



Бармин А.А., [Козлов А.Н.](#)

Исследование структуры
фронта ионизации в
квазистационарном
плазменном ускорителе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бармин А.А., Козлов А.Н. Исследование структуры фронта ионизации в квазистационарном плазменном ускорителе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 47. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-47>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.А. Бармин, **А.Н. Козлов**

Исследование структуры
фронта ионизации
в квазистационарном
плазменном ускорителе

Москва — 2012

Бармин А.А., Козлов А.Н.

Исследование структуры фронта ионизации в квазистационарном плазменном ускорителе

Представлен теоретический подход в исследовании течений ионизирующегося газа с образованием фронта ионизации в канале плазменного ускорителя. В основе исследования лежат МГД-уравнения, дополненные уравнением кинетики ионизации и рекомбинации. В результате исследования выявлена структура стационарного неравновесного фронта ионизации.

Ключевые слова: плазменный ускоритель, уравнения магнитной газодинамики, стационарные особые точки

Alexey Alexeevich Barmin, Andrey Nikolaevich Kozlov

Research of the ionization front structure in the quasi-steady plasma accelerator

The theoretical approach in research of the ionizing gas flow with formation of the ionization front in the channel of the plasma accelerator is presented. The MHD-equations added by the ionization and recombination kinetics equation lay in a basis of research. As a result of research the structure of the stationary nonequilibrium ionization front is revealed.

Keywords: the plasma accelerator, equations of magnetogasdynamics, the stationary special points

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-12043-офи-м и № 12-02-90427-Укр_а).

Оглавление

В в е д е н и е	3
Особенности течений ионизирующегося газа в КСПУ	4
Законы сохранения на фронте ионизации	10
Характерные кривые для изучения структуры фронта	14
Поле направлений интегральных кривых и анализ особых точек	16
Процесс ионизации как движения вдоль интегральных кривых	20
Расчет течения в канале с протяженным участком постоянного сечения	23
Соотношения, характеризующие процесс ионизации	26
З а к л ю ч е н и е	33
Список литературы	33

Введение

В настоящее время созданы основы теории ионизирующих ударных волн (см., например, [1-5]). Такие волны возникают, если по нейтральному газу распространяется достаточно сильная ударная волна. В этом случае возрастание температуры может вызвать ионизацию газа и взаимодействие электропроводящей среды с электромагнитным полем. Изучению процессов, происходящих в ионизирующих ударных волнах, на фронтах рекомбинации, в волнах детонации и при взаимодействии различных разрывов, посвящен ряд публикаций (см., например, [1-13]). Теоретические подходы в исследованиях структуры магнитогазодинамических разрывов основаны, в том числе, на изучении особых точек и переходов между ними в одномерных МГД-моделях. В теории ионизирующих ударных волн к особым точкам МГД-уравнений добавляются газодинамические особые точки, лежащие на звуковой параболе. В общем случае для решения задач о структуре разрыва необходимо использовать системы уравнений, которые отличаются от гиперболических систем, появляющихся вследствие ряда упрощающих предположений и допущений.

В данной работе осуществляется развитие и применение имеющихся теоретических подходов с целью изучения структуры фронта ионизации в канале квазистационарного плазменного ускорителя (КСПУ) [14,15]. В изучении свойств потоков ионизирующегося газа и плазмы в КСПУ существенную роль сыграли теоретические исследования, численное моделирование и расчеты течений в каналах (см., например, [16-31]). Течение ионизирующегося газа имеет ряд отличительных особенностей. В плазменном ускорителе процесс ионизации сопровождается резким возрастанием температуры, степени ионизации и скорости. Одновременно плотность среды резко падает в отличие от процессов в ионизирующих ударных волнах. Процесс ионизации можно рассматривать как фазовый переход от нейтрального (слабоионизованного) газа к плазме. В канале плазменного ускорителя при определенных условиях фронт ионизации является устойчивым и стационарным образованием.

До настоящего времени исследования процесса ионизации в канале коаксиального плазменного ускорителя, помимо экспериментов, проводились в основном с помощью численных моделей. Можно отметить несколько этапов развития таких моделей. Расчеты течений ионизирующегося газа в квазиодномерном приближении первоначально были выполнены на основе скачкообразной зависимости проводимости газа от температуры [16]. В этой модели проводимость менялась от некоторого малого значения до $\sigma \sim T^{3/2}$ при достижении газом определенной критической температуры. В рамках данной модели также были проведены двумерные численные исследования (см., например, [26-28]). В дальнейшем на основе модели для трёхкомпонентной среды, состоящей из атомов, электронов и ионов, были проведены расчёты с

использованием формулы Саха в предположении локального термодинамического равновесия (ЛТР) в квазиодномерном и двумерном приближениях (см., например, [29-31]). Во всех перечисленных моделях и в экспериментах [14] при определённых условиях наблюдалось развитие периодических режимов в процессе ионизации газа в канале ускорителя. Аналогичные пульсирующие режимы наблюдаются в МГД-течениях с выключением проводимости [7] и в расчетах Т-слоев [32].

Недостатком указанных моделей течения ионизирующегося газа в канале ускорителя является то обстоятельство, что фронт ионизации в расчётах оказывался достаточно размытым. Узкий фронт ионизации в соответствии с экспериментальными данными удалось получить в рамках численной модели [19], основанной на модифицированных МГД-уравнениях для трёхкомпонентной среды. Эта система единым образом описывает переход слабоионизованного газа к плазме с учётом кинетики ионизации и рекомбинации. Соответствующие коэффициенты определяются в модифицированном диффузионном приближении для реальных уровней энергетического пространства водородоподобного атома [33,34].

В настоящей работе изучается структура фронта ионизации в канале плазменного ускорителя с поперечно ориентированным электромагнитным полем. Диссипативные механизмы, в первую очередь магнитная вязкость, определяются соотношениями, описывающими переходы от слабоионизованного газа к плазме. Процессы на фронте ионизации, главным образом, определяются столкновениями электронов с атомами и ионами, кинетикой ионизации и рекомбинации, значительным повышением температуры среды и ускорением образовавшейся плазмы за счет протекающего тока. Все процессы сопровождаются резким изменением МГД-переменных и магнитной вязкости. В работе выявлена и исследована структура фронта ионизации, который с определенным допущением можно рассматривать как специфический разрыв среды. В частных предположениях получены соотношения, которые в явном виде определяют возможность последовательного перехода из одного стационарного состояния в другое стационарное состояние через газодинамическую скорость звука в пределах узкого фронта ионизации, отвечающего численному эксперименту [19] и имеющимся экспериментальным данным [14].

Особенности течений ионизирующегося газа в КСПУ

Рассмотрим течение ионизирующегося газа в канале коаксиального плазменного ускорителя [14]. На рис. 1 изображена проекция коаксиальных электродов на плоскость (r, z) . Допустим, внешний электрод является катодом, а внутренний - анодом. Соответствующие направления тока, электрического поля и азимутального магнитного поля указаны на рисунке. Магнитное поле ортогонально направлению электрического тока, потоку и плоскости рисунка.

На входе в канал плазменного ускорителя осуществляется подача газа. В наиболее узкой части канала (см. промежуток АВ на рис. 1) происходит ионизация газа с образованием узкого фронта. За фронтом ионизации плазма ускоряется вдоль оси канала за счет силы Ампера $F = \frac{1}{c}[\mathbf{j} \mathbf{H}]$, где \mathbf{j} - ток в плазме, имеющий радиальное направление от одного электрода к другому, а азимутальное магнитное поле H_φ генерируется электрическим током, протекающим по внутреннему электроду. Процесс ионизации и предварительного ускорения плазмы происходит, в частности, в первой ступени двухступенчатого КСПУ [14,15,35-40]. Первая ступень состоит из нескольких небольших коаксиальных плазменных ускорителей.

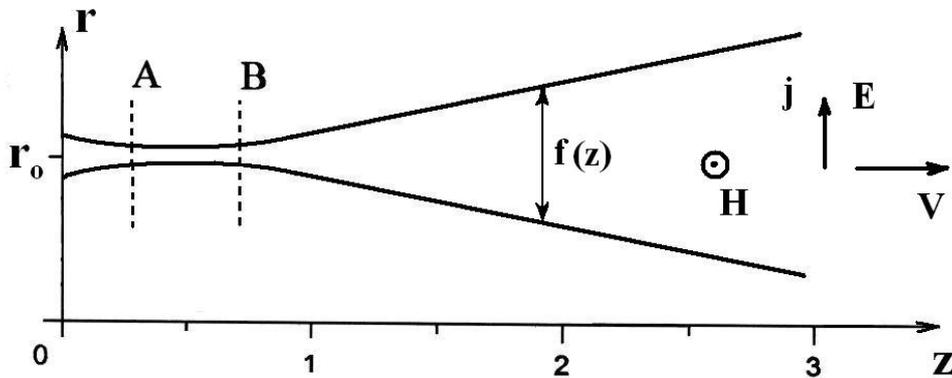


Рис. 1. Форма канала плазменного ускорителя

В потоках ионизирующегося газа основной интерес представляет зависимость параметров течения от продольной координаты канала ускорителя. Изменение переменных в поперечном или радиальном направлениях несущественно, и им можно пренебречь. В этом случае можно ограничиться квазиодномерным приближением (см., например, [41,16]) и рассмотреть течение в узкой цилиндрической трубке или канале заданного сечения. При этом искомые функции усредняются по поперечному сечению канала и удовлетворяют уравнениям, которые содержат две независимые переменные: время t и пространственную координату z вдоль канала. Будем считать, что средний характерный радиус канала $r = r_0$ является постоянной величиной. В уравнениях в качестве коэффициента участвует площадь поперечного сечения канала, равная $f(z) = 2\pi r_0 \Delta r(z)$, где $\Delta r(z)$ - зазор между электродами. Плоскому аналогу задачи будет соответствовать величина $f(z) = \Delta r(z)$.

В соответствии с моделью [19] в квазиодномерном приближении процесс ионизации описывается с помощью модифицированных МГД-уравнений, которые можно представить в безразмерной форме. Введем обозначения $V = V_z$ и $H = H_\varphi$. С учетом уравнения кинетики ионизации и рекомбинации имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_e f}{\partial t} + \frac{\partial n_e V f}{\partial z} &= f \Gamma_e; & \Gamma_e &= n_a n_e \tilde{\beta}_{ion} - n_e^2 n_i \tilde{\alpha}_{rec} + \tilde{\beta}_\omega n_a - n_e n_i \tilde{\alpha}_\omega \\
\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \frac{\partial \rho V f}{\partial z} &= 0; & \rho &= n_a + n_i \\
\frac{\partial \rho V f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V f) V}{\partial z} &= -f \frac{\partial}{\partial z} \left[P + \frac{H^2}{2} \right]; & P &= \frac{\beta}{2} (1 + \alpha) \rho T \\
\frac{\partial \rho \varepsilon f}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \varepsilon f) V}{\partial z} &= -P \frac{\partial V f}{\partial z} + f v \left[\frac{\partial H}{\partial z} \right]^2 - \frac{\partial f q}{\partial z}; & q &= -\tilde{\kappa} \frac{\partial T}{\partial z} \\
\frac{\partial H f}{\partial t} + \frac{\partial H V f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[v f \frac{\partial H}{\partial z} \right] \\
\varepsilon &= \frac{\beta (1 + \alpha) T}{2(\gamma - 1)} + \frac{\beta}{2} \zeta \alpha T^*; & n_e &= n_i; & \alpha &= \frac{n_e}{\rho}; & n_a &= (1 - \alpha) \rho \\
v &= \frac{1}{\sigma_o} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}; & \sigma_1 &= \frac{\alpha \sigma_{10}}{(1 - \alpha) \sqrt{T}}; & \sigma_2 &= \sigma_{20} T^{3/2} \\
z = 0 &: & \rho &= 1; & T &= 1; & H &= 1; & \alpha &= \alpha_{en}
\end{aligned} \tag{1}$$

На выходе из ускорителя $z = z_{out}$ граничные условия отвечают свободному вытеканию. В качестве единиц измерения выбраны размерные константы: n_o ($\rho_o = m n_o$), T_o , H_o , а также L - длина канала либо его части. Характерное магнитное поле $H_o = 2 J_p / c r_o$ определяется разрядным током в системе J_p . С помощью перечисленных величин формируются единицы: давления - $H_o^2 / 4\pi$, скорости - $V_o = H_o / \sqrt{4\pi \rho_o}$, времени - L / V_o и электрического поля - $E_o = H_o V_o / c$. Безразмерные параметры в системе (1) имеют вид: $\beta = 8\pi P_o / H_o^2$ ($P_o = k_B n_o T_o$), $v = 1 / \sigma_o = c^2 / 4\pi L V_o \sigma$, $T^* = I / k_B T$, $\tilde{\beta}_{ion; \omega} = (L n_o / V_o) \beta_{ion; \omega}$, $\tilde{\alpha}_{rec; \omega} = (L n_o^2 / V_o) \alpha_{rec; \omega}$.

Магнитная вязкость v и безразмерная проводимость $\sigma_o = \text{Re}_m$ (магнитное число Рейнольдса) содержат величины σ_{10} и σ_{20} , которые выражаются через исходные размерные параметры и физические константы.

Первое из приведённых уравнений является уравнением кинетики ионизации и рекомбинации [33,34], которое определяет скорость рождения электронов с учетом различных процессов, описываемых правой частью данного уравнения $D = f \Gamma_e$.

Оценки вероятностей различных процессов показывают, что основным фактором, приводящим к ионизации и рекомбинации в рассматриваемом случае достаточно плотной низкотемпературной плазмы, является взаимодействие

электронов с атомами и ионами, отвечающее следующим элементарным прямым и обратным процессам: $A_k + e \leftrightarrow A_m + e$ - возбуждение и тушение (гашение), $A_k + e \leftrightarrow A^+ + e + e$ - ионизация электронным ударом и тройная рекомбинация. К этим процессам можно добавить фотоионизацию и фоторекомбинацию $A_k + \hbar\omega \leftrightarrow A^+ + e$.

