ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 28 за 2012 г.

Пустыльников Л.Д.

Быстрое прогнозирование квазистационарных процессов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д. Быстрое прогнозирование квазистационарных процессов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 28. 15 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-28

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников

БЫСТРОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Москва, 2012 г.

УДК 511.36

Л. Д. Пустыльников. Быстрое прогнозирование квазистационарных процессов. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2012.

Для важного класса квазистационарных процессов найдены явные выражения их прогнозирования по r предыдущих значениям, вычисление которых требует выполнения $O(r \log_2 r)$ или $O(r)$ арифметических операций.

L. D. Pustyl'nikov. Fast prediction of quasistationary processes. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2012.

The explicit expressions for prediction in terms of r preceding values are found for an important class of quasistationary processes. They allow to calculate the prediction by performing $O(r \log_2 r)$ or $O(r)$ arithmetic operations.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 11-01-00023.

E-mail:
сайт: www.keldysh.ru

Введение

Главная цель этой работы состоит в том, чтобы найти явные выражения для прогнозирования квзистациорнарных случайных процессов. Теория прогнозирования стационарных случайных процессов была построена Колмогоровым и Винером ([1], [2]). Квазистационарные процессы, введённые в [4], есть обобщение стационарных. Они определяются, используя асимптотические свойства траекторий на бесконечности. Н. Левинсон доказал ([3]), что проблема линейного прогнозирования случайных процессов с дискретным временем по конечному числу предыдущих значений процесса сводится к решению системы линейных уравнений с симметрической теплицевой матрицей, порядок которой равен числу этих предыдущих значений. Он также указал некоторый специфический способ решения этой системы, использующий $O(r^2)$ арифметических операций, где r — порядок матрицы. Заметим, что метод Гаусса решения системы с матрицей порядка r требует выполнения $O(r^3)$ арифметических операций. Проблема минимизации числа арифметических операций для большого числа предыдущих значений — важная в связи с тем, что в этом случае точность прогнозирования и скорость его вычисления улучшаются.

Первая часть опубликована в [4], и в ней построена теория квазистационарных процессов, доказаны основные свойства этих процессов, и найдено общее выражение для их прогнозирования. Настоящая работа есть вторая часть. Здесь для важного класса таких процессов (кусочно постоянные процессы) выведены явные выражения значений прогнозирования процесса по r предыдущим значениям, вычисления которых требуют выполнения $O(r \log_2 r)$ или $O(r)$ арифметических операций. Доказательства существенно используют свойства дискретного преобразования Фурье и тёплицевых матриц, которые изучены в [5]–[9].

Работа состоит из трёх секций. Нумерация теорем в каждой из секций — свои.

Необходимые факты из теории тёплицевых матриц приведены в разделе 1 настоящей работы.

§ 1. Алгебраическая структура пространства тёплицевых матриц

1.1 Основные определения

Матрицы рассматриваемые в этой секции — квадратные, комплексные и имеют порядок r.

Определение 1.1. Матрица $A = (a_{\nu j})$, $\nu, j = 0, 1, \ldots, r-1$ называется

1) циркулянтной, если $a_{\nu j} = a_{kl}$ при $\nu - j \equiv k - l \mod r$;

2) косоциркулянтной, если A — тёплицева (определение 3.1) и $a_{\nu j} = -a_{kl}$ при $\nu - j = k - l + r$.

Замечание 1.1. Матрицы, удовлетворяющие определению 1.1 однозначно определяются своей верхней строкой $(a_{00}, \ldots, a_{0,r-1})$.

Определение 1.2. Пусть $d = (d_0, \ldots, d_{r-1})$ — вектор размерности r. Определим преобразование Фурье $d^* = Fd$ по формулам

$$d^* = Fd = (d_0^*, \ldots, d_{r-1}^*), \quad d_k^* = \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\frac{2\pi ikj}{r}} d_j, \quad k = 0, \ldots, r-1,$$

(i — мнимая единица).

Замечание 1.2. Введённое таким образом преобразование Фурье невырождено, и обратное к нему преобразование F^{-1} от вектора d^* задается формулами

$$d = F^{-1}d^* = (d_0, \ldots, d_{r-1}), \quad d_k = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi ikj}{r}} d_j^*, \quad k = 0, \ldots, r-1.$$

1.2 Основные обозначения и теорема

1) Обозначим множества тёплицевых, циркулянтных, косоциркулянтных, диагональных и скалярных матриц порядка r соответственно через T, T_1, T_2, D и S.

