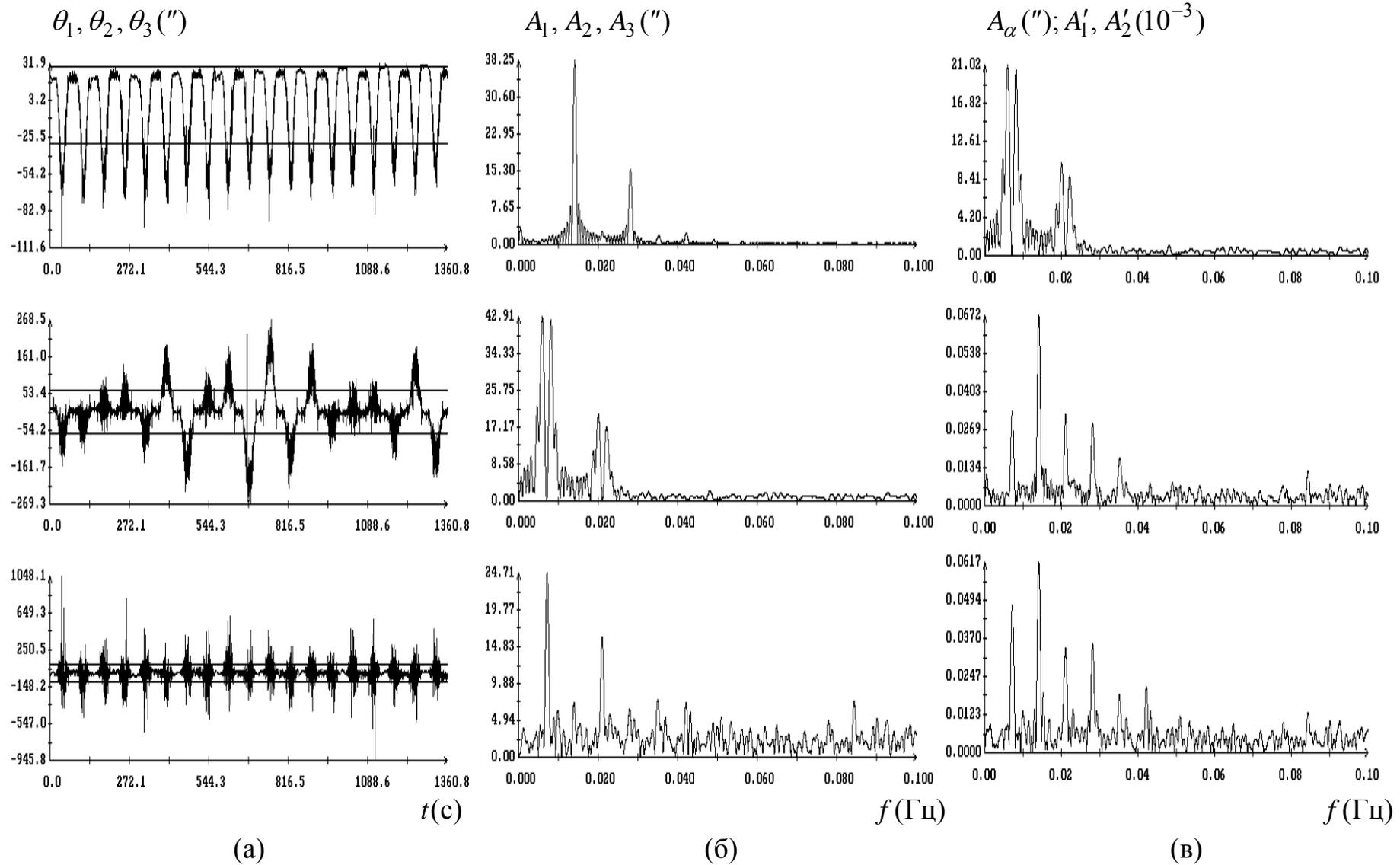


Рис. 8. Файл 2; (а) графики остатков $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\theta_1 = \pm 30''$, $\theta_2 = \pm 62''$, $\theta_3 = \pm 92''$; (б) спектры остатков $\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}, \theta_3^{(n)}$; (в) спектры остатков $e_\alpha^{(n)}, e_1^{(n)}, e_2^{(n)}$.

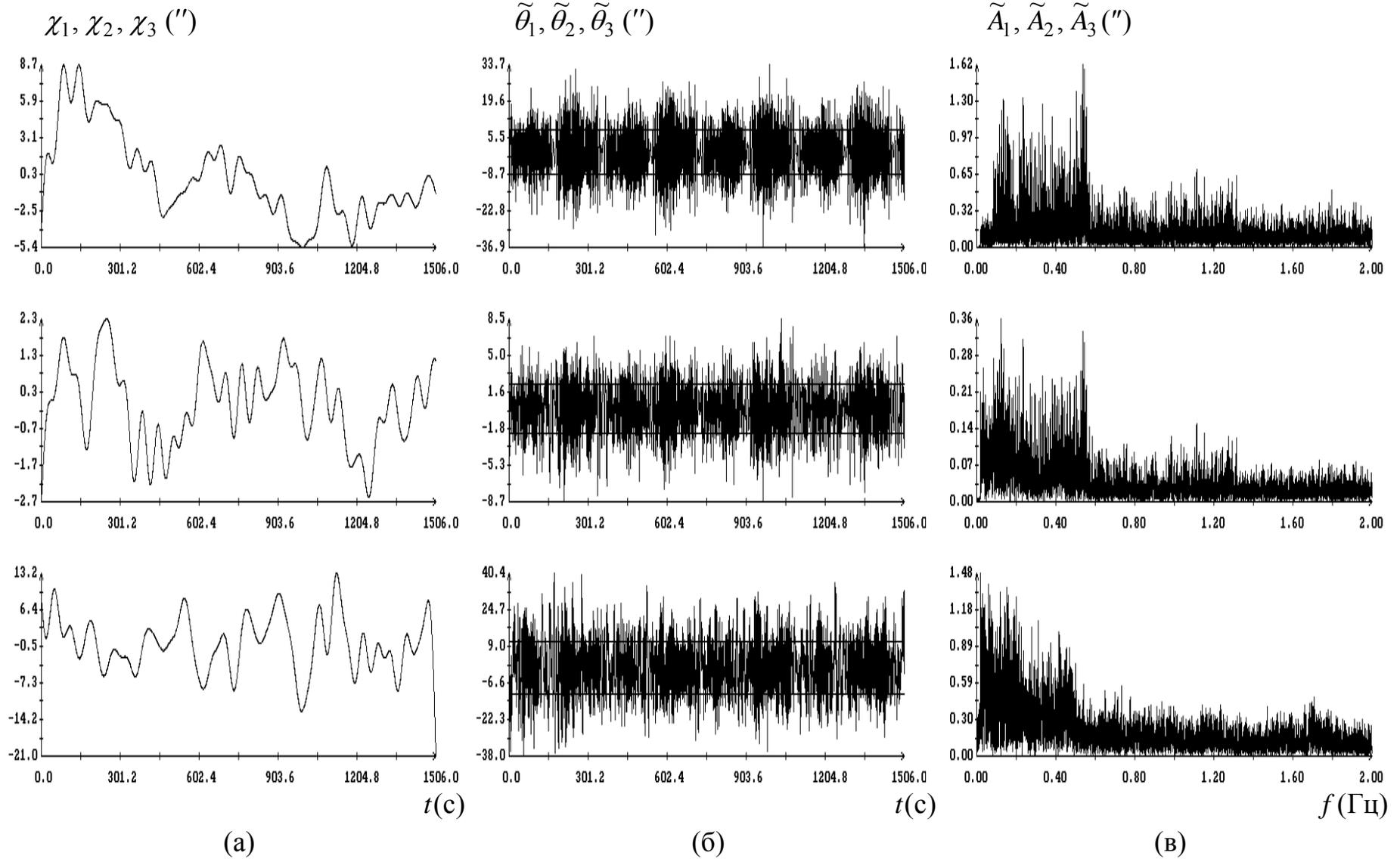


Рис. 9. Файл 1; (а) графики трендов $\chi_i(t)$ при $N_1 = 60$, (б) графики последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\tilde{\theta}_1 = \pm 8.7''$, $\tilde{\theta}_2 = \pm 2.3''$, $\tilde{\theta}_3 = \pm 11''$; (в) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$.

