



Круковский А.Ю.

Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчета трехмерных уравнений магнитной гидродинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчета трехмерных уравнений магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 25. 13 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-25>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук**

А.Ю. Круковский

**Полностью консервативные разностные схемы в
смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для
расчета трехмерных уравнений магнитной
гидродинамики**

Москва - 2012

А.Ю. Круковский. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчета трехмерных уравнений магнитной гидродинамики. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2012, 13 страниц, 2 рисунка, библиография: 14 наименований.

В работе предложена двухслойная эйлерово-лагранжевая разностная схема для трехмерных уравнений магнитной гидродинамики. Предлагаемая разностная схема является полностью консервативной, то есть на всем временном шаге сохраняется масса, импульс, внутренняя, кинетическая, магнитная и полная энергии, в частности и после перестройки расчётной сетки.

Ключевые слова: двухслойная эйлерово-лагранжева разностная схема, полностью консервативная разностная схема.

A.Y. Krukovskiy. The conservative difference schemes in the mixed Eulerian-Lagrangian variables for calculation of three-dimensional equations of magnetohydrodynamics. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2012, 13 Pages, 2 Figures, 14 References.

The two-layer eulerian-lagrangian difference scheme for the three-dimensional MHD equations is proposed in the paper. The scheme is constructed on the balance equations of mass, an impulse, kinetic, magnetic field energy and total of energy are proved to be valid through the full time-step advance, particularly, after the difference mesh rezoning.

Key words: two-layer eulerian-lagrangian difference scheme, the conservative difference scheme.

Введение.

Работа по созданию программных комплексов для проведения широкомасштабного моделирования физических процессов наряду с использованием современных средств графической и информационной поддержки включает такой традиционный элемент, как выбор и анализ математических моделей и численных методик, их реализующих. В моделировании магнитогидродинамических (МГД) течений уже давно и успешно применяются полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) [1], на основе которых создано много надежных алгоритмов решения практических задач. Полностью консервативные схемы позволяют получать физически содержательные и достаточно точные численные решения на реальных разностных сетках, состоящих из ограниченного количества узлов.

По сравнению с газовой динамикой, движение проводящей сжимаемой среды в магнитном поле характеризуется большим разнообразием волновых явлений [2]. Скорости распространения магнитогидродинамических волн могут существенно отличаться друг от друга и от скорости распространения газодинамических волн. Это обстоятельство затрудняет расчет нестационарных магнито-газодинамических течений посредством явных разностных схем. Величина шага по времени, с которым выполняется численное интегрирование системы разностных уравнений, в общем случае определяется требованиями устойчивости и точности. Если в области течения плотность вещества, его температура и ионизационный состав, индукция магнитного поля и т.д. распределены по пространству в высокой степени неоднородно ($\min(f)$ и $\max(f)$ отличаются на несколько порядков по величине), временной шаг численного интегрирования системы разностных уравнений МГД, определяемый критерием Куранта, может оказаться существенно меньше значения, допускаемого приемлемым уровнем точности [3].

Расчет динамики системы, например, в условиях, соответствующих экспериментам на сильноточном ускорителе «Ангара-5-1» [4] и другим аналогичным экспериментам [5] в случае использования явной численной процедуры потребовал бы такого ограничения на шаг по времени, что проведение серийных трехмерных расчетов для анализа экспериментальных данных за разумное время становится практически невозможным.

Подобные затруднения обычно преодолеваются использованием неявных разностных схем. Теория и различные прикладные аспекты реализации неявных схем МГД, в частности, применительно к исследованию течений плазмы при высокоинтенсивном обмене энергией между веществом и электромагнитным полем, к настоящему времени достаточно подробно разработаны и представлены как в монографиях, так и в периодических изданиях. Весьма эффективные вычислительные алгоритмы были созданы на базе неявных схем, аппроксимирующих уравнения МГД в форме Лагранжа [6].

Для ПКРС в лагранжевых переменных, наряду с разностными аналогами законов сохранения массы, импульса и полной энергии, выполняются балансные соотношения между различными видами энергий (внутренней, кинетической, электромагнитной). На реальных сетках, состоящих из ограниченного числа узлов, в расчетах сложных течений при наличии большого числа физических процессов (тепло- и электропроводность, ионизация, излучение вещества и т.д.) ПКРС обладают способностью передавать тонкие особенности течений, возникновение и динамику структур, резко меняющихся во времени и пространстве.

При разработке алгоритмов решения задач ГД и МГД возникает необходимость не только использовать достоинства разностных схем в лагранжевых переменных, но и предусмотреть возможность расчета течений слоистой структуры с сильными пространственными деформациями. Этого, в частности, можно добиться, используя смешанное эйлера-лагранжево (СЭЛ) описание движения вещества [7].

