



Брюно А.Д., Парусникова А.В.

Разложения и асимптотики
решений пятого уравнения
Пенлеве вблизи
бесконечности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Парусникова А.В. Разложения и асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве вблизи бесконечности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 61. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-61>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

РАЗЛОЖЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ
РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ
ВБЛИЗИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Москва, 2012 г.

УДК 517.925

А. Д. Брюно, А.В. Парусникова. Разложения и асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве вблизи бесконечности. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2012.

Рассматривается пятое уравнение Пенлеве в окрестности бесконечности. Методами двумерной степенной геометрии вычисляются все экспоненциальные разложения его решений. Методами трёхмерной степенной геометрии вычисляются некоторые степенно-эллиптические и степенно-периодические асимптотики его решений.

A. D. Bruno, A. V. Parusnikova. Expansions and asymptotic forms of solutions to the fifth Painlevé equation near infinity. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2012.

We consider the fifth Painlevé equation in a neighbourhood of infinity. By means of two-dimensional power geometry we have calculated all exponential expansions of its solutions. By means of three-dimensional power geometry we have calculated some power-elliptic and power-periodic asymptotic forms of its solutions.

© ИМП им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2012 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 11-01-00023 и 12-01-31414 мол-а.

E-mails: abruno@keldysh.ru, parus-a@mail.ru

сайт: www.keldysh.ru

Персональная стр. А.Д. Брюно:

http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno

1 Постановка задачи и принятые обозначения

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) (w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2} \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \quad (1.1)$$

где z — независимая, w — зависимая комплексные переменные, $w' = dw/dz$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры. Уравнение (1.1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$. В литературе пятое уравнение Пенлеве часто обозначается P_5 .

В этой работе исследуется уравнение (1.1) вблизи точки $z = \infty$. В её окрестности для всех значений параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ методами двумерной степенной геометрии [1, 2] найдены все экспоненциальные асимптотические разложения решений уравнения (1.1), а также методами трёхмерной степенной геометрии [3, 4] найдены степенно-эллиптические и степенно-периодические асимптотики решений уравнения (1.1).

В пунктах 3–7 теория двумерной степенной геометрии, изложенная в п. 2, применяется к уравнению P_5 (используются обозначения п. 2), в п. 10–13 к уравнению P_5 применяется теория трёхмерной степенной геометрии, изложенная в п. 9 (используются введённые в п. 9 обозначения). В п. 8 и 14 приведены полученные результаты.

В п. 2–5, 7 данной работы приняты обозначения: $C \in \mathbb{C}$, $C \neq 0$ — произвольная постоянная. Коэффициенты $c_s, c_{s,l}, a_{s,m}, d_{s,m}, a_{s,l,m}, d_{s,l,m} \in \mathbb{C}$, $l = 1, 2, 3, 4, m = 1, 2$ — однозначно определённые постоянные: при фиксированных значениях параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, коэффициенты однозначно определяются как решения невырожденной системы линейных уравнений. В уравнениях c_s обозначает коэффициент при z^s .

В п. 6, 10, 11 данной работы $C, C_+, C_-, C_0 \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные.

Мы фиксируем главную ветвь квадратного корня (такую, что $\sqrt{1} = 1$).

Часть I

Двумерная степенная геометрия

2 Нахождение экспоненциальных разложений [2]

Рассмотрим ОДУ порядка n вида

$$f(z, w) = 0, \quad (2.1)$$

где $f = f(z, w)$ — дифференциальная сумма, т.е. многочлен от переменных z, w и производных $dw/dz, \dots, dw^n/dz^n$. Каждому дифференциальному моному $a(z, w)$ в дифференциальной сумме (2.1) ставим в соответствие его двумерный показатель степени $Q(a(z, w)) = (q_1, q_2)$ по следующим правилам:

$$Q(cz^r w^s) = (r, s); \quad Q\left(\frac{d^l w}{dz^l}\right) = (-l, 1);$$

$$Q(a(z, w)b(z, w)) = Q(a(z, w)) + Q(b(z, w)).$$

Множество двумерных показателей дифференциальных мономов в дифференциальной сумме f называется носителем дифференциальной суммы f и обозначается $\mathbf{S}(f)$. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ носителя $\mathbf{S}(f)$ называется многоугольником дифференциальной суммы f , граница $\partial\Gamma(f)$ многоугольника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$ и ребер $\Gamma_j^{(1)}$. Они называются обобщёнными гранями $\Gamma_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует укороченная сумма

$$\hat{f}_j^{(d)}(z, w) = \sum_{i \in I} a_i(z, w), \quad \text{где } I = \{i : Q(a_i(z, w)) \in \mathbf{S}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}\}.$$

Укороченное уравнение — это уравнение вида $\hat{f}_j^{(d)}(z, w) = 0$, его решение называется укороченным решением уравнения $f(z, w) = 0$.

Определим на плоскости (p_1, p_2) нормальные конусы $U_j^{(d)}$ к граням $\Gamma_j^{(d)}$: для ребра $\Gamma^{(1)}$ с внешней нормалью $N = (n_1, n_2)$ нормальный конус $U^{(1)} = \{(p_1, p_2) : (p_1, p_2) = \lambda N, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}$, для вершины $\Gamma^{(0)}$, принадлежащей ребрам $\Gamma_1^{(d)}$ и $\Gamma_2^{(d)}$ с внешними нормальями N_1 и N_2 , нормальный конус $U^{(0)} = \{(p_1, p_2) : (p_1, p_2) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0\}$. Плоскость (p_1, p_2) представляется в виде объединения непересекающихся нормальных конусов к обобщённым граням многоугольника $\Gamma(f)$.

Пусть у уравнения $f(z, w) = 0$ есть соответствующее грани $\Gamma_j^{(d)}$ асимптотическое разложение решения вида

$$w = c_r z^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s z^s, \quad \text{где } r, s, c_r, c_s = \text{const}, r, s, c_r, c_s \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$\mathbf{K} \subset \{s : s > r\}$ для разложений при $z \rightarrow 0$ и $\mathbf{K} \subset \{s : s < r\}$ для разложений при $z \rightarrow \infty$; множество \mathbf{K} счётно, т.е. рассмотрим решение в виде степенного разложения [1] $w = b_0(z)$ с вещественными показателями степени. Обозначим через $\pi(g)$ максимальный порядок производной, входящей в некоторую дифференциальную сумму g . Очевидно, что для $g = f$ порядок

$\pi(f) = n$. Если $\pi(f_j^{(d)}) < n$, то разложение (2.2) может иметь экспоненциальную добавку вида

$$C \exp(\varphi(z)), \quad (2.3)$$

где $\varphi = \varphi(z)$ таково, что $\varphi'(z)$ — степенное разложение с вещественными показателями степени и с вещественными коэффициентами (разложение вида (2.2)).

Более того, в [2] сформулирована следующая

Теорема 2.1 *Каждой экспоненциальной добавке (2.3) соответствует её характеристический многочлен $\mu(k)$ порядка $\pi(f)$. Если ни одно из целых чисел $k > 1$ не является корнем многочлена $\mu(k)$, то степенное разложение (2.2) решения уравнения $f(z, w) = 0$ и его экспоненциальная добавка (2.3) продолжаются в виде экспоненциального разложения*

$$w = b_0(z) + C \exp(\varphi(z)) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(z) C^k \exp(k\varphi(z)) \quad (2.4)$$

решений полного уравнения $f(z, w) = 0$, где $b_k(z), \varphi'(z)$ — степенные разложения.

Опишем вычисления добавки (2.3) и её характеристического многочлена $\mu(k)$. После подстановки $w = b_0(z) + u$ исходное уравнение (2.1) принимает вид

$$f(z, b_0(z) + u) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{f}(z, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(z)u + g(z, u) = 0, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{M}(z)$ — линейный дифференциальный оператор, и u всех точек $Q = (q_1, q_2)$ носителя $\mathbf{S}(g)$ координата $q_2 \geq 2$. Так что $u \equiv 0$ является решением уравнения (2.5), соответствующим рассматриваемому степенному решению (2.2) уравнения (2.1). При этом

$$\mathcal{M}(z) = \frac{\delta f}{\delta w} \text{ на } w = b_0(z). \quad (2.6)$$

Многоугольник $\Gamma(\tilde{f})$ уравнения (2.5) имеет горизонтальное ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с $q_2 = 1$, соответствующее сумме $\mathcal{M}(z)u$, т. е. $\Gamma_1^{(1)} = \Gamma(\mathcal{M}(z)u)$. После логарифмического преобразования

$$\zeta = d \ln u / dz \quad (2.7)$$

укороченное уравнение $\mathcal{M}(z)u = 0$ перейдёт в уравнение

$$h(z, \zeta)u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(z)u = 0, \quad (2.8)$$

где $h(z, \zeta)$ — дифференциальная сумма, и конус задачи

$$\tilde{\mathcal{K}}_\omega = \{\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) : \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 > 0, \text{sgn } \tilde{p}_1 = \omega\}, \quad (2.9)$$

$$\text{где } \omega = \begin{cases} 1, & z \rightarrow \infty \\ -1, & z \rightarrow 0 \end{cases}. \quad (2.10)$$

Многоугольник $\Gamma(h)$ обозначим $\tilde{\Gamma}$, а его грани — как $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$. Пусть $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ — ребро с внешней нормалью $\tilde{N}_i = (1, \rho)$, лежащей в конусе задачи $\tilde{\mathcal{K}}_\omega$. Тогда ребру $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(z, \zeta) = 0$, которое является алгебраическим. Полагая $\zeta = \varkappa z^\rho$, получаем для \varkappa определяющее уравнение $\hat{h}_i^{(1)}(1, \varkappa) = 0$. Пусть $\varkappa = \varkappa^*$ — один из его корней. Ему соответствуют однозначное степенное разложение решения уравнения (2.8)

$$\zeta = \varkappa^* z^\rho + \sum_{\sigma \in \mathbf{K}} \varkappa_\sigma z^\sigma \stackrel{def}{=} \varphi'(z), \quad \text{где } \mathbf{K} \subset \{\omega \operatorname{Re} \sigma < \omega \operatorname{Re} \rho\}, \quad (2.11)$$

и характеристический многочлен $\mu(k) = \hat{h}_i^{(1)}(1, \varkappa^* k)$. Его можно получить из оператора $\hat{h}_i^{(1)}(z, \zeta, \frac{d}{d\zeta}, \dots, \frac{d^m}{dz^m})$, заменяя в нём $\frac{d^l}{dz^l}$, $l = 0, 1, \dots, m$, на $k^l \zeta^l$, а ζ — на \varkappa^* . Подробнее см. в [2].

Для вычисления разложений, отвечающих горизонтальному ребру $\Gamma_j^{(1)}$ многоугольника $\Gamma(f)$, для точек которого $q_2 = m \in \mathbb{N}$, будем использовать аналогичную технику, описанную в [2].

В соответствующем укороченном уравнении

$$\hat{f}_j^{(1)}(z, w) = 0, \quad (2.12)$$

согласно [1, § 5], сделаем логарифмическое преобразование $\zeta = d \ln w / dz$, получим уравнение $h(z, \zeta) w^m \stackrel{def}{=} \hat{f}_j^{(1)}(z, w) = 0$, где $h(z, \zeta)$ — дифференциальная сумма, конус задачи определён формулой (2.9). Дальнейшие вычисления для w аналогичны описанным выше вычислениям для u .