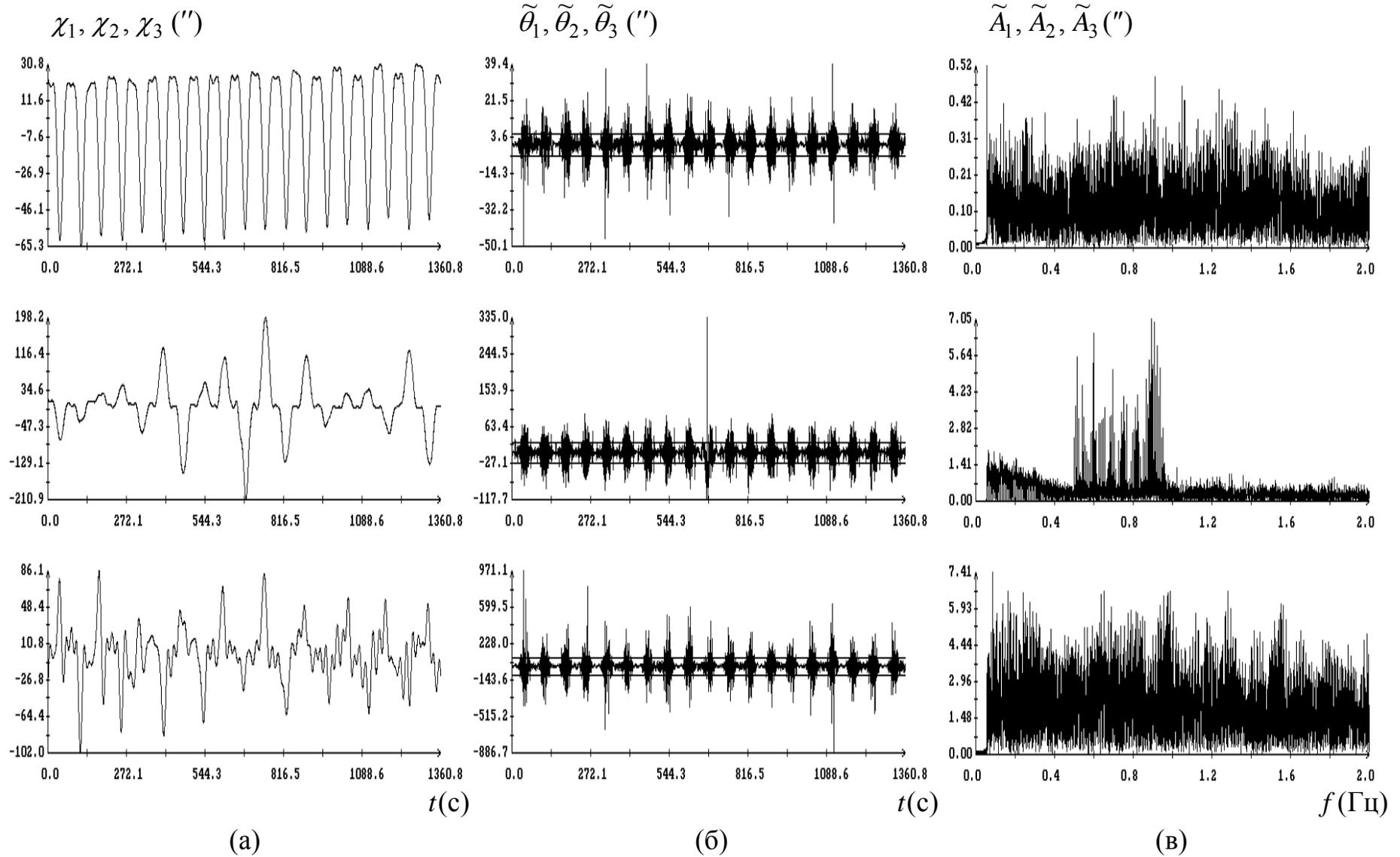


Рис. 10. Файл 2; (а) графики трендов $\chi_i(t)$ при $N_1 = 150$, (б) графики последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}$, $\tilde{\theta}_2^{(n)}$, $\tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\tilde{\theta}_1 = \pm 5.4''$, $\tilde{\theta}_2 = \pm 25''$, $\tilde{\theta}_3 = \pm 88''$; (в) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}$, $\tilde{\theta}_2^{(n)}$, $\tilde{\theta}_3^{(n)}$.