2) $\mathscr{L} = (l_{\nu j})$ — циркулянтная матрица, у которой верхняя строка $(l_{00}, \ldots, l_{0,r-1})$ имеет вид

$$l_{0k} = -\frac{2}{r\left(\exp\left(\frac{\pi i}{r}(2k-1)\right) - 1\right)}, \quad k = 0, \ldots, r-1,$$

где i — мнимая единица.

Замечание 1.3. Можно доказать (см. лемму 10, § 4 в [7]), что $\mathscr{L}$ — невырожденная матрица, а обратная к ней матрица $\mathscr{L}^{-1} = (\mu_{\nu j})$ — циркулянтная, и её верхняя строка $(\mu_{00}, \dots, \mu_{0,r-1})$ имеет вид

$$\mu_{0k} = -\frac{2}{r\left(\exp\left(\frac{\pi i}{r}(2k+1)\right) - 1\right)}, \quad k = 0, \dots, r-1.$$

3) Φ, Φ^{-1} — такие матрицы, что для любого r-мерного вектора d справедливы равенства $Fd = \Phi d$, $F^{-1}d = \Phi^{-1}d$.

4) Если A, B — фиксированные матрицы порядка r, а R — некоторое множество матриц порядка r, то выражения AR, RB, ARB обозначают множества матриц, состоящие соответственно из матриц вида AC, CB и ACB, где $C \in R$.

Лемма 1.1. *Пусть $A = (a_{\nu j})$ — тёплицева матрица, $A' = (a'_{\nu j})$ — циркулянтная матрица, у которой нулевая строка $(a'_{00}, \dots, a'_{0,r-1})$ имеет вид*

$$\begin{aligned} &a'_{0j} = \frac{1}{2}(a_{0j} + a_{r-j,0}), \quad \textit{при} \quad j = 1, \dots, r-1, \\ &a'_{00} = a_{00}, \end{aligned}$$

и $A'' = (a''_{\nu j})$ — косоциркулянтная матрица, у которой нулевая строка $(a''_{00}, \dots, a''_{0,r-1})$ имеет вид

$$\begin{aligned} &a''_{0j} = \frac{1}{2}(a_{0j} - a_{r-j,0}), \quad \textit{при} \quad j = 1, \dots, r-1, \\ &a''_{00} = a_{00}. \end{aligned}$$

Тогда $A = A' + A''$.

Доказательство, очевидно, следует из определения 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathscr{L}$ — матрица, введённая в обозначениях 1.2, $\mathscr{L}^{-1}$ — матрица, обратная $\mathscr{L}$, x — произвольный r-мерный вектор. Тогда*

$$\mathscr{L}Fx = FRx, \quad \mathscr{L}^{-1}x = FR^{-1}F^{-1}x,$$

где F — преобразование Фурье, введённое в п. 1.2, R — диагональная матрица с диагональными числами $r'_k = e^{-\pi ik/r}$, $k = 0, \dots, r-1$, R^{-1} — диагональная матрица с диагональными числами $r''_k = e^{\pi ik/r}$, $k = 0, \dots, r-1$, i — мнимая единица.

Доказательство дано в [7] (доказательство леммы 10, § 4, глава 1).

Теорема 1.1. *Линейное пространство T есть сумма двух подпространств T_1 и T_2 таких, что*

1) $T_1 \cap T_2 = S$,

2) $T_1 = \Phi^{-1}\mathscr{D}\Phi$, $T_2 = \Phi^{-1}\mathscr{L}^{-1}\mathscr{D}\mathscr{L}\Phi$,

3) если матрица $A' = (a'_{\nu j}) \in T_1$, *то* $A' = \Phi^{-1}\Lambda'\Phi$, *где* Λ' *— диагональная матрица с диагональными числами* $l'_0, \ldots, l'_{r-1}$, *причём вектор* $l' = (l_0, \ldots, l_{r-1})$ *имеет вид* $l' = Fa'$, *где* $a' = (a'_0, \ldots, a'_{r-1})$ *— вектор с координатами* $a'_0 = a'_{00}, a'_1 = a'_{0,r-1}, \ldots, a'_{r-1} = a'_{01}$,

4) если матрица $A'' = (a''_{\nu j}) \in T_2$, *то* $\Phi^{-1}\mathscr{L}^{-1}\Lambda''\mathscr{L}\Phi$, *где* Λ'' *— диагональная матрица с диагональными числами* $l''_0, \ldots, l''_{r-1}$, *причём вектор* $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{r-1})$ *имеет вид* $l'' = \mathscr{L}Fa''$, *где* $a'' = (a''_0, \ldots, a''_{r-1})$ *— вектор с координатами* $a''_0 = a''_{00}, a''_1 = -a''_{0,r-1}, \ldots, a''_{r-1} = -a''_{01}$.