Вернёмся к полному уравнению (2.1). Пусть множество Σ — проекция носителя $\mathbf{S}(f)$ на ось q_2 параллельно оси q_1 . Положим $\Sigma' = \Sigma - m$, т. е. Σ' — это сдвинутое на m множество Σ . Наконец, Σ'_+ — это множество всевозможных сумм чисел множества Σ' , т. е. $\Sigma'_+ = \{k : k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i, k_i \in \Sigma' \cup 0\}$.

Теорема 2.2 Пусть (2.12) — укороченное уравнение для $f(z, w) = 0$, соответствующее горизонтальному ребру высоты m . Если ни одно из чисел $k \in \Sigma' + 1$, $k \neq 1$ не является корнем характеристического многочлена $\mu(\varkappa^*, k)$, то решения (2.3) укороченного уравнения (2.12) продолжаются в виде экспоненциального разложения

$$w = C \exp \varphi(z) + \sum_k b_k(z) C^k \exp(k\varphi(z)), \quad \text{где } k \in \Sigma'_+ + 1, \quad k \neq 1, \quad (2.13)$$

решений полного уравнения $f(z, w) = 0$, где $b_k(z)$ и $\varphi'(z)$ — степенные разложения.

3 Пятое уравнения Пенлеве

Уравнение (1.1) представим в виде дифференциальной суммы, т. е. умножим его на $z^2w(w-1)$ и перенесём все его члены в правую часть:

$$f(z, w) \stackrel{def}{=} -z^2w(w-1)w'' + z^2 \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2} \right) (w')^2 - zw(w-1)w' + \\ + (w-1)^3(\alpha w^2 + \beta) + \gamma zw^2(w-1) + \delta z^2w^2(w+1) = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (1.1) инвариантно относительно замены

$$(w, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{\tilde{w}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma} \right). \quad (3.2)$$

4 Случай $\alpha\beta\delta \neq 0$

При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ изобразим носитель $\mathbf{S}(f)$ левой части уравнения (3.1), его выпуклую оболочку $\Gamma(f)$, её вершины $\Gamma_j^{(0)}$, рёбра $\Gamma_j^{(1)}$ (рис. 1) и нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(0)}$, $\mathbf{U}_j^{(1)}$ к вершинам и рёбрам соответственно (рис. 2).

Все укороченные уравнения $\hat{f}_j^{(0)}(z, w) = 0$ для вершин $\Gamma_j^{(0)}$ многоугольника $\Gamma(f)$ имеют вид: $\hat{f}_1^{(0)}(z, w) \stackrel{def}{=} -\beta$, $\hat{f}_2^{(0)}(z, w) \stackrel{def}{=} \delta z^2w^2$, $\hat{f}_3^{(0)}(z, w) \stackrel{def}{=} \delta z^2w^3$, $\hat{f}_4^{(0)}(z, w) \stackrel{def}{=} -\alpha w^5$, т. е. являются алгебраическими и либо не имеют решений, либо имеют лишь тривиальное решение $w = 0$, поэтому далее рассматриваем только рёбра. В случае $\alpha\beta \neq 0$, $\gamma\delta = 0$ вершинам многоугольника уравнения P_5 также соответствуют только алгебраические укороченные уравнения.

Как видно на рис. 2, при условии $\alpha\beta\delta \neq 0$, из нормальных конусов $\mathbf{U}_j^{(1)}$ рёбер $\Gamma_j^{(1)}$ с полуплоскостью $p_1 > 0$ пересекаются только нормальные конусы $\mathbf{U}_1^{(1)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$, $\mathbf{U}_3^{(1)}$. Следовательно, степенные асимптотики $w = c_r z^r$ решений уравнения (3.1) при $z \rightarrow \infty$ могут быть найдены среди решений вида $c_r z^r$ укороченных уравнений $\hat{f}_1^{(1)} = 0$, $\hat{f}_2^{(1)} = 0$, $\hat{f}_3^{(1)} = 0$, соответствующих рёбрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$. Все эти укороченные уравнения — алгебраические, поэтому их степенные решения не имеют критических чисел (определение см. в [1]). Рассмотрим эти уравнения последовательно.

Рёбру $\Gamma_1^{(1)}$ (рис. 1) соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} -\beta + \delta z^2w^2 = 0 \quad (4.1)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{\lambda(1, -1), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = -1$. Поэтому ищем решение уравнения (4.1) в виде $w = c_{-1}z^{-1}$, получаем, что

$$w_l = (-1)^l \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \frac{1}{z}, \quad l = 1, 2. \quad (4.2)$$

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (3.1) и укороченного решения (4.2), образуют векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$, то, согласно [1], разложение идёт по целым степеням z . Получаем два степенных разложения:

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \frac{1}{z} + \left(-\frac{2\beta}{\delta} + (-1)^l \frac{\gamma}{2\delta} \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \right) \frac{1}{z^2} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-s,l}}{z^s}, \quad l = 1, 2. \quad (4.3)$$

Согласно (2.6), оператор $\mathcal{M}(z)$ имеет вид

$$c_{-1}z \left(\frac{d^2}{dz^2} + 2\delta \right) + 2c_{-1} \frac{d}{dz} + 3\beta + 3\delta c_{-1}^2 - 2\gamma c_{-1} + 2\delta c_{-2} + (c_{-2} - c_{-1}^2) \frac{d^2}{dz^2} + \dots$$

Применим $\mathcal{M}(z)$ к u , сделаем логарифмическую замену (2.7), получим, сократив на u :

$$h(z, \zeta) = c_{-1}z (\zeta^2 + \zeta' + 2\delta) + 2c_{-1}\zeta + 3\beta + 3\delta c_{-1}^2 - 2\gamma c_{-1} + 2\delta c_{-2} + (c_{-2} - c_{-1}^2) \zeta^2 + \dots$$

Носитель и многоугольник этой суммы показаны на рис. 3. С конусом задачи \mathcal{K}_+ (2.9) пересекается только нормальный конус правому вертикальному ребра $H_1^{(1)}$, которому отвечает укороченное уравнение $\hat{h}_1^{(1)}(z, \zeta) \stackrel{def}{=} c_{-1}(\zeta^2 + 2\delta)$, $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{-2\delta}$, т.е. $\varkappa_m^* = (-1)^m \sqrt{-2\delta}$, $m = 1, 2$, $\hat{h}_1^{(1)}(1, k\varkappa^*) = 2\delta_{-1}(-k^2 + 1) = \mu(k)$. Многочлен $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 2.1 получаем четыре семейства экспоненциальных разложений (2.4), соответствующих двум значениям \varkappa^* . Степенные разложения для ζ выглядят следующим образом:

$$\varphi'(z)_{l,m} = \zeta = (-1)^m \sqrt{-2\delta} + \frac{\rho_{l,m}}{z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{a_{s,l,m}}{z^s}, \quad l, m = 1, 2. \quad (4.4)$$

Т.е. экспоненциальная добавка (2.3) имеет вид

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = C z^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^m \sqrt{-2\delta} z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^s}\}, \quad l, m = 1, 2, \quad (4.5)$$

где $\rho_{l,m} = -1 + (-1)^{m+l} 2\sqrt{-2\beta} + \frac{(-1)^m \gamma}{\sqrt{-2\delta}}$. Область малости экспоненциальной добавки (4.5) при $|z| \rightarrow \infty$ — это

$$(-1)^m \operatorname{Re}(\sqrt{-\delta} z) < 0. \quad (4.6)$$

Следовательно, каждое из разложений (4.3) имеет по две экспоненциальные добавки (4.5) с $m = 1, 2$, каждая из которых определена на своей полуплоскости (4.6) по z . Согласно теореме 2.1, каждой из четырёх добавок (4.5) соответствует своё семейство экспоненциальных разложений вида (2.4), где $b_0(z)$ определяется формулой (4.3), $\exp \varphi(z)$ определяется формулой (4.5). Эти семейства обозначим $\mathcal{D}_{l,m}$, $l, m = 1, 2$.

Ребра $\Gamma_2^{(1)}$ (рис. 1) соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} \delta z^2 w^2 + \delta z^2 w^3 = 0 \quad (4.7)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 0$. Поэтому ищем решение уравнения (4.7) в виде $w = c_0$. Получаем $w = -1$.

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (3.1) и укороченного решения $w = -1$, образуют векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$, разложение идёт по целым степеням z . Получаем одно степенное разложение:

$$w = b_0(z) = -1 + \frac{2\gamma}{\delta z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{c_{-s}}{z^s}. \quad (4.8)$$

Согласно (2.6) и (2.8),

$$\tilde{h}(z, \zeta) \stackrel{def}{=} z^2(-2(\zeta^2 + \zeta') + \delta) + z(3c_{-1}\zeta^2 - 2\zeta + 5\gamma - 4c_{-1}\delta) + \dots$$

Носитель и многоугольник суммы $\tilde{h}(z, \zeta)$ показаны на рис. 4.

С конусом задачи \mathcal{K}_+ (2.9) пересекается только нормальный конус ребра $H_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $-2z^2\zeta^2 + \delta z^2 = 0$, откуда $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{\delta/2}$, где $m = 1, 2$, т.е. $\varkappa^* = (-1)^m \sqrt{\delta/2}$, $m = 1, 2$, $\hat{h}(1, k\varkappa^*) = \delta(-k^2 + 1) = \mu(k)$. Многочлен $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 2.1 получаем два семейства экспоненциальных разложений (2.4), соответствующих двум значениям \varkappa^* . Степенные разложения для ζ выглядят следующим образом:

$$\varphi'_m(z) = \zeta = (-1)^m \sqrt{\frac{\delta}{2}} - \frac{1}{2z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{a_{-s,m}}{z^s}, \quad \text{где } m = 1, 2. \quad (4.9)$$

Т.е. у степенного разложения (4.8) имеются 2 экспоненциальные добавки (2.3) следующего вида:

$$\exp(\varphi_m(z)) = w_m = Cz^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{(-1)^m \sqrt{\frac{\delta}{2}} z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{-s,m}}{z^s}\right\}, \quad m = 1, 2. \quad (4.10)$$

Область малости экспоненциальной добавки (4.10) при $|z| \rightarrow \infty$ — это

$$(-1)^m \operatorname{Re} \left(\sqrt{\delta} z \right) < 0. \quad (4.11)$$

Следовательно, для каждого значения $m = 1, 2$ имеем по одной экспоненциальной добавке (4.10), определённой в соответствующей полуплоскости (4.11) по z . Согласно теореме 2.1, каждой из добавок (4.10) соответствует свое семейство экспоненциальных разложений вида (2.4), где $b_0(z)$ определяется формулой (4.8), $\exp \varphi(z)$ определяется формулой (4.10). Эти семейства обозначим \mathcal{E}_m , $m = 1, 2$.