Коэффициенты ионизации β_{ion} и рекомбинации α_{rek} вычисляются в рамках модифицированного диффузионного приближения [33]. В этом случае диффузия связанного электрона рассматривается в энергетическом пространстве атома с учетом дискретности его уровней. Это позволяет найти коэффициенты α_s и β_s , отвечающие соответственно ступенчатой рекомбинации и ионизации. Для водорода имеем

$$\alpha_s = \frac{h^3 e^4}{2\pi (m_e k_B T_e)^2 \sum_i E_1} \left[\sum_{k \geq 1} \frac{(2k+1) \exp(-E_{k+1}/k_B T_e)}{k^3 (k+1)^4 \Lambda_k} \right]^{-1}, \quad (2)$$

где $E_k = E_1 / k^2$, $E_1 = I = 13.6 \text{ эВ} = 2.16 \cdot 10^{-11} \text{ эрг}$, Λ_k - кулоновский логарифм k -ого уровня. Связь между α_s и β_s определяется с помощью константы ионизационного равновесия относительно основного состояния

$$\beta_{cm} = \alpha_{cm} K_1; \quad K_1 = \frac{n_e n_i}{n_1} = 2 \frac{\sum_i}{\sum_a} \left(\frac{2\pi m_e k_B T_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T_e}\right). \quad (3)$$

Здесь n_1 - равновесная концентрация атомов в основном состоянии.

К данным соотношениям необходимо добавить коэффициенты прямой ионизации α_d и рекомбинации β_d , определяемые стандартным образом. Окончательные значения коэффициентов ионизации и рекомбинации равны $\beta_{ion} = \beta_s + \beta_d$ и $\alpha_{rec} = \alpha_s + \alpha_d$. Кроме того, можно учесть процессы, связанные с фотоионизацией и фоторекомбинацией [42]. Соответствующие коэффициенты определяются с помощью соотношений

$$\beta_\omega = \frac{8\pi I^2 k_B T}{c^2 h^3} \sigma_\omega^o \exp\left(-\frac{I}{k_B T}\right); \quad \alpha_\omega = \frac{\beta_\omega n_a}{n_e n_i}.$$

где $\sigma_\omega^o = 7.9 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$ - эффективное сечение фотоионизации водорода.

Теплопроводность в уравнении для внутренней энергии (1) определяется как сумма электрон-атомарной и лучистой теплопроводности [42-45,28].

Площадь поперечного сечения канала задана следующим образом: $f(z) = 0.3 - 0.8z(1-z)$, если $z \leq 1$, и $f(z) = 0.8z - 0.5$, если $1 \leq z \leq z_{out} = 3$. Канал представляет собой сопло единичной длины, надстроенное справа линейно расширяющимся раструбом (рис. 1).

В численной модели для расчета гиперболической части уравнений используется один из алгоритмов вычисления переноса с коррекцией потоков [46]. Магнитная вязкость в уравнении диффузии магнитного поля и теплопроводность учитывается с помощью метода потоковой прогонки [47]. Поиск стационарных течений ионизирующегося газа осуществляется методом установления.

Представленное в работе [19] стационарное течение ионизирующегося газа было рассчитано для следующих исходных параметров задачи: $T_o = 4000 \text{ }^\circ\text{K}$, $n_o = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $L = 20 \text{ см}$, $J_p = 50 \text{ кА}$, $\alpha_{en} = 5 \cdot 10^{-7}$. Данные значения концентрации и температуры на входе в канал перед фронтом ионизации отвечают давлению $P_o \cong 10 \text{ торр}$, которое согласно экспериментальным данным [14,15,35-40] соответствует рабочему диапазону параметров, используемых в КСПУ. К сожалению, характерные значения давления диагностированы в экспериментах в отсутствие разряда. Достоверная информация о том, что происходит перед фронтом ионизации в процессе разряда, может быть доступной только в будущих экспериментах. В настоящее время принято считать, что давление на входе не меняется или меняется незначительно в процессе разряда. Что касается температуры газа, поступающего на входе в канал в процессе разряда, то ее значения, скорее всего, близки к значениям комнатной температуры, если не осуществлять предварительный СВЧ нагрев поступающего газа.

На рис. 2 представлен типичный вариант расчёта квазистационарного течения ионизирующегося газа, отвечающий следующему набору исходных размерных и безразмерных параметров задачи: $T_o = 500 \text{ }^\circ\text{K}$, $n_o = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $L = 20 \text{ см}$, $J_p = 100 \text{ кА}$, $\alpha_{en} = 5 \cdot 10^{-7}$, $r_o = L/3$, $\beta = 0.04$, $T^* = 313$, $\sigma_{01} = 1566.6$, $\sigma_{02} = 0.05$, $V_o = 1.46 \cdot 10^6 \text{ см/с}$. В данном случае T_o на входе незначительно отличается от комнатной температуры, а давление по-прежнему равно $P_o \cong 10 \text{ торр}$. Как и ранее (см. [19]), наблюдаем типичную картину течения ионизирующегося газа. С одной стороны, температура, скорость и степень ионизации резко возрастают, с другой стороны, плотность и магнитное поле резко падают на фронте ионизации, расположенном в окрестности наиболее узкой соплообразной части канала. Значения температуры среды на фронте ионизации T_{fr} слабо зависят от параметров задачи и существенно не изменились по сравнению с ее значениями в расчете, представленном в работе [19]. Эти значения по порядку величины равны $T_{fr} \approx 2 \text{ эВ}$, что согласуется с экспериментальными оценками. Учитывая малые значения температуры T_o на входе в рассматриваемом случае, расчет естественно дает существенно более высокие значения градиента температуры на фронте ионизации. Контроль

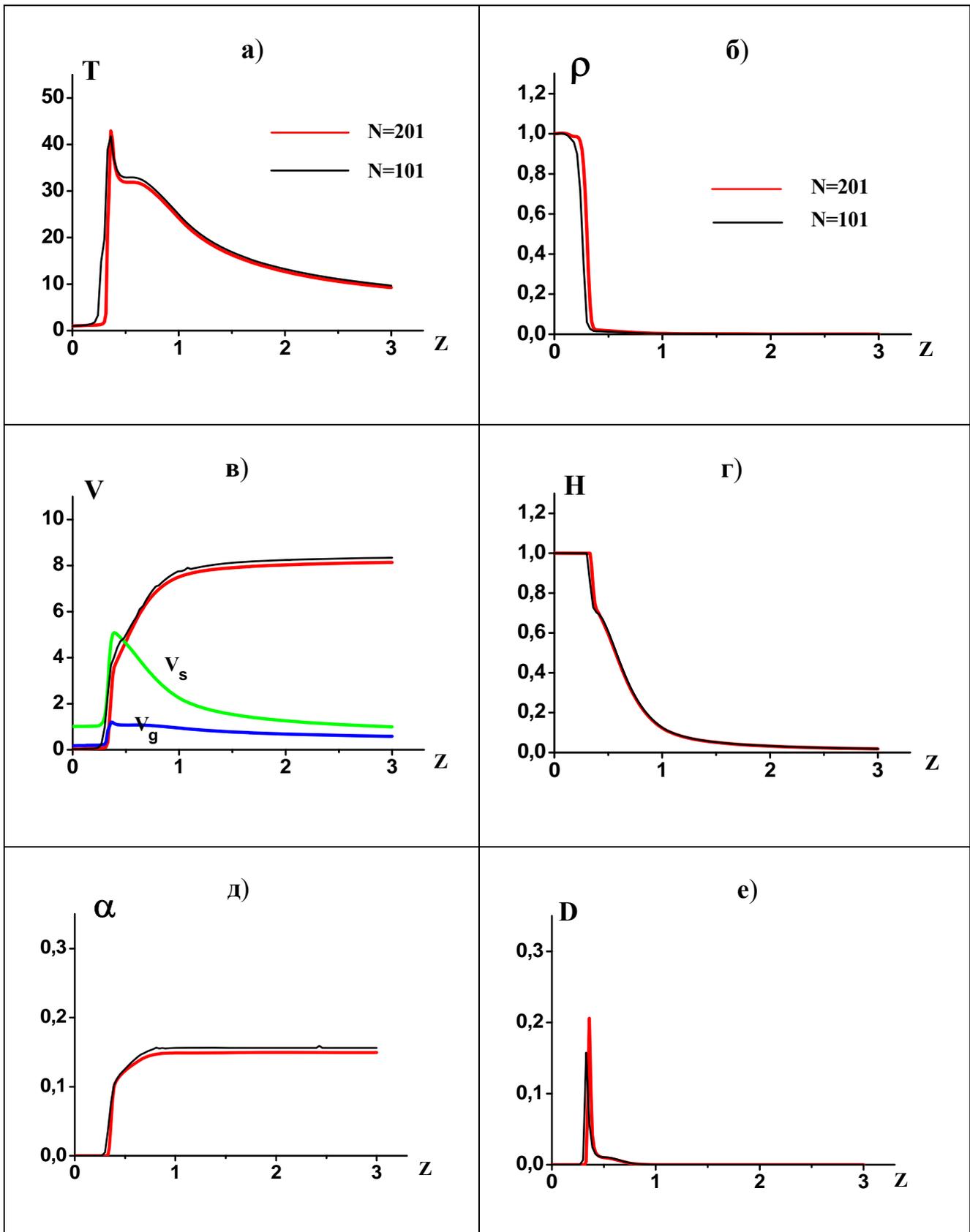


Рис. 2. Распределение параметров в потоке ионизирующего газа:
 а) температура, б) плотность, в) скорость, г) магнитное поле,
 д) степень ионизации, е) отклонение от равновесия ($D = f \Gamma_e$)

качества численных экспериментов осуществлялся с помощью расчетов на разных сетках. На рис. 2 разным цветом изображены кривые, отвечающие расчетам с числом узлов $N=101$ и $N=201$. Во всех случаях речь идет о квазистационарных режимах. Если в расчете, представленном в [19], относительное изменение переменных не превышало десятых долей процента, то в рассматриваемом случае при наличии больших градиентов относительное изменение большинства переменных находится в пределах одного процента. Для плотности эта величина составляет несколько процентов.

На фронте ионизации (см. рис. 2е) наблюдается четко выраженное отклонение от равновесия, что существенно уточняет проведенные ранее исследования, в том числе в приближении локального термодинамического равновесия. Таким образом, была выявлена неравновесная природа процессов на фронте ионизации в потоке ионизирующегося газа в канале квазистационарного плазменного ускорителя.

На рис. 2в дополнительно показано, как меняется газодинамическая $C_g = \sqrt{\gamma P / \rho}$ и магнитогазодинамическая $C_s = \sqrt{C_g^2 + H^2 / \rho}$ скорости звука (скорость сигнала [14] в отсутствии продольного магнитного поля). Видно, что в пределах узкого фронта ионизации происходит последовательный переход скорости потока сначала через одну, а потом и другую характерные скорости.

Согласно данной модели азимутальное магнитное поле ортогонально плоскости рисунка 1, электрическое поле перпендикулярно магнитному полю и скорости среды. Иначе говоря, в потоке ионизирующегося газа магнитное и электрическое поля взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости фронта ионизации, ортогональной направлению движения.

Аналогом представленной аксиально симметричной задачи и рассмотренного течения является плоский случай, в котором направление движения потока ионизирующегося газа также ортогонально плоскости узкого фронта ионизации и электромагнитному полю.

Законы сохранения на фронте ионизации

Необходимо различать механизмы, которые приводят к образованию фронта ионизации, и механизмы, которые управляют процессом ионизации на уже сформировавшемся фронте. Возникновение фронта ионизации в канале плазменного ускорителя происходит за счёт внешнего воздействия, а именно, первоначально высокого напряжения между электродом и пробоя газа. Постановка такой задачи выходит за рамки представленного исследования. В данном случае, когда фронт уже сформировался, ионизация обусловлена процессами, происходящими в окрестности узкого фронта ионизации, в частности, нагревом электропроводящей среды в результате электрон-ионных столкновений, кинетикой ионизации и рекомбинации и соответствующими ей процессами.

Задача о структуре и переходах в пределах узкого фронта ионизации сводится к рассмотрению одномерных стационарных движений в общем случае вязкого, теплопроводного и электропроводного газа, в котором процесс ионизации описывается дополнительным уравнением.

Для описания стационарных, одномерных течений ионизирующегося газа воспользуемся законами сохранения массы, импульса, энергии, соотношениями для электромагнитного поля, следующими из уравнений Максвелла, а также законом Ома и уравнением кинетики ионизации и рекомбинации, пренебрегая незначительным влиянием фотоионизации и фоторекомбинации на фронте.

Систему координат свяжем с неподвижным плоским участком фронта ионизации, ортогональным направлению оси x в декартовой системе координат (см. рис. 3). В общем случае одномерного движения имеем следующие соотношения, записанные в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \rho V_x &= \dot{m} \quad , \quad E_y = const \quad , \quad E_z = const \quad , \quad H_x = const \\ \dot{m} \frac{d\alpha}{dx} &= n_a n_e \tilde{\beta}_{ion} - n_e^2 n_i \tilde{\alpha}_{rec} \\ \nu \frac{dH_y}{dx} &= V_x H_y - V_y H_x + E_z \quad , \quad \nu \frac{dH_z}{dx} = V_x H_z - V_z H_x - E_y \\ \rho V_x^2 + P + \frac{1}{2}(H^2 - H_x^2) - \mu_1 \frac{dV_x}{dx} &= \Gamma_x \quad (4) \\ \rho V_x V_y - H_x H_y - \mu \frac{dV_y}{dx} &= \Gamma_y \quad , \quad \rho V_x V_z - H_x H_z - \mu \frac{dV_z}{dx} = \Gamma_z \\ \rho V_x \left[\frac{P}{\rho} + \varepsilon + \frac{1}{2}(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \right] + E_y H_z - E_z H_y - \mu_1 V_x \frac{dV_x}{dx} - \\ &\quad - \mu V_y \frac{dV_y}{dx} - \mu V_z \frac{dV_z}{dx} - \kappa \frac{dT}{dx} = \dot{m} \mathcal{E} \\ \dot{m} = \frac{\dot{m}_f}{\rho_o V_o} \quad , \quad \Gamma_x = \frac{4\pi \tilde{\Gamma}_x}{H_o^2} \quad , \quad \Gamma_y = \frac{4\pi \tilde{\Gamma}_y}{H_o^2} \quad , \quad \Gamma_z = \frac{4\pi \tilde{\Gamma}_z}{H_o^2} \quad , \quad \mathcal{E} = \frac{4\pi \rho_o \tilde{\mathcal{E}}}{H_o^2} \quad , \end{aligned}$$

где \dot{m}_f , $\tilde{\Gamma}_x$, $\tilde{\Gamma}_y$, $\tilde{\Gamma}_z$, $\dot{m} \tilde{\mathcal{E}}$ - постоянные размерные значения потоков массы, составляющих импульса и энергии; μ , μ_1 - коэффициенты вязкости; κ - коэффициент теплопроводности; ν - магнитная вязкость.