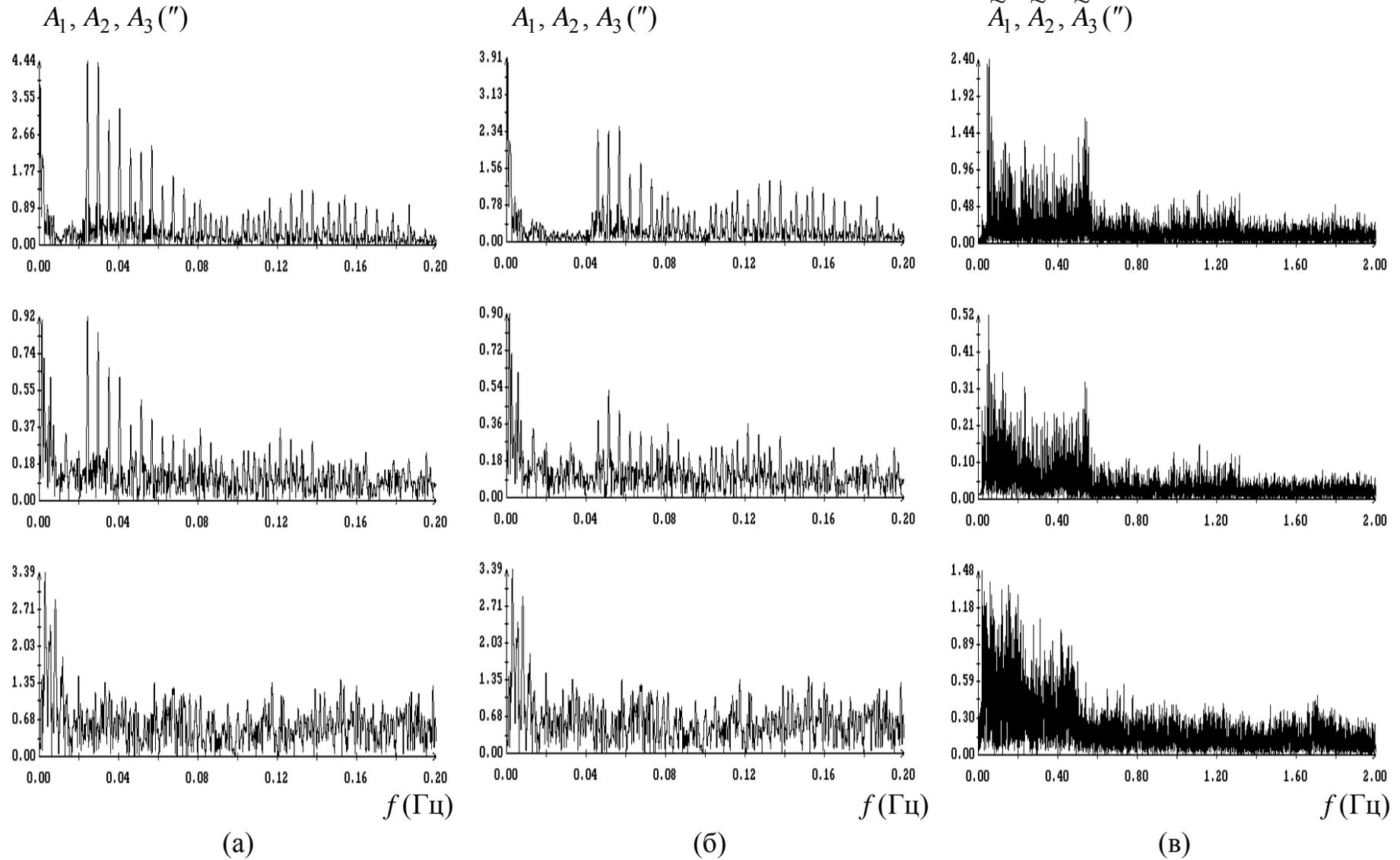


Рис. 11. Файл 1; (а) графики спектров $A_i(f)$ при $M = 8$; (б) графики спектров $A_i(f)$ при $M = 15$; (в) графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ при $M = 15$.

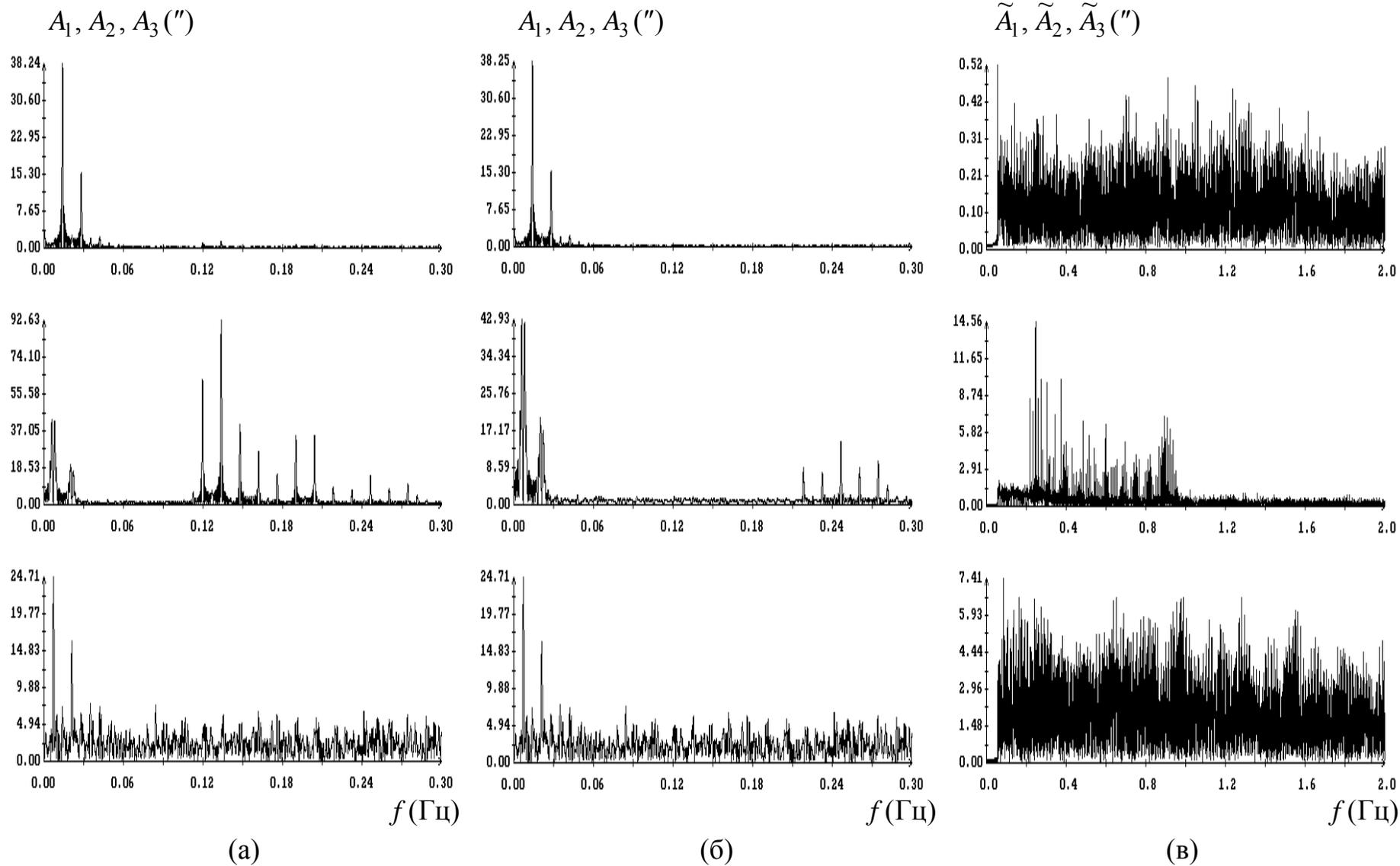
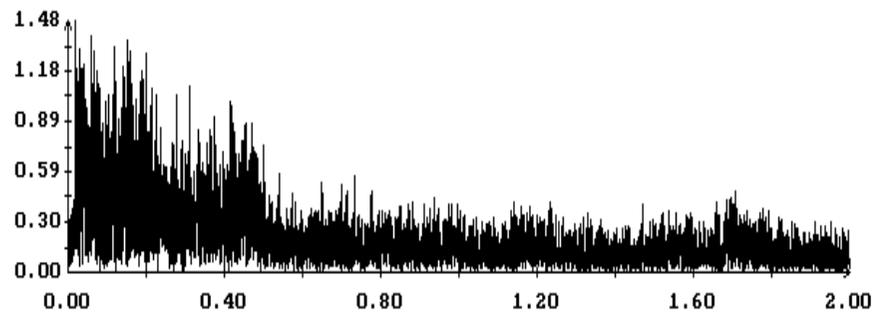
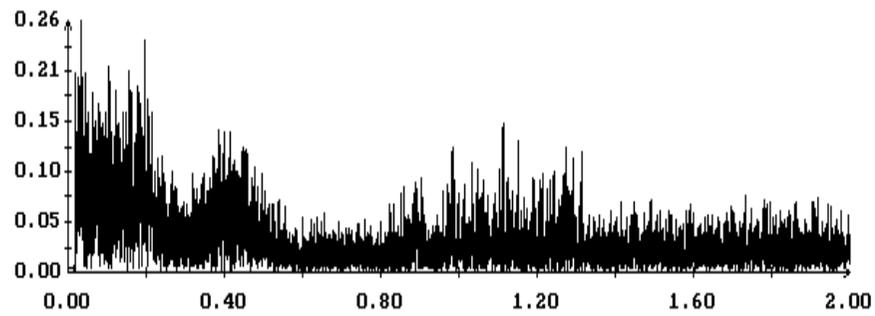
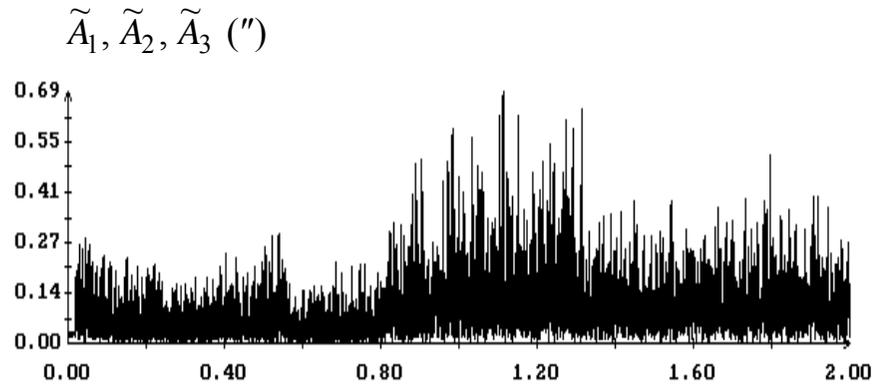
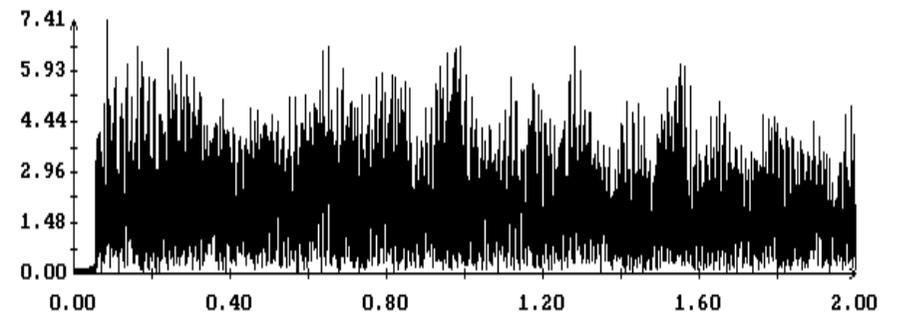
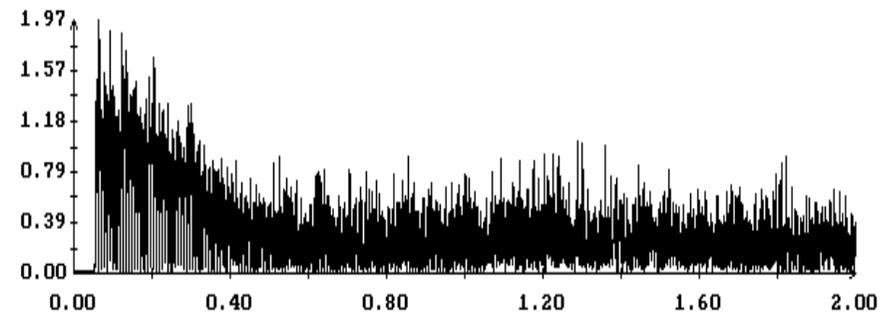
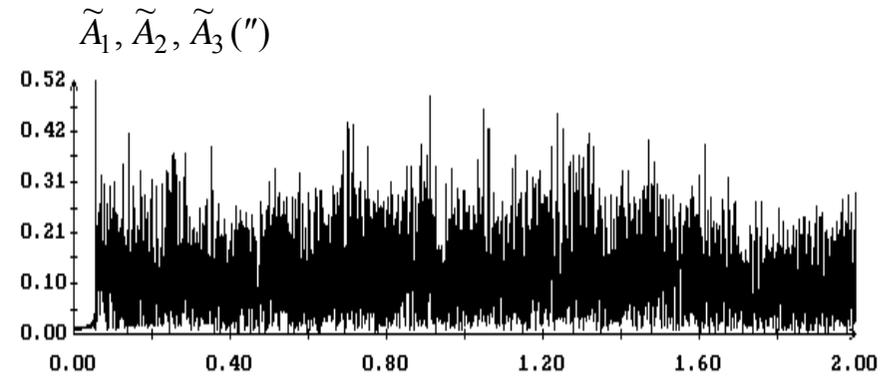


