



Подлазов А.В.

Сравнение двумерных  
изотропных консервативных  
самоорганизованно-  
критических моделей типа  
кучи песка

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Подлазов А.В. Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 43. 12 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-43>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Подлазов**

**Сравнение двумерных изотропных  
консервативных самоорганизованно-  
критических моделей типа  
кучи песка**

**Москва — 2012**

А.В. Подлазов

## Сравнение двумерных изотропных консервативных самоорганизованно-критических моделей типа кучи песка

Рассматриваются модели BTW и Manna – двумерные самоорганизованно-критические модели типа кучи песка с изотропными консервативными правилами. Несмотря на сходство правил и идентичность их симметрий, модели характеризуются различными наборами критических показателей. Единственным нетривиальным совпадением является равенство показателей зависимости между площадью и периметром области лавин. В работе значение этого показателя определяется из условия масштабной инвариантности стохастического дифференциального уравнения, описывающего рост области лавины для обеих моделей. Установлено, что для данного процесса направления вовне и внутрь равноценны для модели Manna и неравноценны для модели BTW. Тем самым обнаружены различия в симметрии, обуславливающие разные свойства моделей.

*Ключевые слова:* самоорганизованная критичность, масштабная инвариантность, степенные распределения, перенормировка, модели кучи песка, волны опрокидывания, симметрия, модель Manna, модель BTW

A.V. Podlazov

## Comparison of two-dimensional isotropic conservative SOC sandpile models

We study BTW and Manna models – 2D self-organized critical sandpile models with conservative isotropic rules. In spite of the similarity of the rules and the identity of their symmetries, these models have different set of critical indices. The equality of indices of the dependence between the area and the perimeter of avalanche is the only nontrivial coincidence. We determine this index from the condition of scale invariance of stochastic differential equation determining avalanche growth for both models. We find that for this process outside and inside directions are equivalent for Manna model but are not for BTW one. Thereby we reveal the symmetry difference separating properties of these models.

*Key words:* self-organized criticality, scale invariance, power laws, renormalization, sandpile models, waves of toppling, symmetry, Manna model, BTW model

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00786-а и 11-01-00887-а).

## Содержание

Введение.....	3
Уравнение роста границы .....	6
Пространственно-временная структура лавины.....	9
Выводы.....	12

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших типов сложного поведения является *масштабная инвариантность*, т.е. отсутствие у величин, описывающих происходящие в системе процессы, собственных характерных значений.

Статистическим выражением масштабно-инвариантных свойств служат степенные распределения вероятности с плотностью вида

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \quad (1)$$

область применимости которых ограничивается только конечностью размеров рассматриваемой системы и слагающих ее элементов.

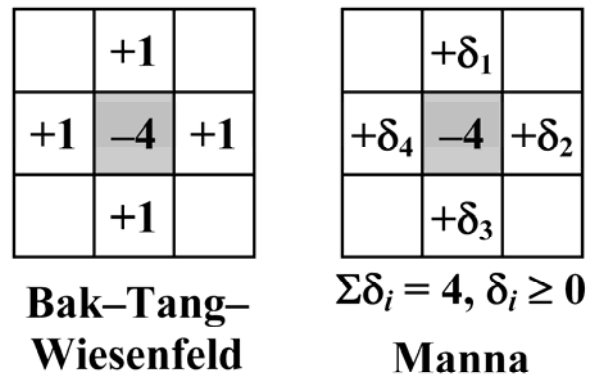
Механизм возникновения степенных распределений без тонкой подстройки параметров системы дает теория самоорганизованной критичности [1,2], базовыми для которой являются модели типа кучи песка. В настоящей работе рассматриваются две родственные модели этого типа – *модель BTW* [1] и *модель Manna* [3,4].

Правила обеих моделей формулируются на двумерной ортогональной решетке размера  $L \times L$ , в ячейках которой расположены неположительные целые числа, традиционно интерпретируемые как количество песчинок. Любая ячейка более чем с 3 песчинками, считается неустойчивыми и *опрокидывается*, раздавая 4 песчинки *соседкам* – ячейкам, имеющим с данной общую сторону (если ячейка находится на краю, то песчинки, передаваемые за него, теряются).

Единственное различие в правилах моделей заключается в том, что в модели BTW каждая соседка опрокинувшейся ячейки получает ровно 1 песчинку, а в модели Manna каждая переданная песчинка случайно выбирает, в какую из соседних ячеек попасть (см. рис. 1).

Шаг моделирования начинается с добавления песчинки в случайно выбранную ячейку. Если в результате ячейка опрокидывается, то песчинки, переданные ее соседкам, могут нарушить их устойчивость, вызывая *лаvinу* опрокидываний, продолжающуюся до тех пор, пока все ячейки не обретут устойчивость. После этого шаг повторяется.

