ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 75 за 2012 г.

Ильин А.А., Рыков Ю.Г.

Об одной модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одной модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 75. 9 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-75**

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им.М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков

Об одной модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающей при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

Москва, 2012

УДК.517.9

А.А.Ильин, Ю.Г.Рыков
Email: ilyin@keldysh.ru, Yu-Rykov@yandex.ru

Об одной модельной системе с малым параметром при старшей производной по времени, возникающей при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений

АННОТАЦИЯ

На модельном примере нелинейной гиперболической системы с малым параметром при старшей производной по времени показывается, что ее динамика при больших значения времени аппроксимируется в смысле глобальных аттракторов динамикой предельного параболической системы. Близость же индивидуальных траекторий существенным образом зависит от их спектров Фурье. Полученные результаты отражают возможные явления, возникающие при анализе квазигазодинамических систем уравнений.

Стр. 9, библ. назв. 6

A.A.Ilyin, Yu.G.Rykov

ABSTRACT

We study a model nonlinear hyperbolic system with small parameter as a coefficient of the second-order time derivative. We show that its long time dynamics is approximated in terms of global attractors by the dynamics of the limiting parabolic system. The proximity of the individual trajectories essentially depends on their Fourier spectrum. The obtained results might be useful for the explanation of certain effects arising in the analysis of the quasi-gasdynamics systems.

Содержание

1 Введение **3**

2 Аттракторы сингулярно возмущенных систем **3**

3 О поведении траекторий на конечном интервале **5**

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-12045 офим).

1 Введение

Данная работа является продолжением работы [1], которая была мотивирована появлением новых модификаций квазигидродинамических (КГД) систем уравнений [2], [3]. Основной особенностью этих новых модификаций является присутствие в системах уравнений вторых производных по времени с малым параметром.

Как и уравнения Эйлера и Навье–Стокса, КГД системы выводятся из уравнений кинетической теории. Описанная в [2], [3] модификация фактически гиперболизует систему уравнений Навье–Стокса, в этих же работах можно найти подробное описание вопросов, связанных с КГД системами уравнений. Предлагаемая работа обобщает результаты [1] на системы уравнений. Здесь же отметим, что рассмотрение гиперболизированных уравнений Навье–Стокса даже в несжимаемом случае уже представляет значительные сложности [4], [5].

2 Аттракторы сингулярно возмущенных систем

В этом разделе рассматривается пример сингулярно возмущенной гиперболической системы, для которой предельная параболическая система имеет глобальный аттрактор, в произвольно малой окрестности которого содержатся аттракторы исходной сингулярно возмущенной системы. При этом близости индивидуальных траекторий на бесконечном интервале времени в общем случае, конечно, нет.

Сначала напомним основные использующиеся ниже понятия. Пусть эволюционная система дифференциальных уравнений с частными производными

$$\dot{\vec{u}} = \vec{F}(\vec{u}), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \in H \tag{1}$$

корректно разрешима в гильбертовом пространстве H, то есть определена полугруппа разрешающих операторов

$$S_t : H \to H, \quad S_t\vec{u}_0 = \vec{u}(t),$$

где $\vec{u}(t)$ — решение уравнения (1) в момент времени t. Ограниченное множество $\mathcal{A} \in H$ называется глобальным аттрактором S_t, если

1. $\mathcal{A} \Subset H$ (компактность);
2. $S_t\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (строгая инвариантность);
3. $\mathrm{dist}_{t\to\infty}(S_tB, \mathcal{A}) \to 0$ $\forall$ ограниченного B (притяжение),

где

$$\mathrm{dist}(X, Y) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \|x - y\|.$$