В соотношениях использована непрерывность поперечной составляющей электрического поля, продольной составляющей магнитного поля и потока массы. Структура фронта ионизации описывается таким решением, в котором по обе стороны фронта каждая из величин, составляющих решение, стремится к некоторым конечным предельным значениям. Предельные значения предполагаются различными по разным сторонам фронта ионизации. В случае

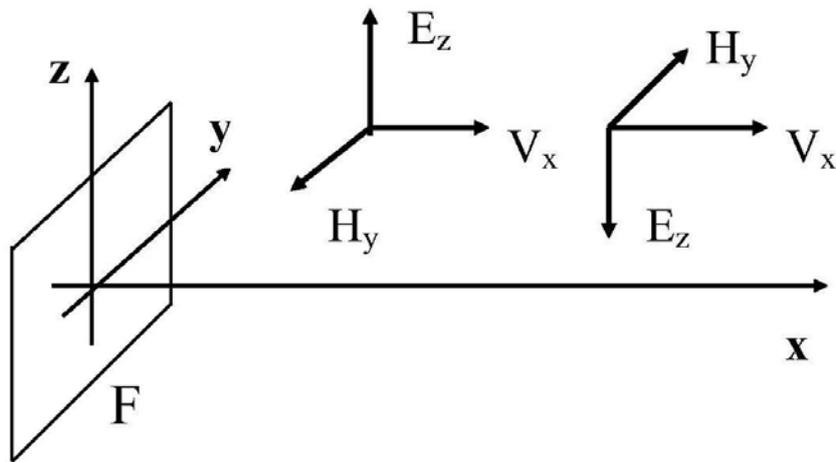


Рис. 3. Направления электрического и магнитного поля в зависимости от полярности электродов. F – плоскость фронта ионизации

течений со скачкообразным изменением электропроводности газа и в отсутствии уравнения, описывающего скорость рождения электронов, аналогичная система уравнений представлена, например, в [2] и описывает решение задачи о структуре магнитогидродинамических ударных волн, ионизирующих газ. При этом поступательному потоку соответствуют известные стационарные особые точки A_k исходной системы, а решение задачи представляется интегральной кривой в пространстве искомых переменных, соединяющей особые точки начального и конечного состояний.

Расширенное трактование понятия структуры предполагает исследование переходов из одного ионизационно равновесного состояния в другое с описанием процессов, сопровождающих такие переходы.

Поворотом системы координат вокруг оси x можно добиться того, что составляющая напряженности электрического поля вдоль оси y и составляющие потока импульса Γ_y , Γ_z равны нулю ($E_y = \Gamma_y = \Gamma_z = 0$). Кроме того, рассмотрим плоскополяризованный случай $H_z = V_z = 0$, отвечающий исследуемому течению ионизирующегося газа. В зависимости от полярности электродов существуют две возможности взаимного расположения векторов E_z , H_y и V_x , представленные на рис. 3. Если внешний электрод является анодом, то $E_z < 0$ и $H_y > 0$.

Диссипативными процессами, связанными с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь ($\kappa \rightarrow 0$; $\mu \rightarrow 0$; $\mu_1 \rightarrow 0$). Соответственно, ограничимся случаем, когда отлична от нуля только магнитная вязкость. В данных предположениях течение в пределах стационарной структуры описывается в безразмерной форме следующей системой уравнений

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\alpha}{\dot{m}U^3} F_{\beta\alpha}; \quad F_{\beta\alpha} = (1 - \alpha)U \tilde{\beta}_{ion} - \alpha^2 \tilde{\alpha}_{rec} \quad (5)$$

$$\frac{d H}{d x} = \frac{\dot{m}}{\nu} \varphi ; \quad \varphi = H \left(U - U_x^o \right) + \frac{E}{\dot{m}} \quad (6)$$

$$\frac{\beta}{2} (1 + \alpha) T = V \left(\Gamma - \dot{m}^2 U - \frac{H^2}{2} \right) \quad (7)$$

$$\alpha = \alpha_o + \frac{F(U, H)}{2(\gamma - 1) C_1} \quad (8)$$

$$F(U, H) = (\gamma + 1) \dot{m}^2 U^2 + \gamma \left(H^2 - 2 \Gamma \right) U - (\gamma - 1) U_x^o H^2 + \\ + \gamma \left(H^2 - 2 \Gamma \right) U - (\gamma - 1) U_x^o H^2 + 2(\gamma - 1) \frac{E}{\dot{m}} H + 2(\gamma - 1) \mathcal{E}$$

Здесь $U = \frac{1}{\rho}$, $E = E_z$, $H = H_y$, $C_1 = \frac{\beta}{2} \zeta T^*$, $\Gamma = \Gamma_x$, $U_x^o = \left(\frac{H_x}{\dot{m}} \right)^2$.

Задача свелась к исследованию процессов в трехмерном пространстве (H, U, α) на поверхности Σ , задаваемой соотношением (8). Будем также считать, что $H_x = 0$ и $U_x^o = 0$. Данное предположение отвечает традиционным плазменным ускорителям с единственной азимутальной компонентой магнитного поля. В качестве параметров задачи выступают безразмерные значения \dot{m} , E , \mathcal{E} , J , β или соответствующие размерные величины.

Решение задачи о структуре соединяет стационарные состояния, в которых правые части уравнений (5) и (6) равны нулю. Перед фронтом ионизации газ является слабоионизованным или нейтральным так, что $\alpha \rightarrow 0$. Поскольку $\nu^{-1} \sim \alpha$, правые части уравнений (5) и (6) обращаются в нуль при $\alpha = 0$. Тем самым, состояние нейтрального газа перед фронтом ионизации отвечает одному из стационарных состояний системы уравнений. В качестве состояния за фронтом могут быть точки, совпадающие с особыми стационарными точками A_k системы одномерных МГД-уравнений. Продифференцировав (8), получим

$$\frac{d U}{d x} = \frac{1}{F_u'} \left(2(\gamma - 1) C_1 \frac{d \alpha}{d x} - F_H' \frac{d H}{d x} \right), \quad (9)$$

где $F_u' = 2(\gamma + 1) \dot{m}^2 U + \gamma (H^2 - 2 \Gamma)$ и $F_H' = 2 \left(\gamma U H + (\gamma - 1) \frac{E}{\dot{m}} \right)$.

В особых стационарных точках A_k имеем $\frac{d \alpha}{d x} = 0$, $\frac{d H}{d x} = 0$, $\frac{d U}{d x} = 0$.

Будем считать, что перед фронтом степень ионизации равна нулю $\alpha = 0$ для значений $H = 1$ и $U = 1$ в безразмерных переменных. Тогда из уравнения (8) определим $\alpha_o = -F(1, 1) / 2(\gamma - 1) C_1$ и найдем, что

$$\alpha(U, H) = \frac{1}{2(\gamma - 1)C_1} \left[(\gamma + 1)\dot{m}^2 (U^2 - 1) + \gamma (H^2 - 2\Gamma)U - \right. \\ \left. - \gamma(1 - 2\Gamma) + 2(\gamma - 1)\frac{E}{\dot{m}}(H - 1) \right]. \quad (10)$$

В соответствии с выбранной “нормировкой” параметр α исключается из рассмотрения. Параметры \dot{m} , E , Γ , β могут быть взяты произвольно или, например, из численного эксперимента.

Характерные кривые для изучения структуры фронта

Согласно соотношению (10) степень ионизации α является однозначной функцией H и U . Поэтому все основные процессы в пространстве (H, U, α) удобно рассматривать в проекции на плоскость (H, U) . На рис. 4 изображены все основные кривые, участвующие в исследовании.

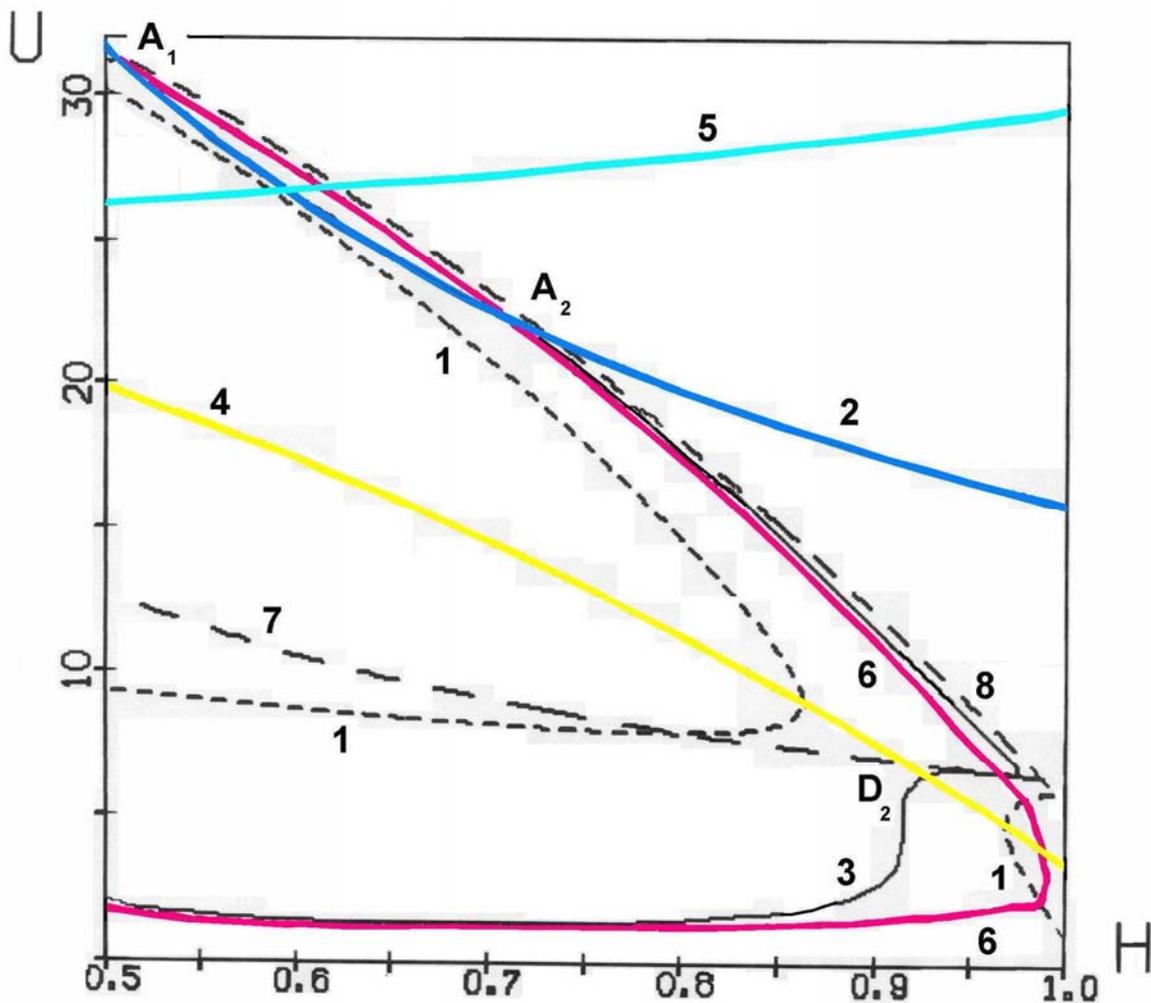


Рис. 4. Кривые на плоскости (H, U) , используемые в исследовании структуры фронта ионизации

Кривая 1 отвечает $\alpha = 0$. **Кривая 2** соответствует МГД-гиперболе

$$\varphi = U H + \frac{E}{\dot{m}} = 0. \quad (11)$$

Из (9) с учетом (5) и (6) следует

$$\frac{dU}{dH} = \frac{F_1}{F_2}, \quad (12)$$

где $F_1 = G F_{\beta\alpha} - F'_H \varphi$, $F_2 = F'_U \varphi$, $G = 2(\gamma - 1) C_1 \frac{\nu \alpha}{\dot{m} U^3}$.

Согласно (12), **кривая 3** на рис. 4 определяет горизонтальные изоклины ($F_1 = 0$). Звуковая парабола, представленная **кривой 4** и определяемая соотношениями $V_x^2 = \gamma P / \rho$ или $F'_U = 0$, делит плоскость (H, U) на две области: дозвукового и сверхзвукового течений. В этом случае имеем

$$(\gamma + 1) \dot{m}^2 U = \gamma \Gamma - \frac{\gamma H^2}{2}. \quad (13)$$

Парабола (13) и МГД-гипербола $\varphi = 0$ являются вертикальными изоклинами ($F_2 = 0$). Переход через магнитогазодинамическую скорость звука

$V_x^2 = \frac{\gamma P}{\rho} + \frac{H^2}{\rho}$ характеризуется кривой Жюге (**парабола 5** на рис. 4),

задаваемой соотношением

$$(\gamma + 1) \dot{m}^2 U = \gamma \Gamma + \frac{(2 - \gamma) H^2}{2}. \quad (14)$$

Условию $F_{\beta\alpha} = 0$ отвечает равновесная **кривая 6**. Гиперболе $F'_H = 0$ или равенству

$$\gamma U H + (\gamma - 1) \frac{E}{\dot{m}} = 0 \quad (15)$$

соответствует **кривая 7**. Наконец, парабола $T = 0$, определяемая соотношением

$$H^2 + 2 \dot{m}^2 U - 2 \Gamma = 0, \quad (16)$$

представлена на рис. 4 **кривой 8**.

Стационарные особые точки A_1 и A_2 лежат на МГД-гиперболе. Их точное местоположение определяется пересечением кривых 2 и 6. Из (12) видно, что в этих точках справедливы равенства $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Кроме стационарных особых точек A_1 и A_2 может существовать особая точка D_2 , лежащая на звуковой параболе (13). Только в этой точке возможен непрерывный переход через газодинамическую скорость звука. Точное положение точки D_2 определяется пересечением кривых 3 и 4.

Поле направлений интегральных кривых и анализ особых точек

Исследуем интегральные кривые системы (5) – (8), воспользовавшись однозначной зависимостью α от H и U . Система двух дифференциальных уравнений рассматривается на поверхности Σ , заданной соотношением (8) или (10). Спроецируем поверхность Σ на плоскость (H, U) . Качественный характер поведения интегральных кривых сохранится.

На рис. 5 для $\Gamma = 0.58$; $E = -1.9$; $\beta = 0.15$; $\zeta = 2$; $T^* = 39.13$ и разных значений расхода представлены характерные распределения поля единичных векторов $\vec{\tau} = \frac{\vec{i}_H + U'_H \vec{j}_U}{\sqrt{1 + (U'_H)^2}}$, касательных к интегральным кривым. Здесь $U'_H = \frac{dU}{dH}$

определяется с помощью (12). Указанные параметры и расход $\dot{m} = 0.12$ соответствуют расчету, представленному в работе [19]. Поля направлений интегральных кривых изображены в областях, где $\alpha > 0$ и $T > 0$.