Рис. 12. Файл 2; (а) графики спектров $A_i(f)$ при $M = 15$; (б) графики спектров $A_i(f)$ при $M = 30$; (в) графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ при $M = 30$.



(a)



(б)

(в)

Рис. 13; (а) файл 1, графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ при $M = 300$; (б) файл 2; графики спектров $\tilde{A}_i(f)$ при $M = 150$.

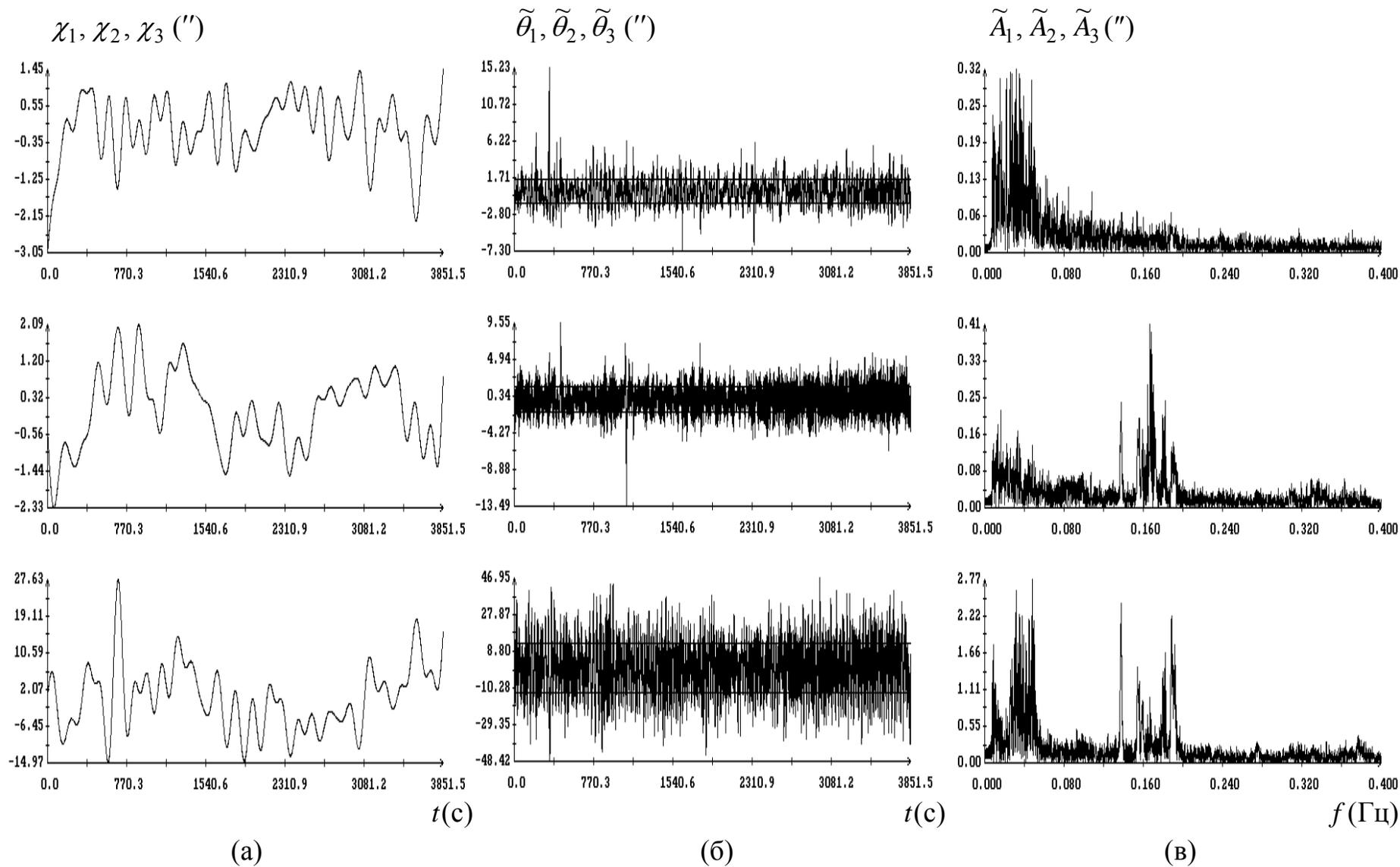


Рис. 14. Покой датчика; (а) тренды $\chi_i(t)$ при $N_1 = 60$, (б) последовательности $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 1.50''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 1.60''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 12.8''$; (в) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$.