Доказательство теоремы 1.1 дано в [7] (теорема 1, §§ 3, 5, глава 1). При этом разложение пространства T в виде суммы подпространств T_1 и T_2 основано на лемме 1.1.

§ 2. Быстрое прогнозирование квазистационарных процессов

2.1 Метод Дурбина–Левинсона

Определение 2.1. Под арифметической операции будем понимать операции сложения, вычитания, умножения и деления над парой комплексных чисел.

Как доказано в [4] решение задачи прогнозирования квазистационарного процесса $x = x(n)$ по r предыдущим значениям сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений $Aa = b$, где A — симметрическая тёплицева матрица порядка r, $b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ — известный r-мерный вектор, $a' = (a_0, \ldots, a_{r-1})$ — неизвестный r-мерный вектор. Если использовать классический метод Гаусса, то для решения этой системы потребуется выполнить $O(r^3)$ а. о. (при $r \to \infty$). Первые результаты по экономному решению указанной системы с симметрической тёплицевой матрицей A были получены Левинсоном [3], который указал рекуррентную процедуру для ее решения, требующую выполнения $O(r^2)$ а. о.

Рассмотрим теперь важный частный случай: прогнозирование квазистационарного процесса $x = x(n)$ на один шаг вперёд ($N = 1$) по r предыдущим значениям $x(n-1), \ldots, x(n-r)$ (см. раздел 3 в [4]). В этом случае согласно теореме 3.1 из [4] верхняя (нулевая) строка матрицы A системы $Aa = b$ имеет вид $R_x(0), R_x(1), \ldots, R_x(r-1)$, а вектор $b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ имеет координаты $b_s = R_x(s+1)$ ($s = 0, \ldots, r-1$). Поэтому для решения системы $Aa = b$ можно применить способ Дурбина ([10]), в два раза сократив объём вычислений по сравнению с методом Левинсона. При решении системы уравнений в этом случае требуется выполнить $r^2 + O(r)$ а. о. Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 2.1. *Если значения $R_x(m)$ $(m = 0, 1, \ldots, r)$ известны, то параметры $a_0, \ldots, a_{r-1}$ находятся с помощью следующей процедуры:*

$$\begin{aligned}
p_0 &= R_x(0),\\
q_1 &= -\frac{R_x(1)}{R_x(0)},\\
q_\nu &= -\Big[R_x(\nu) + \sum_{j=1}^{\nu-1} x_j^{(\nu-1)} R_x(\nu - j)\Big]/p_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \ldots, r),\\
x_\nu^{(\nu)} &= q_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, r,\\
x_j^{(\nu)} &= x_j^{(\nu-1)} + q_\nu x_{\nu-j}^{(\nu-1)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \nu - 1,\\
p_\nu &= (1 - q_\nu^2) p_{\nu-1}, \quad \nu = 1, \ldots, r,\\
a_j &= -x_{j+1}^{(r)}, \quad j = 0, \ldots, r-1,
\end{aligned}$$

которая требует выполнения $r^2 + O(r)$ а. о.

Замечание 2.1. При дополнительных предположениях на функцию $R_x(m)$ результаты работ [11], [12], [13] позволяют решить эту систему за $O(r \log_2^2 r)$ а. о., а результаты работ [5], [6], [7] позволяют это сделать за $O(r \log_2 r)$ а. о.

2.2 Метод быстрого прогнозирования, основанный на алгебраической структуре пространства тёплицевых матриц

Для заданного натурального числа N обозначим через

$$x_N^{(r)}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{r-1} a_k x(n - N - k) \tag{1}$$

значение прогнозирования процесса $x(n)$ на N шагов вперёд по r предыдущим значениям $x(n - N), x(n - N - 1), \ldots, x(n - N - r + 1)$, введённое в разделе 3 работы [4]. Как следует из теоремы 3.1 ([4], раздел 3), величины $a_0, \ldots, a_{r-1}$ координатами вектора $a = (a_0, \ldots, a_{r-1})$, который удовлетворяет уравнению (1) в секции 3 из [4]. При этом в силу (2) ([4], раздел 3) верхняя (нулевая) строка $a_{00}, a_{0,1}, \ldots, a_{0,r-1}$ матрицы $A = (a_{\nu j})$ из системы $Ax = b$ имеет вид

$$a_{0j} = R_x(j), \quad j = 0, \ldots, r-1,$$

а в силу теоремы 3.1 вектор $b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ имеет вид

$$b_\nu = R_x(\nu + N), \quad \nu = 0, \ldots, r-1.$$

Обозначение 2.1. Для заданного натурального числа r обозначим через $f(r)$ наименьшее число арифметических операций, которое требуется для вычисления преобразования Фурье Fx, введённого в п. 1.1 секции 1, от любого r-мерного вектора x, то есть преобразование Фурье от любого r-мерного вектора x можно вычислить, выполнив $f(r)$ а. о., и существует такой r-мерный вектор, преобразование Фурье которого нельзя вычислить, выполнив менее, чем $f(r)$ а. о.