Построение ПКРС для задач МГД в переменных, отличных от лагранжевых, встречает принципиальные трудности, которые связаны с необходимостью согласованности в аппроксимациях конвективных потоков массы, импульса, энергии и магнитного поля.

В работе [8] предложен общий метод построения ПКРС для задач газодинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных, основанный на так называемой «каскадной» форме записи уравнений газовой динамики. Такой подход позволил получить на произвольных подвижных криволинейных сетках широкий класс частично-трехслойных двумерных ПКРС для задач МГД. В работах [9-10] метод «каскадного» представления для построения ПКРС обобщен для двумерных уравнений в СЭЛ переменных на случай наличия магнитного поля. В работе [10] были построены ПКРС для двумерных уравнений МГД, описывающих движение невязкого, нетеплопроводного идеально проводящего газа в СЭЛ переменных в (x, y) -геометрии.

В настоящей работе на основе «каскадного» представления конвективных производных предложена двухслойная неявная ПКРС в СЭЛ-переменных для трехмерных МГД-течений. Магнитное поле может быть представлено вектором магнитной индукции со всеми компонентами.

Система уравнений МГД в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных.

Систему уравнений магнитной гидродинамики в криволинейных подвижных координатах для случая (x, y, z) -геометрии будем рассматривать в виде:

$$\frac{d(\rho J)}{dt} + \frac{\partial(\rho W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho u J)}{dt} + \frac{\partial(\rho u W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho u W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho u W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = & - \frac{\partial\left(P + \frac{B^2}{8\pi}, y, z\right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ & + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_x, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_x)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho w J)}{dt} + \frac{\partial(\rho w W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho w W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho w W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = & - \frac{\partial\left(x, P + \frac{B^2}{8\pi}, z\right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ & + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_y, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_y)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\rho v J)}{dt} + \frac{\partial(\rho v W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho v W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho v W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = & - \frac{\partial\left(x, y, P + \frac{B^2}{8\pi}\right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \\ & + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_z, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_z, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(B_x J) + \frac{\partial(B_x W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, B_x W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, B_x W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \\ = \left(\frac{\partial(x, y, E_y)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(x, E_z, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, u, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, u)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(B_y J) + \frac{\partial(B_y W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, B_y W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, B_y W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = \\ = \left(\frac{\partial(E_z, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(x, y, E_x)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(w, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, w)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}(B_z J) + \frac{\partial(B_z W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, B_z W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, B_z W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} =$$

$$= \left(\frac{\partial(x, E_x, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(E_y, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(v, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, v, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \varepsilon_e J) + \frac{\partial(\rho \varepsilon_e W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_e W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho \varepsilon_e W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = J(G_{\text{ае}} + Q_{ei}) -$$

$$- P_e \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(W_e, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, W_e, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, W_e)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \varepsilon_i J) + \frac{\partial(\rho \varepsilon_i W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho \varepsilon_i W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho \varepsilon_i W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} =$$

$$= -(P_i + q) \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(W_i, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, W_i, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, W_i)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right)$$

(9)

$$P = P_e(\rho, \varepsilon_e) + P_i(\rho, \varepsilon_i) + q \quad (10)$$

Здесь ρ - плотность газа, состоящего из электронов и ионов со своими давлениями $P_{e,i}$ и удельными внутренними энергиями $\varepsilon_{e,i}$, вектор магнитной индукции $B = (B_x, B_y, B_z)$ связан с вектором электрического поля $E = (E_x, E_y, E_z)$ уравнением Максвелла:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(E + \frac{[\vec{u}\vec{B}]}{c} \right) \quad (11)$$

Где σ - коэффициент электропроводности.

Потоки тепла электронов и ионов $W_{e,i}$, также как и джоулев нагрев $G_{\text{ае}}$, энергия обмена между электронами и ионами $Q_{e,i}$, давление искусственной вязкости подробно рассмотрены в работах [11,12].

Произвольная система координат (α, β, γ) связана с трехмерной системой координат (x, y, z) достаточно гладким для любого момента времени t отображением [7]:

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta, \gamma, t) \\ y &= y(\alpha, \beta, \gamma, t) \\ z &= z(\alpha, \beta, \gamma, t) \end{aligned} \quad (12)$$

то есть будем считать, что внутри расчетной области якобиан перехода J отличен от нуля:

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \neq 0 \quad (13)$$

Координаты (α, β, γ) назовем опорными или смешанными эйлерового-лагранжевыми координатами [1]. В исходной системе уравнений (1)-(9) $\vec{U} = (u, w, v)$ - скорость в трехмерной системе координат, $W = (W^x, W^y, W^z) = (u - \dot{x}, w - \dot{y}, v - \dot{z})$ - скорость в подвижной системе координат, где:

$$\dot{x} = x_t |_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}}, \dot{y} = y_t |_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}}, \dot{z} = z_t |_{(\alpha, \beta, \gamma) = \text{const}} \quad (14)$$

- скорость опорной системы координат относительно трехмерной системы координат.