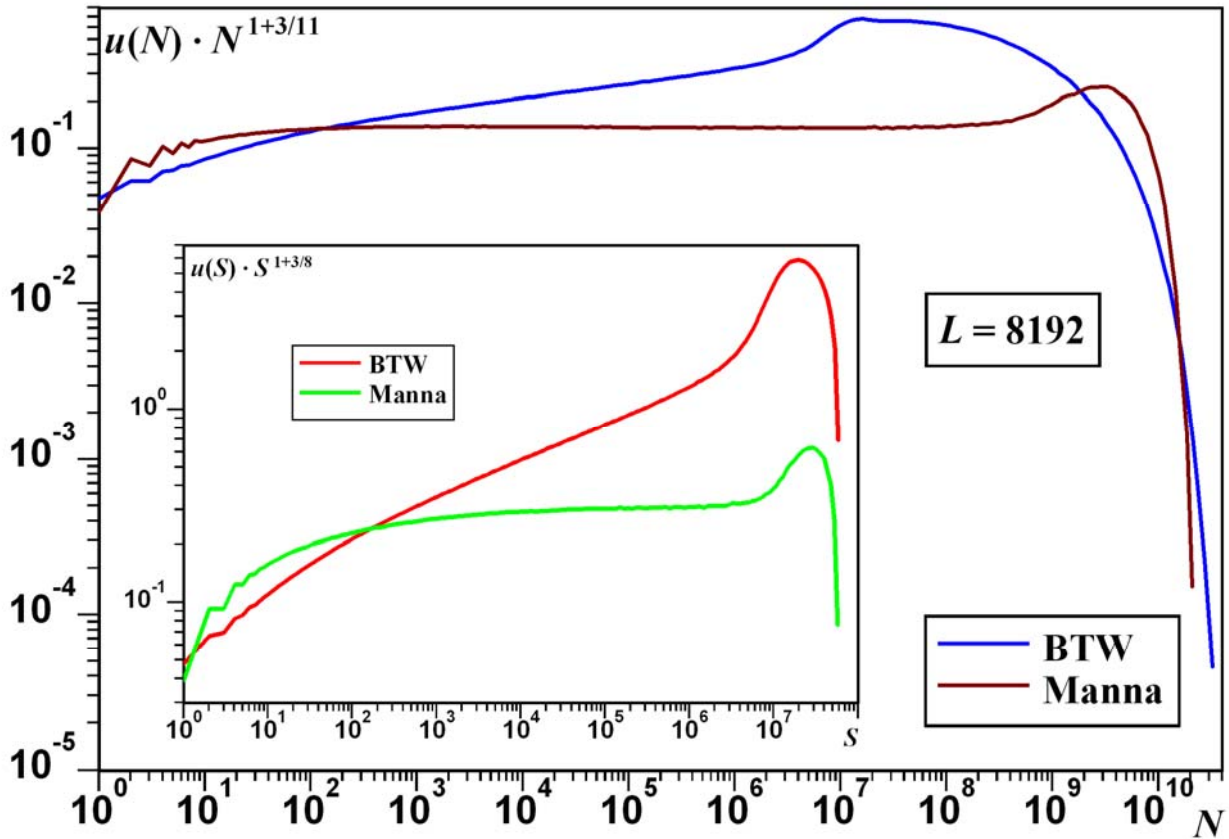
Основными характеристиками лавины являются ее *площадь S* (число ячеек хотя бы раз потерявших устойчивость), *размер N* (число опрокидываний, включая повторные опрокидывания од-



**Рис. 1. Правила опрокидывания неустойчивой ячейки (показана серым)**

Порог устойчивости в обеих моделях одинаков, но раздача песчинок при опрокидывании в модели BTW происходит детерминированным образом, а в модели Manna – случайным.

Правила модели BTW изотропны строго, а модели Manna – лишь в среднем.



**Рис. 2.** Распределение лавин по размеру и площади для моделей BTW и Manna

После домножения плотности  $u(x)$  на  $x^{1+\alpha}$  степенной график в промежуточной асимптотике становится горизонтальным. Для домножения использованы известные показатели для модели Manna.

Такое преобразование делает максимально наглядной разницу между степенными законами с близкими, но различными показателями.

них и тех же ячеек) и *периметр*  $C$  (число ячеек, получивших песчинки, но сохранивших устойчивость, плюс число песчинок, упавших за край). Независимо от начального состояния системы после многих шагов она приходит в критическое состояние, где характеристики лавины подчиняются распределениям вида (1).

Несмотря на то, что правила моделей BTW и Manna очень похожи и обладают одинаковыми симметриями, показатели распределений всех указанных характеристик различны. Рис. 2 позволяет сравнить распределения лавин по размеру и площади. Для модели Manna известны точные значения показателей  $\alpha_N = 3/11$  и  $\alpha_S = 3/8$  [4]. И они превосходят соответствующие показатели для модели BTW, которые, как можно видеть из рис. 3, одинаковы (предположительно, для этой модели  $\alpha_N = \alpha_S = 5/24$ ).