Рассмотрим гиперболическую систему с малым параметром при старшей производной по времени

$$\begin{aligned} \varepsilon\partial_t^2\vec{u} + \gamma\partial_t\vec{u} &= \nu\Delta\vec{u} - f(\vec{u}) - g(x), \\ \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \varepsilon &> 0, \quad \gamma > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $\gamma > 0$ — фиксировано, а ε — малый параметр. Далее $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_n\}$ и

$$\Delta\vec{u} := \{\Delta u_1, \dots, \Delta u_n\}.$$

Условия на нелинейность таковы (условие на рост и условие диссипативности):

$$\begin{aligned} &|f'(\vec{u})| \le C(1 + |\vec{u}|)^2, \\ &f(\vec{u}) = \nabla_u F(\vec{u}), \\ &F(\vec{u}) \ge -(\lambda_1 - \eta)\vec{u}^2 - C \quad \forall\vec{u} \in \mathbb{R}^k,\ \eta > 0, \\ &F(\vec{u}) \le Cf(\vec{u}) \cdot \vec{u} + C_1 + (\lambda_1 - \eta)\vec{u}^2/2, \end{aligned}$$

где λ_1 — первое собственное значение оператора $-\Delta$ с условием Дирихле. Кроме того, $g \in H^1(\Omega)$, где $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева.

Система (2) при $\varepsilon = 0$ переходит в параболическую систему

$$\begin{aligned} \gamma\partial_t\vec{u} &= \nu\Delta\vec{u} - f(\vec{u}) - g(x), \\ \vec{u}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Фазовым пространством для системы (2) является пространство пар $(\vec{u}, p) = (\vec{u}, \partial_t\vec{u}) \in E_1 = (H^2 \cap H_0^1) \times H_0^1$, а для системы (3) — пространство H_0^1. Кроме того, нам понадобится шкала

$$E_s = H^{s+1} \times H^s, \qquad H^s = (-\Delta)^{-s/2}L_2(\Omega), \tag{4}$$

где оператор $-\Delta$ берется с однородным условием Дирихле.

Система (3) имеет единственное решение в фазовом пространстве H_0^1 и обладает в нем глобальным аттрактором $\mathcal{A}_0$. Из свойств сглаживания вытекает, что аттрактор $\mathcal{A}_0$ ограничен в H^3. Для его решений также образуем пару

$$(\vec{u}, p) = (\vec{u}, (1/\gamma)(\nu\Delta\vec{u} - f(\vec{u}) - g(x))),$$

состоящую из полных траекторий $(\vec{u}, \partial_t\vec{u})$, где $\vec{u} \in \mathcal{A}_0$. Для всех $\vec{u} \in \mathcal{A}_0$ множество всех таких пар обозначим через $\mathcal{A}(0)$. Так как аттрактор $\vec{u} \in \mathcal{A}_0$ ограничен в H^3, то множество пар $\mathcal{A}(0)$ ограничено в следующем смысле

$$\|\vec{u}\|_3^2 + \|\partial_t\vec{u}\|_1^2 \le M_2.$$

Система (2) при $\varepsilon > 0$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}(\varepsilon)$, который равномерно по $\varepsilon > 0$ ограничен в E_1:

$$\|(\vec{u}, p)\|_{E_1} \le M,$$

где M не зависит от ε.

Справедлив следующий результат о близости глобальных аттракторов гиперболической системы с малым параметром при старшей производной по времени (2) и предельной параболической системы (3), который можно доказать аналогично случаю одного уравнения, разобранному в [6].

Теорема 2.1. *Аттракторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$, соответствующие (2), полунепрерывно сверху зависят от ε при $\varepsilon \to 0$ и в $E_{1-\delta}$, $\delta > 0$ справедливо*

$$\operatorname{dist}_{E_{1-\delta}}(\mathcal{A}(\varepsilon), \mathcal{A}(0)) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{5}$$

где E_s определено в (4).