Согласно рис. 5а ($\dot{m} = 0.14$), стационарное течение ионизирующегося газа сопровождается последовательным переходом через газодинамическую и магнитогазодинамическую скорости звука, минуя стационарные особые точки A_1 и A_2 . На рис. 5б ($\dot{m} = 0.12$) видно, что процесс ионизации формально может завершиться в одной из двух точек A_1 или A_2 . Рис. 5в ($\dot{m} = 0.115$) отвечает случаю, когда процесс ионизации может закончиться только в одной особой точке A_2 . Из рис. 5г ($\dot{m} = 0.1$) следует, что газовая парабола находится в области $\alpha < 0$ и течение происходит в дозвуковой области.

Проанализируем поведение интегральных кривых в окрестности особых точек A_1 и A_2 , если они существуют. Для уравнения (12) рассмотрим эквивалентную автономную систему (см., например, [48-50]) из двух дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия A_k ,

$$\frac{dU}{dt} = F_1(U, H); \quad \frac{dH}{dt} = F_2(U, H).$$

Искомые функции в уравнениях представим в виде

$$U = U_k + \Delta U = U_k + A_U e^{\lambda t}; \quad H = H_k + \Delta H = H_k + A_H e^{\lambda t}.$$

Линеаризовав систему в окрестности точек A_k получим соответствующую линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\lambda A_U = \frac{\partial F_1}{\partial U} A_U + \frac{\partial F_1}{\partial H} A_H; \quad \lambda A_H = \frac{\partial F_2}{\partial U} A_U + \frac{\partial F_2}{\partial H} A_H.$$

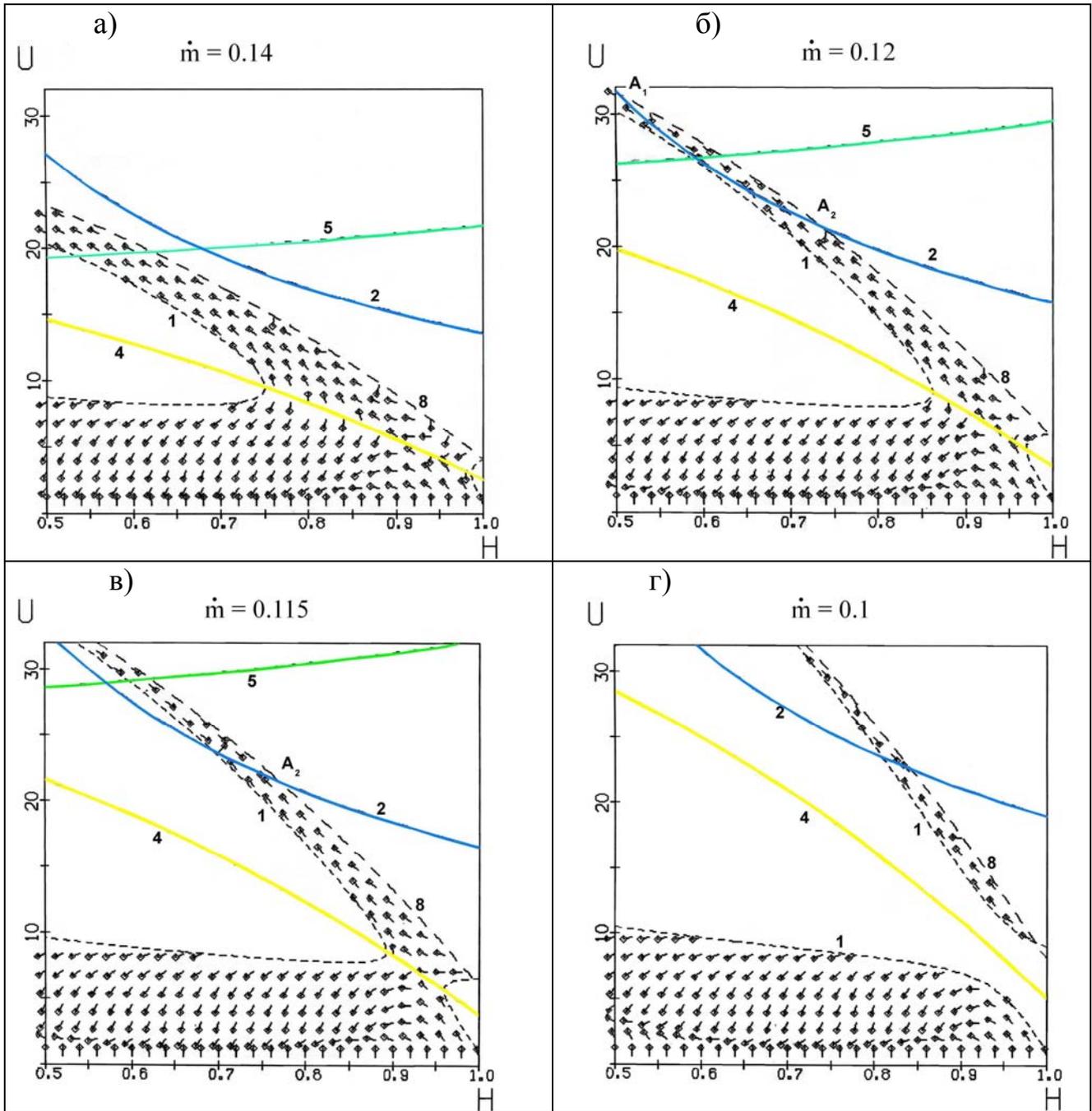


Рис. 5. Поля единичных векторов, касательных к интегральным кривым, для различных параметров задачи

Как показали исследования, корни характеристического уравнения

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U} - \lambda & \frac{\partial F_1}{\partial H} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U} & \frac{\partial F_2}{\partial H} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad (17)$$

где $p = 2\gamma H\varphi + F'_u U + \frac{\partial G}{\partial U} - BH$; $B = 2\left(2\gamma\varphi - \frac{E}{\dot{m}}\right)$; $H = H_k$; $U = U_k$

$$q = \left(2\gamma H\varphi + F'_u U\right)\left(\frac{\partial G}{\partial U} - BH\right) - \left(2(\gamma+1)\dot{m}^2\varphi + F'_u H\right)\left(\frac{\partial G}{\partial H} - BU\right),$$

имеют действительные различные значения в окрестности положения равновесия A_k . В этом случае, согласно теореме Гробмана-Хартмана (см., например, [49]), фазовые траектории линеаризованной и нелинейной систем в окрестности точек A_k имеют одну и ту же топологическую структуру.

Точка A_1 всегда лежит в области сверхсигнального течения, выше линии Жюге. В этой точке с помощью (17) при $\varphi = 0$ легко определить, что собственные значения λ_1 и λ_2 разных знаков. Поэтому точка A_1 , если она существует, лежит в области $\alpha > 0$, $T > 0$ и всегда является седлом. На рис. 6а схематично представлена картина интегральных кривых в окрестности A_1 . Направления собственных векторов $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ для двух различных значений λ определяются в плоскости (H, U) с помощью соотношения

$$\xi_A = \frac{\Delta U}{\Delta H} = \frac{A_U}{A_H} = \frac{\lambda - 2\gamma H\varphi - F'_u U}{2(\gamma+1)\dot{m}^2\varphi + F'_u H}. \quad (18)$$

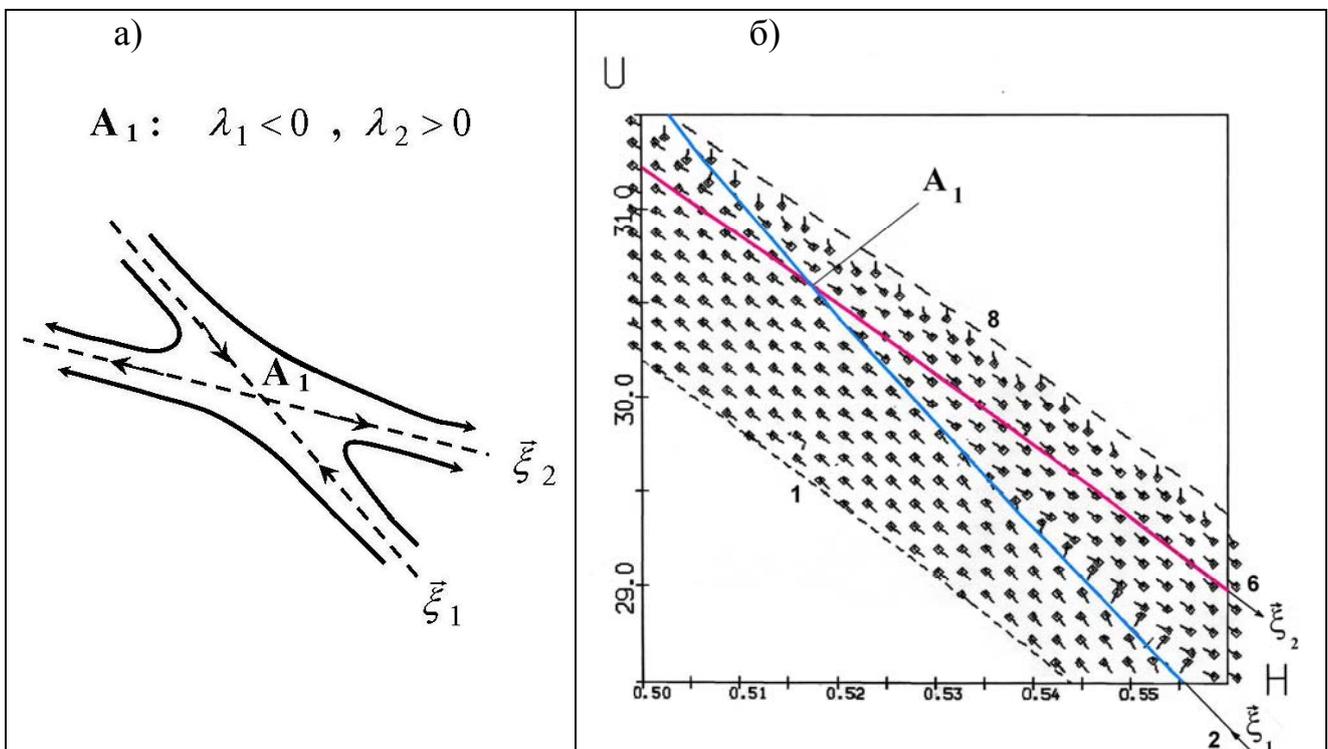


Рис. 6. Схематичная и детальная картина интегральных кривых в окрестности стационарной особой точки A_1

Вектора $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ направлены при $\varphi = 0$ соответственно вдоль МГД-гиперболы (кривая 2) и равновесной линии (кривая 6). Рис. 6б отвечает детальному изображению поля интегральных кривых в окрестности A_1 для $m = 0.12$ (см. также рис. 4 и 5б).

В положении равновесия A_2 , если оно существует, собственные значения удовлетворяют неравенству $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Следовательно, точка A_2 , расположенная ниже линии Жюге и отвечающая досигнальному течению, является устойчивым узлом. На рис. 7 изображена качественная и детальная картина поля интегральных кривых в окрестности A_2 (см. также рис. 4 и 5б). Собственный вектор $\vec{\xi}_1$ направлен вдоль равновесной кривой 6, $\vec{\xi}_2$ - вдоль МГД-гиперболы 2.

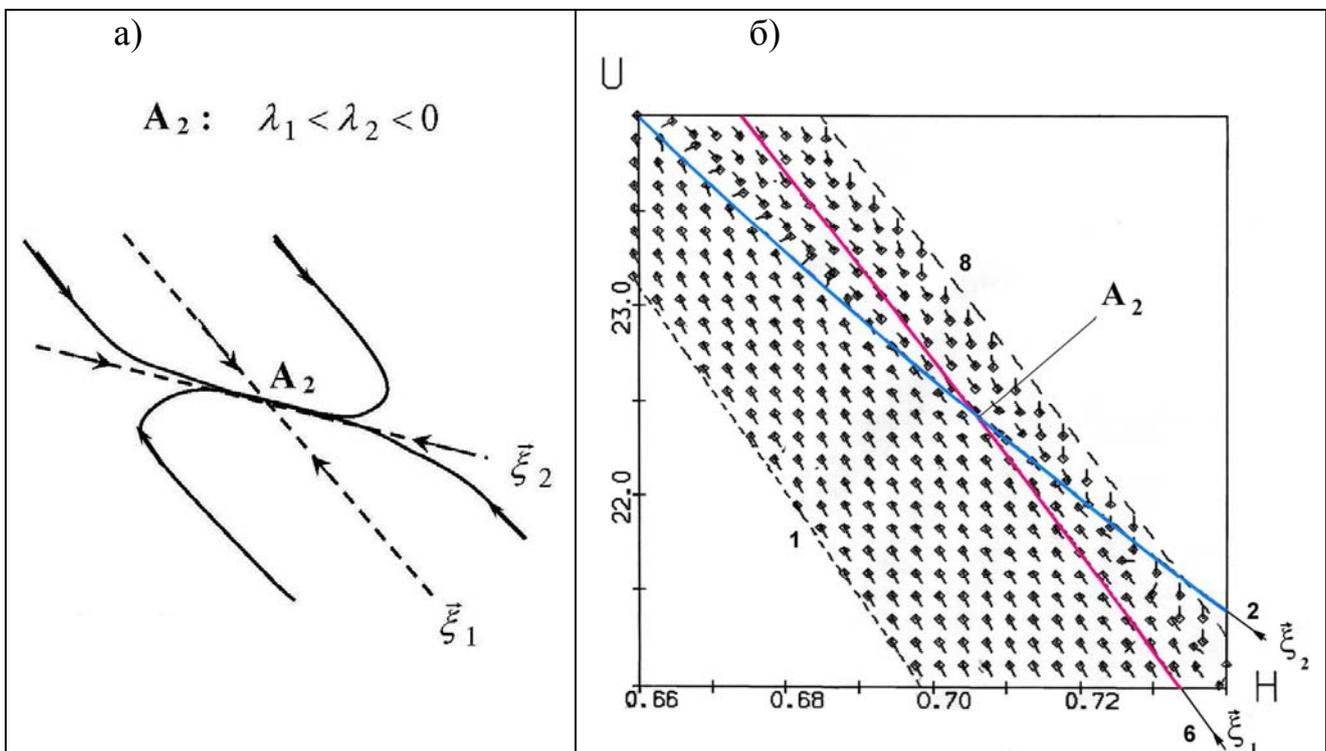


Рис. 7. Качественная и детальная картина интегральных кривых в окрестности стационарной особой точки A_2

Особая точка D_2 не является положением равновесия, поскольку в ней $\varphi \neq 0$ и $\frac{dH}{dx} < 0$. Этой точке отводится особая роль во всей теории процесса ионизации газа. Только в этой точке возможен переход через газодинамическую скорость звука, т. е. через газовую параболу (кривая 4 на рис. 4). Согласно соотношению (12), в точке D_2 , определяемой как пересечение кривых 3 и 4, имеем $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ ($F'_u = 0$). Раскроем эту

неопределенность. В линейном приближении в окрестности точки D_2 функции F_i ($i=1,2$) можно представить в виде:

$$F_i(H, U) = F_i(H_D, U_D) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial U} \right)_D dU + \left(\frac{\partial F_i}{\partial H} \right)_D dH, \quad (19)$$

где производные рассматриваются в точке $D = D_2$ и $F_i(H_D, U_D) = 0$. С учетом (19) в плоскости (H, U) можно определить направления $\xi_D = \frac{dU}{dH}$, вдоль которых возможно прохождение через точку D_2 . Поиск этих направлений эквивалентен решению спектральной задачи (17), (18) при $F'_u = 0$.