Показатели зависимостей, связывающих между собой разные характеристики лавины, тоже различаются. Есть лишь одно исключение, показанное на рис. 4. Связь периметра лавины с ее площадью, оказывается одной и той же для обеих моделей:

$$C \sim S^{5/8}. \tag{2}$$

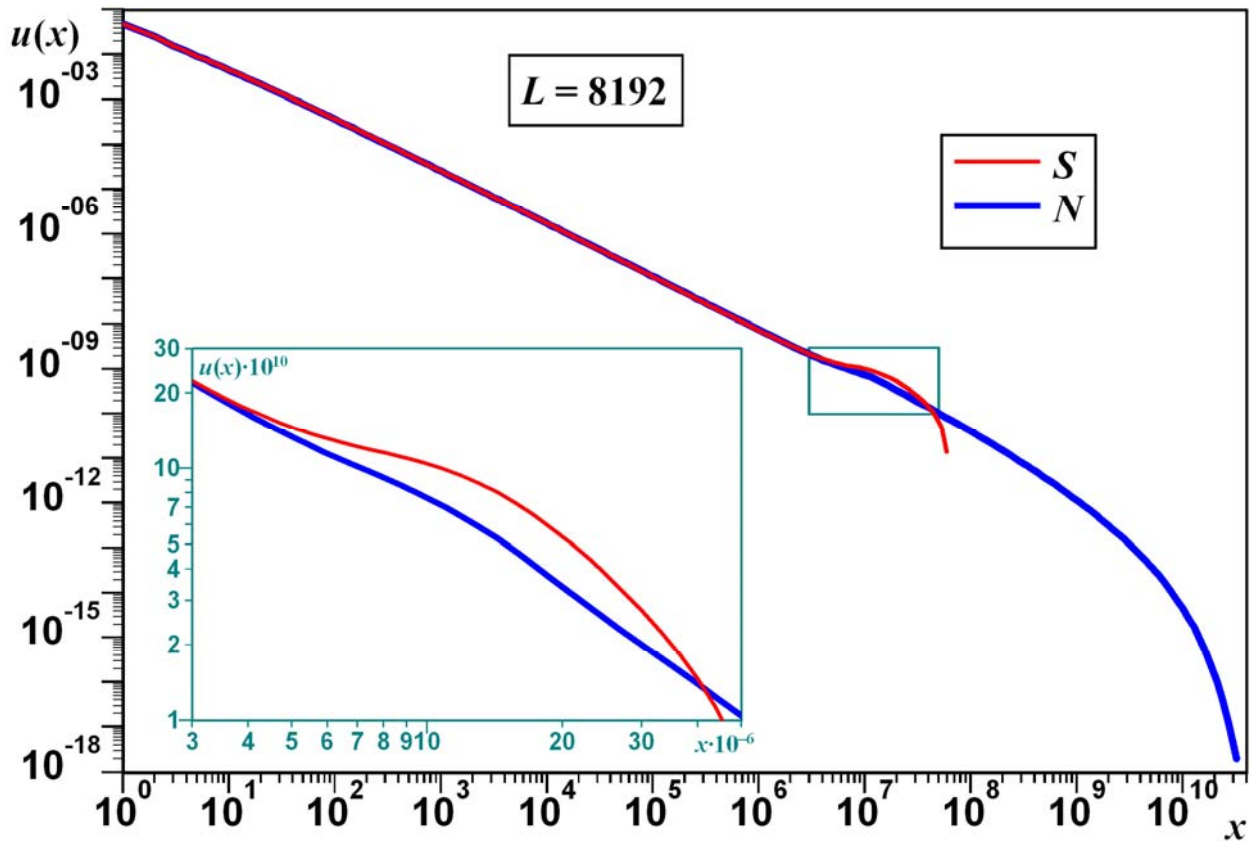


Рис. 3. Сравнение распределений лавин по размеру и площади в модели BTW

Графики плотности для обеих характеристик совпадают почти всюду за исключением самых крупных событий.

На врезке увеличен обведенный рамочкой фрагмент рисунка, где начинается расхождение графиков.