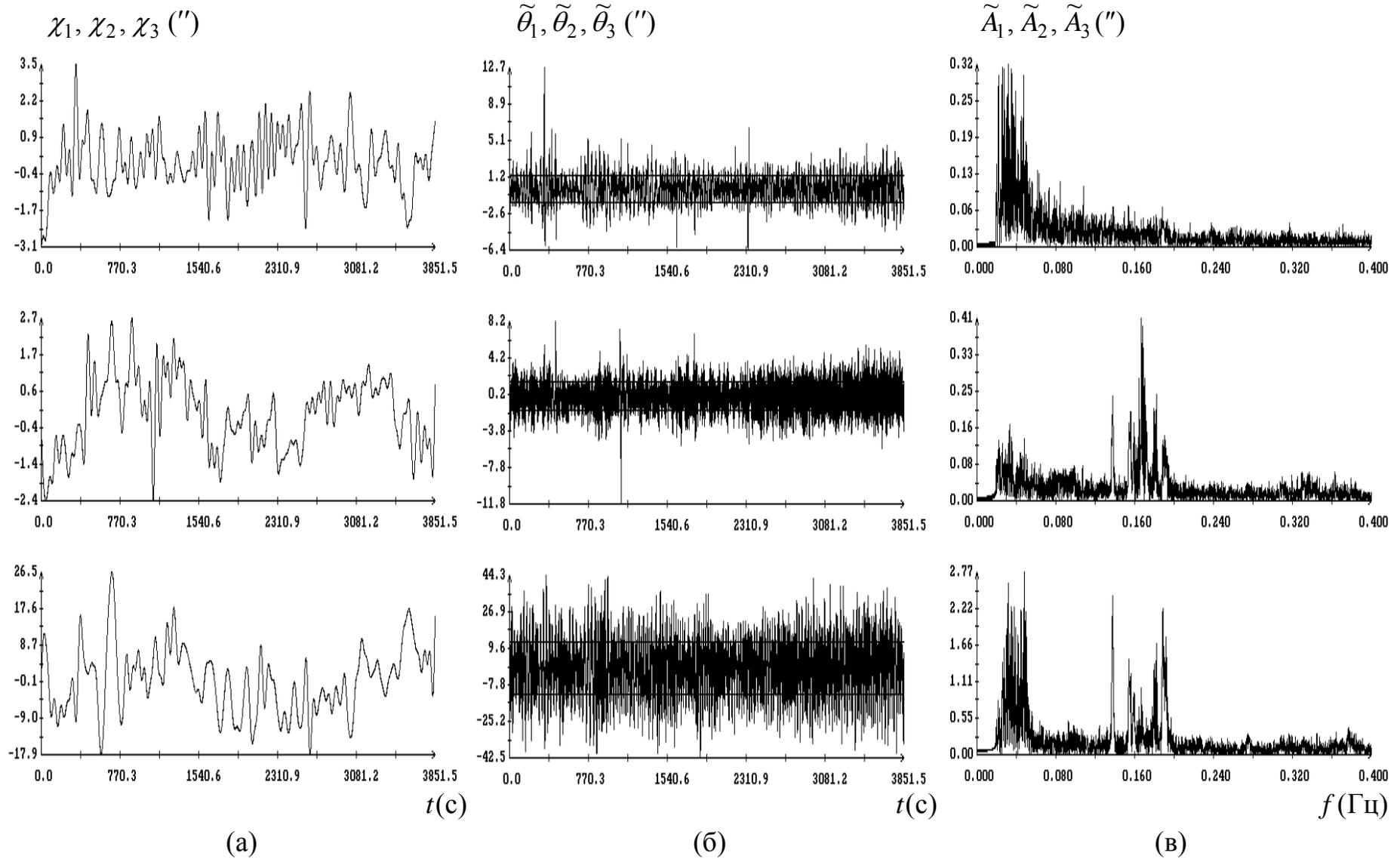


Рис. 15. Покой датчика; (а) тренды $\chi_i(t)$ при $N_1 = 150$, (б) последовательности $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 1.36''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 1.55''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 12.5''$; (в) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$.