Лемма 2.1. *Для любого r-мерного вектора x, преобразование, обратное к преобразованию Фурье $y = F^{-1}$, введённое в п.* 1.1, *находится не более, чем за $f(r) + r$ а. о.*

Доказательство дано в [14] (лемма 2, гл. 2, § 3).

Лемма 2.2. *Для произвольного натурального числа r справедливо неравенство $f(r) < Cr \log_2 r$, где C — константа, не зависящая от r.*

Доказательство дано в [14].

Далее будет сформулирована и доказана теорема, которая позволяет для широкого класса квазистационарных процессов осуществить быстрое прогнозирование на основе связи с алгебраической структурой пространства тёплицевых матриц (раздел 1).

Теорема 2.2. *Предположим, что $A = (a_{\nu j})$ — невырождённая тёплицевая матрица порядка r $(\nu, j = 0, 1, \ldots, r-1)$, такая что*

$$a_{1,0} + a_{0,r-1} = a_{2,0} + a_{0,r-2} = \ldots = a_{r-1,0} + a_{0,1}, \tag{2}$$

$b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ — заданный r-мерный вектор, $x = (x_0, \ldots, x_{r-1})$ — r-мерный вектор, являющийся решением линейной системы уравнений $Ax = b$. Тогда вектор x можно найти, выполнив не более, чем $4f(r)+13r+2$ а. о.

Следствие 2.1. Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.2. Тогда решение x системы уравнений $Ax = b$ можно найти, выполнив менее, чем $4Cr \log_2 r + 13r + 2$ а. о., где C — константа, введённая в лемме 2.2.

Замечание 2.2. Теорема 2.2 в несколько более слабом виде впервые приведена в [6] и [7] (теорема 4, гл. 2). В этих работах число а. о. не превосходит величины $7f(r) + 14r + 2$. Главный член в оценке теоремы 2.2 был указан в [15] без доказательства. Первое доказательство теоремы 2.2 было дано автором в [8] (теорема 5, § 3). Здесь это доказательство повторяется для того, чтобы вскрыть связь с алгебраической структурой пространства тёплицевых матриц. Ниже будет показано, что условие (2) теоремы 2.2 выполняется в случае прогнозирования кусочно-постоянно коррелированных процессов, введённых в секции 2.

$\triangleright$ **Доказательство теоремы 2.2.** Разобьём весь процесс решения системы $Ax = b$ на 14 шагов.

Шаг 1. С помощью леммы 1.1 и (2) представим матрицу A в виде суммы двух матриц $A = A' + A''$, где A' — матрица порядка r, все элементы которой равны $k_0 = \frac{1}{2}(a_{01} + a_{r-1,0})$, а $A = (a''_{\nu j})$ — косоциркулянтная матрица порядка r, у которой нулевая строка $(a''_{00}, \ldots, a''_{0,r-1})$ имеет вид $a''_{0j} = \frac{1}{2}(a_{0j} - a_{r-1,0})$ при $j = 1, \ldots, r-1$, $a''_{00} = a_{00} - k_0$. Перейдём от системы уравнений $Ax = b$ к системе уравнений

$$A''x = be\sum_{j=0}^{r-1} x_j, \tag{3}$$

где e — r-мерный вектор, все координаты которого равны 1. Очевидно, переход от системы $Ax = b$ к системе (3) требует выполнения не более, чем $2r + 1$ а. о.

Шаг 2. Применяя к матрице A'' теорему 1.1 и лемму 1.2 (раздел 1), в силу (3) получим следующую систему уравнений

$$x = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi R\big(b - k_0 e\sum_{j=0}^{r-1} x_j\big), \tag{4}$$

где R — матрица, введённая в лемме 1.2 (раздел 1), Λ'' — диагональная матрица с диагональными числами $l''_0, \ldots, l''_{r-1}$ такими, что вектор $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{r-1})$ имеет вид $l'' = \mathscr{L}Fa'$, где $a' = (a'_0, \ldots, a'_{r-1})$ — вектор с координатами $a' = a''_{00}, a'_k = -a'_{0,r-k}$, $(k \neq 0)$, Φ, Φ^{-1}, $\mathscr{L}$ — матрицы, введённые в п. 1.2.