Ребра $\Gamma_3^{(1)}$ (рис. 1) соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(z, w) \stackrel{\text{def}}{=} \delta z^2 w^3 + \alpha w^5 = 0 \quad (4.12)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1, 1), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 1$. Поэтому ищем решение уравнения (4.12) в виде $w = c_1 z$. Подставив $w = c_1 z$ в укороченное уравнение (4.12), получаем

$$w_l = (-1)^l \sqrt{-\delta/\alpha} z, \quad l = 1, 2. \quad (4.13)$$

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (3.1) и укороченного решения (4.13), состоит из векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, разложение идёт по целым степеням z . Получаем два степенных разложения:

$$w = b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} z + 2 + (-1)^l \frac{\gamma}{2\sqrt{-\alpha\delta}} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{-s,l}}{z^s}, \quad l = 1, 2. \quad (4.14)$$

Согласно (2.6) и (2.8),

$$\begin{aligned} h(z, \zeta) &\stackrel{\text{def}}{=} -z^4 c_1^2 (\zeta^2 + \zeta' + 2\delta) + \\ &+ c_1 z^3 \left((1 - 2c_0) \zeta^2 + 2c_1 \zeta - 14\delta c_0 + 14\delta + 3\gamma c_1 \right) + \dots \end{aligned}$$

Носитель и многоугольник дифференциальной суммы $h(z, \zeta)$ показаны на рис. 5. С конусом задачи \mathcal{K}_+ (2.9) пересекается только нормальный конус ребра $H_1^{(1)}$. Ему соответствует укороченное уравнение $\hat{h}(z, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} -c_1^2 (\zeta^2 + 2\delta) z^4 = 0$, откуда $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{2\delta}$, где $m = 1, 2$, т.е. $\varkappa^* = (-1)^m \sqrt{2\delta}$, $m = 1, 2$, $\hat{h}(1, k\varkappa^*) = 2\delta c_1^2 (k^2 - 1) = \mu(k)$. Многочлен $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 2.1 получаем четыре семейства экспоненциальных разложений (2.4), соответствующих двум значениям \varkappa^* . Степенные разложения для ζ выглядят следующим образом:

$$\varphi'(z) = \zeta = (-1)^m \sqrt{-2\delta} + \frac{\rho_{l,m}}{z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{a_{s,l,m}}{z^s}. \quad (4.15)$$

Т.е. у степенного разложения (4.14) имеются экспоненциальные добавки (2.3) следующего вида:

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = Cz^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^m \sqrt{-2\delta}z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^s}\}, \quad l, m = 1, 2 \quad (4.16)$$

где $\rho_{l,m} = 1 + (-1)^{l+m+1}2\sqrt{2\alpha} + (-1)^m \frac{3\gamma}{2\sqrt{-2\delta}}$. Область малости экспоненциальной добавки при $|z| \rightarrow \infty$ — это

$$(-1)^m \operatorname{Re}(\sqrt{-\delta}z) < 0. \quad (4.17)$$

При каждом $l = 1, 2$ для каждого значения $m = 1, 2$ имеем по одной экспоненциальной добавке (4.16), определённой в соответствующей полуплоскости (4.17) по z . Согласно теореме 2.1, каждой из добавок соответствует своё семейство сво экспоненциальных разложений вида (2.4), где $b_0(z)$ определяется формулой (4.14), $\exp \varphi(z)$ определяется формулой (4.16). Обозначим это семейство $\mathcal{F}_{l,m}$, $l, m = 1, 2$.

5 Случай $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$

При $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ носитель и многоугольник уравнения (3.1) изображены на рис. 6.

Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ (рис. 6) соответствуют укороченная сумма

$$\tilde{f}_1^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} -\beta - \gamma zw^2 \quad (5.1)$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(1, -1/2), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = -1/2$ Поэтому ищем решение уравнения (5.1) в виде $w = c_{-1/2}z^{-1/2}$. Получаем, что

$$w_l = (-1)^l \sqrt{\beta/\gamma} \sqrt{z}^{-1}, \quad l = 3, 4. \quad (5.2)$$

Поскольку базис решётки, содержащей носители уравнения (3.1) при $\delta = 0$ и укороченного решения (5.2), образуют векторы $(1, 0)$ и $(1/2, 0)$, разложение идёт по полуцелым степеням z . Получаем два степенных разложения:

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{z} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{s,l}}{z^{s/2}}, \quad l = 3, 4. \quad (5.3)$$

Согласно (2.6) и (2.8),

$$h(z, \zeta) = c_{-1/2} \sqrt{z^3} (\zeta^2 + \zeta') + (c_{-1} - c_{-1/2}^2) z \zeta^2 + c_{-1/2} \sqrt{z} (3\zeta/2 - 2\gamma) - 2\beta + \dots$$

Носитель и многоугольник этой суммы показаны на рис. 7. С конусом задачи \mathcal{K}_+ (2.9) пересекается только нормальный конус ребра $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ребру отвечает укороченное уравнение $\sqrt{z^3}c_{-1/2}\zeta^2 - 2\sqrt{z}c_{-1/2}\gamma = 0$, т. е. $\zeta = (-1)^m\sqrt{2\gamma/z}$, $\varkappa_m^* = (-1)^m\sqrt{2\gamma}$, $\hat{h}(1, k\varkappa^*) = 2\gamma(k^2 - 1) = \mu(k)$. Многочлен $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 2.1 получаем четыре семейства экспоненциальных разложений (2.4), соответствующих двум значениям \varkappa^* . Степенные разложения для ζ выглядят следующим образом:

$$\varphi'_{l,m}(z) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\gamma}{z}} + \rho_{l,m} \frac{1}{z} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^{s/2}}.$$

Т. е. у степенного разложения (5.3) имеются 2 экспоненциальные добавки (2.3):

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = Cz^{\rho_{l,m}} \exp\left\{(-1)^m 2\sqrt{2\gamma}z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^{s/2}}\right\}, \quad m = 1, 2, \quad l = 3, 4, \quad (5.4)$$

где $\rho_{m,l} = -\frac{1}{2} + (-1)^{m+l+1} \frac{\sqrt{-2\beta}}{2}$. Область малости экспоненциальной добавки при $|z| \rightarrow \infty$ — это

$$(-1)^m \operatorname{Re}(\sqrt{\gamma z}) < 0. \quad (5.5)$$

Следовательно, для каждого значения $m = 1, 2$ имеем по одной экспоненциальной добавке (5.4), определённой в соответствующей полуплоскости (5.5). По теореме 2.1, каждой из добавок соответствует семейство экспоненциальных разложений вида (2.4), где $b_0(z)$ определяется формулой (5.3), $b_1(z) = 1$, $\exp \varphi(z)$ определяется формулой (5.4). Обозначим это семейство $\mathcal{D}_{l,m}$, $l = 3, 4$, $m = 1, 2$.

Ребру $\tilde{\Gamma}_2^{(1)}$ (рис. 6) соответствует укороченная сумма

$$\tilde{f}_2^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} \gamma z w^2 (w - 1) \quad (5.6)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{\lambda(1, 0), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 0$. Поэтому ищем решение уравнения (5.6) в виде $w = c_0$, получаем, что $w = 1$. Это решение является точным решением пятого уравнения Пенлеве. Сделав в уравнении (3.1) замену $w = 1 + \tilde{w}$, получим уравнение:

$$\begin{aligned} g(z, \tilde{w}) \stackrel{def}{=} & -z^2 \tilde{w} \tilde{w}'' - z^2 \tilde{w}^2 \tilde{w}'' + \frac{3}{2} z^2 \tilde{w} (\tilde{w}')^2 + z^2 (\tilde{w}')^2 - z \tilde{w} \tilde{w}' - z \tilde{w}^2 \tilde{w}' + \\ & + \alpha \tilde{w}^3 (\tilde{w} + 1)^2 + \beta \tilde{w}^3 + \gamma z \tilde{w} (\tilde{w} + 1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Изобразим носитель $\mathbf{S}(g)$ левой части уравнения (5.7), его выпуклую оболочку $\Gamma(g)$ и её рёбра $G_j^{(1)}$ (рис. 8). Мы рассматриваем случай $z \rightarrow \infty$, $\tilde{w} \rightarrow 0$,

значит, конус задачи $\mathcal{K} = \{(p_1, p_2) : p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}$. С конусом задачи пересекается только нормальный конус вершины $G_1^{(0)} = (1, 1)$, ей соответствует алгебраическое укороченное уравнение $\gamma z \tilde{w} = 0$, которое не имеет ненулевых решений $\tilde{w} = \tilde{w}(z)$.

Ребру $\tilde{\Gamma}_3^{(1)}$ соответствуют укороченная сумма

$$\tilde{f}_3^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} \gamma z w^3 + \alpha w^5 \quad (5.8)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{\lambda(1, 1/2), \lambda > 0\}$. Следовательно, $r = 1/2$, Поэтому ищем решение уравнения (5.8) в виде $w = c_{1/2} z^{1/2}$, получаем, что

$$w_l = (-1)^l \sqrt{-\gamma z / \alpha}, l = 3, 4. \quad (5.9)$$

Поскольку базисом решётки, содержащей носители уравнения (3.1) при $\delta = 0$ и укороченного решения (5.9), будут векторы $(0, 1)$ и $(-1/2, 0)$, разложение идёт по полуцелым степеням z . Получаем два степенных разложения:

$$b_{0,l}(z) = (-1)^l \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \sqrt{z} + 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{c_{-s,l}}{z^{s/2}}, \quad l = 3, 4. \quad (5.10)$$

Согласно (2.6) и (2.8),

$$h(z, \zeta) = -c_{1/2}^2 z^3 (\zeta^2 + \zeta') - c_{1/2} \sqrt{z^5} \zeta^2 + c_{1/2}^2 (\zeta/2 - 2\gamma) z^2 - 4\gamma c_{1/2} \sqrt{z^3} + \dots$$

Носитель и многоугольник этой суммы показаны на рис. 9. С конусом задачи \mathcal{K}_+ (2.9) пересекается только нормальный конус ребра $\tilde{H}_1^{(1)}$. Ребру отвечает укороченное уравнение $-c_{1/2}^2 (z\zeta^2 + 2\gamma) z^2 = 0$, т.е. $\zeta = (-1)^m \sqrt{-2\gamma/z}$, $\varkappa_m^* = (-1)^m \sqrt{-2\gamma}$, $\hat{h}(1, k\varkappa^*) = 2\gamma c_{1/2}^2 (k^2 - 1) = \mu(k)$. Многочлен $\mu(k) \neq 0$ для целых $k > 1$. По теореме 2.1 получаем четыре семейства экспоненциальных разложений (2.4), соответствующих двум значениям \varkappa^* . Степенные разложения для ζ выглядят следующим образом:

$$\varphi'_{l,m}(z) = (-1)^m \sqrt{-2\delta} + \rho_{l,m} \frac{1}{z} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{a_{s,l,m}}{z^s}, \quad l = 3, 4, \quad m = 1, 2.$$

У степенного разложения (5.10) имеются 2 экспоненциальные добавки (2.3):

$$\exp(\varphi_{l,m}(z)) = C z^{\rho_{l,m}} \exp\{(-1)^l 2\sqrt{-2\gamma z} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{d_{s,l,m}}{z^{s/2}}\}, \quad l = 3, 4, \quad m = 1, 2, \quad (5.11)$$

где $\rho_{l,m} = \frac{1}{2} + (-1)^{l+m+1} \frac{\sqrt{2\alpha}}{2}$. Область малости экспоненциальной добавки при $|z| \rightarrow \infty$ — это

$$(-1)^m \operatorname{Re} \sqrt{-\gamma z} < 0. \quad (5.12)$$

Следовательно, для каждого значения $m = 1, 2$ имеем по одной экспоненциальной добавке (5.11), определённой в соответствующей полуплоскости (5.12). По теореме 2.1, каждой из добавок соответствует семейство экспоненциальных разложений вида (2.4), где $b_0(z)$ определяется формулой (5.10), $\exp \varphi(z)$ определяется формулой (5.11). Обозначим эти семейства $\mathcal{F}_{l,m}$, $l = 3, 4$, $m = 1, 2$.