Разобьем временную ось $t_0 < t < t_k$ на отрезки τ_n точками $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, где $\tau_n = t_{n+1} - t_n$.

Все величины системы уравнений МГД будем относить к узлам t_n этой временной сетки.

Введем обозначения:

$$f = f(t_n), \hat{f} = f(t_{n+1})$$

Аппроксимацию уравнений (1)-(10) по времени проведем в два этапа: первый – лагранжев, второй – этап перестройки системы координат и учет перетекания..

Уравнения первого этапа

На первом этапе система координат движется вместе с газом, то есть $W^x = W^y = W^z = 0$. Следовательно, обращаются в ноль конвективные производные в левых частях уравнений (1) - (9). Тогда аппроксимации по времени уравнений (1)-(10) запишутся следующим образом:

$$m = \rho J = \tilde{\rho} \tilde{J} = \text{const} \quad (15)$$

$$m \frac{\tilde{u} - u}{\tau_n} = - \frac{\partial \left(P + \frac{B^2}{8\pi}, y, z \right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_x, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_x)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (16)$$

$$m \frac{\tilde{w} - w}{\tau_n} = - \frac{\partial \left(x, P + \frac{B^2}{8\pi}, z \right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_y, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_y)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (17)$$

$$m \frac{\tilde{v} - v}{\tau_n} = - \frac{\partial \left(x, y, P + \frac{B^2}{8\pi} \right)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_x}{4\pi} \frac{\partial(B_z, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_y}{4\pi} \frac{\partial(x, B_z, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{B_z}{4\pi} \frac{\partial(x, y, B_z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (18)$$

$$\frac{\tilde{B}_x \tilde{J} - B_x J}{\tau_n} = \left(\frac{\partial(x, y, E_y)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(x, E_z, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, u, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, u)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (19)$$

$$\frac{\tilde{B}_y \tilde{J} - B_y J}{\tau_n} = \left(\frac{\partial(E_z, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(x, y, E_x)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(w, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, w)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (20)$$

$$\frac{\tilde{B}_z \tilde{J} - B_z J}{\tau_n} = \left(\frac{\partial(x, E_x, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} - \frac{\partial(E_y, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) + B_x \frac{\partial(v, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_y \frac{\partial(x, v, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + B_z \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \quad (21)$$

$$m \frac{\tilde{\varepsilon}_e - \varepsilon_e}{\tau_n} = J(G_{\text{div}} + Q_{ei}) - P_e \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(W_e, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, W_e, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, W_e)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) \quad (22)$$

$$m \frac{\tilde{\varepsilon}_i - \varepsilon_i}{\tau_n} = -(P_i + q) \left(\frac{\partial(u, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, w, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, v)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) - \left(\frac{\partial(W_i, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, W_i, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, W_i)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} \right) \quad (23)$$

$$P = P_e(\rho, \varepsilon_e) + P_i(\rho, \varepsilon_i) + q \quad (24)$$

Система уравнений (15)-(24) представляет собой систему уравнений магнитной гидродинамики в лагранжевых переменных и подробно рассмотрена в [6]. В частности, в данной работе для системы уравнений (15)-(24) построена неявная полностью консервативная разностная схема и показано, что для внутренней, кинетической и магнитной энергий выполняется закон сохранения полной энергии. При этом в соответствии с происходящими физическими процессами внутренняя, кинетическая и магнитная энергия могут переходить одна в другую.

Уравнения второго этапа

На втором этапе производится учет конвективных потоков значений магнитогидродинамических величин, найденных на лагранжевом этапе.