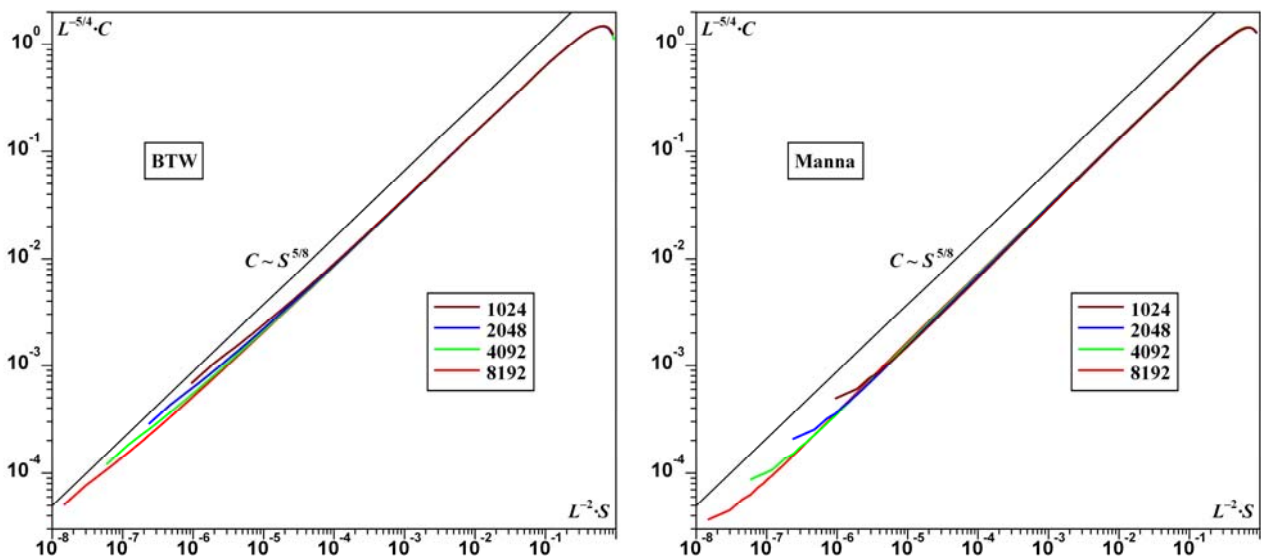


Рис. 4. Средний периметр лавины данной площади (для различных  $L$ )

После нормировки площади на  $L^2$  и периметра на  $L^{5/4}$  графики, полученные при разных размерах решетки, совпадают для достаточно больших  $S$ .

Отношение нормировочных показателей  $\nu_C = 5/4$  и  $\nu_S = 2$  дает показатель зависимости (2).

Следует отметить, что формула (2) может быть строго обоснована для модели ВТW [5]. Однако используемый для этого инструментарий не проливает света на ее природу, а кроме того, неприменим к модели Мanna.

С другой стороны, при решении Мanna на физическом уровне строгости формулу (2) также удастся обосновать [4]. Однако такой метод решения не работает в случае модели ВТW, точные значения большинства показателей для которой до сих пор неизвестны.

Разумным представляется предположение, что эта формула имеет более высокий уровень общности, чем конкретные законы для каждой из рассматриваемых моделей. Поэтому ее вывод не должен быть чувствителен к различиям в правилах, опираясь только на их сходства.

## УРАВНЕНИЕ РОСТА ГРАНИЦЫ

Назовем ячейку, затронутую лавиной, *объемной*, если все ее соседки хотя бы раз опрокинулись в ходе лавины, или *границной*, если не все. После завершения лавины объемные ячейки образуют ее область, граничные – периметр. Геометрические характеристики лавины не зависят от порядка обработки неустойчивых ячеек. Для удобства описания роста границы ее ячейки начинаем обрабатывать только тогда, когда все внутренние ячейки обретают устойчивость. Шаг времени свяжем с обработкой граничных ячеек.

Будем характеризовать положение границы в момент времени  $t$  в полярных координатах направлением  $\varphi$  и радиусом  $r(\varphi, t)$ , отсчитываемыми от точки вброса песчинки, инициировавшей лавину. Такое описание, не позволяющее учитывать изгибы границы, может оказаться неполным. Однако дальнейшее совпадение результатов выкладок и эксперимента позволяет считать его удовлетворительным.

Критическое состояние – масштабно-инвариантно [1]. Вследствие этого средний радиус области лавины зависит от времени степенным образом:

$$r(t) = \langle r(\varphi, t) \rangle \sim t^z, \quad (3)$$

где  $z$  – *динамический показатель*.

Как следует из формулы (2), длина границы возрастает быстрее ее радиуса, набираясь преимущественно на ее выступах. Поэтому интерес представляет отклонение радиуса по данному направлению от среднего значения

$$h(\varphi, t) = r(\varphi, t) - r(t).$$

Мерой неровности границы служит ее *ширина*

$$w(t) = \sqrt{\langle h^2(\varphi, t) \rangle} \sim r^\chi(t), \quad (4)$$

где  $\chi$  – *показатель шероховатости*.

Изменение положения границы обусловлено двумя основными процессами.

Первый – боковое распространение ее выступов, второй – их возникновение за счет вовлечения в лавину новых ячеек с высоким заполнением.

Таким образом, динамику границы можно описать стохастическим уравнением переноса следующего вида:

$$\frac{\partial h(\varphi, t)}{\partial t} = v \cdot \frac{1}{r(t)} \left| \frac{\partial h(\varphi, t)}{\partial \varphi} \right| + \eta, \quad (5)$$

где  $v$  – скорость продвижения склонов выступов, происходящего в обоих тангенциальных направлениях, а  $\eta$  – дельта-коррелированный шум, отвечающий за их рост в радиальном.

Прежде чем конкретизировать вид этих величин, заметим, что масштабно-инвариантная зависимости вида (3) и (4) предполагают, что все члены уравнения (5) при пространственном огрублении должны оставаться одного и того же порядка величины или становиться пренебрежимо малы. Иными словами, при одновременной перенормировке переменных

$$\begin{aligned} r &\rightarrow b \cdot r \\ t &\rightarrow b^z \cdot t, \\ h &\rightarrow b^x \cdot h \end{aligned} \quad (6)$$

вид уравнения (5) должен сохраняться неизменным за исключением, возможно, выпадения несущественных членов (таковы, например, все члены со старшими производными, которые можно формально добавить в правую часть уравнения для преодоления градиентной катастрофы). Поэтому при определении  $v$  и  $\eta$  мы будем ориентироваться лишь на те их компоненты, которые остаются существенными при пространственном огрублении.