6 Случай $\gamma = 0$, $\delta = 0$

Сделаем в уравнении (1.1) замену $z = e^\xi$, $\left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2 = P(w)$, получим уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dP}{dw} = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) P + (w-1)^2 \left(\alpha w + \frac{\beta}{w} \right),$$

которое имеет первый интеграл

$$(w')^2 = (w-1)^2 (2\alpha w^2 + Cw - 2\beta). \quad (6.1)$$

Сделаем замену $y = \frac{1}{w-1}$, умножим обе части уравнения (6.1) на y^2 :

$$(y')^2 = (2\alpha - 2\beta + C)y^2 + (4\alpha + C)y + 2\alpha. \quad (6.2)$$

Рассмотрим общее уравнение

$$(y')^2 = ay^2 + by + c, \quad \text{где } a, b, c = \text{const} \in \mathbb{C}. \quad (6.3)$$

При $a = 0$ оно имеет решение $y = b/4z^2 \pm \sqrt{bC_0 + cz} + C_0$.

При $a \neq 0$, дифференцируя (6.3) по z , получаем уравнение $2y'y'' = 2ayy' + by'$, которое имеет 2 решения: одно $y = \text{const}$ и второе —

$$y = C_+ e^{\sqrt{a}z} + C_- e^{-\sqrt{a}z} - \frac{b}{2a}, \quad \text{где } a \neq 0. \quad (6.4)$$

Выражение (6.4) является решением уравнения (6.3) тогда и только тогда, когда

$$C_+ C_- = \frac{b^2 - 4ac}{16a^2}. \quad (6.5)$$

Итак, уравнение (6.2) имеет решение

$$y = C_+ e^{\sqrt{2\alpha-2\beta+C}\xi} + C_- e^{-\sqrt{2\alpha-2\beta+C}\xi} - \frac{4\alpha + C}{4\alpha - 4\beta + 2C},$$

где $C_+ C_- = \frac{C^2 + 16\alpha\beta}{16(2\alpha - 2\beta + C)^2}$, $C \neq -2\alpha + 2\beta$ и решение $y = (\alpha + \beta)/2\xi^2 \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta)C_0\xi + 4\alpha}$, решение $y = \pm\sqrt{2\alpha}\xi + C$ при $\alpha = \beta$.

Отсюда получаем двухпараметрическое семейство решений уравнения P_5 при $\gamma = \delta = 0$:

$$w = 1 + \left(C_+ z^{\sqrt{2\alpha-2\beta+C}} + C_- z^{-\sqrt{2\alpha-2\beta+C}} - \frac{4\alpha + C}{4\alpha - 4\beta + 2C} \right)^{-1}, \quad C \neq -2\alpha + 2\beta,$$

$$C_+ C_- = \frac{C^2 + 16\alpha\beta}{16(2\alpha - 2\beta + C)^2},$$

и два однопараметрических семейства решений

$$w = 1 + \left((\alpha + \beta)/2 \ln^2 z \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta)C_0 \ln z + 4\alpha} \right)^{-1}.$$

Если дискриминант многочлена в правой части уравнения (6.2) равен нулю, т. е. $C^2 = -16\alpha\beta$, а $C_+ = C_- = 0$, то $w = \pm \sqrt{-\beta/\alpha}$, $\alpha \neq 0$.

Также имеем решение $w = 1 + (\pm \sqrt{2\alpha} \ln z + C)^{-1}$ при $\alpha = \beta$.

$$y = C_+ e^{\sqrt{2\alpha-2\beta+C}\xi} + C_- e^{-\sqrt{2\alpha-2\beta+C}\xi} - \frac{4\alpha + C}{4\alpha - 4\beta + 2C},$$

где $C_+ C_- = \frac{C^2 + 16\alpha\beta}{16(2\alpha - 2\beta + C)^2}$, $C \neq -2\alpha + 2\beta$ и решение $y = (\alpha + \beta)/2\xi^2 \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta)C_0\xi + 4\alpha}$, решение $y = \pm \sqrt{2\alpha}\xi + C$ при $\alpha = \beta$. Откуда получаем двухпараметрическое семейство решений уравнения P_5 при $\gamma = \delta = 0$:

$$w = 1 + \left(C_+ z^{\sqrt{2\alpha-2\beta+C}} + C_- z^{-\sqrt{2\alpha-2\beta+C}} - \frac{4\alpha + C}{4\alpha - 4\beta + 2C} \right)^{-1}$$

и два однопараметрических семейства решений

$$w = 1 + \left((\alpha + \beta)/2 \ln^2 z \pm \sqrt{(2\alpha + 2\beta)C_0 \ln z + 4\alpha} \right)^{-1}.$$

Также имеем решение $w = 1 + (\pm \sqrt{2\alpha} \ln z + C)^{-1}$ при $\alpha = \beta$.

7 Случай $\alpha = 0$

При $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$ носитель и многоугольник уравнения (3.1) изображены на рис. 10. Вычислим экспоненциальные разложения решений уравнения P_5 (3.1) (ранее это сделано в [3]), используя технику, описанную в § 5 [1] и в [2]. Укороченная сумма, соответствующая горизонтальному ребру $G_3^{(1)}$ (отметим, что $q_2 = 3$ для всех точек ребра) носителя уравнения (3.1) это

$$\hat{f}_3^{(1)}(z, w) \stackrel{def}{=} -z^2 w^2 w'' + \frac{3}{2} z^2 w (w')^2 - z w^2 w' + \beta w^3 + \gamma z w^3 + \delta z^2 w^3. \quad (7.1)$$

Сделаем в уравнении (7.1) замену $\zeta = \frac{d \ln w}{dz}$, получим

$$-z^2 \zeta' + \frac{1}{2} z^2 \zeta^2 - z \zeta + \beta + \gamma z + \delta z^2 = 0, \quad (7.2)$$

носитель уравнения (7.2) изображён на рис. 11. Нас интересует только конус задачи, в котором $\{(p_1, p_2) : p_1 + p_2 \geq 0\}$, поэтому рассматриваем только ребро $\Pi_1^{(1)}$ (рис. 11). Укороченное уравнение, соответствующее этому ребру, имеет вид $\hat{g}_1^{(1)}(z, \zeta) \stackrel{def}{=} z^2 \zeta^2 / 2 + \delta z^2 = 0$, из которого $\zeta_m = (-1)^m \sqrt{-2\delta}$, где $m = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{g}_1^{(1)}}{\delta w} &= -2z^2 w w'' - z^2 w^2 \frac{d^2}{dz^2} + 3z^2 \frac{w'^2}{2} + 3z^2 w w' \frac{d}{dz} - 2z w w' - z w^2 \frac{d}{dz} + 3\beta w^2 + \\ &+ 3\gamma z w^2 + 3\delta z^2 w^3 = w^2 \left[-2z^2 (\zeta' + \zeta^2) - z^2 \frac{d^2}{dz^2} + 3z^2 \frac{\zeta^2}{2} + 3z^2 \zeta \frac{d}{dz} - 2z \zeta - z \frac{d}{dz} + \right. \\ &\left. + 3\beta + 3\gamma z + 3\delta z^2 \right] \stackrel{def}{=} w^2 g(z, \zeta, \frac{d}{dz}, \frac{d^2}{dz^2}). \end{aligned}$$

Заменяем $\frac{d^2}{dz^2}$ и $\frac{d}{dz}$ на $k^2 \zeta^2$ и $k\zeta$ соответственно, а ζ — на \varkappa^* . Тогда ведущий член при $z \rightarrow \infty$ в g есть

$$-2z^2 \zeta^2 - z^2 k^2 \zeta^2 + 3z^2 \zeta^2 / 2 + 3z^2 k \zeta^2 + 3\delta z^2 = -z^2 \zeta^2 (k^2 - 3k + 2).$$

Следовательно, для обоих значений $\varkappa^* = \pm \sqrt{-2\delta}$ характеристический многочлен $\mu(\varkappa^*, k) = 2\delta(k^2 - 3k + 2)$. Его корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Определённое в пункте 2 множество $\Sigma = \{3, 2, 1, 0\}$. Поэтому $\Sigma' = \Sigma - 3 = \{0, -1, -2, -3\}$, и $\Sigma'_+ = \{k : k \in \mathbb{Z}, k \leq 0\}$, а $\Sigma'_+ + 1 = \{k : k \in \mathbb{Z}, k \leq 1\}$. Поскольку $k_2 = 2$ не лежит в множестве $\Sigma'_+ + 1$, то по теореме 2.2 решения полного уравнения при $\alpha = 0$ разлагаются в ряды

$$w_m = C \exp(\varphi_m(z)) + b_{0,m}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,m}(z) C^{-k} \exp(-k\varphi(z)), \quad m = 1, 2, \quad (7.3)$$

где $b_{k,m}(z)$ — степенные ряды, соответствующие двум значениям $\gamma^* = (-1)^m \sqrt{-2\delta}$. При $\delta \neq 0$ получаем, что

$$\exp(\varphi_m(z)) = z \frac{(-1)^m \gamma}{\sqrt{-2\delta}} \exp\left\{(-1)^m \sqrt{-2\delta} z + \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,m} z^{-s}\right\}. \quad (7.4)$$

Поскольку ребро $G_3^{(1)}$ — верхнее, то $w \rightarrow \infty$, что происходит в области

$$(-1)^m \operatorname{Re}(\sqrt{-\delta} z) > 0, \quad m = 1, 2. \quad (7.5)$$

В формуле (7.4) параметр δ в показателе степени переменной z стоит в знаменателе, поэтому формула (7.4) не может быть применена при $\delta = 0$. В случае $\delta = 0$ получаем, что

$$\exp(\varphi_m(z)) = \sqrt{z} \exp\{(-1)^m 2\sqrt{-2\gamma z} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,m} z^{-s/2}\}, \quad m = 1, 2 \quad (7.6)$$

в области

$$(-1)^m \operatorname{Re}(\sqrt{-2\gamma z}) > 0. \quad (7.7)$$

Разложения решений для случая $\beta = 0$ получается из разложений решений в случае $\alpha = 0$ при помощи симметрии (3.2). Случай $\alpha = \beta = 0$ не даёт новых решений.

8 Результаты, полученные методами двумерной степенной геометрии

При $z \rightarrow \infty$ получены следующие однопараметрические семейства асимптотических разложений разложений пятого уравнения Пенлеве.

Теорема 8.1 В случае $\alpha\beta\delta \neq 0$ имеются следующие асимптотические разложения решений уравнения P_5 (экспоненциальные разложения вида (2.4)):

1. 4 семейства разложений $\mathcal{D}_{l,m}$, $l, m = 1, 2$, где $b_0(z)$ определяется формулой (4.3), $\varphi(z)$ — формулой (4.4), разложения определены в области (4.6).
2. 2 семейства разложений \mathcal{E}_m , $m = 1, 2$, где $b_0(z)$ определяется формулой (4.8), $\varphi(z)$ — формулой (4.9), разложения определены в области (4.11).
3. 4 семейства разложений $\mathcal{F}_{l,m}$, $l, m = 1, 2$, где $b_0(z)$ определяется формулой (4.14), $\varphi(z)$ — формулой (4.15), разложения определены в области (4.17).