$$\frac{\hat{m} - m}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{\xi} - m\tilde{\xi}}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho\xi W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho\xi W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho\xi W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad \xi = u, w, v \quad (26)$$

$$\frac{\hat{B}_\eta \hat{J} - \tilde{B}_\eta \tilde{J}}{\tau_n} + \frac{\partial(B_\eta W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, B_\eta W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, B_\eta W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad \eta = x, y, z \quad (27)$$

$$\frac{\hat{m}\hat{\varepsilon}_\chi - m\tilde{\varepsilon}_\chi}{\tau_n} + \frac{\partial(\rho\varepsilon_\chi W^x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, \rho\varepsilon_\chi W^y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} + \frac{\partial(x, y, \rho\varepsilon_\chi W^z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} = 0, \quad \chi = e, i \quad (28)$$

$$W^x = \frac{\hat{x} - \tilde{x}}{\tau_n}, W^y = \frac{\hat{y} - \tilde{y}}{\tau_n}, W^z = \frac{\hat{z} - \tilde{z}}{\tau_n}, \hat{m} = \hat{\rho}\hat{J} \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что сложив уравнения первого этапа с соответствующими уравнениями второго этапа и приведя подобные члены, мы получим аппроксимацию производных по времени с первым порядком. Кроме того, уравнение полной энергии системы уравнений (25)-(29) имеет дивергентный вид, то есть для полной энергии системы выполняется закон сохранения энергии.

Обобщения ПКРС в переменных Лагранжа на случай СЭЛ переменных

Используем дискретизацию физических величин по пространству работы [11]. На плоскости (x, y, z) область G , занятую веществом, разобьем двумя семействами криволинейных поверхностей на криволинейную сетку с шестигранными ячейками и кусочно-гладкой границей, так называемую разностную сетку. Обозначим множество узлов разностной сетки через $\bar{\omega}$, а множество ячеек разностной сетки через ω . Введем пространства сеточных функций, определенных в узлах и ячейках разностной сетки, обозначив их $H_{\bar{\omega}}$ и H_{ω} соответственно. Для записи сеточных функций $f \in H_{\bar{\omega}}$ будем использовать индексы $(i, j, k): f_{ijk} = f \in H_{\bar{\omega}}$. Функции $g \in H_{\omega}$ будем отмечать индексами $(m, l, n): g_{mln} = g \in H_{\omega}$. Будем относить координаты (x, y, z) , скорости (u, w, v) к узлам разностной сетки, а функции плотности ρ , компонент магнитного поля B , внутренних энергий ионов и электронов $\varepsilon_i, \varepsilon_e$ к ячейкам разностной сетки.

Пространственная дискретизация.

Пусть для области G можно задать достаточно гладкое однозначное отображение f , переводящее G в единичный куб Q в пространстве СЭЛ-переменных (α, β, γ) . Тогда отображение f взаимнооднозначно переводит разностную сетку в G в прямоугольно-

параллелепипедную сетку $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ в Q с шагами $h_\alpha = const$, $h_\beta = const$, $h_\gamma = const$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, N$

При проектировании из пространства H_ω в пространство $H_{\bar{\omega}}$ используется интерполяция:

$$g_{ijk} = \frac{1}{8} \sum_{r \in \mathcal{O}_2} g_r \quad (30)$$

для функций M_{ijk} - масс узлов разностной сетки.

Дифференциальные уравнения второго этапа (25)-(29) аналогично [8], будем записывать в потоковой форме. При этом предполагается, что величины, полученные после расчета лагранжевого этапа будем обозначать без «крышки», а величины, получаемые после второго этапа – с «крышкой».

Уравнение неразрывности

$$\frac{\hat{m}_{mln} - m_{mln}}{\Delta t} + F_{1265}^m - F_{3487}^m + F_{2376}^m - F_{1485}^m + F_{5678}^m - F_{1234}^m = 0 \quad (31)$$

Это уравнение является базовым для уравнений второго этапа, поскольку функции потоков других величин выражаются через потоки F^m . Уравнение аппроксимируется на шаблоне \mathcal{M}_1 (см. Рис. 1)

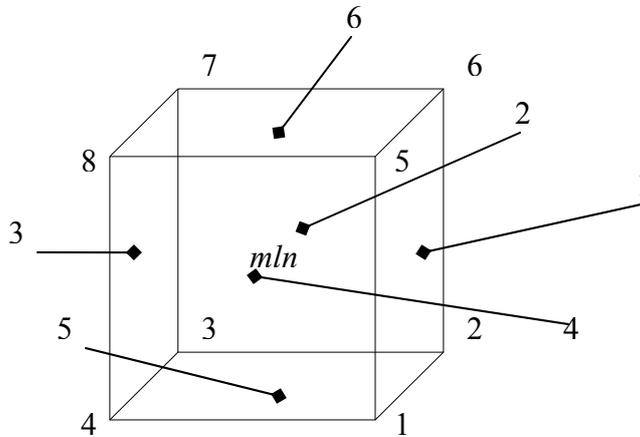
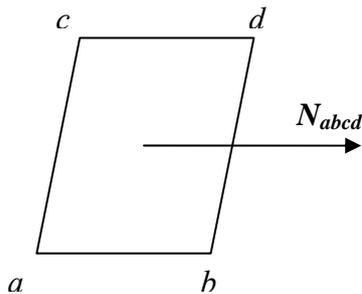