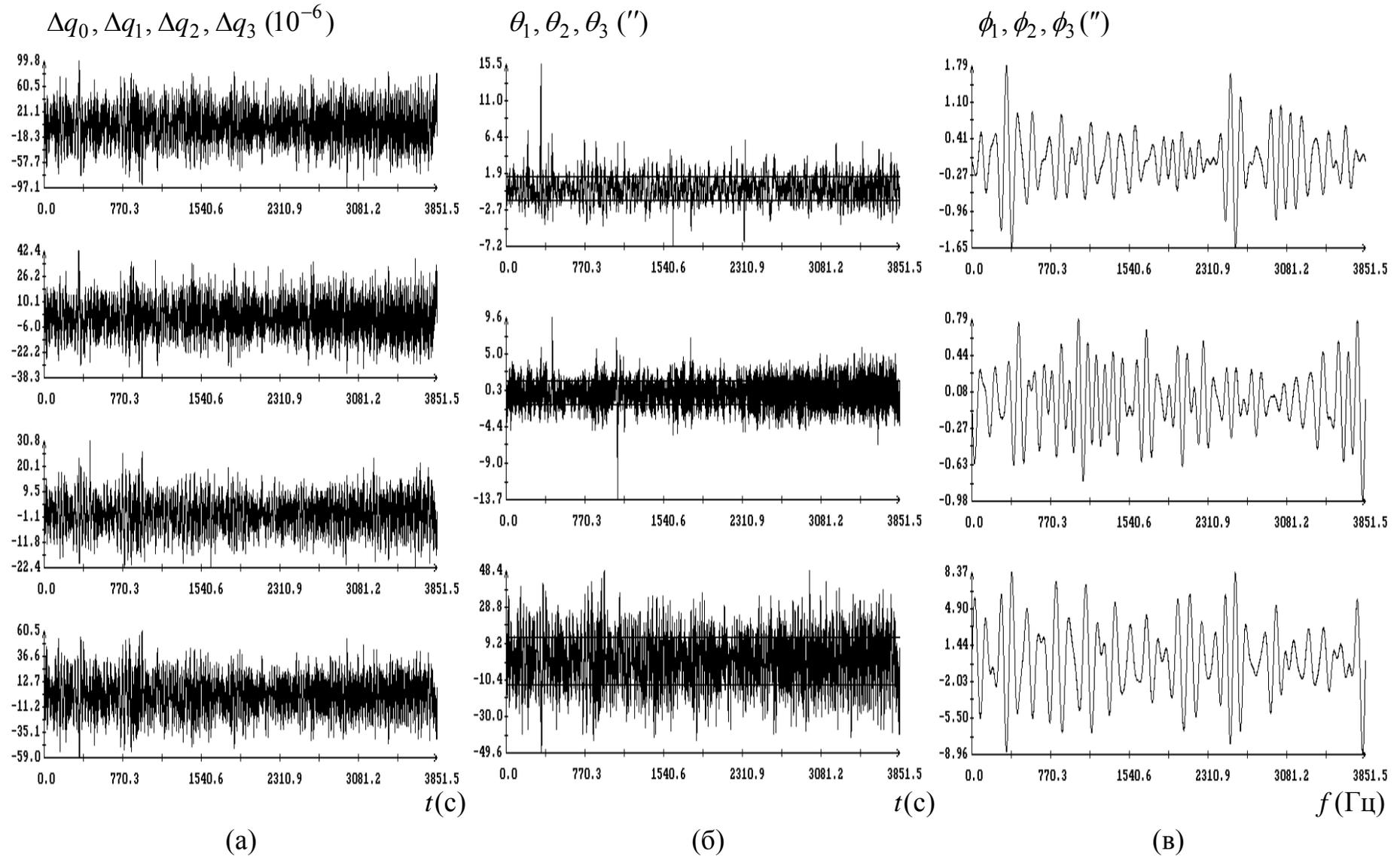


Рис. 16. Покой датчика; (а) ошибки аппроксимации компонент кватерниона, (б) графики последовательностей $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$ и $\theta_3^{(n)}$, горизонтальные прямые: $\theta_1 = \pm 1.52''$, $\theta_2 = \pm 1.61''$, $\theta_3 = \pm 13.0''$, (в) графики функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$.

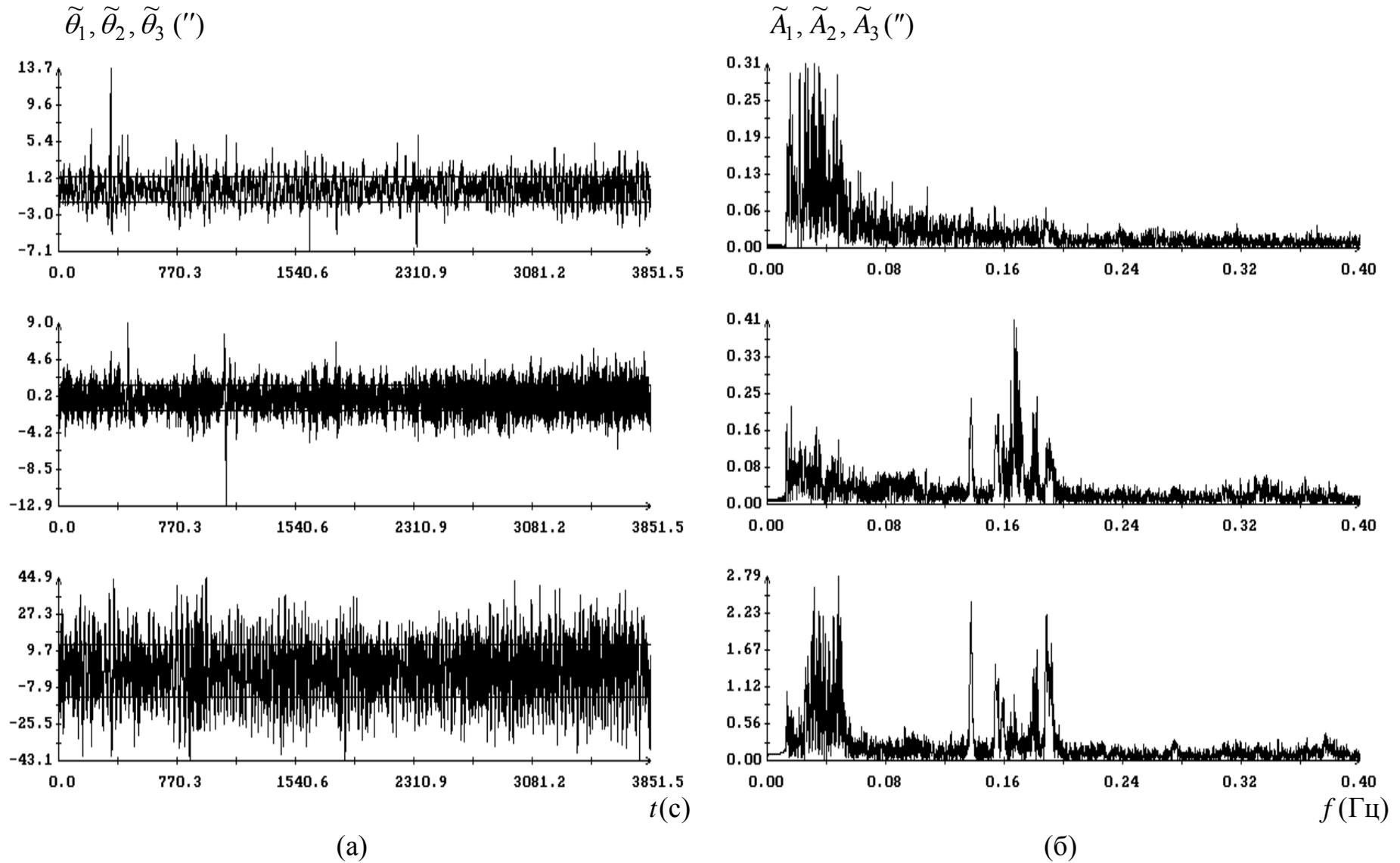


Рис. 17. Покой датчика; (а) последовательности $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 1.44''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 1.58''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 12.6''$; (б) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$.