Теорема 8.2 В случае $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ имеются следующие асимптотические разложения решений уравнения P_5 (экспоненциальные разложения вида (2.4)):

1. 4 семейства разложений $\mathcal{D}_{l,m}$, $l = 3, 4$, $m = 1, 2$, где $b_0(z)$ определяется формулой (5.3), $\varphi(z)$ — формулой (5.4), разложения определены в области (5.5).
2. 4 семейства разложений $\mathcal{F}_{l,m}$, $l = 3, 4$, $m = 1, 2$, где $b_0(z)$ определяется формулой (5.10), $\varphi(z)$ — формулой (5.11); определены в области (5.12).

Теорема 8.3 В случае $\alpha = 0$, $\delta \neq 0$ получены два однопараметрических семейства экспоненциальных разложений $\mathcal{G}_{1,2}$ вида (7.3), где $\exp(\varphi(z))$ определяется формулой (7.4); определены в области (7.5).

В случае $\alpha = 0$, $\delta = 0$ получены два однопараметрических семейства экспоненциальных разложений $\mathcal{G}_{3,4}$ вида (7.3), где $\exp(\varphi(z))$ определяется формулой (7.6), разложение определено в областях (7.7).

В случае $\beta = 0$ при $\delta \neq 0$ имеются два семейства экспоненциальных разложений $\mathcal{G}_{5,6}$, а при $\beta = 0$, $\delta = 0$ имеются ещё два семейства экспоненциальных разложений $\mathcal{G}_{7,8}$. Разложения могут быть получены из упомянутых выше разложений при $\alpha = 0$ с помощью симметрии (3.2).

9 Сходимость по Жевре

Пусть V — открытый сектор с вершиной в бесконечности на расширенной комплексной плоскости (или римановой поверхности логарифма). w — голоморфная на V функция и $\hat{w} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathbb{C}[[1/z]]$ — формальный ряд.

Говорят, что w асимптотически приближается рядом \hat{w} на V , если для любого компактного подсектора Y из $V \cup \{\infty\}$ и любого $m \in \mathbb{N}$ существует $M_{Y,m} \in \mathbb{R}$, $M_{Y,m} > 0$:

$$|z^m| |w(z) - \sum_{p=0}^{k-1} a_p z^{-p}| < M_{Y,m}.$$

Если $M_{Y,m} = C(m!)^{1/k} A_Y^m$, то говорят, что w асимптотически приближается по Жевре порядка $1/k$ рядом \hat{w} на V . Обозначаем $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$.

Рассмотрим уравнение

$$G(z, w, \dots, w^{(n)}) = 0, \quad (9.1)$$

где $G(z, W_0, W_1, \dots, W_n)$ — аналитическая функция $n + 2$ переменных и $\hat{w} \in \mathbb{C}[[1/z]]$ формальное решение уравнения (9.1).

Теорема 9.1. (Рамис, Сибуйя, 1989) [8]: Пусть $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]_{1/k}$ является решением уравнения (9.1). Тогда существует $k' > 0$: для любого открытого сектора V с вершиной в бесконечности, имеющим размыкание $< \inf(\pi/k, \pi/k')$ и с достаточно малым радиусом существует функция w , являющаяся решением ОДУ (9.1), асимптотически приближаемая рядом \hat{w} в смысле Жевре порядка $1/k$.

Теорема 9.2. (Перрон, Мальгранж, Рамис, Сибуйя в разных случаях) [8]: Пусть $\hat{w} \in \mathbb{C}[[z]]$ — формальное решение уравнения (9.1), тогда \hat{w} сходится или имеет тип Жевре точного порядка s , где $s \in \{0, \frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_N}\}$, а $0 < k_1 < \dots < k_N < +\infty$ — все строго положительные тангенсы угла наклона сторон многоугольника Ньютона $N(G, \hat{w})$ к оси абсцисс.

Опишем процесс построения многоугольника Ньютона в частном случае $\frac{\partial G}{\partial W_n}(z, \hat{w}, \dots, \hat{w}^{(n)})$. Рассмотрим оператор, равный значению первой вариации G на формальном решении \hat{w} . Он равен $\sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=m_k}^{\infty} a_j z^{-j} \right) \frac{d^k}{dz^k}$ — сопоставим ему набор точек плоскости $(k, m_k + k)$, $k = 0, \dots, n$, соединим точки ломаной, получим искомую границу многоугольника Ньютона.

Утверждение 9.1. *Ряды (4.8), (4.14) и регулярная часть ряда (4.3) имеют тип Жевре 1.*

Доказательство. Применим теорему 9.2, взяв в качестве уравнения G уравнение (3.1), а в качестве \hat{w} — последовательно взяв ряды $b_0(z)$ (4.3), (4.8), (4.14) (в случае, если главная часть является конечной, легко сводим ситуацию к ситуации с нулевой главной частью заменой, говорим о типе Жевре регулярной части ряда). Искомый оператор — оператор \mathcal{M} из (2.8).

Получаем ломаные $\{(0, -4), (1, -2), (2, -2)\}$, $\{(0, -2), (1, 0), (2, 0)\}$ и $\{(0, -1), (1, 1), (2, 1)\}$ соответственно. Строим выпуклую оболочку этих точек и ветрикальных лучей, выходящий из крайней левой и крайней правой точки ломаной. Легко видеть, что единственный положительный тангенс угла наклона равен 1. Значит, рассматриваемые степенные ряды имеют тип Жевре 1, что полностью соответствует результатам, полученным в теореме 8.1 предыдущего параграфа: ряды приближают решение уравнения Пенлеве с точностью до ряда $C \sum_{l=0}^{\infty} l! A^l |z|^{-l}$, где $A \in \mathbb{R}_+$, $C \in \mathbb{C}$ — постоянные. Более того, по теореме 9.1, для любого открытого сектора с вершиной в бесконечности и раствором, меньшим $\pi/k' < \pi$, и с достаточно малым радиусом существует функция w , являющаяся решением ОДУ (1.1), асимптотически приближаемая рядом (4.3), имеющая полюс, (в других секторах голоморфные функции, приближаемые рядами (4.8), (4.14)) по Жевре порядка 1.

Часть II

Трёхмерная степенная геометрия

10 Методы трёхмерной степенной геометрии [3]

Каждому дифференциальному моному $a(z, w)$ в дифференциальной сумме $f(z, w)$ (2.1) ставим в соответствие его *трехмерный показатель степени* $\mathbf{Q}(a(z, w)) = (q_1, q_2, q_3)$ по следующим правилам:

$$\mathbf{Q}(cz^r w^s) = (r, s, 0); \quad \mathbf{Q}\left(\frac{d^l w}{dz^l}\right) = (0, 1, l);$$

$$\mathbf{Q}(a(z, w)b(z, w)) = \mathbf{Q}(a(z, w)) + \mathbf{Q}(b(z, w)).$$

Множество трёхмерных показателей дифференциальных мономов в дифференциальной сумме $f(z, w)$ называется *трёхмерным носителем дифференциальной суммы* $f(z, w)$ и обозначается $\tilde{\mathbf{S}}(f)$. Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ трёхмерного носителя $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ называется *многогранником дифференциальной суммы* $f(z, w)$, граница $\partial\Gamma(f)$ многогранника $\Gamma(f)$ состоит из вершин $\Gamma_j^{(0)}$, ребер $\Gamma_j^{(1)}$ и двумерных граней $\Gamma_j^{(2)}$. Они называются *обобщенными гранями* $\Gamma_j^{(d)}$: верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\check{f}_j^{(d)}(z, w) = \sum_{p \in I} a_p(z, w), \quad \text{где } I = \{p : \mathbf{Q}(a_p) \in \tilde{\mathbf{S}}(f) \cap \Gamma_j^{(d)}\}.$$

Ищем асимптотики решений уравнения $f(z, w) = 0$ вида $w = z^a \varphi(z^b)$, где a и $b = \text{const} \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Если $\varphi(u)$ — комплексно-периодическая функция, будем называть асимптотику *степенно-периодической*; если $\varphi(u)$ — эллиптическая функция, будем называть асимптотику *степенно-эллиптической*.

Теорема 10.1 Пусть грань $\Gamma^{(2)}$ многогранника $\Gamma(f)$ имеет внешнюю нормаль $\mathbf{N} = (n_1, n_2, n_3)$ с $n_1 = 1$, $n_1 + n_3 > 0$. Тогда степенное преобразование

$$w = z^{\sigma_1} v, \quad u = z^{\sigma_2} \quad (10.1)$$

с $\sigma_1 = n_2$, $\sigma_2 = n_1 + n_3$ преобразует укороченную сумму $\check{f}^{(2)}(z, w)$ суммы $f(z, w)$ в укороченную сумму $\check{f}^{*(2)}(u, v) = u^q g(v)$ суммы $f^*(u, v) = f(z, w)$, соответствующую грани $\Gamma^{*(2)}$ многогранника $\Gamma(f^*)$ с внешней нормалью $\tilde{\mathbf{N}} = (1, 0, 0)$. При этом $\check{f}^{*(2)}(u, v)$ равно результату подстановки $\check{f}^{(2)}(z, w)$

$$\sigma_2^l u^{(\sigma_1 + l(\sigma_2 - 1))/\sigma_2} d^l v / du^l \quad (10.2)$$

вместо $d^l w / dz^l$.

Лемма 1. При степенном преобразовании (10.1) точка носителя с координатами $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ переходит в множество точек

$$\left(\frac{q_1 + \sigma_1 q_2 + (\sigma_2 - 1) q_3}{\sigma_2}, q_2, q_3 \right) - l(1, 0, -1), \quad l = 0, 1, \dots, q_3. \quad (10.3)$$

Доказательство. Сопоставим точке \mathbf{Q} точку $\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда} \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 + C \\ \tilde{q}_2 \\ C \end{pmatrix},$$

где C — произвольная постоянная. При преобразовании (10.1) точки \tilde{Q} двумерного носителя преобразуются линейно:

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}'_1 \\ \tilde{q}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_2 & \sigma_1/\sigma_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что точки $Q = (q_1 - q_3, q_2)$ перешли в точки $Q' = (1/\sigma_2(q_1 - q_3) + q_2\sigma_1/\sigma_2, q_2)$, значит, точки \mathbf{Q} перешли в точки $\mathbf{Q}' = (1/\sigma_2(q_1 - q_3) + q_2\sigma_1/\sigma_2 + C, q_2, C)$, где C — произвольно. Непосредственным дифференцированием можно проверить, что $C = q_3 - l$, где $l = 0, 1, \dots, q_3$ (напомним, что в описанной трёхмерной конструкции $q_3 \geq 0$). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. По условию теоремы, грань $\Gamma^{(2)}$ имеет внешнюю нормаль $\mathbf{N} = (1, \sigma_1, \sigma_2 - 1)$, $\sigma_2 > 0$, т. е. лежит в плоскости

$$q_1 + \sigma_1 q_2 + (\sigma_2 - 1)q_3 + c = 0, \quad (10.4)$$

и для точек \mathbf{Q}_Γ грани $\Gamma^{(2)}$ скалярное произведение $(\mathbf{Q}_\Gamma, \mathbf{N}) = -c$, а для точек \mathbf{Q} многогранника $\Gamma(f)$, не принадлежащих грани $\Gamma^{(2)}$, $(\mathbf{Q}, \mathbf{N}) < -c$.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{Q}}_\Gamma$ точки, в которые после преобразования (10.1) перешли точки \mathbf{Q}_Γ грани $\Gamma^{(2)}$ (их координаты определены формулой (10.3)), а точки, в которые перешли точки \mathbf{Q} , не принадлежащие грани $\Gamma^{(2)}$, через $\tilde{\mathbf{Q}}$. Итак, только точки $\tilde{\mathbf{Q}}_\Gamma^*$, отвечающие мономам вида (10.2), входящим в преобразованное уравнение $\check{f}^{*(2)}(u, v) = 0$, лежат в плоскости $\tilde{q}_1 + c/\sigma_2 = 0$, нормаль к которой $\tilde{\mathbf{N}} = (1, 0, 0)$ (откуда следует, что $\check{f}^{*(2)}(u, v) = u^{-c/\sigma_2}g(v)$). Для остальных точек $\tilde{\mathbf{Q}}_\Gamma$ скалярное произведение $(\tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{Q}}_\Gamma) = -c/\sigma_2 - l < -c/\sigma_2$, в силу (10.3)) и того, что для них $l = 1, \dots, q_3$. Вычислим скалярное произведение для точек $\tilde{\mathbf{Q}}$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{Q}}) &= \frac{q_1 + \sigma_1 q_2 + (\sigma_2 - 1)q_3}{\sigma_2} - l < \frac{(\mathbf{N}, \mathbf{Q}_\Gamma)}{\sigma_2} - l \leq -\frac{c}{\sigma_2} = (\tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{Q}}_\Gamma^*), \\ & l = 0, 1, \dots, q_3. \end{aligned}$$

Проведённая выкладка завершает доказательство теоремы.