Рисунок 1. Разностный шаблон ячейки \mathcal{M}_1

Потоки F_{abcd}^m относятся к центру соответствующей грани $(abcd)$ ячейки (m, l, n) :



$$F_{abcd}^m = (W_{abcd}, N_{abcd}) \rho_{abcd}^* \quad (32)$$

где W_{abcd} - вектор относительной скорости переноса, относящийся к центру грани $(abcd)$: $W_{abcd} = \frac{1}{4}(W_a^x + W_b^x + W_c^x + W_d^x, W_a^y + W_b^y + W_c^y + W_d^y, W_a^z + W_b^z + W_c^z + W_d^z)$,

N_p - вектор нормали к грани p равный по величине площади этой грани. Тогда можно переписать (32) в виде

$$F_p^m = (W_p, N_p) \rho_p^* \quad (33)$$

В качестве ρ_p^* берется значение плотности в одной из двух прилегающих к грани ячеек, а именно из той ячейки, откуда идет поток вещества через эту грань. Такой алгоритм соответствует методу «донорных ячеек» [13] и обеспечивает в (31) первый порядок аппроксимации («вверх по потоку»).

При аппроксимации потоков массы F^m другими способами возможно повысить порядок аппроксимации, например, вычисляя величины объемов, перетекающих через соответствующую грань с более высоким порядком аппроксимации, нежели в схемах [13].

Будем рассматривать совместно с (31) уравнение для изменений объемов ячеек:

$$\frac{\hat{V}_{mln} - V_{mln}}{\Delta t} = F_1^V - F_3^V + F_2^V - F_4^V + F_6^V - F_5^V \quad (34)$$

где поток объема через соответствующую грань:

$$F_p^V = (W_p, N_p) \quad (35)$$

и связан с потоком массы:

$$F_p^m = F_p^V \rho_p^* \quad (36)$$

Уравнение (34) есть аппроксимация изменения якобиана по времени:

$$\mathbf{j} = \frac{dJ}{dt} \quad (37)$$

откуда следует, что повышая порядок аппроксимации уравнения (34), а соответственно (37), через соотношение (36) повышаем порядок аппроксимации уравнения (31).

Уравнение изменения импульса

Уравнения переноса импульса (26) аппроксимируются в узлах разностной сетки на шаблоне $Ш_2$ (см. Рис. 2)

$$\frac{\hat{M}_{ijk} \hat{\Omega}_{ijk} - M_{ijk} \Omega_{ijk}}{\Delta t} + F_1^{m\Omega} - F_3^{m\Omega} + F_2^{m\Omega} - F_4^{m\Omega} + F_6^{m\Omega} - F_5^{m\Omega} = 0, \quad (38)$$

$$\Omega = u, w, v$$

Уравнения изменения магнитного поля.

Уравнения для компонент магнитного поля (27) аппроксимируются в ячейке разностной сетки на шаблоне $Ш_1$

$$\frac{\hat{B}_{fmln} \hat{V}_{mln} - B_{fmln} V_{mln}}{\Delta t} + F_1^{B_f V} - F_3^{B_f V} + F_2^{B_f V} - F_4^{B_f V} + F_6^{B_f V} - F_5^{B_f V} = 0, \quad (39)$$

$$f = x, y, z$$

Уравнения изменения удельной внутренней энергии

Аналогично уравнению для магнитного поля, уравнение переноса внутренней энергии будем рассматривать, подразумевая под ε удельные внутренние энергии для электронов и ионов.

$$\frac{\hat{m}_{mln} \hat{\varepsilon}_{s_{mln}} - m_{mln} \varepsilon_{s_{mln}}}{\Delta t} + F_1^{m\varepsilon_s} - F_3^{m\varepsilon_s} + F_2^{m\varepsilon_s} - F_4^{m\varepsilon_s} + F_6^{m\varepsilon_s} - F_5^{m\varepsilon_s} = 0 \quad (40)$$

$$s = e, i$$

где $F_p^{m\varepsilon} = (W_p, N_p)(\rho\varepsilon)_p^*$, а величина $(\rho\varepsilon)_p^*$ вычисляется по алгоритму описанному выше для ρ_p^* .