На рис. 8а схематично представлена картина интегральных кривых в окрестности точки D_2 . Детальная картина поля единичных векторов, касательных к интегральным кривым вблизи точки D_2 , изображена на рис. 8б и соответствует указанным выше параметрам задачи, включая расход $\dot{m} = 0.12$ (см. рис. 5б). При изменении полярности электродов магнитное и электрическое поле меняют знаки. Поэтому все представленные картины симметричны относительно прямой $H = 0$, и соответствующая точка D_1 будет отвечать случаю $H < 0$.

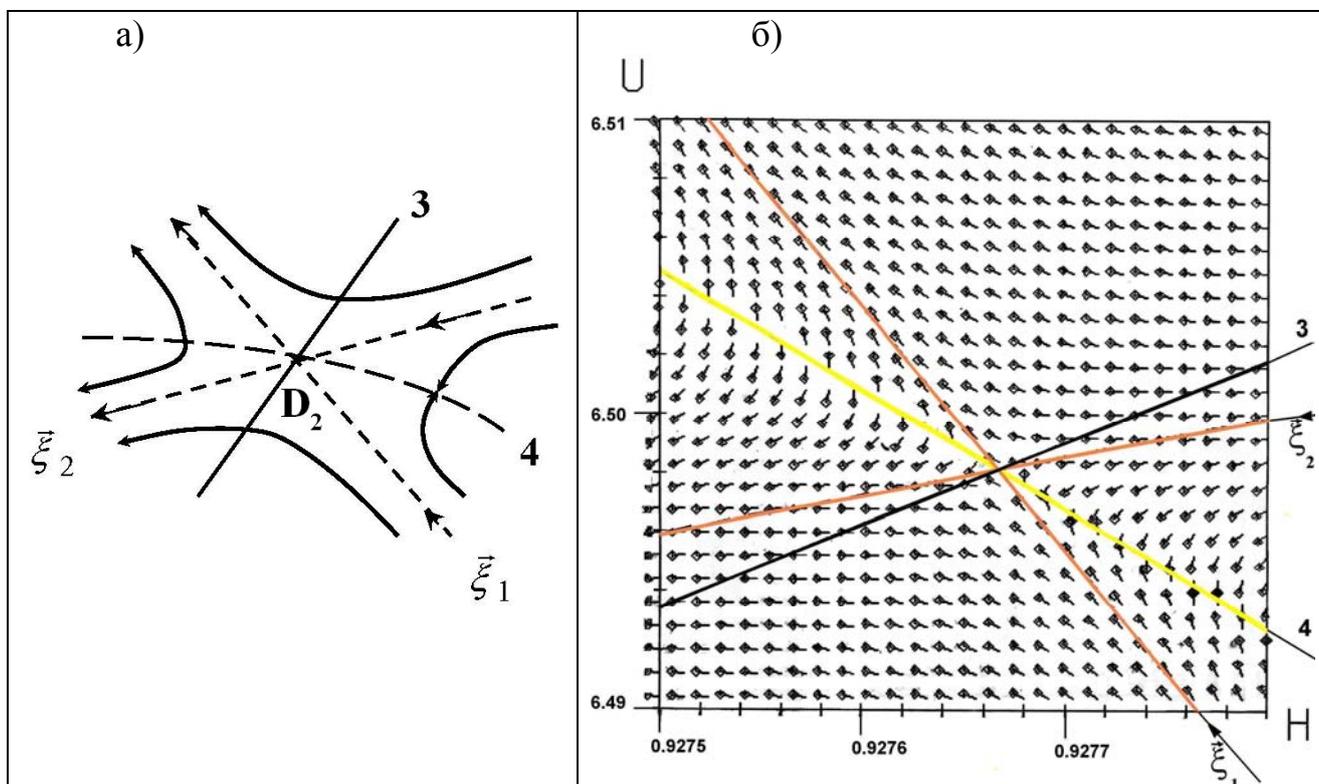


Рис. 8. Картины интегральных кривых в окрестности точки D_2

Процесс ионизации как движение вдоль интегральных кривых

Ионизация газа, связанная с переходом через газодинамическую скорость звука $V_x^2 = \gamma P / \rho$, предполагает прохождение интегральной кривой через газовую параболу в особой точке D_2 вдоль направления $\vec{\xi}_1$ (рис. 8). Решив численно уравнение (12) или эквивалентную автономную систему с начальными данными на прямой $\vec{\xi}_1$ в окрестности D_2 , найдем интегральную кривую, вдоль которой возможен переход из дозвуковой области в сверхзвуковую область. Соответствующая интегральная кривая представлена сплошной линией со стрелками на рис. 9а для $\dot{m} = 0.12$. В сверхзвуковой области, не доходя линии Жюге 5, данная кривая поворачивает на МГД-гиперболе, движется вдоль нее и заканчивается в точке A_2 , являющейся устойчивым узлом. При этом выход в точку A_1 невозможен. На рис. 9б интегральная кривая (сплошная линия черного цвета) отвечает значению расхода $\dot{m} = 0.124$. В данном случае интегральная кривая, выпущенная вдоль направления $\vec{\xi}_1$, проходит мимо всех точек равновесия A_2 и A_1 . Точка A_1 является седлом. Формально попасть в эту точку можно вдоль собственного направления $\vec{\xi}_1$ по касательной к МГД-гиперболе в данной точке (см. рис. 6). В этом случае стационарные точки A_1 и A_2 , расположенные по разные стороны линии Жюге, должны быть близки друг к другу. Можно предположить, что существуют значения параметров, отвечающие условию попадания в точку A_1 .

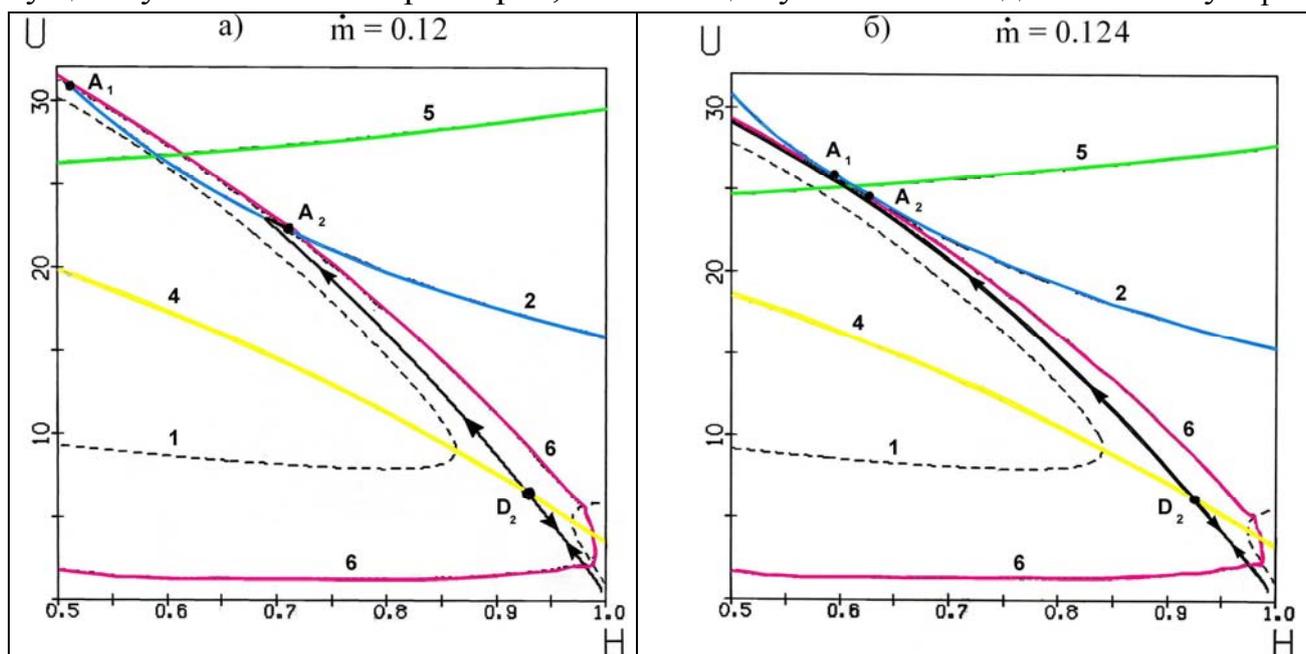


Рис. 9. Примеры интегральных кривых (сплошные линии черного цвета со стрелками) в отсутствии структуры фронта ионизации

На рис. 9а, 9б сплошные кривые черного цвета со стрелками в дозвуковой области также отвечают движению вдоль интегральной кривой, с последующим прохождением через особую точку D_2 . Видно, что данные интегральные кривые не пересекают кривую 1 ($\alpha = 0$). Это означает, что в двух рассматриваемых примерах процесс ионизации нельзя рассматривать как переход из одного равновесного состояния ($\alpha = 0$) в другое равновесное состояние, отвечающее точке A_2 и при определенных условиях точке A_1 . В данных примерах отсутствует структура фронта ионизации. Следует заметить, что интегральные кривые на рис. 9 в областях, отвечающих дозвуковому и сверхзвуковому течениям, пересекают равновесную кривую 6 или приближаются к ней. Допуская расширенную трактовку понятия структуры, процесс ионизации можно рассматривать как переход из одного ионизационно равновесного состояния ($F_{\beta\alpha} = 0$) в дозвуковой области в другое ионизационно равновесное состояние в сверхзвуковой области.

Варьирование параметров задачи позволило также выявить структуру фронта ионизации в общепринятом смысле. При условии, что в пространстве переменных (H, U, α) в точке $H=1$ и $U=1$ не только $\alpha=0$, но и $T=1$, получим из (7) соотношение, связывающее поток импульса и расход

$$\Gamma = 0.5 + \beta / 2 + \dot{m}^2 . \quad (20)$$

Соответствующий пример интегральной кривой с учетом (20), отвечающей структуре фронта ионизации, представлен на рис. 10 для $\dot{m} = 0.1279$. В сверхзвуковой области (рис. 10а) интегральная кривая, выходящая из D_2 вдоль направления $\bar{\xi}_1$ (рис. 8), заканчивается в A_2 , близко расположенной к A_1 .

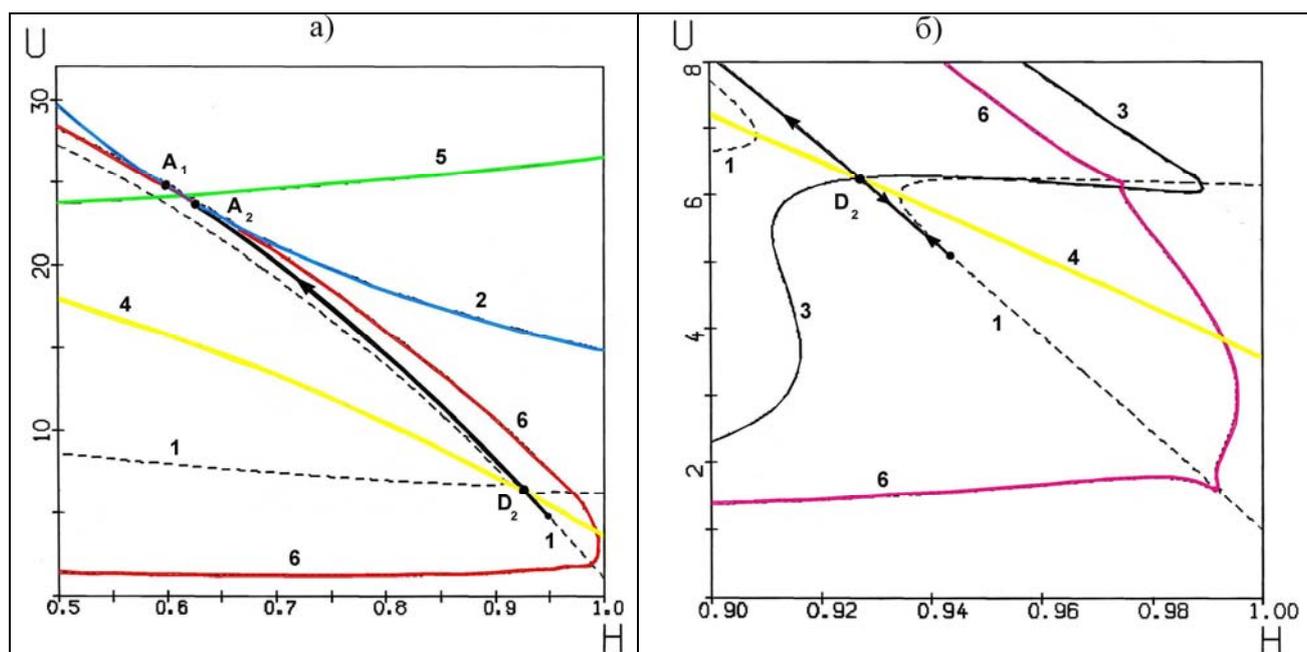


Рис. 10. Пример интегральной кривой (сплошные линии черного цвета со стрелками), отвечающей структуре фронта ионизации для $\dot{m} = 0.1279$

В дозвуковой области (рис. 10б) интегральную кривую можно рассчитать в направлении, противоположном $\vec{\xi}_1$. Эта часть интегральной кривой пересекает линию $\alpha = 0$ (кривая 1). Соответственно, весь процесс ионизации начинается из стационарного состояния, связанного с течением нейтрального газа.