Отметим, что преобразование (10.1) индуцирует следующие формулы для производных:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \sigma_2 z^{\sigma_1 + \sigma_2 - 1} \frac{dv}{du} + \sigma_1 z^{\sigma_1 - 1} v, \\ \frac{d^2 w}{dz^2} &= \sigma_2^2 z^{2\sigma_2 - 2 + \sigma_1} \frac{d^2 v}{du^2} + \sigma_2 (2\sigma_1 + \sigma_2 - 1) z^{\sigma_2 + \sigma_1 - 2} \frac{dv}{du} + \sigma_1 (\sigma_1 - 1) z^{\sigma_1 - 2} v. \end{aligned}$$

Замечание 10.1. В случае $\mathbf{N} = (1, 0, 0)$, если $w(z)$ — решение уравнения $g(w) = 0$ со свойством

$$0 < \varepsilon < |w(z)|, |w'(z)|, \dots, |w^{(n)}(z)| < \varepsilon^{-1},$$

где ε — малое положительное число, то $w(z)$ может быть асимптотикой решений полного уравнения при $z \rightarrow \infty$. Далее называет такие w возможными асимптотиками решений.

Замечание 10.2. Первая версия трёхмерной степенной геометрии изложена в [5]. Там же имеется доказательство соответствующего аналога теоремы 10.1 для ОДУ второго порядка.

11 Случай $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$

В случае $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\tilde{\mathbf{S}}$ пятого уравнения Пенлеве (3.1) состоит из точек:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= (2, 2, 2), \quad \mathbf{Q}_2 = (2, 3, 2), \quad \mathbf{Q}_3 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{Q}_4 = (1, 3, 1), \\ \mathbf{Q}_5 &= (0, 0, 0), \quad \mathbf{Q}_6 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{Q}_7 = (0, 2, 0), \\ \mathbf{Q}_8 &= (0, 3, 0), \quad \mathbf{Q}_9 = (0, 4, 0), \quad \mathbf{Q}_{10} = (0, 5, 0), \\ \mathbf{Q}_{11} &= (1, 2, 0), \quad \mathbf{Q}_{12} = (1, 3, 0), \quad \mathbf{Q}_{13} = (2, 2, 0), \quad \mathbf{Q}_{14} = (2, 3, 0). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Выпуклая оболочка носителя уравнения (3.1) — это пятигранник $\Gamma(f)$ (рис. 12) с вершинами $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}$. Его двумерные грани суть

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}), \quad \Gamma_2^{(2)} = \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{13}), \\ \Gamma_3^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{14}), \quad \Gamma_4^{(2)} = \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}), \\ \Gamma_5^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}). \end{aligned}$$

Согласно теореме 10.1, нас интересуют только те двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$ многогранника $\Gamma(f)$, координаты внешних нормалей $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ к которым удовлетворяют условиям $n_1 > 0$ и $n_1 + n_3 > 0$, т. е. только грани

1. $\Gamma_1^{(2)}$, лежащая в плоскости $q_1 - 2 = 0$ с внешней нормалью $N_1 = (1, 0, 0)$;
2. $\Gamma_2^{(2)}$, лежащая в плоскости $q_1 - q_2 = 0$ с внешней нормалью $N_2 = (1, -1, 0)$;
3. $\Gamma_3^{(2)}$, лежащая в плоскости $q_1 + q_2 - 5 = 0$ с внешней нормалью $N_3 = (1, 1, 0)$.

Внешние нормали $N_4 = (-1, 0, 1)$ и $N_5 = (0, 0, -1)$ к граням $\Gamma_4^{(4)}$ и $\Gamma_5^{(4)}$ условиям теоремы 10.1 не удовлетворяют.

Первое семейство степенно-эллиптических асимптотик

Грани $\Gamma_1^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$-z^2 w(w-1)w'' + z^2 \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2} \right) (w')^2 + \delta z^2 w^2 (w+1) = 0. \quad (11.2)$$

Разделим выражение (11.2) на z^2 , сделаем замену $(w')^2 = P(w)$:

$$-w(w-1) \frac{dP}{dw} + (3w-1)P + 2\delta w^2 (w+1) = 0,$$

откуда

$$(w')^2 = -2\delta w (C(w-1)^2 + w). \quad (11.3)$$

Дискриминант кубического многочлена $\sum_{k=0}^3 a_k w^k$ вычисляется по формуле

$$\Delta = a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 27a_0^2 a_3^2,$$

поэтому дискриминант многочлена $w(C(w-1)^2 + w)$ равен $\Delta = C^2(1-4C)$. Он равен нулю только при $C = 0$ или $C = 1/4$. В этих случаях многочлен $P(w)$ имеет менее 3 различных корней. В остальных случаях у рассматриваемого многочлена существуют три различных комплексных корня. Если $C \neq 0$ и $C \neq 1/4$, то решениями уравнения (11.3) будут эллиптические функции $\varphi(z)$ [6].

Рассмотрим уравнение

$$(w')^2 = a_3 w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0. \quad (11.4)$$

Предположим, что дискриминант кубического многочлена, стоящего в правой части уравнения (11.4), не равен нулю. После подстановки

$$w = \frac{4}{a_3} y - \frac{a_2}{3a_1}$$

уравнение (11.4) приводится к нормальной форме Вейерштрасса

$$(y')^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad (11.5)$$

где $g_2 = \frac{a_2^2 - 3a_1 a_3}{12}$, $g_3 = \frac{-2a_2^3 + 9a_1 a_2 a_3 - 27a_0 a_3^2}{432}$.

Напомним [6], что функция Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$ удовлетворяет уравнению (11.5) с $y = \wp$, где g_2 и g_3 постоянны.

Из (11.3), (11.5) получаем, что при $\Delta \neq 0$ уравнение (11.2) имеет решение

$$\mathcal{E}ll_1 : w = \frac{-2}{\delta C} \wp \left(z + C_0; \frac{\delta^2}{3} (C^2 - 4C + 1), \frac{\delta^3}{54} (C^2 + 8C - 2) (2C - 1) \right) + \frac{2C - 1}{3C}, \quad (11.6)$$

где $C \neq 0$, $C \neq 1/4$. Это двухпараметрическое (по C и C_0) семейство возможных асимптотик решений уравнения P_5 .

При $C = 0$ уравнение (11.3) имеет решение $w = C_0 e^{\pm \sqrt{-2\delta} z}$, а при $C = 1/4$ имеет решения $w = \operatorname{tg}^2 \left(\sqrt{-\delta/8} z + C_0 \right)$.

Первое семейство степенно-периодических асимптотик

Грани $\Gamma_2^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\check{f}_2^{(2)}(z, w) \stackrel{def}{=} z^2 w w'' - \frac{z^2}{2} (w')^2 + \delta z^2 w^2 - \beta = 0. \quad (11.7)$$

По теореме 10.1, сделаем в уравнении (11.7) замену $w = v/z$, после которой w' переходит в v'/z , а w'' — в v''/z :

$$\check{f}(z, v) \stackrel{def}{=} v v'' - \frac{(v')^2}{2} + \delta v^2 - \beta = 0, \quad g(v) = \check{f}.$$

Решим уравнение $g(v) = 0$. После замены $(v')^2 = P$ получим линейное уравнение $vdP/dv - P + 2\delta v^2 - 2\beta = 0$, которое имеет решение

$$P = (v')^2 = -2\delta v^2 - 2Cv - 2\beta. \quad (11.8)$$

По формулам (6.3), (6.4) и (6.5) уравнение (11.8) имеет решение

$$\mathcal{T}_1 : v = C_+ e^{\sqrt{-2\delta}z} + C_- e^{-\sqrt{-2\delta}z} - \frac{C}{2\delta}, \quad \text{где } C_+ C_- = \frac{C^2}{16\delta^2} - \frac{\beta}{4\delta}. \quad (11.9)$$

Решение (11.9) является периодическим с периодом $T = \sqrt{2\pi}/\sqrt{\delta}$.

Второе семейство степенно-периодических асимптотик

Грани $\Gamma_3^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение:

$$\check{f}_3^{(2)}(z, w) \stackrel{def}{=} -z^2 w^2 w'' + \frac{3z^2}{2} (w')^2 + \delta z^2 w^3 + \alpha w^5 = 0. \quad (11.10)$$

По теореме 10.1, в уравнении (11.10) делаем замену $w = vz$, после чего w' переходит в zv' , w'' переходит в zv'' , и получаем

$$\check{f}(z, v) \stackrel{def}{=} -v v'' + \frac{3(v')^2}{2} + \delta v^3 + \alpha v^5 = 0, \quad g(v) = \check{f}.$$

В уравнении $g(v) = 0$ сделаем замену $(v')^2 = P$:

$$-v^2 \frac{dP}{dv} + 3vP + 2\delta v^3 + 2\alpha v^4 = 0,$$

откуда

$$P = (v')^2 = v^2(2\alpha v^2 + Cv - 2\delta). \quad (11.11)$$

Подставив $\tilde{v} = 1/v$ в уравнение (11.11), получим:

$$(\tilde{v}')^2 = 2\alpha - 2C\tilde{v} - 2\delta\tilde{v}^2. \quad (11.12)$$

Согласно формулам (6.3), (6.4) и (6.5), уравнение (11.12) имеет решение

$$\mathcal{T}_2 : \tilde{v} = C_+ e^{\sqrt{-2\delta}z} + C_- e^{-\sqrt{-2\delta}z} - \frac{C}{2\delta}, \quad \text{где } C_+ C_- = \frac{C^2}{16\delta^2} + \frac{\alpha}{4\delta}. \quad (11.13)$$

Выражение (11.13) периодическое с периодом $T = \sqrt{2}\pi/\sqrt{\delta}$.

Отметим, что из асимптотик (11.9), найденных для грани $\Gamma_2^{(2)}$, применив преобразование (3.2), можно получить степенно-периодические асимптотики, соответствующие грани $\Gamma_3^{(2)}$.

Замечание 11.1. В [7] показано, что для уравнения P_5 потенциальные степенно-периодические асимптотики $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ не продолжают в регулярные (не имеющие логарифмического ветвления) асимптотические разложения решений, а степенно-эллиптические асимптотики могут продолжаться в регулярные разложения.