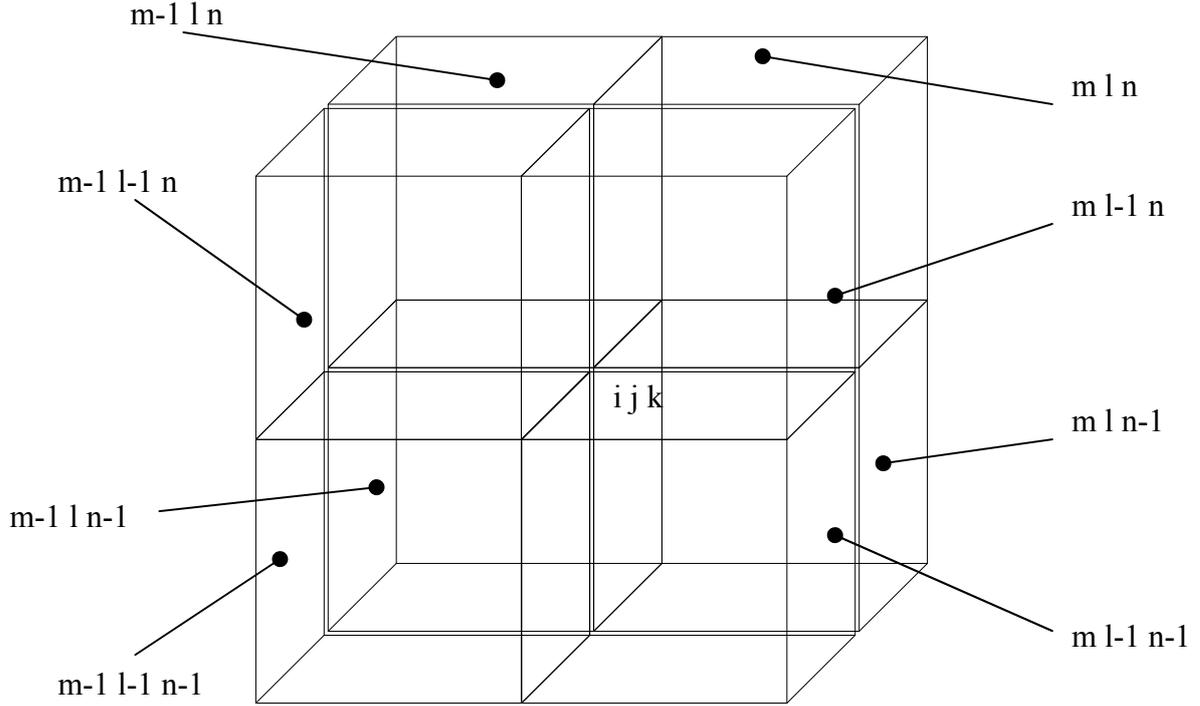


Рисунок 2. Разностный шаблон узла Π_2

Условие полной консервативности

Требования полной консервативности на этапе вычисления конвективных потоков массы, импульса, магнитного поля и удельных внутренних энергий в соответствии с требованиями полной консервативности означают, что должны выполняться законы сохранения всех видов энергий, то есть при вычислении нового значения величины интегральное по области значение энергии данной величины должно сохраняться:

$$\Delta E_U^{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{U}_{ijk}^2}{2} - M_{ijk} \frac{U_{ijk}^2}{2} \right) = 0, \quad (41)$$

$$U = u, w, v$$

$$\Delta E^{mag} = \sum_{f=x,y,z} \sum_{mln} \left(\hat{V}_{mln} \frac{\hat{B}_{fmln}^2}{8\pi} - V_{mln} \frac{B_{fmln}^2}{8\pi} \right) \quad (42)$$

$$\Delta E^{int} = \sum_{s=e,i} \sum_{mln} (\hat{m}_{mln} \hat{\varepsilon}_{s_{mln}} - m_{mln} \varepsilon_{s_{mln}}) \quad (43)$$

Для доказательства полной консервативности второго этапа и получения условий, при которых оно получается, предварительно, наряду с уравнением изменения массы ячейки (31) будем рассматривать уравнение изменения массы узла M_{ijk} (30) в виде:

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\Delta t} = F_1^M - F_3^M + F_2^M - F_4^M + F_6^M - F_5^M \quad (44)$$

где поток массы узла связан с потоком массы ячейки следующим соотношением [8]:

$$\left(F_p^M\right)_{ijk} = \frac{1}{8} \left(\begin{aligned} &F_{pmln}^m + F_{pm-1n}^m + F_{pml-1n}^m + F_{p m-1l-1n}^m + \\ &+ F_{pmln-1}^m + F_{p m-1ln-1}^m + F_{p ml-1n-1}^m + F_{p m-1l-1n-1}^m \end{aligned} \right) \quad (45)$$

Доказательство полной консервативности второго этапа сводится к получению условий, при которых из уравнения неразрывности (31), (а также аналогичных ему уравнений (34),(44)), уравнений движения (38), уравнений магнитного поля (39) и уравнения энергии (40) следует выполнение соотношений (41)-(43) по сохранению кинетической, магнитной и внутренней энергии системы.