Осреднение шума при огрублении должно проводиться вдоль границы, на которой он и действует. В силу ее фрактального характера, малые изменения  $\varphi$  влекут большие изменения  $h$ , т.е. длина элемента границы

$$\delta c = \sqrt{r^2 \delta \varphi^2 + \delta h^2} \approx \delta h.$$

Таким образом, можно приближенно считать, что координата  $h$  вполне характеризует положение границы, так что шум можно с приемлемой точностью представить в виде  $\eta(h, t)$  с корреляцией

$$\langle \eta(h, t) \cdot \eta(h', t') \rangle \sim \delta(h - h') \cdot \delta(t - t').$$

Соответственно, при перенормировке (6) шумовой член изменяется как

$$\eta \rightarrow b^{-(z+x)/2} \cdot \eta. \quad (7)$$

Тангенциальное продвижение склонов выступов является сильно коррелированным процессом, поскольку на склоне находятся ячейки, получившие до-



полнительные песчинки. Опрокидывание любой из них с высокой вероятностью приводит к опрокидыванию всех ячеек склона или значительной их части. Это означает, что скорость  $v$  пропорциональна высоте выступа  $\Delta h(\varphi, t)$ , изменяемой как изменение решения  $h(\varphi, t)$  на участке его монотонности. Таким образом,  $v$  является нелокально-определенной величиной, выразить которую через  $\varphi$ ,  $t$  и  $h(\varphi, t)$  невозможно. Тем не менее, для нее удастся определить правила перенормировки.

Протяженность участка монотонности зависит от выбранного пространственного разрешения. По мере огрубления высота выступов будет нарастать, приближаясь по порядку величины к ширине границы:

$$\Delta h(\varphi, t) \sim w(t), \quad (8)$$

которая и определяет, в конечном итоге, величину  $v$ . При этом меньшие скорости продвижения менее высоких выступов оказываются несущественными, поскольку крупные выступы, двигаясь быстрее мелких, догоняют и поглощают их.

С другой стороны,

$$\Delta h(\varphi, t) \approx aw(t) + h(\varphi, t), \quad (9)$$

где первое слагаемое призвано компенсировать отсчет  $h(\varphi, t)$  не от ближайшего локального минимума функции  $r(\varphi, t)$ , а от ее среднего значения  $r(t)$ .

Ширина границы  $w$  при пространственном огрублении изменяется так же, как и  $h$ , поэтому и асимптотическая оценка (8), и аппроксимация (9) приводят к одному и тому же преобразованию для скорости:

$$v \rightarrow b^x \cdot v. \quad (10)$$

После перенормировки (6), выполненной с учетом формул (7) и (10), уравнение (5) принимает вид

$$b^{\chi-z} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = b^{2\chi-1} \cdot v \frac{1}{r} \left| \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right| + b^{-(\chi+z)/2} \cdot \eta,$$

который должен быть эквивалентен исходному, что требует выполнения скейлинговых соотношений:

$$\chi - z = 2\chi - 1 = -(\chi + z)/2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3/4; \quad \chi = 1/4.$$

Таким образом,

$$w \sim r^{1/4}.$$

Обозначая большими буквами характеристики завершившейся лавины, получаем для нее

$$C \sim W \cdot R \sim R^{5/4},$$

что с учетом компактности области лавины  $S = R^2$  и дает формулу (2).

## ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ЛАВИНЫ

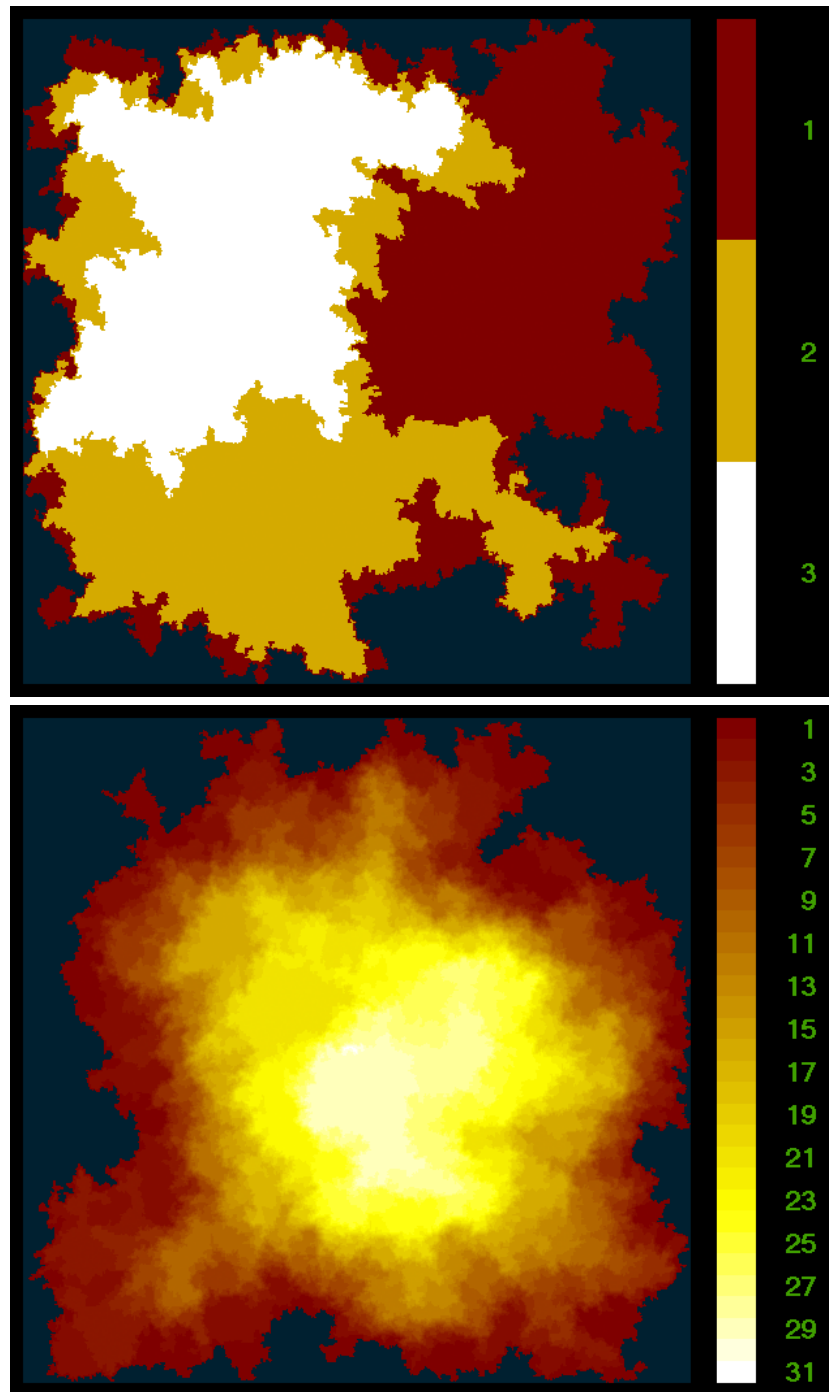
Побочным следствием анализа уравнения (5) стало определение показателя  $z = 3/4$ . Однако напрямую использовать этот результат затруднительно, поскольку нуждается в уточнении модельный смысл того времени, которое динамический показатель связывает с радиусом.

Для модели ВТW это время может быть определено явно посредством декомпозиции лавины. Запретим ячейке, в которую вброшена песчинка, инициировавшая лавину, опрокидываться до тех пор, пока в системе есть другие неустойчивые ячейки. Поскольку в этой модели ни одна опрокинувшаяся ячейка не может опрокинуться повторно до тех пор, пока не опрокинутся все ее соседки, каждое опрокидывание ячейки вброса порождает прокатывающуюся по системе *волну опрокидывания* [5]. В результате прохождения последовательности таких волн область лавины оказывается состоящей из вложенных *слоев опрокидывания*, в которых его кратность последовательно убывает из глубины наружу (см. рис. 5).

Если измерять время  $T$  числом волн опрокидывания, то, как видно из рис. 6,

$$T \sim S^{3/16} \sim R^{3/8},$$

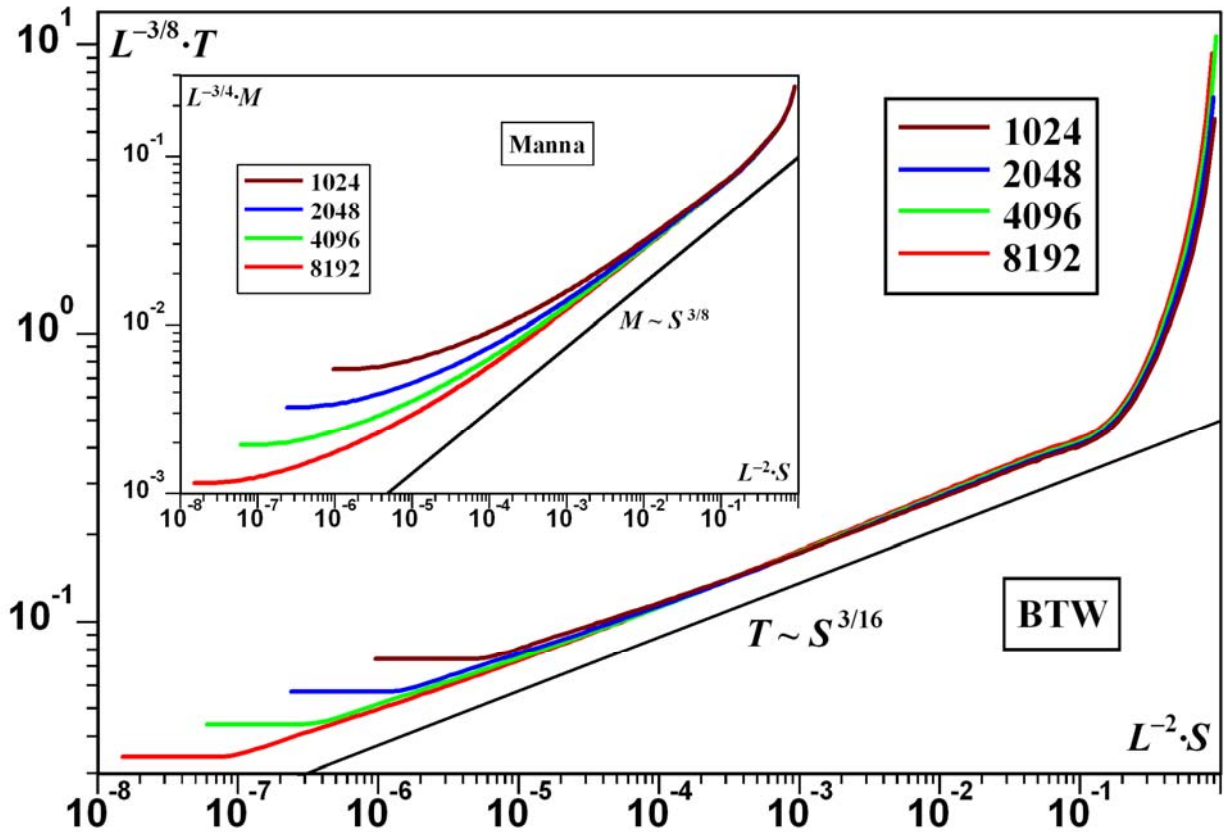
т.е. реальный динамический показатель вдвое меньше предсказанного.