В силу леммы 1.2 матрица Λ'' находится за $f(r) + r$ а. о.

Шаг 3. Проверяем, имеется ли среди диагональных элементов $l''_0, \ldots, l''_{r-1}$ матрицы Λ'' нуль, и если такой имеется, то зафиксируем его (согласно доказательству теоремы 3, гл. 2 из [7] в матрице Λ'' не может быть более одного нулевого диагонального элемента, так как это противоречит невырожденности матрицы A). Если среди чисел $l''_0, \ldots, l''_{r-1}$ нет нулей, то переходим к шагу 4, а если есть нуль, то фиксируем его и переходим к шагу 10.

Шаг 4. Вычисляем вектор $\tilde{b} = (\tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_{r-1}) = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi Rb$. Согласно лемме 1.1 для этого потребуется выполнить $2f(r) + 4r$ а. о.

Шаг 5. Вычисляем вектор $\tilde{e} = (\tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_{r-1}) = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi Re$. Так как вектор ΦRe можно вычислить заранее и поэтому считать известным, то для нахождения $\tilde{e}$ достаточно выполнить $f(r) + 2$ а. о.

Шаг 6. Выполнив $r - 1$ а. о., найдём число $\tilde{b}^*_0 = \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{b}_j$.

Шаг 7. Выполнив r а. о. найдём число $\tilde{e}_0^* = \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{e}_j$.

Шаг 8. Складывая все уравнения системы (4), с помощью двух а. о. получаем

$$x_0^* = \sum_{j=0}^{r-1} x_j = \tilde{b}^*/(1 + \tilde{e}_0^*)$$

(из невырожденности A следует, что $1 + \tilde{e}_0^* \neq 0$).

Шаг 9. Выполнив $2r$ а. о., из системы (4) находим координаты x_j ($j = 0, \dots, r-1$) вектора x:

$$x_j = \tilde{b}_j - k_0 x_0^*.$$

Объединяя все а. о., выполненные на шагах 1–9, получим, что если среди чисел $l_0'', \dots, l_{r-1}''$ нет нуля (см. конец шага 3), то для нахождения вектора x требуется выполнить не более, чем $4f(r) + 13r + 2$ а. о.

Шаг 10. Предположим теперь, что $l_\nu'' = 0$. Согласно шагу 1 система $Ax = b$ эквивалентна системе $A'x + A''x = b$, и применяя к обеим её частям преобразование Фурье F, в силу теоремы 1.1 получим следующую систему уравнений относительно вектора $x^* = Fx$:

$$\Lambda' x^* + \mathscr{L}^{-1} \Lambda'' \mathscr{L} x^* = b^*, \tag{5}$$

где $x^* = (x_0^*, \dots, x_{r-1}^*) = Fx$, $b^* = (b_0^*, \dots, b_{r-1}^*) = Fb$, Λ' — матрица порядка r, у которой элемент, стоящий в левом верхнем углу, равен rk_0, а остальные элементы — нули, Λ'' — матрица, введённая на шаге 2. Далее, умножая обе части системы (5) на матрицу $\mathscr{L}$, получим эквивалентную систему

$$\mathscr{L} \Lambda' x^* + \Lambda'' \mathscr{L} x^* = \mathscr{L} b^*. \tag{6}$$

Покажем, что в системе (6) вектор $\mathscr{L} b^*$ и матрица $\mathscr{L}\Lambda$ находятся за $f(r) + 2r + 1$ а. о.

а) В силу леммы 1.2 $\mathscr{L} b^* = \mathscr{L} F b = FRb$. Поэтому вектор $\mathscr{L} b^*$ находится за $f(r) + r$ а. о.

б) Из определения матрицы Λ' следует, что матрица $\mathscr{L}\Lambda'$ имеет следующий вид: её левый столбец получается из левого столбца матрицы $\mathscr{L}$ умножением на rk_0, а остальные элементы — нули, и в силу того, что матрица $\mathscr{L}$ — известна, матрица $\mathscr{L}\Lambda'$ находится за $r + 1$ а. о. Объединяя все а. о. в а) и б), убедимся в справедливости утверждения, сформулированного выше.

Шаг 11. Так как $l_\nu = 0$, то ν-я сверху строка матрицы $\Lambda'' \mathscr{L}$, входящей в систему (6), состоит из одних нулей (нумерация строк начинается с нуля), и поэтому из системы (6) за одну а. о. найдём координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{r-1}^*)$: $x_0^* = b_\nu'/\bar\beta_\nu$, где b_ν' есть ν-я координата вектора $\mathscr{L}b^* = x^* = (b_0', \ldots, b_{r-1}')$, вычисленного на шаге 10, $\bar\beta_\nu$ есть ν-я координата вектора $\bar\beta = (\bar\beta_0, \ldots, \bar\beta_{r-1})$, который совпадает с левым столбцом матрицы $\mathscr{L}\Lambda'$, также вычисленной на шаге 10.