Видно, что соотношение (43) по сохранению внутренней энергии автоматически следует из уравнения (40) при суммировании его по всей расчетной области.

Доказательства выполнения соотношений (41)-(42) проведем в следующей последовательности:

Выпишем соотношения, при которых из уравнения неразрывности в форме (44) и уравнений движения (38) следуют уравнения изменения кинетической энергии в узле:

$$\frac{\hat{M}_{ijk} - M_{ijk}}{\Delta t} \left(-\frac{\hat{\Theta}_{ijk} \Theta_{ijk}}{2} \right) + \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{\Theta}_{ijk} - M_{ijk} \Theta_{ijk}}{\Delta t} \frac{\hat{\Theta}_{ijk} + \Theta_{ijk}}{2} = \frac{\hat{M}_{ijk} \hat{\Theta}_{ijk}^2 - M_{ijk} \Theta_{ijk}^2}{2\Delta t}, \quad (46)$$

$$\Theta = u, w, v$$

Суммируем (46) по всей расчетной области, получаем в правой части

$$\Delta E_u^{kin} + \Delta E_w^{kin} + \Delta E_v^{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk}^2 + \hat{w}_{ijk}^2 + \hat{v}_{ijk}^2}{2} - M_{ijk} \frac{u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2}{2} \right) \quad (47)$$

Соотношения (41) будут выполняться при следующих условиях на связь потоков массы в уравнении неразрывности (44) с потоками импульсов в уравнениях движения (38):

$$F_p^{MU} \left(\frac{\hat{\Theta}_{ijk} + \Theta_{ijk}}{2} - \frac{\hat{\Theta}_{p'} + \Theta_{p'}}{2} \right) = F_{p'}^M \left(\frac{\hat{\Theta}_{ijk} \Theta_{ijk}}{2} - \frac{\hat{\Theta}_{p'} \Theta_{p'}}{2} \right), \quad (48)$$

$$\Theta = u, w, v$$

Откуда:

$$\begin{aligned} F_p^{MU} &= F_p^M \frac{1}{2} \frac{\hat{\Theta}_{ijk} \Theta_{ijk} - \hat{\Theta}_{p'} \Theta_{p'}}{\Theta_{ijk}^{(0.5)} - \Theta_{p'}^{(0.5)}}, \\ p=1, \Theta_{p'} &= \Theta_{i+1jk}, p=2, \Theta_{p'} = \Theta_{ij+1k}, p=3, \Theta_{p'} = \Theta_{i-1jk} \\ p=4, \Theta_{p'} &= \Theta_{ij-1k}, p=5, \Theta_{p'} = \Theta_{ijk-1}, p=6, \Theta_{p'} = \Theta_{ijk+1} \end{aligned} \quad (49)$$

Для проверки соотношения (42) из уравнения неразрывности в форме (31) и уравнения магнитного поля (39) следует уравнение изменения магнитной энергии в ячейке:

$$\frac{\hat{V}_{mln} - V_{mln}}{\Delta t} \left(-\frac{\hat{B}_{fmln} B_{fmln}}{8\pi} \right) + \frac{\hat{B}_{fmln} \hat{V}_{mln} - B_{fmln} V_{mln}}{\Delta t} \frac{\hat{B}_{fmln} + B_{fmln}}{8\pi} = \frac{\hat{B}_{fmln}^2 \hat{V}_{mln} - B_{fmln}^2 V_{mln}}{8\pi \Delta t} \quad (50)$$

$$f = x, y, z$$

Суммируя по всем ячейкам, находим следующие условия на связь потоков объема магнитной энергии и потоков объема:

$$F_p^V \left(\frac{\hat{B}_{fmln} + B_{fmln}}{8\pi} - \frac{\hat{B}_{fp'} + B_{fp'}}{8\pi} \right) = F_{p'}^{B_f V} \left(\frac{\hat{B}_{fmln} + B_{fmln}}{8\pi} - \frac{\hat{B}_{fp'} + B_{fp'}}{8\pi} \right) \quad (51)$$

$$f = x, y, z$$

Откуда:

$$F_p^{B_f V} = F_p^V \frac{1}{2} \frac{\hat{B}_{f m l n} B_{f m l n} - \hat{B}_{f p'} B_{f p'}}{B_{f m l n}^{(0.5)} - B_{f p'}^{(0.5)}},$$

$$p = 1, B_{f p'} = B_{f m+1 n} \quad p = 2, B_{f p'} = B_{f m l+1 n} \quad p = 3, B_{f p'} = B_{f m-1 n}$$

$$p = 4, B_{f p'} = B_{f m l-1 n} \quad p = 5, B_{f p'} = B_{f m l n-1} \quad p = 6, B_{f p'} = B_{f m l n+1}$$

$$f = x, y, z$$
(52)