Замечание 2.1. Предел (5) означает, что все аттракторы $\mathcal{A}(\varepsilon)$ лежат при $\varepsilon \to 0$ в произвольно малой окрестности аттрактора предельного уравнения (3):

$$\forall \mu > 0 \quad \exists \varepsilon_0(\mu): \quad \mathcal{A}(\varepsilon) \subset \mathcal{O}_\mu(\mathcal{A}(0)) \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon_0(\mu).$$

3 О поведении траекторий на конечном интервале

Теорема 2.1 говорит об интегральной близости (в терминах глобальных аттракторов) динамики сингулярно возмущенной и предельной системы уравнений при больших значениях времени. В этой теореме отсутствует информация о близости индивидуальных решений.

Аналогично [1] в этом разделе мы рассмотрим вопрос о близости индивидуальных траекторий. Как и в [1], рассмотрим для простоты одномерную периодическую задачу, в которой начальное условие для "скоростей" разумно положить равным 0:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\partial_t^2\vec{u} + \partial_t\vec{u} + A\vec{u}_x = \nu\vec{u}_{xx}, \\ &\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \partial_t\vec{u}(0) = 0, \quad x \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\vec{u} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\varepsilon := \varepsilon E$, где E — единичная $n \times n$-матрица, A — некоторая $n \times n$-матрица, и ν — положительно определенная матрица размера $n \times n$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\int_0^{2\pi} \vec{u}(t, x)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Будем использовать ряды Фурье, и представим $\vec{u}(x, t)$ в виде

$$\vec{u}(x, t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} \vec{u}_k(t)e^{ikx}, \quad \text{где} \quad \vec{u}_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{u}(t, x)e^{-ikx}dx,$$

где $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и нулевая мода отсутствует в силу (2). Однородные пространства Соболева определяются стандартным образом

$$\|\vec{u}\|^2_{\dot{H}^s} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_0} |k|^{2s}|\vec{u}_k|^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Мы хотим сравнить решения системы (1) с решениями предельной системы (с $\varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} &\partial_t\vec{u} + A\vec{u}_x = \nu\vec{u}_{xx}, \\ &\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad x \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{3}$$

Для решений системы (1) имеем

$$\begin{aligned} &\varepsilon\ddot{\vec{u}}_k + \dot{\vec{u}}_k + iAk\vec{u}_k = -\nu k^2\vec{u}_k, \\ &\vec{u}_k(0) = \vec{u}_0^k, \quad \dot{\vec{u}}_k(0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим

$$B_0 = ikA + k^2\nu.$$

(Напомним, что ν — положительная $n \times n$-матрица.) Пусть λ_{0l} есть собственные значения матрицы B_0, а $\vec{r}_{0l}$ — правые собственные векторы, $l = 1, \ldots, n$.

Тогда характеристическое уравнение для (4) запишется в виде

$$\det(\varepsilon\lambda^2 E + \lambda E + B_0) = 0. \tag{5}$$

Будем использовать асимптотическое разложение по ε для того, чтобы найти собственные числа

$$\lambda = \frac{\lambda_{-1}}{\varepsilon} + \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Подставляя в (5), получаем

$$\det\left(\left(\frac{\lambda_{-1}}{\varepsilon}(\lambda_{-1}+1) + \lambda_0(2\lambda_{-1}+1) + O(\varepsilon)\right)E + B_0\right) = 0.$$

Значит, $\lambda_{-1} = 0$ или -1, а оставшееся выражение является собственным числом для B_0. Таким образом, имеем два случая

$$\begin{aligned} \lambda_{1l} &= -\lambda_{0l} + O(\varepsilon), \\ \lambda_{2l} &= -\frac{1}{\varepsilon} + \lambda_{0l} + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{6}$$

Решения системы (1) записываются в виде

$$\vec{u}_k = \sum_l c_{l1}\vec{r}_{kl}^{(1)} e^{\lambda_{1l}t} + \sum_l c_{l2}\vec{r}_{kl}^{(2)} e^{\lambda_{2l}t},$$