Шаг 12. Зная координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{r-1}^*)$, из системы (6) за $3(r-1)$ а. о. найдём все координаты вектора $\bar x = (\bar x_0, \ldots, \bar x_{r-1}) = \mathscr{L}x^*$, кроме координаты $\bar x_\nu$:

$$\bar x_k = (b_k' - \bar\beta_k x_0^*)/l_\nu'', \quad k \neq \nu$$

(координаты b_k', $\bar\beta_k$ введены на шаге 10, а числа l_k'' — на шаге 2).

Шаг 13. Зная координаты $\bar x_k$ $(k \neq \nu)$ вектора $x = (\bar x_0, \ldots, \bar x_{r-1}) = \mathscr{L}x^*$ и координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{r-1}^*) =$, из равенства $x^* = \mathscr{L}^{-1}\bar x$ за $2r-1$ а. о. найдём координату $\bar x_\nu$ вектора $\bar x$:

$$\bar x_\nu = \bigl(x_0^* - \sum_{k\neq\nu} \mu_{0k}\bar x_k\bigr)/\mu_{0\nu},$$

где числа μ_{0k} $(k = 0, \ldots, r-1)$ взяты из замечания 1.3 (секция 1), а суммирование распространено на все k, кроме $k = \nu$.

Шаг 14. Зная все координаты вектора $\bar x = \mathscr{L}x^*$, вычисленные на шагах 12 и 13, за $f(r) + 2r$ а. о. определим вектор x. Для этого воспользуемся леммой 1.2, согласно которой $\bar x = \mathscr{L}Fx = FRx$. Поэтому $x = R^{-1}F^{-1}\bar x$, откуда и следует утверждение, сформулированное в начале этого шага.

Объединяя все требуемые а. о. на шагах 1, 2, 10–14, получим, что если среди чисел $l_0'', \ldots, l_{r-1}''$ есть нуль, то для нахождения вектора x требуется выполнить $3f(r) + 12r - 1$ а. о., что меньше, чем в случае, при котором нет нулей среди чисел $l_0'', \ldots, l_{r-1}''$.

Теорема 2.2 доказана. $\triangleleft$

Теорема 2.3. *Предположим, что корреляционная функция $R_x(m)$ квазистационарного процесса $x = x(n)$ удовлетворяет равенству*

$$R_x(1) + R_x(r-1) = R_x(2) + R_x(r-2) = \ldots = R_x(r-1) + R_x(1), \qquad (7)$$

где r — натуральное число. Тогда значение $x_N^{(r)}(n)$ прогнозирования процесса $x(n)$ на N шагов вперёд по r предыдущим значениям, определённое равенством (1), можно найти, выполнив менее, чем $4f(r) + 15r + 1 < 4Cr\log_2 r + 15r + 1$ а. о., где C — константа, введённая в лемме 2.2.

Замечание 2.3. На рисунках 1–2 [7] показаны примеры корреляционных функций, удовлетворяющих равенствам (7). При этом ординатой является $R_x(l)$, а не $R(l)$ как в [7].

$\triangleright$ **Доказательство теоремы 2.3.** Согласно следствию 3.1 (раздел 3 из [4]) вектор $a = (a_0, \ldots, a_{r-1})$, координаты которого совпадают с числами a_0, ..., a_{r-1} в выражении (1) для $x_N^{(r)}(n)$, удовлетворяет уравнению $Aa = b$, где $A = (a_{\nu j})$ — симметрическая тёплицева матрица, у которой верхняя строка имеет вид $a_{0j} = R_x(j)$ $(j = 0, \ldots, r-1)$, а вектор $b = (b_1, \ldots, b_{r-1})$ имеет координаты $b_\nu = R_x(\nu + N)$. Поэтому, если функция $R_x(m)$ удовлетворяет равенствам (7), то элементы $a_{\nu j}$ матрицы $A = (a_{\nu j})$ удовлетворяют равенствам (2). Теперь утверждение теоремы 2.3 следует из теоремы 2.2, следствия 2.1 и равенства (1). Теорема 2.3 доказана. $\triangleleft$

Далее применим теорему 2.3 для быстрого прогнозирования кусочно–постоянно коррелированных квазистационарных процессов, введённых в разделе 2 работы [4].