Таким образом, доказано, что структура стационарного неравновесного фронта ионизации в канале плазменного ускорителя существует. В этом случае процессы на фронте ионизации начинаются из состояния с нулевой степенью ионизации $\alpha = 0$, отвечающей нейтральному газу, и завершаются в стационарной особой точке A_2 .

Расчет течения в канале с протяженным участком постоянного сечения

При наличии стационарных особых точек следует говорить о весьма ограниченной возможности того, что процесс ионизации завершится в точке A_1 , расположенной выше линии Жюге. Как правило, процесс ионизации завершается в точке A_2 , лежащей ниже линии Жюге. На это указывают направления интегральных кривых в окрестности точек A_1 , A_2 и МГД-гиперболы (см. рис. 6, 7), а также интегральные кривые на рис. 9а и 10а.

В тоже время расчеты течения ионизирующегося газа, представленные, в частности, в работе [19] и на рис. 2, демонстрируют последовательный переход сначала через газодинамическую скорость звука C_g и практически сразу через скорость сигнала C_s . Можно ли в таком случае говорить о противоречии между теорией и расчетами? На самом деле это всего лишь кажущееся противоречие. Фронт ионизации в рассчитанных квазистационарных течениях расположен в сужающейся и наиболее узкой части канала ускорителя. В этом случае попадание в стационарную точку A_2 на фронте никак не противоречит дальнейшему переходу скорости потока через скорость сигнала в рамках другого течения, возникающего за фронтом.

Иллюстрацией сказанного мог бы служить расчет, в котором местоположения последовательных переходов скорости потока через газодинамическую скорость звука и далее через скорость сигнала отстояли бы друг от друга на заметном расстоянии. Такой расчет несложно провести, перейдя от соплообразного канала, представленного на рис. 1, к каналу, в котором имеется протяженный участок постоянного сечения, отвечающий наиболее узкой части. Например, рис. 11 соответствует следующему заданию площади поперечного сечения канала: $f(z)=0.3-0.8z(1-z)$, если $z \leq 0.5$; $f(z)=0.1$ для $0.5 \leq z \leq 2$; $f(z)=0.3-0.8(z-1.5)(2.5-z)$, если $2 \leq z \leq 2.5$; и $f(z)=0.8(z-1.5)-0.5$ в случае $2.5 \leq z \leq z_{out}=3$. На данном рисунке протяженный участок CD отвечает постоянной площади поперечного сечения.

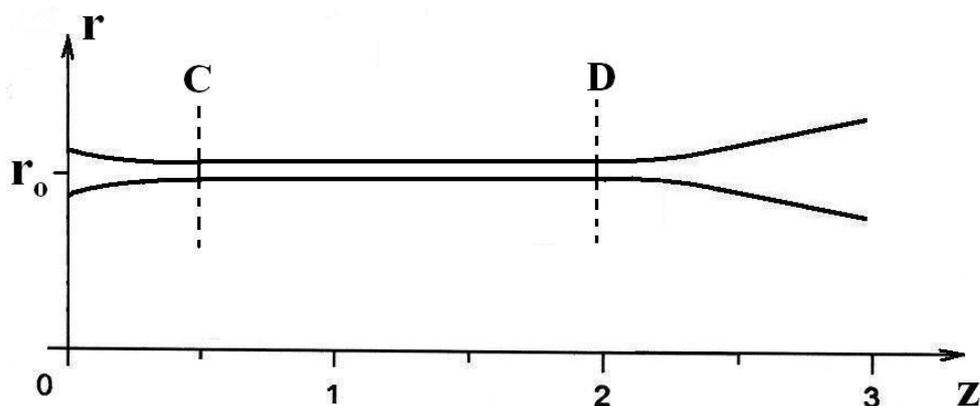


Рис. 11. Форма канала плазменного ускорителя с протяженным участком постоянного сечения

Результаты расчета квазистационарного течения ионизирующегося газа представлены на рис. 12. Здесь исходные параметры расчета соответствуют течению, изображенному на рис. 2, с точностью до разрядного тока: $T_0 = 500^\circ K$, $n_0 = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $L = 20 \text{ см}$, $J_p = 65 \text{ кА}$, $\alpha_{en} = 5 \cdot 10^{-7}$, $r_0 = L/3$. При этом имеем следующие безразмерные параметры $\beta = 0.09$, $T^* = 313$, $\sigma_{01} = 1018.3$, $\sigma_{02} = 0.03$, а единица скорости равна $V_0 = 0.95 \cdot 10^6 \text{ см/с}$. Значение разрядного тока J_p в рассматриваемом течении ионизирующегося газа подобрано таким образом, чтобы фронт ионизации и пик отклонения от равновесия (см. рис. 12е) располагались непосредственно перед началом самой узкой протяженной части канала.

Пересечение кривых на рис. 12в, изображенных красным и синим цветом, с одной стороны, а также красным и зеленым цветом, с другой стороны, определяют место положения переходов скорости потока V соответственно через газодинамическую скорость звука V_g и скорость сигнала V_s . Хорошо видно, что между данными переходами достаточно большое расстояние и между ними расположена область течения, в которой магнитогазодинамические параметры потока существенно не меняются. Плавное изменение параметров потока в канале постоянного сечения происходит за счет диффузии магнитного поля, обусловленной магнитной вязкостью в системе МГД-уравнений (1). При наличии плазменного тока, протекающего в соответствии с уравнением диффузии магнитного поля, плазма ускоряется под действием силы Ампера. В результате скорость потока переходит через магнитогазодинамическую скорость звука V_g в канале постоянного сечения. Данный расчет иллюстрирует то обстоятельство, что процесс ионизации может завершиться на фронте в точке A_2 , а дальнейшее ускорение ионизированной среды за фронтом сопровождается переходом через скорость сигнала.

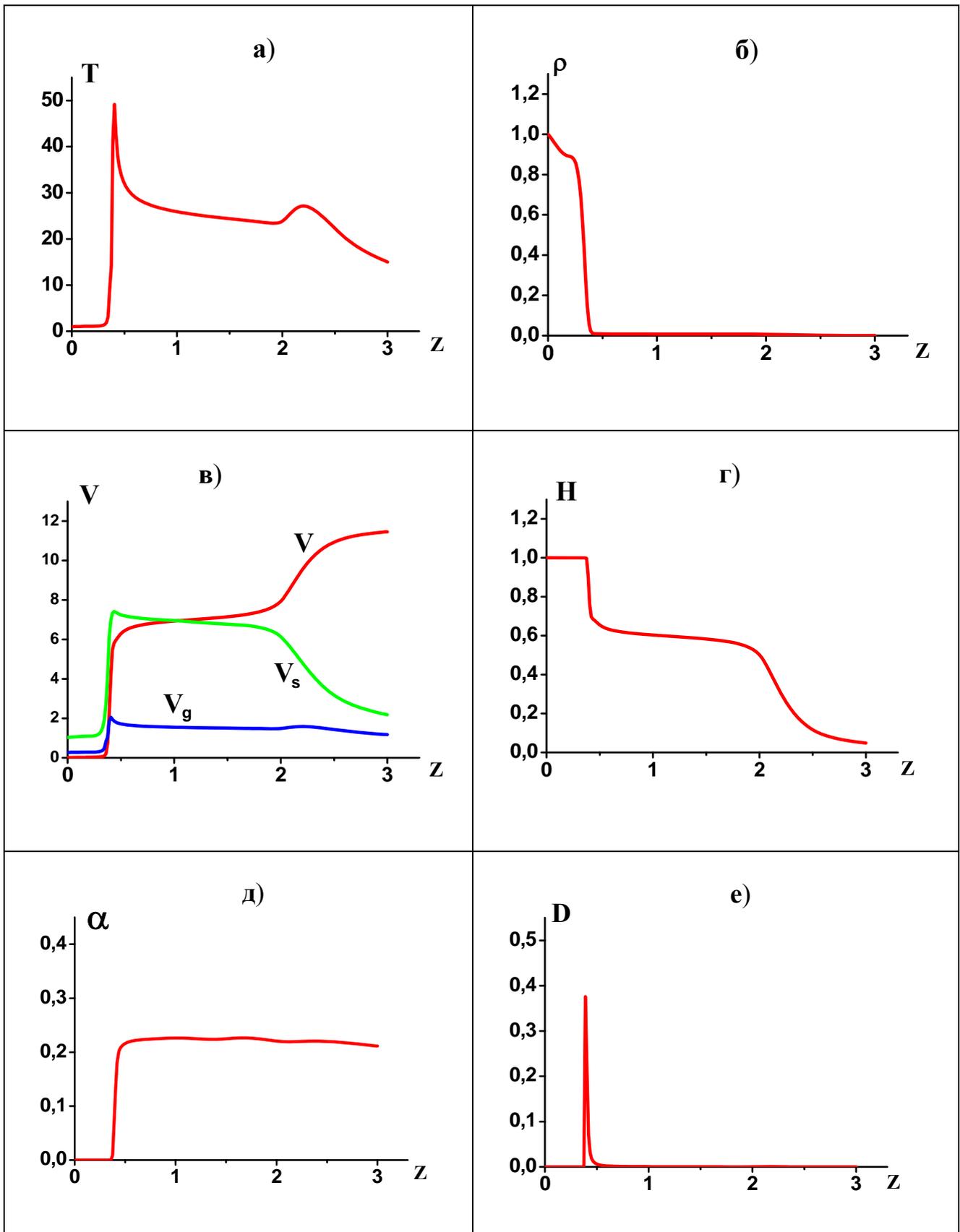


Рис. 12. Распределение параметров потока в канале с протяженным участком постоянного сечения: а) температура, б) плотность, в) скорость, г) магнитное поле, д) степень ионизации, е) отклонение от равновесия

Соотношения, характеризующие процесс ионизации

Согласно представленным исследованиям, процесс ионизации в пределах узкого фронта можно рассматривать как движение вдоль интегральных кривых от одного стационарного и равновесного состояния к другому.

В пределе гипотетически тонкого фронта ионизации его можно представить как поверхность разрыва. В теоретической магнитной газодинамике для обоснования возможности реального существования того или иного разрыва вводится понятие эволюционности (см., например, [2-5]), согласно которому разрыв должен быть устойчив относительно расщепления на несколько других разрывов. Иначе говоря, любые бесконечно малые возмущения в случае эволюционности должны приводить к бесконечно малым возмущениям начального состояния. Условия эволюционности представляют собой требование однозначной разрешимости задачи о взаимодействии поверхности разрыва с малыми возмущениями, когда граничные условия однозначно определяют дальнейшее развитие возмущений. Малые возмущения распространяются налево или направо от разрыва в виде волн. Поэтому для эволюционности необходимо, чтобы число различных волн, уходящих в обе стороны от поверхности разрыва, было на единицу меньше числа соотношений на поверхности разрыва с учетом необходимого вычисления скорости движения разрыва. Несложно определить число дополнительных соотношений для обеспечения эволюционности в том или ином случае.

Исследуемый процесс ионизации в канале плазменного ускорителя всегда является эволюционным по той простой причине, что это реально существующие явления – достаточно включить плазменный ускоритель или иной прибор с аналогичным принципом действия. Другое дело, что процесс ионизации в ускорителе при определенных условиях может быть нестационарным [14,16,25-31]. Поиск условий стационарности и устойчивости процесса ионизации является предметом отдельных исследований, выходящих за рамки данной публикации. Данные явления связаны между собой. Нестационарные режимы могут возникать вследствие развития неустойчивостей. Они могут быть также следствием других крупномасштабных процессов, например, в электрической цепи питания КСПУ.

Для рассматриваемого стационарного неравновесного фронта ионизации электрическое поле предполагается достаточно большим так, что МГД-гипербола (кривая 2 на рис. 4) расположена выше звуковой параболы (кривая 4) и не пересекает ее. Из условия пересечения этих кривых, определяемых соотношениями (11) и (13), следует кубическое уравнение

$$H^3 - 2 \Gamma H - \frac{2(\gamma + 1)}{\gamma} \dot{m} E = 0 .$$

Отсутствие пересечения кривых 2 и 4 означает, что приведенное уравнение $H^3 + p H + q = 0$ имеет одно действительное решение и дискриминант $d = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$. В результате имеем неравенство

$$E^2 > \frac{8\gamma^2 \Gamma^3}{27(\gamma+1)^2 \dot{m}^2}, \quad (21)$$

которое определяет диапазон допустимых значений электрического поля. При условии (20) равенству в (21) отвечает кривая E1 на плоскости переменных (\dot{m}, E) , представленная на рис. 13 для параметра $\beta = 0.15$. В свою очередь, неравенству (21) отвечает область на данной плоскости, расположенная выше кривой E1 и обозначенная стрелками на рисунке.