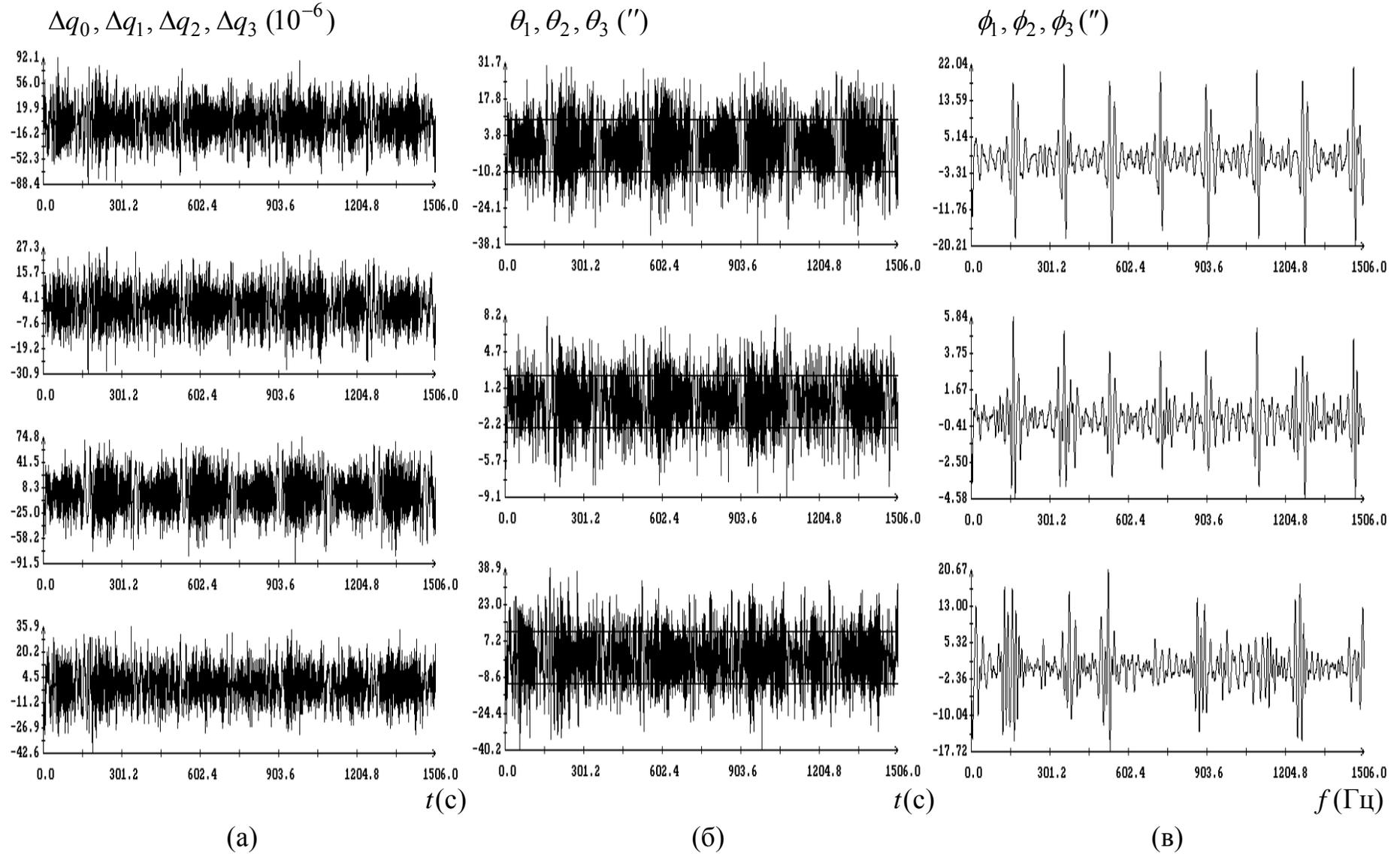


Рис. 18. Файл 1; (а) графики ошибок аппроксимации компонент кватерниона, (б) графики последовательностей $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$ и $\theta_3^{(n)}$, горизонтальные прямые: $\theta_1 = \pm 10''$, $\theta_2 = \pm 2.5''$, $\theta_3 = \pm 11''$, (в) графики функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$.

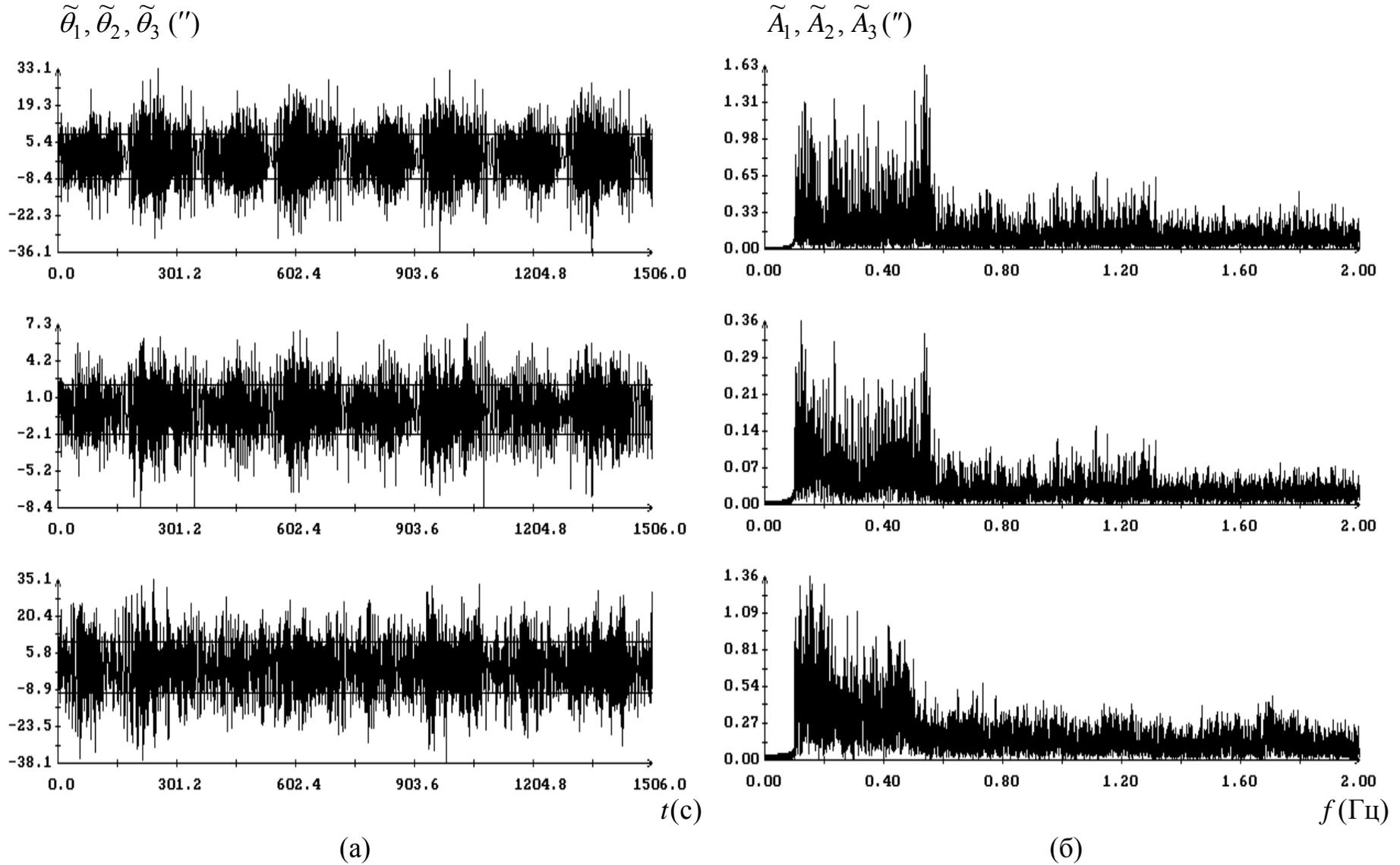


Рис. 19. Файл 1; (а) последовательности $\tilde{\theta}_1^{(n)}$, $\tilde{\theta}_2^{(n)}$, $\tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 8.6''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 2.1''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 10'''$; (б) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}$, $\tilde{\theta}_2^{(n)}$, $\tilde{\theta}_3^{(n)}$.