где $\vec{r}_{kl}^{(1)}$ и $\vec{r}_{kl}^{(2)}$ — собственные векторы для соответствующих собственных чисел. При этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sum_l c_{l1}\vec{r}_{kl}^{(1)} + \sum_l c_{l1}\vec{r}_{kl}^{(2)} &= \vec{u}_k(0), \\ \sum_l c_{l1}\lambda_{1l}\vec{r}_{kl}^{(1)} + \sum_l c_{l1}\lambda_{2l}\vec{r}_{kl}^{(2)} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

причем

$$\vec{r}_{kl}^{(1)} = \vec{r}_{kl}^{(0)} + O(\varepsilon), \qquad \vec{r}_{kl}^{(2)} = \vec{r}_{kl}^{(0)} + O(\varepsilon).$$

Теорема 3.1. *Пусть T произвольно и фиксировано. Пусть выполнено $\dot{\vec{u}}(0) = 0$, матрица B_0 обладает полным набором собственных векторов и*

$$\vec{u}_0(x) = \sum_{|k|\le k_0=\mathrm{const}} \vec{u}_k(0)e^{ik\dot{x}}.$$

Тогда решения систем (1) и (3) равномерно близки на отрезке $[0,T]$ в соболевской норме $\dot{H}^s$:

$$\|\vec{u}(t) - \bar{\vec{u}}(t)\|_{\dot{H}^s} \le C(T, k_0, s)\cdot\varepsilon.$$

Доказательство. В условиях теоремы справедливы соотношения (7), поэтому

$$\sum_l (c_{l1}+c_{l2})\vec{r}_{kl}^{(0)} = \vec{u}_k(0)+O(\varepsilon),$$
$$\sum_l (c_{l1}\lambda_{1l}+c_{l2}\lambda_{2l})\vec{r}_{kl}^{(0)} = O(\varepsilon).$$

Отсюда, вследствие полноты базиса собственных векторов, для любого l имеем

$$\begin{aligned} &c_{l1}+c_{l2}=u_k^0,\\ &\lambda_{1l}c_{l1}+\lambda_{2l}c_{l2}=0, \end{aligned} \tag{8}$$

где u_k^0 — коэффициент разложения начального вектора по собственным векторам $\vec{r}_{kl}^{(0)}$. Отсюда вытекает, что с точностью до $O(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} c_{l1}&=\frac{\lambda_{2l}u_k^0}{\lambda_{2l}-\lambda_{1l}},\\ c_{l2}&=\frac{\lambda_{1l}u_k^0}{\lambda_{1l}-\lambda_{2l}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Тогда для решений системы (1) получаем

$$\vec{u}_k(t)=\sum_l \left(c_{l1}e^{-\lambda_{0l}t+O(\varepsilon t)}+c_{l2}e^{-t/\varepsilon+\lambda_{ol}t+O(\varepsilon t)}\right)\vec{r}_{kl}^{(0)}+O(\varepsilon),$$

причем

$$c_{l1}=(1+O(\varepsilon))u_k^0, \qquad c_{l2}=u_k^0\cdot O(\varepsilon).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Замечание 3.1. Отметим, что если количество мод в решении не ограничено, то аналогично [1] можно будет так выбрать номер моды в зависимости от ε, чтобы добиться расхождения решений на величину $O(1)$ за сколь угодно малое время.

Список литературы

[1] Ильин А.А., Рыков Ю.Г. Об одном модельном уравнении с малым параметром при старшей производной по времени, возникающем при анализе некоторых квазигазодинамических систем уравнений. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша, 2012, №12, 9с. http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-12

[2] Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-ого порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **48**:3 (2008), 445–472.

[3] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва, Научный мир, 2007.

[4] Raske R., Saal J. Hyperbolic Navier–Stokes equations I: local well-posedness. *Evolution equations and control theory* **1**:1 (2012), 195–215.

[5] Raske R., Saal J. Hyperbolic Navier–Stokes equations II: global existence of small solutions. *Evolution equations and control theory* **1**:1 (2012), 217–234.

[6] Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. Москва, Наука, 1989.