Алгоритм расчета

Система уравнений (31)-(40), хотя и является неявной, позволяет провести вычисления второго этапа в частично явной форме, то есть после определения значений потоков масс ячеек и узлов, потоков объемов, определяемых в соответствии (32), (35), (45) по всей расчетной области, значения новых масс ячеек и внутренних удельных энергий вычисляются явно из уравнений (31),(40), (см [14]). Уравнения для новых скоростей и компонент магнитного поля (38)-(39) решаем методом простой итерации до выполнения условий на значения новых величин \hat{f} :

$$|\hat{f} - f| \leq \varepsilon_a |f| + \varepsilon_0, \quad f = u, w, v, B_x, B_y, B_z$$
(53)

Где ε_a и ε_0 - абсолютная и относительная погрешности.

В заключение, хотим отметить одну важную особенность, отличающую данный алгоритм учета конвективных потоков для уравнений в СЭЛ переменных, от разработанных ранее. Данный алгоритм приводит к следующему выражению для кинетической энергии дискретной системы:

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ijk} \left(\hat{M}_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk}^2}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{w}_{ijk}^2}{2} + \hat{M}_{ijk} \frac{\hat{v}_{ijk}^2}{2} \right)$$
(54)

Для схем, построенных, например, в работе [10] с использованием «каскадного» представления конвективных производных получены разностные аналоги энергобалансов, в которые входит кинетическая энергия, выраженная через сеточные функции, определенные на двух слоях по времени:

$$\hat{E}_{kin} = \sum_{ijk} \left(M_{ijk} \frac{\hat{u}_{ijk} u_{ijk}}{2} + M_{ijk} \frac{\hat{w}_{ijk} w_{ijk}}{2} + M_{ijk} \frac{\hat{v}_{ijk} v_{ijk}}{2} \right)$$
(55)

Уравнение (55) представляет собой трехмерный аналог энергобаланса работы [10].

Аналогично, для схемы данной работы получается балансное уравнение для магнитной энергии, определенной на одном слое по времени, в то время как в [10] для записи магнитной энергии используются величины $\hat{B}V$.

Список литературы

1. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. М. Наука, 1992, 352с.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962
3. Р.П. Федоренко,. Введение в вычислительную физику. М., Изд-во Моск. Физ.-Техн. Ин-та, 1994
4. Grabovskii E.V., Smirnov V.P., Zakharov S.V. et al. JETP. 82(3), 445 (1996).
5. Spielman R.B., Deeney C., Chandler G.A. Phys Plasmas, 1998, vol. 5, p. 2105
6. В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, А.А. Оточин. Программный комплекс для расчета аксиально-симметричных течений МГД-течений излучающих газоплазменных сред. Препринт ИПМ АН СССР №162, М., 1990, 26 с.
7. C.W. Hirt, A.A. Amsden, J.L. Cook. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. J. of Comput. Phys., 1974, vol. 14, p.227-253
8. В.М. Головизнин, М.А. Рязанов, А.А. Самарский, С.Ю. Чернов. Двумерная полностью консервативная разностная схема газовой динамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Препринт ИПМ АН СССР, №11, М. 1985, 23с.
9. В.М. Головизнин, М.А. Рязанов, О.С. Сороковикова. Об одном классе полностью консервативных схем МГД в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. ЖВМ и МФ, 1984, т.24 №4, с. 520-533
10. В.А. Гасилов, В.М. Головизнин, М.А. Рязанов, Е.А. Самарская, О.С. Сороковникова, С.И. Ткаченко. Двумерные, полностью консервативные разностные схемы магнитной гидродинамики в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных. Препринт ИПМ АН СССР, №181, М., 1985, 17с.
11. А.Ю. Круковский, И.В. Попов. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово- лагранжевых переменных для расчета трехмерных ГД-течений. Препринт ИПМ РАН №23 М. 2012, 11 с.
12. В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, А.А. Оточин. Комплекс программ РАЗРЯД. Решение задач магнитной гидродинамики в (r,z) -геометрии в двухтемпературном приближении. Препринт ИПМ АН СССР №150, М., 1990, 21с.
13. Роуч П. Вычислительные методы в гидродинамике. М. Мир, 1980
14. В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, Ал. А. Оточин, Ан. А. Оточин. Полностью консервативная разностная схема в смешанных эйлеро-лагранжевых переменных для расчета аксиально-симметричных МГД-течений. Всесоюзный Центр Математического Моделирования АН СССР, Препринт №5, 1991, 27с.