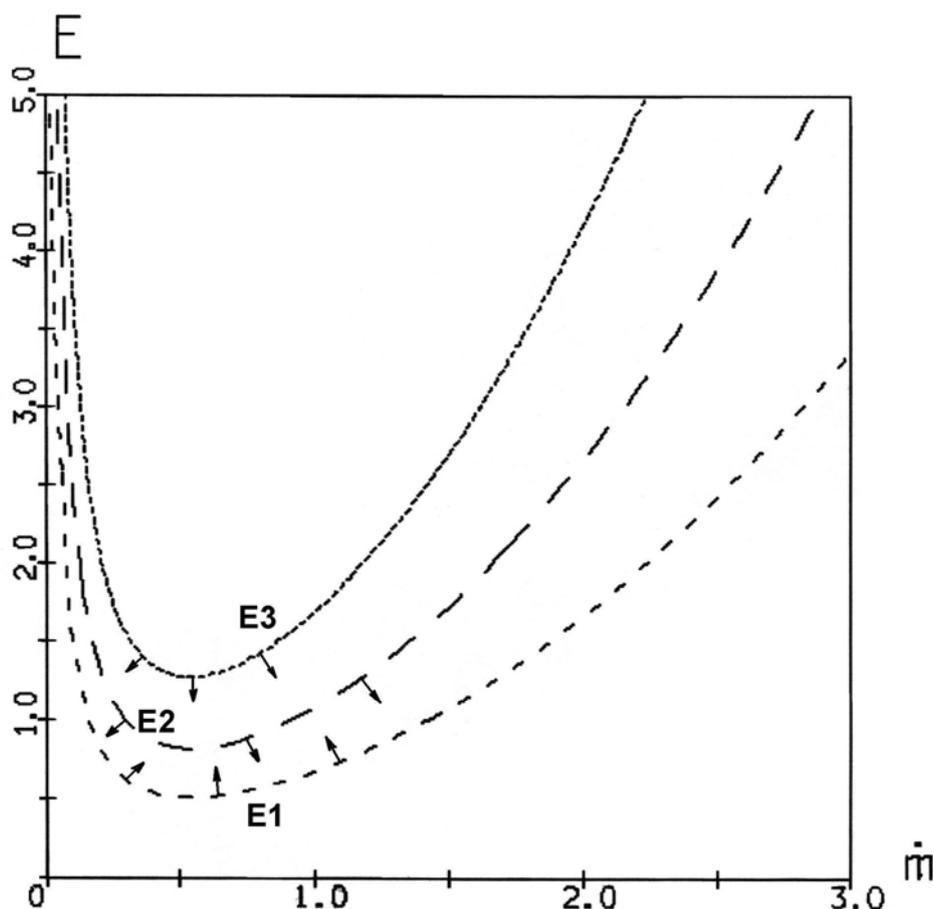


Рис. 13. Границы областей, характеризующие процесс ионизации. Область выше кривой E1 отвечает достаточно сильному электрическому полю: МГД гипербола расположена выше звуковой параболы. Область ниже кривой E2 определяет возможность выхода в особые точки A_1 и A_2 в сверхзвуковом потоке. Область ниже кривой E3 отвечает условию существования особой точки D_2 для перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому потоку

Наличие и точное положение точки D_2 определяется пересечением кривых 3 и 4 на рис. 4. С известной степенью точности положение точки D_2 характеризует точка \bar{D} , являющаяся пересечением параболы 4 и гиперболы $F'_H = 0$ (кривая 7). Эта точка является локальным экстремумом функции $\alpha(H, U)$ вдоль газовой параболы 4. Из соотношений (13) и (15) следует кубическое уравнение

$$H^3 - 2\Gamma H - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} \dot{m} E = 0, \quad (22)$$

решение которого определяет положение точки \bar{D} . Условие существования точки \bar{D} предполагает наличие трех действительных различных корней данного уравнения. При этом соответствующий дискриминант $d < 0$ или

$$E^2 < \frac{8\gamma^4 \Gamma^3}{27(\gamma^2 - 1)^2 \dot{m}^2}. \quad (23)$$

Данное неравенство означает, что существуют точка \bar{D} и близкая к ней точка D_2 . С учетом (20) равенству в (23) соответствует кривая E3 на рис. 13. Область, отвечающая неравенству (23), расположена ниже кривой E3 и указана стрелками на рисунке.

Сравнение рис. 5г, с одной стороны, и рисунков 5а, 5б, 5в, с другой стороны, приводит к условию существования течения ионизирующегося газа с переходом через газодинамическую скорость звука. Очевидно, что возможность прохождения через газовую параболу (13) предопределена знаком степени ионизации в особой точке D_2 . Необходимым условием прохождения через точку D_2 является неравенство

$$\alpha(H_{D_2}, U_{D_2}) > 0. \quad (24)$$

Учитывая близость точек \bar{D} и D_2 , неравенство (24) можно заменить следующим

$$\alpha(H_{\bar{D}}, U_{\bar{D}}) > 0. \quad (25)$$

Согласно соотношению (10) из неравенства (25) следует, что

$$(\gamma + 1) \dot{m}^2 (U^2 - 1) + \gamma (H^2 - 2\Gamma)U - \gamma(1 - 2\Gamma) + 2(\gamma - 1)(H - 1)E / \dot{m} > 0, \quad (26)$$

где $U = -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \frac{E}{\dot{m} H_{\bar{D}}}$ и $H_{\bar{D}}$ является максимальным корнем уравнения (22).

Как показали расчеты, неравенство (26) успешно заменяет условие (24) для перехода из области дозвукового течения в область сверхзвукового течения.

Далее исследуем возможность прийти в стационарные особые точки A_1 и A_2 . На рис. 5а видно, что интегральные кривые пересекают линию Жюге (кривая 5), но не выходят на МГД-гиперболу. В этом случае стационарные точки отсутствуют, а интегральная кривая, вдоль которой происходит переход

через газодинамическую параболу, после прохождения линии Жюге приближается к равновесной кривой (см. также рис. 9б). При этом можно говорить о структуре, вкладывая несколько иной смысл в это понятие и полагая, что осуществляется переход всего лишь из одного ионизационно равновесного состояния ($F_{\beta\alpha} = 0$) в дозвуковой области в другое ионизационно равновесное состояние в сверхзвуковой области.

Условие существования стационарных особых точек A_1 и A_2 связано с тем обстоятельством, что МГД-гипербола $\varphi = 0$ (кривая 2) на рис. 5б и 5в пересекает область поля интегральных кривых между линиями $\alpha = 0$ (кривая 1) и $T = 0$ (кривая 8). Такое пересечение возникает при уменьшении расхода по сравнению со случаем, изображенным на рис. 5а. Ранее было показано, что существует возможность попадания в стационарную особую точку A_1 , расположенную выше линии Жюге. В этом случае точки A_1 и A_2 должны быть расположены близко друг к другу. Однако такая возможность является скорее исключением из правил. Как правило, процесс ионизации завершается в стационарной точке A_2 , если она существует. Точное положение точек A_1 и A_2 определяется пересечением равновесной кривой и МГД-гиперболы (кривые 6 и 2 на рис. 4).

Уменьшая расход или уменьшая электрическое поле при фиксированном расходе, будем иметь последовательное касание МГД-гиперболы сначала с линией $T = 0$ (кривая 8 на рис. 4 и 5), затем с равновесной кривой 6 и, наконец, с линией $\alpha = 0$.

С известной степенью точности, ошибка составляет несколько процентов, момент появления стационарных особых точек A_1 и A_2 можно связать с касанием МГД-гиперболы 2 и кривой 8 (рис. 4 и 5). Касание происходит на линии Жюге (кривая 5). С помощью соотношений (14) и (16) легко найти точку пересечения параболы $T = 0$ и кривой Жюге

$$U_1 = \frac{2\Gamma}{3\dot{m}^2}, \quad H_1 = \sqrt{\frac{2\Gamma}{3}}.$$

Условие касания МГД-гиперболы и кривой $T = 0$ в данной точке приводит к неравенству, определяющему наличие стационарных особых точек A_1 и A_2 ,

$$E^2 < \frac{8\Gamma^3}{27\dot{m}^2}. \quad (27)$$

Данное соотношение с учетом (20) можно переписать следующим образом

$$E^2 < \frac{8}{27\dot{m}^2} \left(0.5 + \frac{\beta}{2} + \dot{m}^2 \right)^3. \quad (28)$$

Равенству в (28) отвечает кривая E2 на рис. 13 в плоскости переменных (\dot{m}, E) для значения параметра $\beta = 0.15$. Область, отвечающая неравенству (28), расположена ниже кривой E2 и обозначена стрелками на рисунке.

Таким образом, на плоскости (\dot{m}, E) условию существования точек A_1 и A_2 соответствует область значений расхода и электрического поля, расположенная в полосе между кривыми E1 и E2 на рис. 13.

Следует заметить, что, согласно имеющимся экспериментальным данным (см., например, [14,35-40]), значения расхода в КСПУ находятся в диапазоне $\dot{m} < 1$. Этому диапазону отвечают рисунки 14, 15 и 16, на которых заштрихованные области, выпадающие из рассмотрения, соответствуют отрицательной степени ионизации в точке \bar{D} или близкой к ней точке D_2 , иначе говоря, заштрихованные области соответствуют неравенствам, противоположным (25) или (26). Вне заштрихованной области значения параметров \dot{m} и E допускают реализацию процесса ионизации с переходом скорости потока ионизирующегося газа через местную газодинамическую скорость звука.

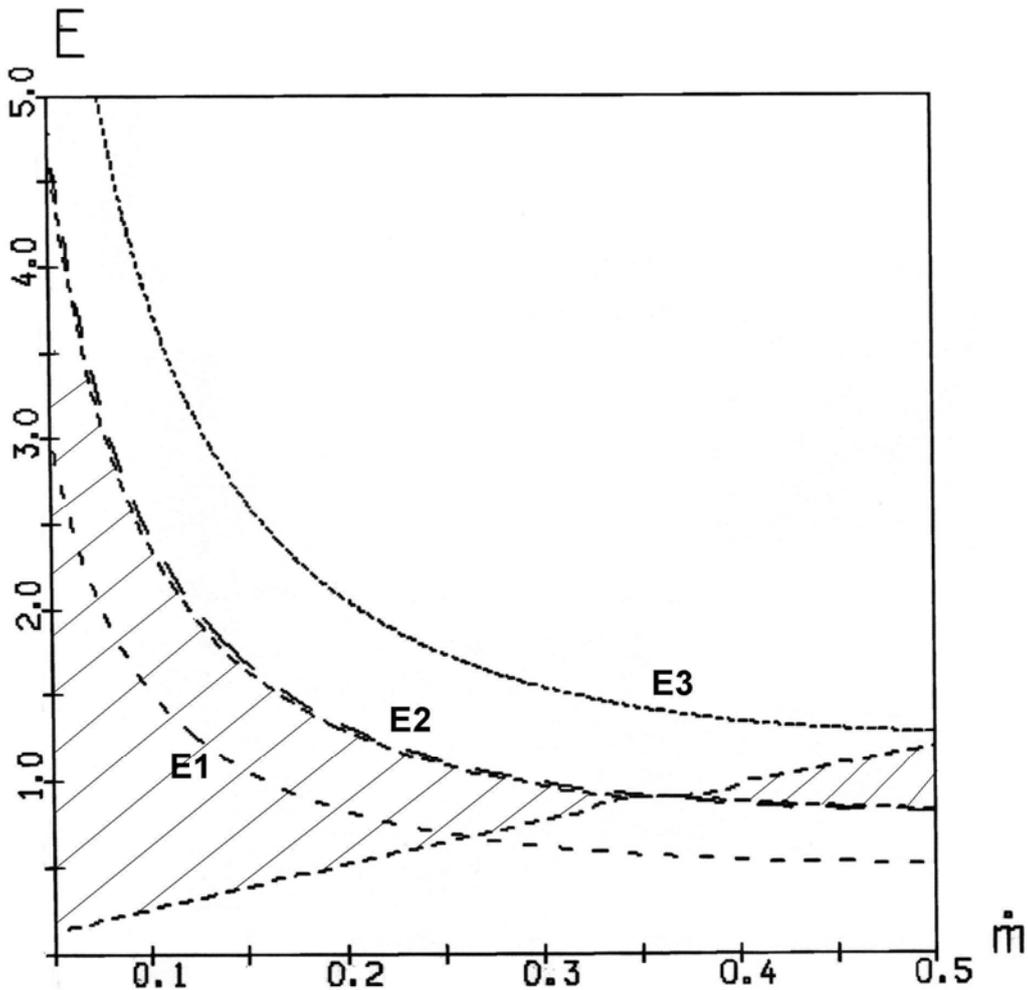


Рис. 14. Границы областей, характеризующие процесс ионизации, исключая запретную (заштрихованную) область, в которой $\alpha(H_D, U_D) < 0$, для значения параметра $\beta = 0.15$

Рис. 14 отвечает значению безразмерного параметра $\beta = 0.15$ ($\beta = 8\pi P_0 / H_0^2$, $H_0 = 2J_p / cr_0$) и соответствующему набору исходных размерных параметров задачи, например, значениям $T_0 = 4000^\circ K$, $n_0 = 2.5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $J_p = 50 \text{ кА}$, $L = 20 \text{ см}$ и $r_0 = L/3$, использованным, в том числе, в расчете течения ионизирующегося газа (см. [19]). Для данных параметров, согласно рисунку, стационарному течению ионизирующегося газа с переходом через газодинамическую скорость звука и выходом в особые стационарные точки A_1 и A_2 соответствуют значения \dot{m} и E в узкой полосе между кривой E2 и заштрихованной областью.

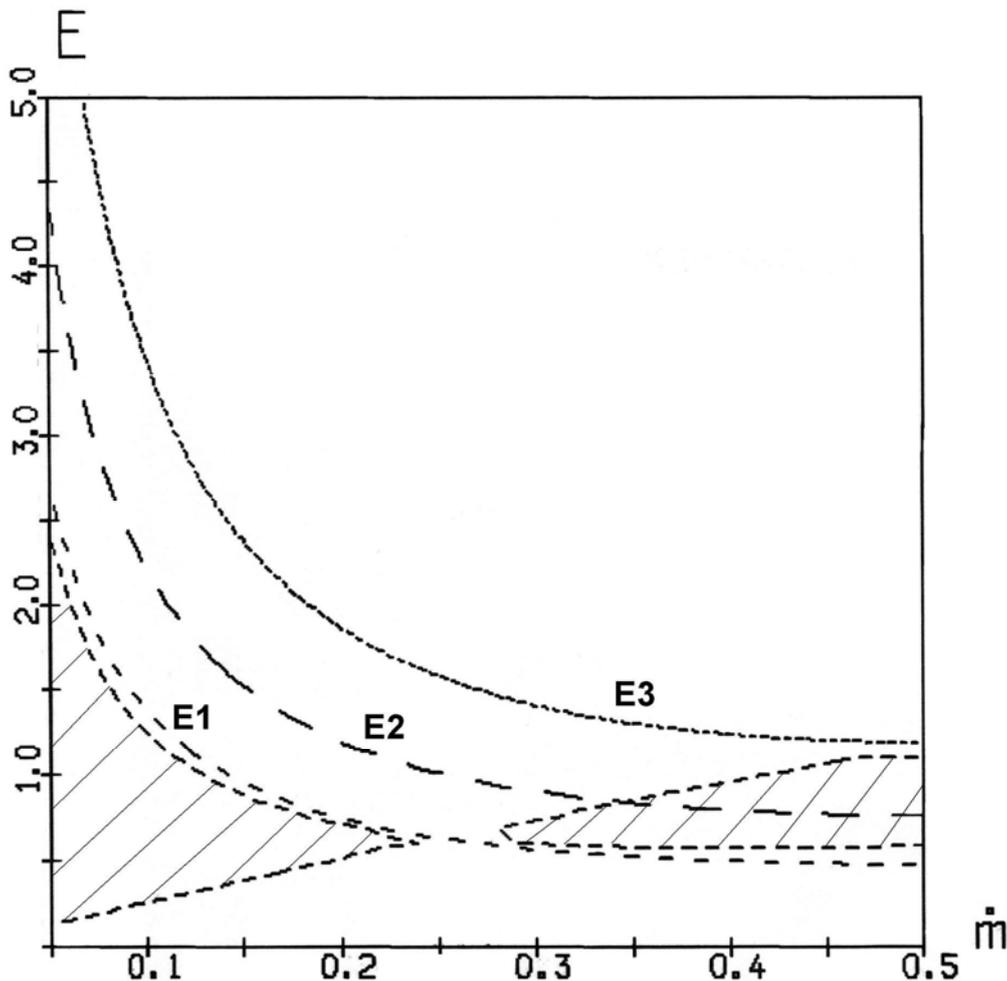


Рис. 15. Границы областей, характеризующие процесс ионизации, исключая запретную (заштрихованную) область ($\alpha(H_D, U_D) < 0$), для значения параметра $\beta = 0.075$

Варьирование параметров n_0 , T_0 и J_p ведет, в частности, к изменению безразмерного параметра β , равного отношению газового давления к

магнитному. Уменьшение n_0 , T_0 и увеличение разрядного тока J_p приводит к уменьшению параметра β и расширению области между кривой E2 и заштрихованной областью, т.е. приводит к расширению области значений параметров \dot{m} и E , для которых возможно существование структуры фронта ионизации с переходом скорости потока через газодинамическую скорость звука и выходом в стационарную особую точку на МГД-гиперболе. Рис. 15 отвечает в два раза меньшим значениям $T_0 = 2000^\circ K$ и соответственно $\beta = 0.075$. Видно, что в этом случае существует достаточно обширная область параметров \dot{m} и E , допускающая структуру фронта ионизации. Наоборот, увеличение n_0 , T_0 и уменьшение разрядного тока означает увеличение параметра β и приводит к сокращению области значений параметров \dot{m} и E , допускающих структуру фронта ионизации. На рис. 16, где $n_0 = 4 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и $\beta = 0.24$, такая область, допускающая структуру фронта, отсутствует для значений расхода $\dot{m} < 0.3$.