Теорема 2.4. *Пусть N, r, p — фиксированные натуральные числа, $x = x(n)$ — кусочно-постоянно коррелированный по модулю p квазистационарный процесс (определение 2.1, раздел 2 работы* [4]*). Тогда, если $r \leqslant p$, то значение прогнозирования $x_N^{(r)}(n)$, задаваемое равенством* [1]*, можно найти, выполнив менее, чем*

$$4f(r) + 15r + 1 < 4Cr\log_2 r + 15r + 1 \text{ \textit{a o.}}$$

где C — константа, введённая в лемме 2.2.

$\triangleright$ **Доказательство.** Утверждение теоремы 2.4 следует из теоремы 2.3, если будет доказано, что при $r \leqslant p$ корреляционная функция $R_x(m)$ процесса x удовлетворяет равенствам (7). Но этот факт следует из следствия 2.1 (раздел 2, работы [4]), так как согласно этой лемме при $r \leqslant p$ функция $R_x(m)$ — линейная по m в области $0 \leqslant m \leqslant r \leqslant p$.

Теорема 2.4 доказана. $\triangleleft$

§ 3. Быстрое прогнозирования кусочно-постоянных квазистационарных процессов

Пусть p — натуральное число. Согласно примеру 1.2 (секция 1, работы [4]) квазистационарный процесс $x = x(n)$ является кусочно-постоянным по модулю p тогда и только тогда, когда для любых двух целых чисел n_1, n_2, удовлетворяющих равенству $\left[\dfrac{n_1}{p}\right] = \left[\dfrac{n_2}{p}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа, стоящего внутри них), справедливо равенство $x(n_1) = x(n_2)$. Из этого определения и определения 2.1 (раздел 2 работы [4]) следует, что кусочно-постоянный по модулю \$ \$ квазистационарный процесс является кусочно-постоянно коррелированным по модулю p квазистационарным процессом. Поэтому в силу теоремы 2.4, если $r \leqslant p$, то прогнозирование такого процесса на N шагов вперёд по r предыдущим значениям (то есть вычисление $x_N^{(r)}(n)$) можно найти, выполнив не более чем $4Cr\log_2 r + 15r + 1$ а. о., где C — константа, введённая в лемме 2.2. Далее, мы в случае $r \leqslant p$, r — чётное число, $N = pl + 1$ ($l \geqslant 0$, l — целое число) усилим этот результат. А именно, будет сформулирована теорема 3.1, утверждающая, что для вычисления $x_{pl+1}^{(r)}(pn)$ достаточно выполнить $12r+6$ а. о., и будет описана соответствующая вычислительная процедура.

Теорема 3.1. *Пусть $x = x(n)$ — кусочно-постоянный квазистационарный процесс, $R_x(m)$ — корреляционная функция процесса x, $r \leqslant p$, r — чётное число, $N = pl + 1$, $l \geqslant 0$, l — целое число. Тогда величина $x_N^{(r)}(pn)$ находится с помощью следующей вычислительной процедуры. Полагаем $b_1 = R_x(pl+1)$; $h = R_x(0) - R_x(1)$; $h_1 = R_x(pl+1) - R_x(pl+2)$; $k = 0, \dots, r-1$; i — мнимая единица;*

$$\delta_k = -\frac{2}{\exp\left(-\dfrac{2\pi ik + \pi i}{r}\right) - 1};$$

$$\delta'_k = -\frac{r-1}{\exp\left(-\dfrac{2\pi ik + \pi i}{r}\right) - 1} - \frac{1 + \exp\left(-\dfrac{2\pi ik + \pi i}{r}\right)}{\left(\exp\left(-\dfrac{2\pi ik + \pi i}{r}\right) - 1\right)^2};$$

$$\gamma_k = -\frac{2}{\left(\exp\dfrac{\pi i(2k+1)}{r} - 1\right) r};$$

$$\gamma'_k = -\frac{4}{r\left(\exp\left(-\dfrac{\pi i(2k+1)}{r}\right) - 1\right)\left(\exp\dfrac{\pi i(2k+1)}{r} - 1\right)};$$

$$k_0 = 0{,}5\big(R_x(0) - h + R_x(r-1)\big); \quad R''_0 = R_x(0) - k_0;$$

$$l''_k = \delta_k R''_0 + \delta'_k h; \quad \bar{b}_k = \delta_k b_1 + \delta'_k h_1;$$

$$\tilde{b}_0 = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\gamma_k \bar{b}_k}{l''_k}; \quad \tilde{\beta}_0 = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\gamma'_k k_0}{l''_k}.$$

Тогда $x_N^{(r)}(pn) = \dfrac{\tilde{b}_0 x(pn - pl - 1)}{1 + \tilde{\beta}_0}$.