12 Случай $\alpha\beta\gamma \neq 0, \delta = 0$

Носитель $\tilde{\mathbf{S}}$ пятого уравнения Пенлеве (3.1) в случае $\alpha\beta\gamma \neq 0, \delta = 0$ состоит из точек $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{12}$ (см. (11.1)). Выпуклая оболочка носителя уравнения (3.1) при $\delta = 0$ – пятигранник $\tilde{\Gamma}(f)$ (рис. 13) с вершинами $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}$. Его двумерные грани суть

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_1^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}), \quad \tilde{\Gamma}_2^{(2)} = \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{11}), \\ \tilde{\Gamma}_3^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{12}), \quad \tilde{\Gamma}_4^{(2)} = \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}), \\ \tilde{\Gamma}_5^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}).\end{aligned}$$

При замене (3.2) грань $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$ переходит в себя, а грани $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$ меняются местами.

Условиям теоремы 10.1 удовлетворяют грани:

1. $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$, лежащая в плоскости $2q_1 - q_3 - 2 = 0$ с внешней нормалью $\tilde{\mathbf{N}}_1 = (1, 0, -1/2)$;
2. $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$, лежащая в плоскости $2q_1 - q_2 - q_3 = 0$ с внешней нормалью $\tilde{\mathbf{N}}_2 = (1, -1/2, -1/2)$,
3. $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$, лежащая в плоскости $2q_1 + q_2 + q_3 - 5 = 0$ с внешней нормалью $\tilde{\mathbf{N}}_3 = (1, 1/2, 1/2)$.

Внешние нормали к граням $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_5^{(2)}$ с нормальями $\tilde{\mathbf{N}}_4 = (-1, 0, 1)$ и $\tilde{\mathbf{N}}_5 = (0, 0, -1)$ не удовлетворяют условиям теоремы.

Второе семейство степенно-эллиптических асимптотик

Грани $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\check{f}_1^{(2)}(z, w) \stackrel{def}{=} -z^2 w(w-1)w'' + z^2 \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2} \right) (w')^2 + \gamma z w^2 (w-1) = 0. \quad (12.1)$$

По теореме 10.1, сделаем в уравнении (12.1) замену $u = \sqrt{z}$, тогда w' и w'' перейдут в $\frac{1}{2u} \frac{dw}{du}$ и $\frac{1}{4u^2} \frac{d^2w}{du^2}$:

$$\check{f}(u, v) = -w(w-1) \frac{u^2}{4} \frac{d^2w}{du^2} + \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right) \frac{u^2}{4} \left(\frac{dw}{du}\right)^2 + \gamma u^2 w^2 (w-1); \quad \check{f}(u, v) = 0.$$

Пусть $g(v) = 4u^{-2} \check{f}(u, v)$. Приступим к решению уравнения $g(v) = 0$. После замены $\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = P(w)$ получаем линейное уравнение

$$\frac{1}{2}w(w-1) \frac{dP}{dw} = \frac{3w-1}{2}P + 4\gamma w^2(w-1),$$

имеющее решение

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = -8\gamma w(w-1)(1+C(w-1)) \stackrel{def}{=} P(w). \quad (12.2)$$

Дискриминант многочлена $w(w-1)(1+C(w-1))$ равен $\Delta = (C-1)^2$. Если $\Delta \neq 0$, т. е. $C \neq 1$, и $C \neq 0$ решения $w = \varphi(u)$ уравнения являются эллиптическими функциями. Если $C = 0$, $P(w)$ — многочлен второй степени.

При $\Delta \neq 0$ и $C \neq 0$, согласно (11.4), (11.5), уравнение (12.2) имеет решение

$$\mathcal{E}ll_2 : w = -\frac{1}{2\gamma C} \wp(\sqrt{z} + C_0; \frac{16\gamma^2}{3}(C^2 - C + 1), \frac{32\gamma^3}{27}(C-1)(4C-1)(5C-2)) + \frac{2C-1}{3C}, \quad (12.3)$$

где $C \neq 1$, $C \neq 0$. Это двухпараметрическое (по C и C_0) семейство возможных асимптотик решений уравнения P_5 .

При $C = 0$ уравнение (12.2) имеет решение

$$w = C_0 e^{\sqrt{-8\gamma}u} + (16C_0)^{-1} e^{-\sqrt{-8\gamma}u} + 1/2,$$

а при $C = 1$ — решение $w = \left(C_0 e^{\sqrt{8\gamma}u} + (16C_0)^{-1} e^{-\sqrt{8\gamma}u} + 1/2\right)^{-1}$.

Третье семейство степенно-периодических асимптотик

Грани $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$z^2 w w'' - \frac{z^2}{2} (w')^2 - \gamma z w^2 - \beta = 0. \quad (12.4)$$

Сделаем в уравнении (12.4) замену (10.1) с $\sigma_1 = -1/2$, $\sigma_2 = 1/2$, w' и w'' перейдут в мономы (10.2):

$$\check{f}(u, v) \stackrel{def}{=} \frac{1}{4}v \frac{d^2v}{du^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \gamma v^2 - \beta = 0, \quad g(v) = 4\check{f}. \quad (12.5)$$

Решим уравнение $g(v) = 0$. После замены $(v')^2 = P$ получим линейное уравнение

$$v \frac{dP}{dv} - P - 8\gamma v^2 - 8\beta = 0,$$

имеющее решение $(v')^2 = 8(\gamma v^2 + Cv - \beta) \stackrel{def}{=} P$, откуда

$$\mathcal{T}_3 : v = C_+ e^{\sqrt{8\gamma}z} + C_- e^{-\sqrt{8\gamma}z} - \frac{C}{2\gamma}, \text{ где } C_+ C_- = \frac{\beta}{4\gamma} + \frac{C^2}{16\gamma^2}. \quad (12.6)$$

Четвёртое семейство степенно-периодических асимптотик

Грани $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$-z^2 w^2 w'' + \frac{3z^2 w}{2} (w')^2 + \gamma z w^3 + \alpha w^5 = 0. \quad (12.7)$$

Сделаем в уравнении (12.4) замену (10.1) с $\sigma_1 = -1/2$, $\sigma_2 = 1/2$, w' и w'' перейдут в мономы (10.2):

$$\check{f}(u, v) \stackrel{def}{=} -\frac{1}{4} v^2 \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{3}{8} v \left(\frac{dv}{du} \right)^2 + \gamma v^3 + \alpha v^5 = 0, \quad g(v) = 8\check{f}. \quad (12.8)$$

Подставляя $v = 1/\tilde{v}$, $\alpha = -\tilde{\beta}$, $\gamma = -\tilde{\gamma}$ в уравнение (12.8), получаем решённое выше уравнение (12.5) (замена индуцирована преобразованием (3.2), переводящим грань $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$ в $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$). Итак, уравнение (12.8) имеет решение

$$\mathcal{T}_4 : v = \left(C_+ e^{\sqrt{-8\tilde{\gamma}}u} + C_- e^{-\sqrt{-8\tilde{\gamma}}u} + \frac{C}{2\tilde{\gamma}} \right)^{-1}, \text{ где } C_+ C_- = \frac{C^2}{16\tilde{\gamma}^2} + \frac{\alpha}{4\tilde{\gamma}}. \quad (12.9)$$

Замечание 12.1. В [7] показано, что для уравнения P_5 потенциальные степенно-периодические асимптотики \mathcal{T}_3 , \mathcal{T}_4 не продолжаются в регулярные (не имеющие логарифмического ветвления) асимптотические разложения решений, а степенно-эллиптические асимптотики могут продолжаться в регулярные разложения.

13 Случай $\alpha = 0$, $\beta\gamma\delta \neq 0$

Носитель пятого уравнения Пенлеве (3.1) в случае $\beta\gamma\delta \neq 0$, $\alpha = 0$ состоит из точек $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_8$, $\mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{14}$ (см. (11.1)). Выпуклая оболочка носителя уравнения (3.1) — это многогранник $\Gamma(f)$ с вершинами \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{Q}_5 , \mathbf{Q}_8 , \mathbf{Q}_{13} , \mathbf{Q}_{14} . Его двумерные грани суть

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}), & \Gamma_2^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{13}), \\ \Gamma_3^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_8, \mathbf{Q}_{14}), & \Gamma_4^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_8), \\ \Gamma_5^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_8, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}). \end{aligned}$$

Условиям теоремы 10.1 удовлетворяют грани:

1. $\Gamma_1^{(2)}$, лежащая в плоскости $q_1 - 2 = 0$ с внешней нормалью $N_1 = (1, 0, 0)$. Грани $\Gamma_1^{(2)}$ отвечает укороченное уравнение (11.2). Оно было проинтегрировано ранее: мы выяснили, что данной грани соответствует либо семейство степенно-эллиптических асимптотик $\mathcal{E}ll_1$ (11.6), либо асимптотики, выражающиеся при помощи тангенса или экспоненты;

2. $\Gamma_2^{(2)}$, лежащая в плоскости $q_1 - q_2 = 0$ с внешней нормалью $N_2 = (1, -1, 0)$. Аналогично получаем, что грани $\Gamma_2^{(2)}$ соответствует потенциальная степенно-периодическая асимптотика \mathcal{T}_1 (11.9), которая, согласно замечанию 11.1, не является асимптотикой решений P_5 .

Внешние нормали к граням $\Gamma_3^{(2)}$, $\Gamma_4^{(4)}$ и $\Gamma_5^{(4)}$ ($N_3 = (0, 1, 0)$, $N_4 = (-1, 0, 1)$ и $N_5 = (0, 0, -1)$ соответственно) не удовлетворяют условиям теоремы 10.1.

14 Случай $\alpha = 0$, $\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$

Носитель уравнения (3.1) в случае $\alpha = 0$, $\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ — это точки $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_8$, \mathbf{Q}_{11} , \mathbf{Q}_{12} (см. (11.1)). Выпуклая оболочка носителя уравнения (3.1) при $\alpha = 0$, $\delta = 0$ — пятигранник $\tilde{\Gamma}(f)$ с вершинами \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{Q}_5 , \mathbf{Q}_8 , \mathbf{Q}_{11} , \mathbf{Q}_{12} . Его двумерные грани суть

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_1^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}), & \tilde{\Gamma}_2^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{11}), \\ \tilde{\Gamma}_3^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_8, \mathbf{Q}_{12}), & \tilde{\Gamma}_4^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_8), \\ \tilde{\Gamma}_5^{(2)} &= \text{conv}(\mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_8, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}).\end{aligned}$$

Условиям теоремы 10.1 удовлетворяют следующие грани:

1. $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$, лежащая в плоскости с уравнением $2q_1 - q_3 - 2 = 0$ с внешней нормалью $\tilde{N}_1 = (1, 0, -1/2)$,

2. $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$, лежащая в плоскости с уравнением $2q_1 - q_2 - q_3 = 0$ с внешней нормалью $\tilde{N}_2 = (1, -1/2, -1/2)$.

Внешние нормали $\tilde{N}_3 = (0, 1, 0)$, $\tilde{N}_4 = (-1, 0, 1)$ и $\tilde{N}_5 = (0, 0, -1)$ к граням $\tilde{\Gamma}_3^{(2)}$, $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_5^{(2)}$ не удовлетворяют условиям теоремы 10.1.