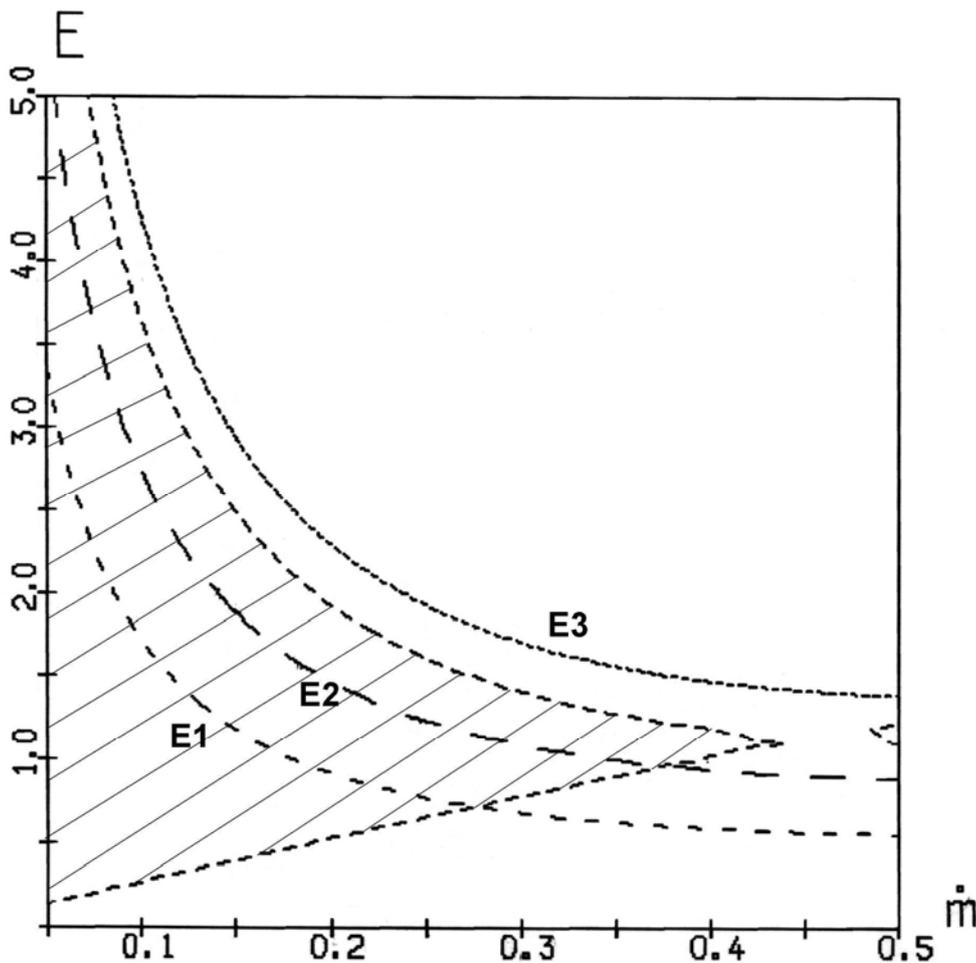


Рис. 16. Границы областей, характеризующие процесс ионизации, исключая запретную (заштрихованную) область для величины $\beta = 0.24$

З а к л ю ч е н и е

Разработаны основы теории процессов в окрестности стационарного неравновесного фронта ионизации, формирующегося в канале квазистационарного плазменного ускорителя. Исследования выполнены в рамках системы МГД-уравнений, дополненных уравнением кинетики ионизации и рекомбинации. Проведен анализ особых точек системы уравнений, общее число которых равно шести с учетом полярности электродов и возможного изменения знака магнитного поля. Представлены поля направлений интегральных кривых для различных параметров задачи. Рассчитаны отдельные интегральные кривые, характеризующие переходы через газодинамическую скорость звука в особой точке, расположенной на границе дозвукового и сверхзвукового потоков.

Выявлена структура фронта ионизации, отвечающая переходам из одного стационарного состояния в другое. При этом процесс ионизации начинается из стационарного состояния в дозвуковой области с нулевой степенью ионизации, отвечающей нейтральному газу, и завершается в сверхзвуковой области в стационарной особой точке МГД-уравнений, являющейся устойчивым узлом, в среде с отличной от нуля степенью ионизации. Допуская иную трактовку понятия структуры, процесс ионизации можно рассматривать как переход из состояния ионизационного равновесия в дозвуковой области в состояние ионизационного равновесия в сверхзвуковой области.

Сформулированы условия, отвечающие возможности осуществления процесса ионизации газа в канале ускорителя, а также условия, определяющие возможность перехода скорости потока ионизирующегося газа через газодинамическую скорость звука и выхода в стационарные особые точки в пределах узкого фронта ионизации, наблюдаемого в расчетах и экспериментах.

Данные исследования докладывались в Институте механики МГУ на семинаре по механике сплошных сред под руководством академика А.Г. Куликовского, В.П. Карликова и О.Э. Мельника. Руководителям семинара адресуются слова искренней благодарности за поддержку и плодотворное обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ. // ДАН СССР. 1959. Т. 29. № 1. С. 52-55.
2. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с. (2-е изд. М.: Логос, 2005. 328 с.).
3. Бармин А.А., Куликовский А.Г. Об ударных волнах, ионизирующих газ, находящихся в электромагнитном поле. // ДАН СССР. 1968. Т. 178. № 1. С. 55-58.
4. Бармин А.А., Куликовский А.Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле. // Итоги науки. Гидродинамика. Т. 5. М.: ВИНТИ.

1971. С. 5-31.
5. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. 2001. 608 с.
 6. Бармин А.А. Фронты рекомбинации при произвольно ориентированном магнитном поле. // Известия АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 8-12.
 7. Бармин А.А., Успенский В.С. Развитие пульсационных режимов в одномерных нестационарных МГД-течениях с выключением электропроводности. // Известия АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 115-122.
 8. Бармин А.А., Успенский В.С. Исследование нестационарного процесса распространения ионизирующей ударной волны в магнитном поле. // ПМТФ. 1989. № 3. С. 20-26.
 9. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука. 1987. 295 с.
 10. Левин В.А., Скопина Г.А. Распространение волн детонации в закрученных потоках газа. // ПМТФ. 2004. Т. 45, №4. С. 3-6.
 11. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Наклонное взаимодействие альфвеновского и контактного разрывов в магнитной гидродинамике. // Известия АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 131-142.
 12. Пушкарь Е.А. Регулярное наклонное взаимодействие догоняющих ударных волн в проводящей среде с магнитным полем. // Известия РАН. МЖГ. 1995. № 6. С. 127-143.
 13. Бармин А.А., Пушкарь Е.А. Встречное наклонное взаимодействие альфвеновского разрыва с быстрой магнитогидродинамической ударной волной. // Известия РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 120-136.
 14. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2008. 613 с.
 15. Морозов А.И. Принципы коаксиальных (квази)стационарных плазменных ускорителей (КСПУ). // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 131-146.
 16. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974, вып. 8. С. 88-163.
 17. Брушлинский К.В., Заборов А.М., Козлов А.Н., Морозов А.И., Савельев В.В. Численное моделирование течений плазмы в КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 147-157.
 18. Козлов А.Н. Особенности динамики плазмы в КСПУ в процессе установления течения. // Физика плазмы. 1992. Т. 18, № 6. С. 714-723.
 19. Козлов А. Н. Кинетика ионизации и рекомбинации в канале плазменного ускорителя. // Известия РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 181-188.
 20. Козлов А. Н. Влияние продольного магнитного поля на эффект Холла в канале плазменного ускорителя. // Известия РАН. МЖГ. 2003. № 4. С. 165-175.
 21. Козлов А. Н. Динамика вращающихся потоков в канале плазменного ускорителя с продольным магнитным полем. // Физика плазмы. 2006. Т. 32, № 5. С. 413-422.

22. Kozlov A.N. Basis of the quasi-steady plasma accelerator theory in the presence of a longitudinal magnetic field. // J. Plasma Physics. 2008. V. 74, No. 2. P. 261-286.
23. Козлов А.Н. Двухжидкостная магнитогидродинамическая модель течений плазмы в квазистационарном ускорителе с продольным магнитным полем. // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 44-55.
24. Козлов А.Н. Исследование приэлектродных процессов в квазистационарных плазменных ускорителях с непроницаемыми электродами. // Физика плазмы. 2012. Т. 38, № 1. С. 15-25.
25. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.
26. Брушлинский К.В. Численное моделирование течений ионизирующегося газа в каналах. // Двумерные численные модели плазмы. / Под ред. Н.П. Козлова и А.И. Морозова. М.: Наука. 1984. С. 139-151.
27. Козлов А.Н. Двумерный характер неустойчивости течений ионизирующегося газа в канале плазменного ускорителя. // Известия АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 187-189.
28. Козлов А.Н. Моделирование двумерных течений ионизирующегося газа и плазмы в коаксиальном ускорителе с учетом теплопроводности, излучения и процессов в электрической цепи. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1985. № 186.
29. Брушлинский К.В., Калугин Г.А., Козлов А.Н. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 50.
30. Козлов А.Н. Численное исследование двумерных течений ионизирующегося газа в приближении ЛТР. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1986. № 174.
31. Брушлинский К.В. Численные модели течений ионизирующегося газа //Энциклопедия низкотемпературной плазмы. / Под ред. В.Е. Фортова. М.: ЯНУС-К. 2008. Серия Б. Т. VII-1, часть 2. С. 84-90.
32. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Куликов Ю.Н., Лесков Л.В., Попов Ю.П., Савичев В.В., Филипов С.С. Магнитогидродинамическая модель нестационарного ускорения плазмы. // ДАН СССР. 1972. Т. 206. № 2. С. 307-310.
33. Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука. 1982. 375 с.
34. Физико-химические процессы в газовой динамике. Т. 2. Физико-химическая кинетика и термодинамика. / Справочник под ред. Г.Г. Черного, С.А. Лосева. М.: Научно-издательский центр механики. 2002. 367 с.
35. Волошко А.Ю., Гаркуша И.Е., Морозов А.И., Соляков Д.Г., Терешин В.И., Царенко А.В., Чеботарев В.В. Исследование локальной картины течения плазмы в двухступенчатом КСПУ. // Физика плазмы. 1990. Т. 16, № 2. С. 168-175.
36. Tereshin V.I., Bandura A.N., Byrka O.V., Chebotarev V.V., Garkusha I.E., Landman I., Makhlij V.A., Neklyudov I.M., Solyakov D.G., Tsarenko A.V.

- Application of powerful quasi-steady-state plasma accelerators for simulation of ITER transient heat loads on divertor surfaces. // *Plasma Phys. Contr. Fusion*. 2007. V. 49. P. A231-A239.
37. Белан В.Г., Золотарев С.П., Левашов В.Ф., Майнашев В.С., Морозов А.И., Подковыров В.Л., Скворцов Ю.В. Экспериментальное исследование квазистационарного плазменного ускорителя, питаемого от индуктивного и емкостного накопителей. // *Физика плазмы*. 1990. Т.16, № 2. С. 176-185.
38. Klimov N., Podkovyrov V., Zhitlukhin A., Kovalenko D., Bazylev B., Landman I., Pestchanyi S., Janeschitz G., Federici G., Merola M., Loarte A., Linke J., Hirai T., Compan J. Experimental study of PFCs erosion under ITER-like transient loads at plasma gun facility QSPA // *Journal of Nuclear Materials*. 2009. V. 390-391. P. 721-726.
39. Ананин С.И., Асташинский В.М., Баканович Г.И., Костюкевич Е.А., Кузмицкий А.М., Маньковский А.А., Минько Л.Я., Морозов А.И. Исследование процессов формирования плазменных потоков в квазистационарном сильноточном плазменном ускорителе (КСПУ). // *Физика плазмы*. 1990. Т.16, № 2. С. 186-196.
40. Astashynski V.M., Ananin S.I., Askerko V. V., Kostyukevich E.A., Kuzmitski A.M., Uglov V.V., Anishchik V.M., Astashynski V.V., Kvasov N.T., Danilyuk L.A. Materials surface modification using quasi-stationary plasma accelerators. // *J. Surface and Coating Technology*. 2004. V. 180-181. P. 392-395.
41. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Физматлит, 1970. 672 с.
42. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
43. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. М.: Наука, 1971. 543 с.
44. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 525 с.
45. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.
46. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 661 с.
47. Дегтярев Л.М., Фаворский А.П. Поточный вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами. // *ЖВМ и МФ*. 1969. Т. 9, № 1. С. 211-218.
48. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1974. 331 с.
49. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1980. 351 с.
50. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. М.: МГИУ, 2007. 254 с.