**Рис. 5.** Слои опрокидывания для крупных лавин в модели ВТW (размер решетки  $L = 512$ )

Сверху – 3 волны,  $S = 196\,990$ ,  $N = 380\,107$ .

Снизу – 31 волна,  $S = 197\,014$ ,  $N = 2\,293\,496$ .



**Рис. 6. Связь времениподобных характеристик лавины с ее площадью**

Для модели BTW время уравнения может быть измерено явно как число волн опрокидывания. Для модели Manna аналогом времени является средняя кратность опрокидывания.

В модели Manna из-за случайной раздачи песчинок при опрокидывании ячейка может повторно опрокинуться, даже если не все ее соседки опрокинулись. Поэтому строгое определение волны опрокидывания невозможно. Точно так же невозможно и выделение четких слоев опрокидывания. Тем не менее, рассмотрение слоев и волн в качестве приближенного описания, соответственно, структуры области лавины и ее динамики оказывается продуктивным, позволяя точно вычислить все критические показатели этой модели [4]. При этом аналогом числа волн (мерой времени) служит средняя кратность опрокидывания ячеек

$$M = N/S.$$

Врезка к рис. 6 демонстрирует, что в промежуточной асимптотике

$$M \sim S^{3/8} \sim R^{3/4},$$

т.е. в данном случае расхождений с предсказанием теории не возникает.

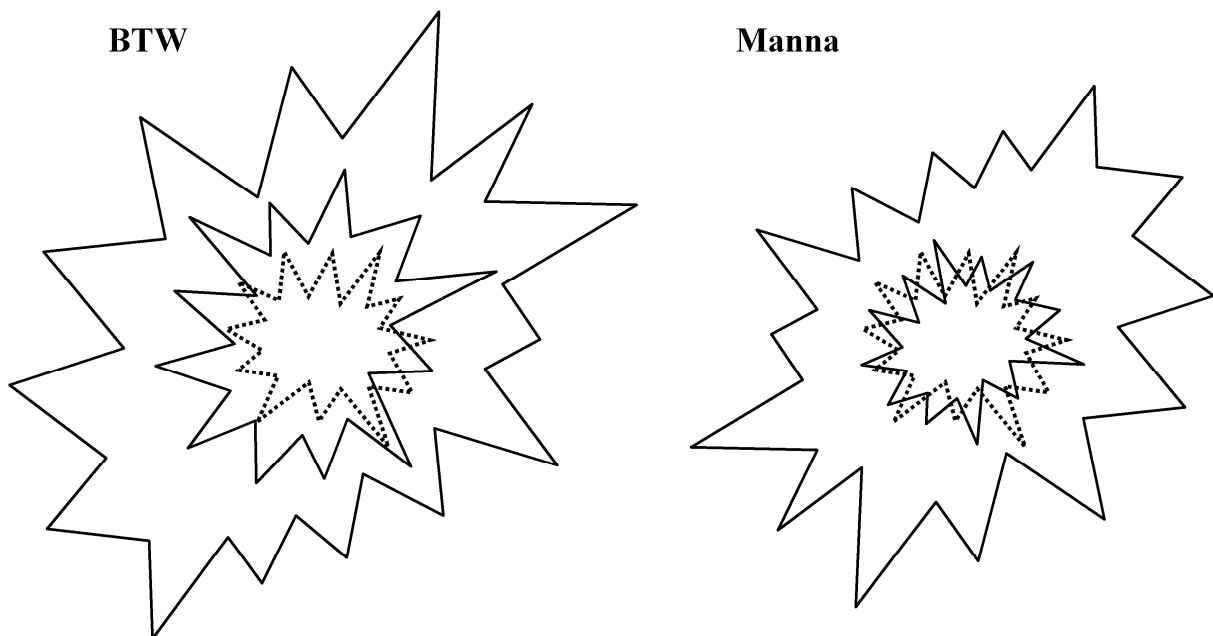
Представляется разумным, что выявленное различие в динамике роста области лавины при совпадении ее геометрии и является причиной расхождения свойств моделей. Чтобы обосновать это предположение, необходимо прояснить, какая же трактовка времени для модели BTW соответствует логике вывода уравнения (5).