Следствие 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1 для вычисления величин $x_N^{(r)}(pn)$ достаточно осуществить не более чем $12r + 6$ а. о.

Доказательство теоремы 3.1 полностью повторяет доказательство теоремы 3 из [7] (глава 3, § 2), которая касается кусочно-постоянных случайных вещественных функций $x(n)$ целого аргумента n, удовлетворяющих условию $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$. В основе этого доказательства лежит теорема 5 из [7] (глава 2, §§ 2, 4).

Далее будет сформулирована теорема 3.2, которая совпадает с указанной выше теоремой 5 из [7] (глава 2, § 2).

Теорема 3.2. *Предположим, что в системе* $Ax = b$, $A = (a_{\nu j})$ $(\nu, j = 0, \ldots, r-1)$ *— тёплицева матрица порядка* $r \geqslant 3$ *такая, что*

$$a_{01} - a_{02} = a_{02} - a_{03} = \ldots = a_{0,r-2} - a_{0,r-1} = a_{10} - a_{20} = a_{20} - a_{30} = \ldots = a_{r-2,0} - a_{r-1,0},$$

а вектор $b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ *— такой, что*

$$b_1 - b_2 = b_2 - b_3 = \ldots = b_{r-2} - b_{r-1}.$$

Тогда для нахождения суммы координат вектора $x = (x_0, \ldots, x_{r-1})$*, являющегося решением системы уравнений* $Ax = b$*, достаточно выполнить не более, чем* $13r + 10$ *а. о.*

Доказательство теоремы 3.2 дано в [7] (глава 2, § 4).

Вывод теоремы 3.1 из теоремы 3.2 основан на равенстве (1), определении кусочно-постоянного процесса в примере 1.2 из [7] и следствии 2.1, из которых вытекает, что результат прогнозирования $x_N^{(r)}(pn) = x(pn - pl - 1)\sum_{k=0}^{r-1} a_k$. Поэтому задача прогнозирования сводится к нахождению суммы координат вектора $a = (a_0, \ldots, a_{r-1})$, являющего решением системы уравнений $Ax = b$, для которой справедливы все условия теоремы 3.1. Таким образом, доказательство теоремы 3.2 позволяет доказать теорему 3.1.

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров. Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР, сер. матем. 5 (1941), 3–14.

[2] N. Wiener. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications // The Technology Pres of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge; John Wiley and Sons, New York; Chapman and Hall, London, 1949.

[3] N. Levinson. The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 25 (1947), 261–278.

[4] А. Д. Пустыльников. Квазистационарные процессы и их прогнозирование // Препринт ИПМ, № 58, 2011.

[5] А. Д. Пустыльников. Об алгебраической структуре пространств теплицевых и ганкелевых матриц // ДАН СССР, 250 (1980), 556–559.

[6] Л. Д. Пустыльников. О быстрых вычислениях в некоторых задачах линейной алгебры, связанных с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // УМН 35:5 (1980), 241–242.

[7] Л. Д. Пустыльников. Теплицевы и ганкелевы матрицы и их применения // УМН, 39:4 (1984), 53–84.

[8] Л. Д. Пустыльников и Т. В. Локоть. Параллельные вычисления с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // Кибернетика и вычислительная техника, том 4 (1988), 96–123.

[9] Л. Д. Пустыльников и Т. В. Локоть. Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами // Препринт ИПМ, № 60, 2010.

[10] J. Durbin. The fitting of time series models // Rev. Inst. Int. Statist.—1960.—V. 28, № 3.—P. 23–243.

[11] В. Б. Грегг, Д. Д. Уорнер. О быстром решении систем линейных уравнений с положительно определённой ганкелевой матрицей // Численные методы линейной алгебры.—М.: МГУ, 1982. С. 10–15.

[12] R. R. Bitmead, B. D. O. Anderson. Asymptotically fast solution of Toeplitz and related systems of linear Alg. and Appl.—1980.—V. 34—P. 103–116.

[13] D. Y. Y. Yun, F. G. Gustavson. Fast computation of the rational Hermite interpolant and solving Toeplitz systems of equations via the extended Euclidean algorithm // Lect. Notes Comput. Sci.—1979.— V. 72.—P. 58–64.

[14] F. P. Preparata, D. V. Sarwate. Computational complexity of Fourier transforms over finite fields.—Math. of Comp., 1977, 31:139, p. 740–751.

[15] К. И. Бабенко. О теплицевых и ганкелевых матрицах // УМН.—1986.—т. 41, вып. 1.—С. 171–177.