Укороченные уравнения, отвечающие граням $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$, не изменятся по сравнению со случаем $\alpha \neq 0$: им соответствуют степенно-эллиптическое семейство асимптотик $\mathcal{E}ll_2$ (12.3), и периодическое по v семейство возможных асимптотик \mathcal{T}_3 (12.6); потенциальные асимптотики, согласно замечанию 12.1, не являются асимптотиками решений P_5 .

Асимптотики в случае $\beta = 0$ можно получить из асимптотик при $\alpha = 0$ преобразованием (3.2): при $\delta \neq 0$ имеется семейство возможных асимптотик $\mathcal{E}ll_1$ (11.6), а при $\delta = 0$ — семейство $\mathcal{E}ll_2$ (12.3).

15 Результаты, полученные методами трёхмерной степенной геометрии

Теорема 15.1 *Возможные асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве при $z \rightarrow \infty$ образуют следующие 2 двухпараметрических семейства:*

1. *семейство степенно-эллиптических асимптотик $\mathcal{E}ll_1$, определяемое формулой (11.6); существует при $\delta \neq 0$;*
2. *семейство степенно-эллиптических асимптотик $\mathcal{E}ll_2$, определяемое формулой (12.3); существует при $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$.*

При $\delta = \gamma = 0$ пятое уравнение Пенлеве (3.1) решено в пункте 6, и его решения не являются ни периодическими, ни эллиптическими.

Список литературы

- [1] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004, т. 59, № 3, с. 31-80.
- [2] А. Д. Брюно. Экспоненциальные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН, 2012, т. 443, № 5. С. 539–544
- [3] A. D. Bruno. Space Power Geometry for one ODE and $P_1 - P_4, P_6$, //Painlevé Equations and Related Topics (Eds. A. D. Bruno, A. V. Batkhin), De Gruyter Proceedings in Mathematics, Berlin/Boston, 2012.
- [4] A. D. Bruno, A. V. Parusnikova. Elliptic and periodic asymptotic forms of solutions to P_5 // Painlevé Equations and Related Topics (Eds. A. D. Bruno, A. V. Batkhin), De Gruyter, Berlin/Boston, 2012.
- [5] А. Д. Брюно, И. В. Горючкина. Эллиптические асимптотики решений уравнений Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2009. №6.
- [6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические функции. Функции Ламе и Матъе. М.: Наука, 1967.
- [7] A. D. Bruno. Regular asymptotic expansions of solutions to one ODE and $P_1 - P_5$, Painlevé Equations and Related Topics // (Eds. A. D. Bruno, A. V. Batkhin), De Gruyter Proceedings in Mathematics, Berlin/Boston, 2012.
- [8] Ж. П. Рамис. Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2002.

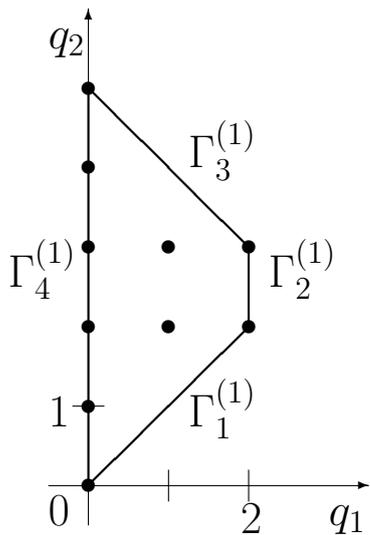


Рис. 1

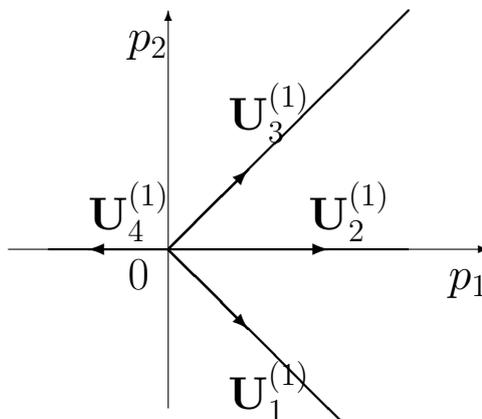


Рис. 2

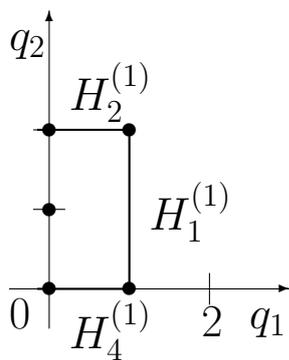


Рис. 3

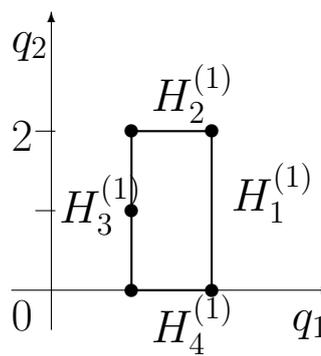


Рис. 4

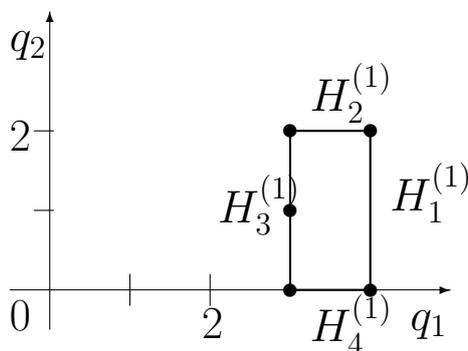


Рис. 5

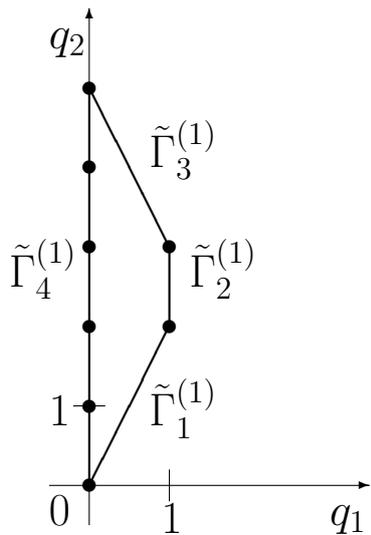


Рис. 6

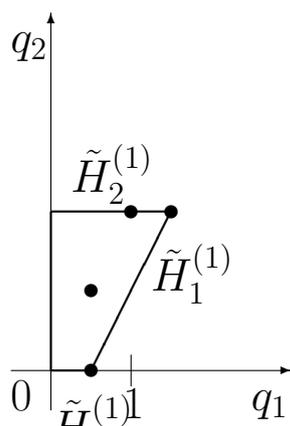


Рис. 7

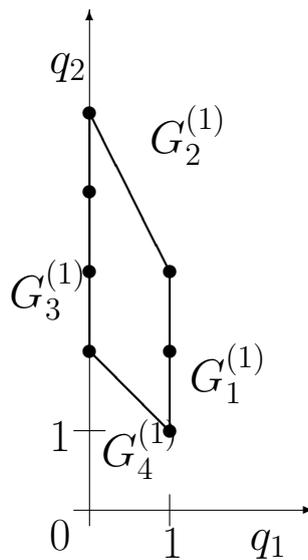


Рис. 8

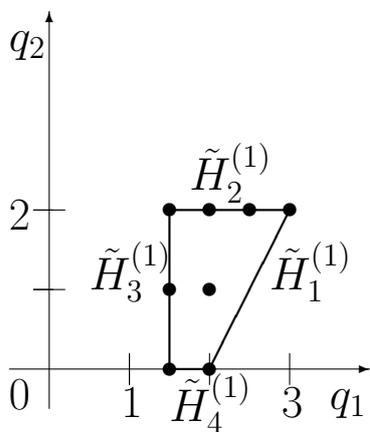


Рис. 9

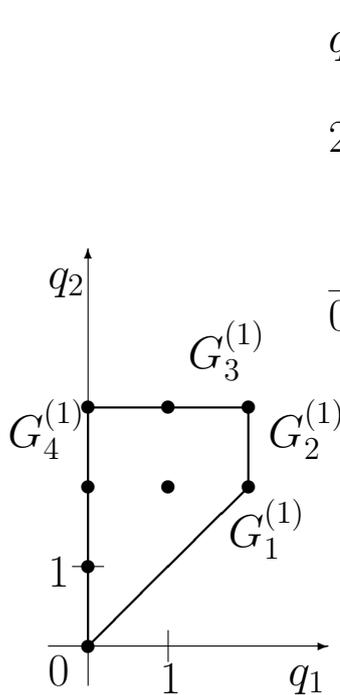


Рис. 10

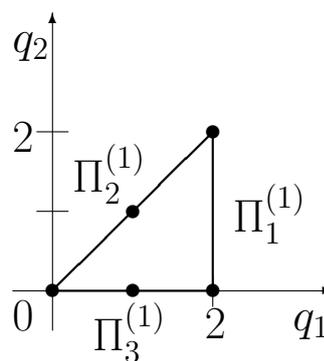


Рис. 11

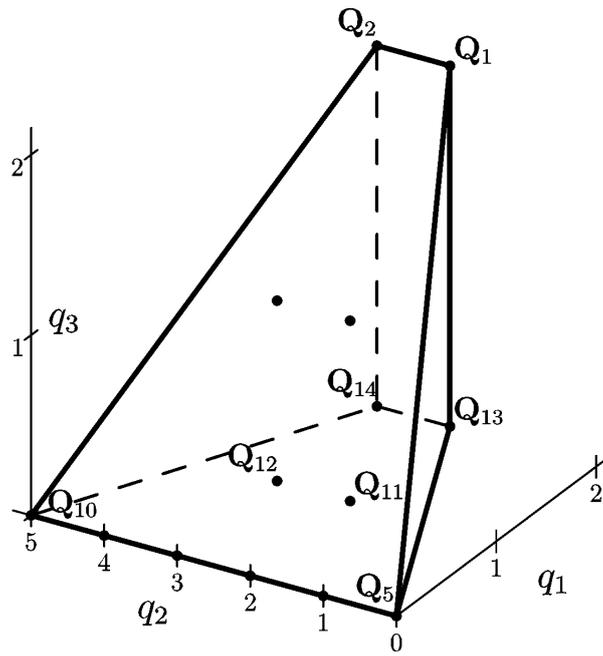


Рис. 12

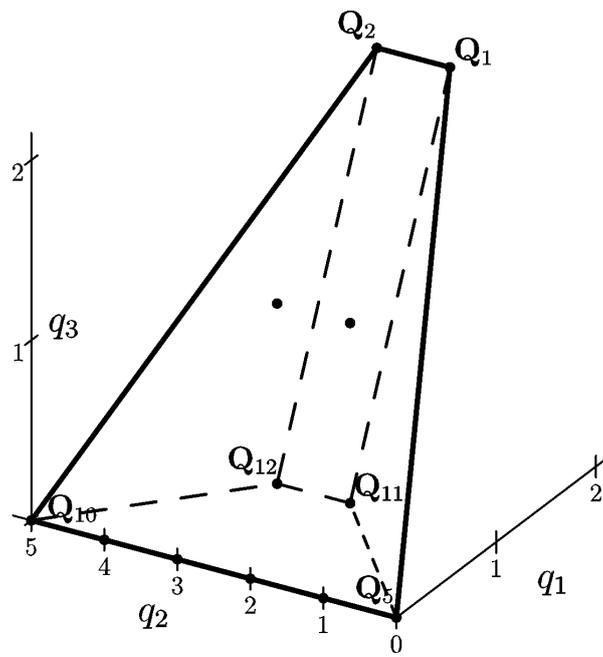


Рис. 13