В этой модели объемные ячейки слоя, сохраняют то состояние, которое имели до начала лавины, поскольку отдают своим соседкам ровно столько же песчинок, сколько получают от них. Все изменения имеют место лишь на границах слоев. Ячейки внешней границы каждого слоя теряют песчинки, а ячейки внутренней границы – их получают.

Оболочка из обеденных ячеек на внешней границе слоя представляют существенное препятствие для распространения следующих волн опрокидывания (50% вероятности того, что лавина выйдет за пределы первой волны, соответствует площадь последней примерно в 500 ячеек). Однако если эту оболочку всё же удастся прорвать, то далее опрокидывания с высокой вероятностью подхватываются уже оболочкой из обогащенных ячеек на внутренней границе следующего слоя, легко распространяясь не только вовне, но и вдоль границы. При этом возможен возврат песчинок на внешнюю границу предыдущего слоя и его расширение.

В модели Manna граница между слоями размыта и на ней нет сплошных оболочек из обеденных и обогащенных ячеек. Таким образом, граница слоев не представляет принципиального препятствия для волны опрокидывания (поэтому, кстати, среднее заполнение ячеек в модели Manna ниже, чем в модели BTW – примерно 2,056 против 2,125 в пределе  $L \rightarrow \infty$ ). Однако поскольку нет и никаких дополнительных преимуществ в распространении активности вдоль границы, предыдущий слой сохраняет свои размеры. Волна просто наращивает кратность опрокидывания внутри каждого пройденного слоя без смещения их границ.

Иными словами, при прохождении волны в модели Manna границы слоев смещаются лишь случайным образом, а в модели BTW они испытывают, кроме



**Рис. 7. Схематическое представление слоев опрокидывания**

Пунктиром показана граница единственного слоя после прохождения первой волны опрокидывания, сплошными линиями – границы между слоями после прохождения второй волны.

В модели BTW волна смещает границу предыдущего слоя, а в модели Manna просто добавляет к нему новый.

того, и систематический сдвиг, направленный вовне (см. рис. 7). Его наличие, в частности, означает, что новый слой прирастает не к той области лавины, которая образовалась в ходе прохождения предыдущих волн, а к несколько большей области. Однако единообразное рассмотрение динамики обеих моделей предполагает, что расширение области лавины происходит «от достигнутого». Для модели ВТW это может быть учтено посредством представления одной волны опрокидывания в виде набора виртуальных волн, не сдвигающих границы между слоями систематическим образом, а только приращивающих новые (виртуальные) слои. Именно количество таких виртуальных волн следует рассматривать в качестве времени  $t$ , фигурирующего в анализе.

Тем самым обнаруживается различие между моделями ВТW и Манна на уровне симметрий. Если в первой для движения границ есть выделенное направление (вовне области лавины), то во второй выделенного направления нет. Количественная разница между направленным и ненаправленным движениями состоит в том, что при первом смещение растет пропорционально времени, а при втором – пропорционально корню из него. Соответственно, число виртуальных волн возрастает как квадрат числа волн опрокидывания, чем и объясняется двукратное расхождение в величине динамического показателя для модели ВТW.

## ВЫВОДЫ

Модели ВТW и Манна имеют общий механизм развития границ слоев опрокидывания, не чувствительный к различию в правилах моделей. В основе этого механизма лежит тангенциальное распространение выступов границы со скоростью, пропорциональной их высоте, и ее стохастическое продвижение в радиальном направлении. Сочетание этих факторов приводит к значению показателя шероховатости  $\chi = 1/4$ , объясняющему единую для обеих моделей связь между площадью и периметром лавины.

Однако динамика моделей существенно различается. Если в модели Манна смещение границ слоев носит лишь случайный характер, то в модели ВТW оно имеет систематическую компоненту. Поскольку эта разница является разницей в симметриях, она естественным образом сказывается на всех критических показателях, так или иначе связанных с динамикой, что разводит большинство свойств этих моделей.

## Литература

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. V.38, N1, p.364-374.
2. Bak P. How nature works: the science of self-organized criticality. – Springer-Verlag. New York, Inc. 1996. – 205 p.
3. Manna S.S. Two-state model of self-organized criticality// L. Phys. A: Math. Gen. 1991. V.24, p.L363–L639.
4. Подлазов А.В. Двумерная самоорганизованно-критическая модель Манна. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012. Препринт №42. – 20 с. <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-42>
5. Ivashkevich E.V., Ktitarev D.V., Priezzhev V.B. Waves of topplings in an Abelian sandpile// Physica A. 1994. V.209, N3-4, p.347-360.