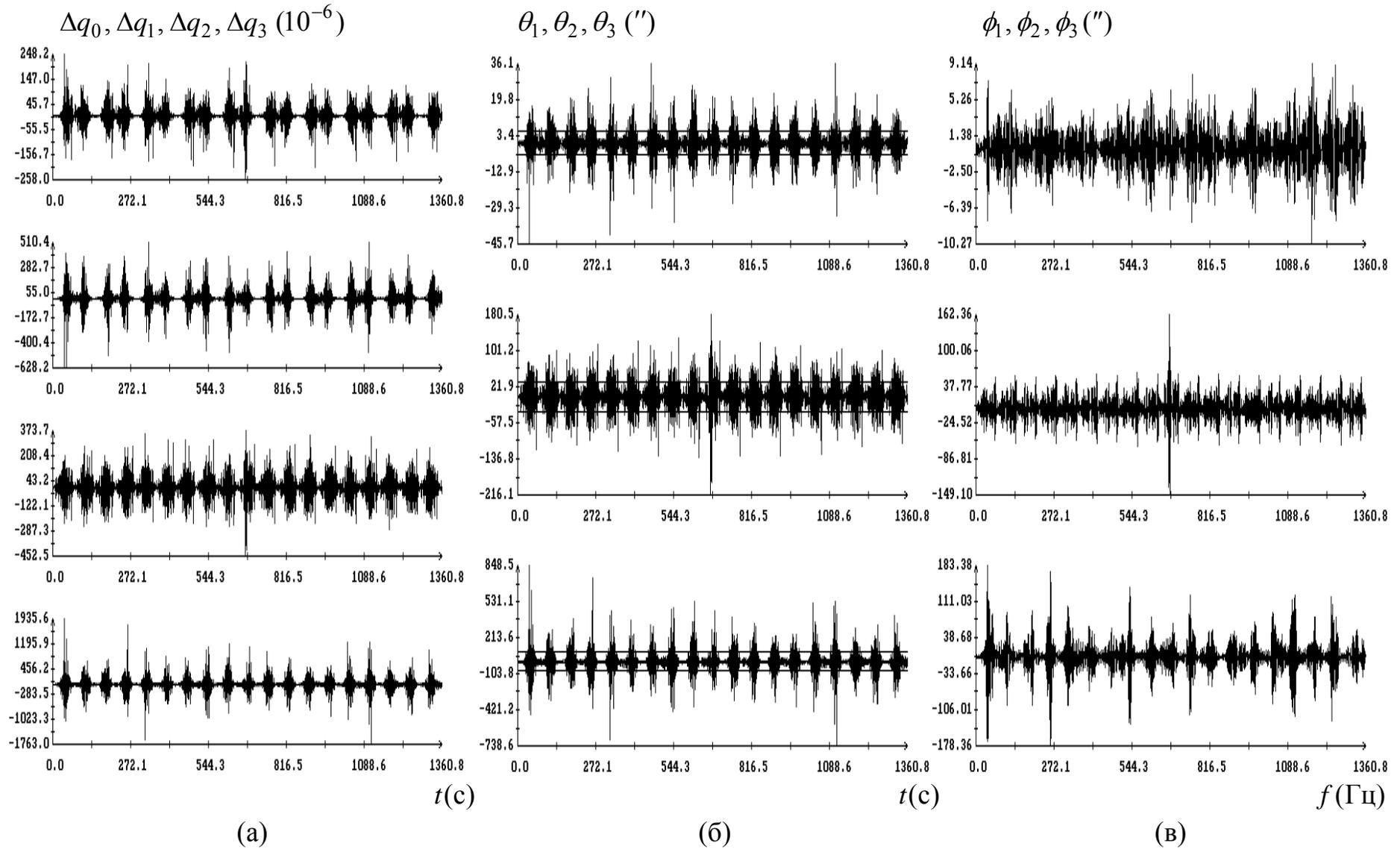


Рис. 20. Файл 2; (а) графики ошибок аппроксимации компонент кватерниона, (б) графики последовательностей $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$ и $\theta_3^{(n)}$, горизонтальные прямые: $\theta_1 = \pm 5.4''$, $\theta_2 = \pm 32''$, $\theta_3 = \pm 83''$, (в) графики функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$.

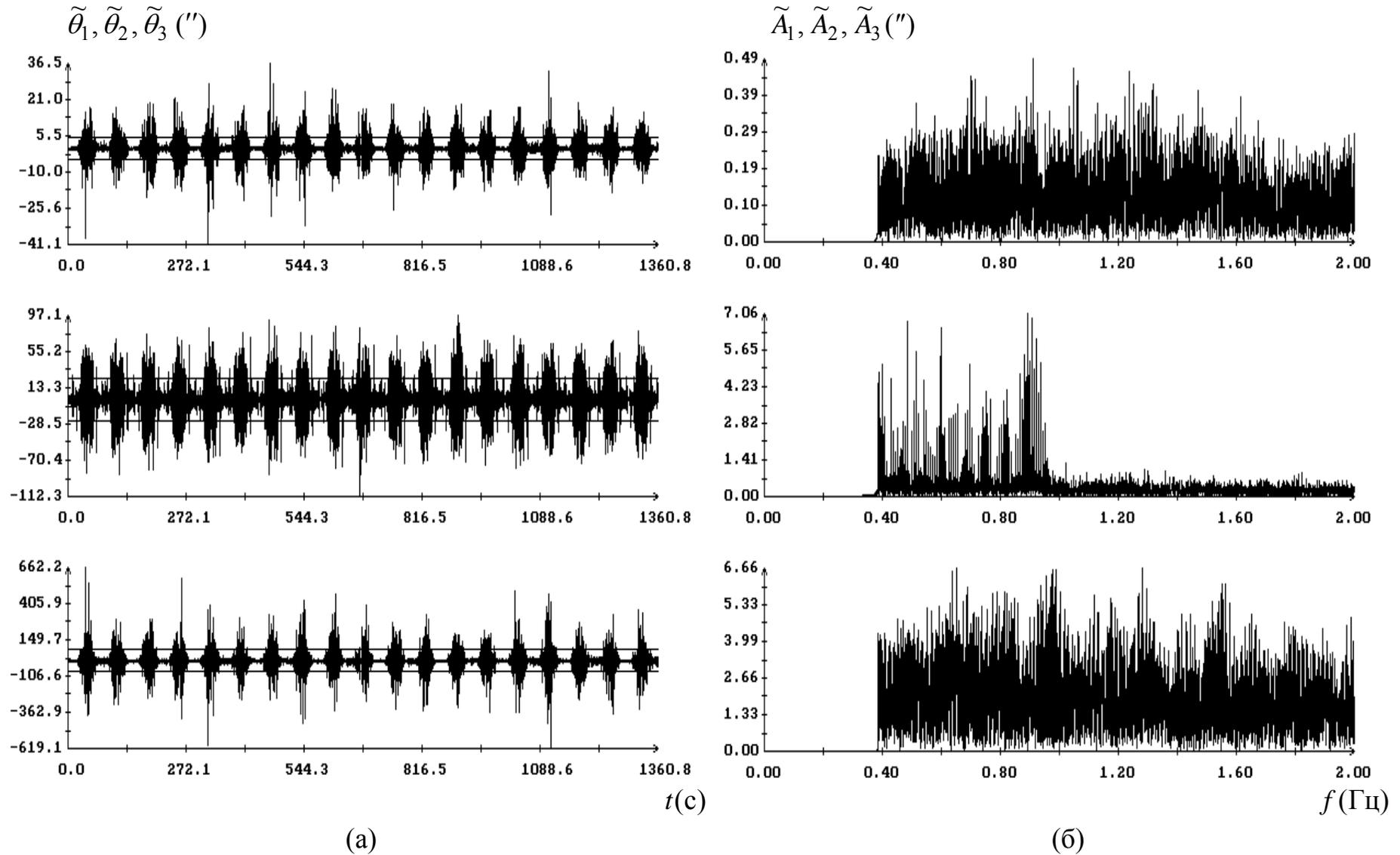


Рис. 21. Файл 2; (а) последовательности $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$; горизонтальные прямые $\langle \tilde{\theta}_1 \rangle = \pm 5.0''$, $\langle \tilde{\theta}_2 \rangle = \pm 24''$, $\langle \tilde{\theta}_3 \rangle = \pm 79''$; (б) спектры последовательностей $\tilde{\theta}_1^{(n)}, \tilde{\theta}_2^{(n)}, \tilde{\theta}_3^{(n)}$.